Vincent Preiß
12.05.15

Seminar: Lie-Algebren und ihre Darstellungen

Vortrag 4: Nilpotenz, Auflösbarkeit, Rad L und der Satz von Engel

1. Nilpotenz und Auflösbarkeit

1.1 Definition:

1) Eine Lie-Algebra heißt <u>auflösbar</u>, wenn ihre derivierte Reihe:

$$L^{(0)} = L,\ L^{(1)} = [LL],\ L^{(2)} = [L^{(1)} L^{(1)}], \dots, L^{(i)} = [L^{(i-1)} L^{(i-1)}]$$

ab einem bestimmten $L^{(n)}$ den Wert 0 annimmt.

2) Eine Lie-Algebra heißt <u>nilpotent</u>, wenn ihre absteigende Zentralreihe:

$$L^0 = L,\ L^1 = [LL],\ L^2 = [LL^1], \dots, L^i = [LL^{i-1}]$$

ab einem bestimmten L^n den Wert 0 annimmt.

1.2 Lemma: Die Elemente der derivierten Reihe und der absteigenden Zentralreihe von L sind wiederum Ideale von L.

1.3 Beweis: I.A.: $n=0$, $L^0 = L^{(0)} = L$ ist Ideal von L, da $[L,L] \subset L$, wegen der Abgeschlossenheit unter dem Kommutator.

I.V. Seien zwei feste Elemente der Reihen L^n und $L^{(n)}$ Ideale von L.

I.S.: $n \longrightarrow n+1$: Zz: $\forall l \in L$ gilt: $[L^{(n+1)}, l] \in L^{(n+1)}$ und $[L^{n+1}, l] \in L^{n+1}$

Seien $x,y \in L^{(n)}$, $r \in L$, $s \in L^n$. Dann gilt: $[[x,y],l] \overset{\text{Jacobi}}{=} \underbrace{[x, \underbrace{[y,l]}_{\in L^{(n)}}]}_{\in L^{(n+1)}} + \underbrace{[y, \underbrace{[l,x]}_{\in L^{(n)}}]}_{\in L^{(n+1)}}$

und $[[r,s],l] = \underbrace{[r, \underbrace{[s,l]}_{\in L^n}]}_{\in L^{n+1}} + \underbrace{[s, \underbrace{[l,r]}_{\in L^n}]}_{\in L^{n+1}}$

$\square$

1.4. Beispiele (Auflösbarkeit)

1) Alle abelschen Lie-Algebren sind auflösbar, da abelsch $\Leftrightarrow [x,y]=0\ \forall x,y \in L$. Also ist $L^{(1)} = [L,L] = 0$.

2) Alle einfachen Lie-Algebren sind nicht-auflösbar, da einfache Algebren außer 0 und L keine Ideale besitzen und $[LL] \neq 0$ ist. Also ist $L^{(n)} = [LL] \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

3) $L = t(n,\mathbb{F})$ = Algebra der oberen Dreiecksmatrizen ist auflösbar.

Die Basis besteht aus Elementarmatrizen e_{ij} mit $i \leq j$. Also ist die Dimension $1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Wir können die derivierte Reihe explizit mithilfe der Kommutatoren der Basiselemente berechnen.

Erinnerung: $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}\cdot e_{il} - \delta_{li}\cdot e_{kj}$

Es wird klar, dass die Elemente der Hauptdiagonalen verschwinden, da $[e_{ii}, e_{il}] = e_{il}$ für $i<l$. Folglich ist $n(n,\mathbb{F}) \subset [LL]$.

Da $t(n,\mathbb{F}) = n(n,\mathbb{F}) + d(n,\mathbb{F})$ und $d(n,\mathbb{F})$ abelsch ist, können wir schlussfolgern, dass $[LL] = n(n,\mathbb{F})$ ist.

Innerhalb von $n(n,\mathbb{F})$ haben wir ein intuitives Gefühl für das Level l einer Elementarmatrix e_{ij}, nämlich $l(e_{ij}) = j-i$. Anschaulich gibt dies die "Entfernung" zur Hauptdiagonalen an.

