Lie Algebren und ihre Darstellungen

Vortrag 5 : Der Satz von Lie und die Jordan-Chevalley-Zerlegung

0 Vorbereitungen

0.1 Allgemeines zu Lie Algebren

Lemma 0.2 (Definition)**.** *Sei L eine Lie Algebra.*

(i) Ist $I \subset L$ ein Ideal von L, so ist I außerdem eine Unteralgebra von L.

(ii) Die Kommutatoralgebra $[L, L]$ ist definiert als der Spann des Kommutators in L, also

$$[L, L] := \langle [x, y] \rangle \text{ mit } x, y \in L.$$

Dann ist $[L, L]$ ein Ideal von L.

Beweis. (i) Ist $I \subset L$ Ideal von L, so impliziert das, dass $\forall\, x \in L, y \in I : [x, y] \in I$ gilt. Da aber $I \subset L$, gilt das insbesondere auch für alle Elemente in I, damit ist I unter dem Kommutator abgeschlossen.

(ii) Damit $[L, L]$ ein Ideal von L sein kann, muss gelten: $\forall\, x \in [L, L], y \in L : [x, y] \in [L, L]$. Da L unter dem Kommutator abgeschlossen ist, liegt auch $[L, L] \ni x = [x^{'}, y^{'}], x^{'}, y^{'} \in L$ wieder in L, damit ist $[x, y]$ nach Definition von $[L, L]$ wieder in $[L, L]$.

□

Lemma 0.3. *Sei L eine Lie Algebra, $I, J \subset L$ seien Ideale von L. Dann gelten:*

(i) Der Durchschnitt $I \cap J$ ist ein Ideal von L,

(ii) Die Summe $I + J := \{x + y | x \in I, y \in J\}$ ist ein Ideal von L,

(iii) Das Produkt $[I, J] := \langle \{[x, y] | x \in I, y \in J\} \rangle$ ist ein Ideal von L,

(iv) Der Faktorraum L/I versehen mit der Lie Klammer

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I \text{ mit } x, y \in L$$

ist eine Lie Algebra, die sogenannte Faktoralgebra von L nach I.

Beweis.

(i) $I \cap J$ ist die Menge aller Elemente $\{i | i \in I \wedge i \in J\}$. Da für alle $l \in L$ gilt $[i, l] \in I$ und $[i, l] \in J$, muss für alle l auch $[i, l] \in I \cap J$ gelten.

(ii) Der Kommutator ist bilinear, also gilt für $l \in L, x \in I$ und $y \in J$:

$$[x + y, l] = \underbrace{[x, l]}_{\in I} + \underbrace{[y, l]}_{\in J} = \underbrace{x^{'}}_{\in I} + \underbrace{y^{'}}_{\in J} \in I + J.$$

(iii) Sei $z := \sum_n [i_n, j_n]$ mit $i_n \in I, j_n \in J$, wobei die Summe eine endliche ist. Es ist zu zeigen, dass $\forall\, l \in L : [l, \sum_n [i_n, j_n]] \in [I, J]$ mit $z \in [I, J]$ gilt. Da der Kommutator bilinear ist, folgt sofort $[l, z] = \sum_n [l, [i_n, j_n]]$. Aus der Jacobi-Identität folgt für die einzelnen Summanden

$$[l, [i_n, j_n]] = [\underbrace{[l, i_n]}_{\in I}, j_n] - [i_n, \underbrace{[j_n, l]}_{\in J}] \in [I, J].$$

Das zeigt die Behauptung.

(iv) Damit L/I selbst eine Lie Algebra in eigenem Recht sein kann, ist die Wohldefiniertheit des Kommutators auf L/I zu zeigen, wähle dafür $x^{'} = x + u, u \in I$ und $y^{'} = y + v, v \in I$, dann gilt:

$$[x^{'}, y^{'}] = [x + u, y + v] = [x, y] + [x, v] + [u, y] + [u, v] = [x, y] + I.$$

□

Definition 0.4. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann bezeichnet die *Kodimension* von U in V, geschrieben $\mathrm{codim}(U, V)$, die Dimension des Faktorraumes V/U. Es gilt

$$\mathrm{codim}(U, V) = \dim(V) - \dim(U).$$

Satz 0.5. *Sei L eine Lie Algebra und $I \subset L$ ein Ideal. Dann gilt: L/I ist genau dann abelsch, wenn $[L, L] \subset I$.*

Beweis. Eine Lie Algebra L ist genau dann abelsch, wenn $\forall\, x, y \in L : [x, y] = 0$ gilt. Eine Faktoralgebra L/I mit Lie Algebra L und Ideal $I \subset L$ ist genau dann abelsch, wenn $\forall\, x, y \in L : [x, y] \in I$, da dann alle Kommutatoren im Kern der Restklassenabbildung $\pi : L \to L/I$ liegen. Da I als Ideal auch eine Unteralgebra ist, gilt das genau dann, wenn $[L, L] \subset I$ gilt. □

Korollar 0.6. *$[L, L]$ ist das kleinste Ideal mit der Eigenschaft, dass der Quotient $L/[L, L]$ abelsch ist.*

0.7 Auflösbare Lie Algebren

Definition 0.8. Sei K ein Körper, L eine K-Lie Algebra und $L^{(1)} = L^1$ die Kommutatoralgebra $[L, L]$ von L.