Da wir uns in $n(n,\mathbb{F})$ befinden, können wir für zwei Elementarmatrizen e_{ij} und e_{kl} annehmen, dass $i<j$ und $k<l$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir zudem annehmen, dass $i \neq l$ ist.

Dann ist $[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il}$, wenn $j=k$ ist und 0 wenn nicht.

Wie wir sehen ist e_{il} der Kommutator von zwei Matrizen, deren Level zusammenaddiert das von e_{il} ergeben:

$$l(e_{ij}) + l(e_{kl}) = (j-i) + (l-k) \overset{j=k}{=} l-i = l(e_{il})$$

Im Folgenden können wir für $n \in n(n,\mathbb{F})$: $l(n) := \min(l(e_{ij}))$ der Elementarmatrizen definieren. Folglich besteht

$n(n,\mathbb{F}) = L^{(1)}$ aus Matrizen vom Level ≥ 1

$L^{(2)}$ " " " " ≥ 2

$L^{(3)}$ " " " " ≥ 4

$\vdots$

$L^{(i)}$ " " " " $\geq 2^{i-1}$ $(\forall i \in \mathbb{N})$

Demnach ist $L^{(i)} = 0$, wenn $2^{i-1} > n-1$ ist.

1.5 Beispiele: (Nilpotenz)

1) Jede abelsche Algebra ist nilpotent, da $L^1 = [LL] = 0$.
2) Offensichtlich ist $L^{(i)} \subset L^i$, also sind alle nilpotenten Algebren auflösbar. Das Gegenteil ist allerdings nicht der Fall:

   Gegenbeispiel: $t(n,\mathbb{F})$

   Wie gezeigt ist $t(n,\mathbb{F})$ auflösbar. Die zuvor angestellte Überlegung zu Levels zeigt jedoch, dass für $t \in t(n,\mathbb{F})$ und $n \in n(n,\mathbb{F})$ mit $l(t) = 0$ und $l(n) = 1$: $l[t,n] = 1$ ist. Also ist $[t,n] \in n(n,\mathbb{F})$. D.h. $L^1 = n(n,\mathbb{F})$, $L^2 = [LL^1] = L^1, \ldots,$ $L^i = [LL^{i-1}] = L^1 \neq 0$. Folglich ist $t(n,\mathbb{F})$ nicht nilpotent.
3) $M = n(n,\mathbb{F})$ hingegen ist nilpotent mit $m_1 \in M^1$ vom Level ≥ 2, $m_2 \in M^2$ vom Level ≥ 3, .. $m_i \in M^i$ vom Level $\geq i+1$.

   Also $M^i = 0$, wenn $i+1 > n-1$

1.6 Propositionen:

a) Wenn L auflösbar ist, dann sind auch alle Unteralgebren und homomorphen Bilder von L auflösbar.

b) Wenn I ein auflösbares Ideal ist, sodass L/I auflösbar ist, dann ist auch L an sich auflösbar.

c) Wenn I und J auflösbare Ideale von L sind, dann ist auch $I+J$ auflösbar.

d) Wenn L nilpotent ist, sind auch alle Unteralgebren und homomorphen Bilder von L nilpotent.

e) Wenn $L/Z(L)$ nilpotent ist, dann auch L.

f) Wenn L nilpotent ist und nicht 0, dann ist $Z(L) \neq 0$.

1.7 Beweis:

zu a) Aus der Definition ist klar, wenn K Unteralgebra von L ist, so ist $K^{(i)} \subset L^{(i)}$

Wenn $\phi: L \to M$ ein Epimorphismus ist, dann ist $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $i = 0$: $\phi(L) = M$ klar.

Induktionsvoraussetzung: Für ein festes i gilt: $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$

Induktionsschritt: $i \to i+1$:

$$\phi(L^{(i+1)}) = \phi([L^{(i)} L^{(i)}]) = [\phi(L^{(i)}) \phi(L^{(i)})] \overset{I.V.}{=} [M^{(i)} M^{(i)}] = M^{(i+1)}.$$

zu b) Sei $(L/I)^{(n)} = 0$. Nach a) folgt für den kanonischen Homomorphismus $\pi: L \to L/I$: $\pi(L^{(n)}) = 0$, also ist $L^{(n)} \subset I = \ker(\pi)$. Wenn $I^{(m)} = 0$, dann ist $(L^{(n)})^{(m)} = 0$. Also $L^{(n+m)} = 0$.

zu c) Laut Proposition in Kapitel 2.2 existiert ein Isomorphismus zwischen $(I+J)/J$ und $I/(I \cap J)$. Als homomorphes Bild von I ist die rechte Seite auflösbar, also auch die linke. Anwendung von b) auf $(I+J)/J$ zeigt, dass dann $I+J$ auflösbar ist.

zu d) Aus der Definition ist klar, wenn K Unteralgebra von L ist, so ist $K^i \subset L^i$

Wenn $\phi: L \to M$ ein Epimorphismus ist, dann ist $\phi(L^i) = M^i$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $i = 0$: $\phi(L) = M$ klar.

Induktionsvoraussetzung: Für ein festes i gilt: $\phi(L^i) = M^i$

Induktionsschritt: $i \to i+1$:

$$\phi(L^{i+1}) = \phi([L L^i]) = [\phi(L) \phi(L^i)] \overset{I.V.}{=} [M M^i] = M^{i+1}$$

zu e) Sei $L^n \subset Z(L)$, dann ist $L^{n+1} = [L L^n] \subset [L Z(L)] = 0$.

zu f) Das letzte Glied der absteigenden Zentralreihe, das ungleich 0 ist, ist zentral und folglich Teilmenge von $Z(L)$ $\square$

1.8 Satz / Definition

Jede Lie-Algebra hat ein maximales auflösbares Ideal.
Dieses heißt Radikal von L oder kurz Rad L. Wenn $\text{Rad } L = 0$ ist, heißt L halbeinfach.

1.9 Beweis: Sei L eine beliebige Lie-Algebra und S das maximale auflösbare Ideal. Für ein weiteres auflösbares Ideal I von L, ist entweder $I \subset S$ oder $S = S + I$ wegen der Maximalität (nach c) das maximale auflösbare Ideal.

1.10 Beispiele:

1) Jede einfache Algebra ist halbeinfach, da L keine Ideale außer L und 0 hat und L nicht auflösbar ist.
2) $L = 0$ ist halbeinfach.
3) $L/_{\text{Rad } L}$ ist halbeinfach, da
   Fall 1: L lösbar $\Leftrightarrow L = \text{Rad } L \Leftrightarrow L/_{\text{Rad } L} = 0 \Rightarrow$ L ist halbeinfach.
   Fall 2: L nicht lösbar $\overset{\text{Prop b)}}{\Longrightarrow} L/_{\text{Rad } L}$ nicht lösbar $\underset{\substack{\text{keine}\\ \text{nicht}\\ \text{trivialen}\\ \text{Ideale}}}{\Longrightarrow}$ L ist halbeinfach.

1.11 Bemerkung:

1) Man kann Auflösbarkeit auch wie folgt definieren:
   Für L existiert eine Kette von Unteralgebren
   $L = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_k = 0$, sodass L_{i+1} Ideal von L_i ist und jeder Quotient $L_i/_{L_{i+1}}$ abelsch ist $(\forall i \in \{0, \dots, k\})$
2) Man kann Nilpotenz auch wie folgt definieren:
   $\text{ad } x_1 \text{ ad } x_2 \text{ ad } x_3 \dots \text{ ad } x_n (y) = 0 \quad \forall x_i, y \in L.$
   Dies impliziert $(\text{ad } x)^n = 0 \quad \forall x \in L$
   Wenn ad x ein nilpotenter Endomorphismus ist, so nennen wir x ad-nilpotent.
   Offensichtlich gilt: Wenn L nilpotent ist, dann sind alle Elemente von L ad-nilpotent.

1.12 Beweis: zu 1)

"$\Rightarrow$" Aus 1.11 1) folgt 1.1:

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $i=k$ ist $L_i = L_k = 0$ auflösbar

Induktionsvoraussetzung: L_i ist auflösbar für ein festes i.

Induktionsschritt: $i \longrightarrow i-1$

L_i ist *1 Ideal von L_{i-1} und L_{i-1}/L_i ist abelsch, d.h auflösbar.