(i) Für $n \geq 2$ setze $L^n = [L, L^{n-1}]$, dann heißt $(L^n)_{n \in \mathbb{N}}$ die absteigende Zentralreihe von L.

(ii) Für $n \geq 2$ setze $L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]$, dann heißt $(L^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die abgeleitete Reihe von L.

(iii) L heißt nilpotent, falls $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $L^n = \{0\}$. Man nennt n die nilpotente Länge.

(iv) L heißt auflösbar, falls $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $L^{(n)} = \{0\}$. Man nennt n die derivierte Länge.

Lemma 0.9. *Sei K ein Körper und L eine auflösbare Lie Algebra über K. Dann gelten:*

(i) Die abgeleitete Reihe von L

$$L \supset [L, L] \supset [L^{(1)}, L^{(1)}] \supset \cdots \supset [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] = L^{(n)} = \{0\}$$

ist eine Reihe von Idealen von L.

(ii) Ist L nilpotent, so auch auflösbar.

Beweis. (i) Folgt mit 0.3(iii),

(ii) Induktiv folgt dass $L^{(n)} \subset L^n \,\forall\, n$.

□

Korollar 0.10. *Sei L eine auflösbare Lie Algebra. Dann existiert eine Kette von Idealen von L, so dass $0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L$ und $\dim(L_i) = i$.*

Beweis. Folgt sofort aus 0.9 und 0.5. □

Lemma 0.11. *Eine Lie Algebra L über einem Körper K ist genau dann auflösbar, wenn $[L, L]$ nilpotent ist.*

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“(*Nach dem Beweis für den Satz von Lie.*)

(ii) „$\Leftarrow$“:
Sei $[L, L]$ nilpotent. Dann ist $[L, L]$ auch auflösbar und da gilt L auflösbar $\Leftrightarrow$ $[L, L]$ auflösbar, ist damit L auch auflösbar.

□

Definition 0.12. Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $W \subset V$ ein Unterraum. W heißt f-invariant, wenn $f(W) \subset W$.

Definition 0.13. (i) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Eine Sequenz von Unterräumen der Art

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

mit $\dim(V_i) = i$ heißt eine Fahne $\mathcal{F}$.

(ii) Der Stabilisator einer Fahne sei definiert als

$$S(\mathcal{F}) := \{\varphi \in \mathfrak{gl}(V) | \,\forall\, i : \varphi(V_i) \subset V_i\},$$

also die Menge aller Endomorphismen von V, die V_i-invariant für alle i sind.

Bemerkung 0.14. (i) Die Kodimension lässt eine alternative Definition einer Fahne zu: Für die Unterräume muss gelten $\dim(V_{i+1}/V_i) = 1$, bzw. $\mathrm{codim}(V_i, V_{i+1}) = 1$.

(ii) Nach dem Basisergänzungssatz existiert eine solche Fahne in einem Vektorraum V (Sei $\{v_1\} \subset V_1$ eine Basis, ergänze sie zu einer Basis $\{v_1, v_2\} \subset V_2$ mit $v_2 \in V_2$ und so weiter).

Satz 0.15. *Sei V ein K-Vektorraum und $\dim(V) = n < \infty$. Sei $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Fahne in V und $f \in S(\mathcal{F})$. Dann hat die Darstellungsmatrix $A_{f,\mathcal{F},\mathcal{F}}$ von f bezüglich $\mathcal{F}$ obere Dreiecksgestalt.*

Beweis. Um die Abbildungsmatrix zu erhalten, müssen die Bilder der Basisvektoren von f als Linearkombinationen der Basisvektoren $v_i, 1 \leq i \leq n$ bestimmt werden, dafür gilt

$$f(v_j) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i,j} v_i.$$

Da wir wissen, dass die V_i f-invariant sind, gilt sogar

$$f(v_j) = \sum_{1 \leq i \leq j} \alpha_{i,j} v_i.$$

Wir erhalten nun die Darstellungsmatrix $A_{f,\mathcal{F},\mathcal{F}}$, indem wir die Skalare $\alpha_{i,j}$ in eine $n \times n$ Matrix eintragen:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

□

Lemma 0.16. *$S(\mathcal{F})$ ist eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$.*

Beweis.