Laut Proposition b) ist dann auch L_{i-1} auflösbar.

"$\Leftarrow$" Aus 1.1 folgt 1.11 1)

Die derivierte Reihe ist wie bereits gezeigt eine Folge von Unteralgebren, nämlich Idealen. Also ist $L_{i+1} = L^{(i+1)}$ Ideal von $L_i = L^{(i)}$. $L^{(i)}/L^{(i+1)}$ ist abelsch, da $L^{(i)}$ ausgedrückt werden kann durch $L^{(i)} = L^{(i+1)} \oplus L'$, wobei L' abelsch ist.

Also ist $L^{(i)}/L^{(i+1)} = L^{(i+1)} \oplus L' / L^{(i+1)} = L'/L^{(i+1)}$ abelsch $\square$

zu 2) Die Aussage ist klar, da nach Definition $\mathrm{ad}\, x(y) = [xy]$ ist. Also $\mathrm{ad}\, x_1\, \mathrm{ad}\, x_2 \dots \mathrm{ad}\, x_n(y) = [x_1[x_2 \dots [x_n y]\dots] = 0$

Da $x_i, y \in L$ beliebig sind, entspricht dies $[L L^n] = L^{n+1} = 0$.

*1 auflösbares - nach Induktionsvoraussetzung -

2. Satz von Engel:

2.1 Satz: „Satz von Engel"

Wenn alle Elemente einer Lie-Algebra ad-nilpotent sind, so ist L nilpotent (Beweis folgt später)

2.2 Lemma: Sei $x \in gl(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus. Dann ist auch $ad\,x$ nilpotent.

2.3 Beweis: Es seien λ_x und p_x zwei Endomorphismen von $End(V)$ mit $\lambda_x(y) = xy$ und $p_x(y) = yx$. Da x nilpotent ist, sind auch λ_x und p_x nilpotent. Außerdem kommutieren p_x und λ_x offensichtlich. Es gilt: In beliebigen Ringen (hier $End(End\,V)$) ist die Summe oder Differenz von zwei kommutativen nilpotenten Elementen wieder nilpotent, also ist $ad\,x = \lambda_x - p_x$ nilpotent $\square$

2.4 Bemerkung:

1) Oft sind Matrizen in $gl(n,F)$ ad-nilpotent ohne nilpotent zu sein (Beispiel: Einheitsmatrix). Man sollte unterscheiden zwischen Matrizen des "Types" $\mathfrak{d}(n,F)$ und $\mathfrak{n}(n,F)$.
2) Eine nilpotente lineare Abbildung hat stets mindestens einen Eigenvektor zum Eigenwert 0.

2.5 Satz: Sei L eine Unteralgebra von $gl(V)$ und V endlich-dimensional. Wenn L aus nilpotenten Endomorphismen besteht und $V \neq 0$ ist, dann gibt es einen gemeinsamen Eigenvektor $(\neq 0)$, sodass $L.v = 0$.

2.6 Beweis:

Der Beweis erfolgt mittels starker Induktion: Man nehme an, die Aussage sei bereits gezeigt für alle L' deren Dimension kleiner ist als L. Kann man sie dann zusätzlich für L zeigen, dann ist klar, dass sie allgemeingültig ist. Als Induktionsanfang reicht es folglich zu zeigen, dass es überhaupt Dimensionen von L gibt, in denen die Aussage wahr ist. Für $\dim L = 0$ bzw. $\dim L = 1$ ist die Aussage klar. Sei nun $K \neq L$ eine Unteralgebra von L. Dann ist die Verknüpfung $\begin{array}{l} K \times L \to L \\ (y,x) \mapsto ad_y(x) \end{array}$ eine Lie Algebra auf dem Vektorraum L.

Nach Lemma 2.2 ist diese Lie-Algebra selbst wiederum nilpotent. Entsprechend gelten diese Aussagen auch für den Vektorraum L/K.

Da die Dimension von K kleiner ist als die von L können wir auf K die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt einen Vektor $x+K \neq K$ in L/K, sodass $ad\, y\,(x) = 0 \;\; \forall y \in K$. Folglich ist $[yx] = [xy] = 0 \in K \;\; \forall y \in K$, hingegen $x \notin K$. Also ist K eine <u>echte</u> Teilmenge von $N_L(K)$ dem Normalisator von K in L:

$$N_L(K) = \{ x \in L \mid [xK] \subset K \}$$

Wenn wir annehmen, dass K die maximale echte Unteralgebra von L ist, dann muss $N_L(K) = L$ sein, da er echt größer ist. Folglich ist K Ideal von L.

Betrachte nun die Dimension von L/K. Wäre die Dimension von L/K größer als 1, dann wäre das inverse Bild ~~(dieser)~~ $*_1$ ~~(Unteralgebra)~~ in L eine echte Unteralgebra von L und würde K zugleich echt beinhalten. Dies verletzt die Maximalität von K.

Demnach hat K <u>Codimension 1</u> ($\hat{=} \dim L/K = 1$). Also können wir L schreiben als $L = K + Fz$ für ein beliebiges $z \in L - K$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $W = \{ v \in V \mid K.v = 0 \}$ nicht leer.

Da K ein Ideal ist, ist W stabil unter L, d.h. aus $x \in L, y \in K$ und $w \in W$ folgt: $yx.w = xy.w - [xy].w = 0$.

z ist ein nilpotenter Endomorphismus, d.h. bei Anwendung auf W hat er einen Eigenvektor $v \neq 0$ in W, sodass $z.v = 0$.

Also $L.v = 0$ $\square$

$*_1$ einer eindimensionalen Unteralgebra von L/K

2.7 Beweis: (Beweis des Satzes von Engel)

Erneute Anwendung des Prinzips der starken Induktion

Induktionsanfang: Für $\dim L = 1$ ist die Aussage trivial

Induktionsvoraussetzung: Sei die Aussage für alle Lie-Algebren L' aus ad-~~nilpotenten~~ Elementen mit $\dim L' < \dim L$ gezeigt.

Induktionsschritt: $\{0, \dots, \dim L'\} \to \dim L$

Die Algebra $\operatorname{ad} L \subset gl(L)$ besteht laut Definition von ad-nilpotent aus nilpotenten Elementen. Damit genügt sie den Voraussetzungen zu Satz 2.5 (ausgenommen $L = 0$). Daraus folgt: Es gibt ein $x \neq 0$ in L, sodass $[Lx] = 0$. Folglich ist das Zentrum $Z(L) \neq 0$. Nun besteht $L/Z(L)$ aus ad-nilpotenten Elementen und $\dim(L/Z(L)) < \dim L$. Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert uns: $L/Z(L)$ ist nilpotent. Nach Proposition e) ist dann auch L nilpotent. $\square$

2.8 Definition:

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Dann nennen wir eine Kette von Unterräumen $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ mit $\dim V_i = i$ eine <u>Fahne</u> von V. Wenn zudem ein $x \in \operatorname{End} V$ existiert, sodass $x.V_i \subset V_i$ $\forall i$, so sagen wir: x stabilisiert die Fahne.

2.9 Korollar:

Wenn alle Elemente von L ad-nilpotent sind, so existiert ~~e~~ eine Fahne (V_i) in V, die stabil unter L ist mit $x.V_i \subset V_{i-1}$ $\forall i$. Anders ausgedrückt: Es gibt eine Basis von V zu der alle Matrizen in L strikte obere Dreiecksmatrizen sind.

2.10 Beweis:

Da L nilpotent ist, ist $Z(L) \neq 0$. Folglich ist $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad} L) \neq 0$ und keins der Elemente von L ist injektiv. Die zugehörigen Matrizen haben also keinen vollen Rang. Daraus folgt, dass sie in der Zeilenstufenform Elemente von $n(n, F)$ sind. $\square$

2.11 Lemma: Sei L nilpotent und K ein Ideal ungleich 0.
Dann ist $K \cap Z(L) \neq 0$.

2.12 Beweis: $\operatorname{ad} x(y)$ ist für $x \in L, y \in K$ eine Lie-Algebra über K aus nilpotenten Endomorphismen. Laut Satz 2.5 gibt es also ein $y \in K$, sodass $[xy] = 0 \ \forall x \in L$. Also liegt $y \in K$ im Zentrum von L. $\square$