(i) **Abgeschlossenheit:**
Seien $\varphi, \psi \in S(\mathcal{F})$. Dann gilt $\forall\, i : [\varphi(V_i), \psi(V_i)] = \varphi \circ \psi(V_i) - \psi \circ \varphi(V_i) \subset V_i$ wegen der Invarianz der Abbildungen.

(ii) **Auflösbarkeit:**
Nach Satz 0.15 haben alle Elemente aus $S(\mathcal{F})$ obere Dreiecksgestalt, weiter ist aus dem Vortrag über den Satz von Engel bekannt, dass $[\mathfrak{t}(n,K), \mathfrak{t}(n,K)] = \mathfrak{n}(n,K)$, also dass $[S(\mathcal{F}), S(\mathcal{F})]$ nilpotent ist. Damit ist $S(\mathcal{F})$ nach 0.11 auflösbar.

□

0.17 Eigenräume und verallgemeinerte Eigenräume

Definition 0.18. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$, $f : V \to V$ ein Endomorphismus und A die Darstellungsmatrix von f bezüglich einer Basis $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ von V. Wir nennen:

(i) $\det(A - X\mathbf{1})$ das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$.

(ii) Die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von $\chi_A(X)$ die Eigenwerte von f.

(iii) $V_{\lambda_i} := \{v \in V | f(v) = \lambda_i v\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \mathbf{1})$ die Eigenräume zu den Eigenwerten λ.

Da $\chi_A(X) \in \mathbb{C}[X]$, zerfällt $\chi_A(X)$ immer in n nicht notwendigerweise verschiedene Linearfaktoren, da $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen. Man kann $\chi_A(X)$ also schreiben als

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k},$$

wobei m_i die Multiplizität der λ_i bezeichnet und $\sum_{1 \leq i \leq k} m_i = n$ gilt. Wir definieren den *verallgemeinerten Eigenraum* zum Eigenwert λ_i als

$$V^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i}.$$

1 Satz von Lie

Im ganzen Vortrag sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1.1 Der Satz von Lie

Im ganzen Unterkapitel sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik 0.

Definition 1.2. Sei L eine auflösbare lineare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, wobei V ein endlichdimensonaler K-Vektorraum sei. Wir nennen ein $v \in V$ einen *gemeinsamen Eigenvektor* aller $x \in L$, wenn $x.v \in \langle v \rangle$ für alle $x \in L$.

Gibt es nun einen gemeinsamen Eigenvektor wie in der in 1.2 beschriebenen Situation, so gibt es auch ein lineares Funktional $\Lambda : L \to K$, das jedem Endomorphismus $x \in L$ den Eigenwert zum Eigenvektor v zuordnet, was Anlass zur folgenden Definition gibt:

Definition 1.3. Betrachte die gleiche Situation wie in 1.2. Ein *Gewicht* Λ ist ein lineares Funktional $\Lambda : L \to K$, so dass

$$V_{(\Lambda),L} := \{v \in V | x.v = \Lambda(x)v \,\forall\, x \in L\}$$

einen von Null verschiedenen Unterraum von L bildet. $V_{(\Lambda),L}$ nennt man den *Gewichtsraum* zum Gewicht Λ.

Satz 1.4. *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, L eine lineare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ist $I \subset L$ ein Ideal und $\Lambda : I \to \mathbb{C}$ ein Gewicht von I, dann ist*

$$V_{(\Lambda),I} = \{v \in V | y.v = \Lambda(y)v \,\forall\, y \in I\}$$

ein unter L invarianter Unterraum von V - d.h. $\mathrm{Im}(x|_{V_{(\Lambda),I}}) \subset V_{(\Lambda),I} \,\forall\, x \in L$.

Beweis. Sei $x \in L$, $w \in V_{(\Lambda),I}$. Da I ein Ideal von L ist, gilt für beliebiges $y \in I$

$$I \ni [x, y] = xy - yx,$$

umgestellt und an der Stelle w ausgewertet gilt also

$$yx.w = xy.w - [x, y].w = \Lambda(y)x.w - \Lambda([x, y]) \cdot w.$$

Wir wollen die x-Invarianz von $V_{(\Lambda),I}$ für beliebige $x \in L$ zeigen, also dass gemeinsame Eigenvektoren der Endomorphismen aus I auch Eigenvektoren der Endomorphismen aus ganz L sind. Wir müssen dazu zeigen, dass $\Lambda([x, y]) = 0 \,\forall\, x \in L, y \in I$ gilt.

Seien nun $x \in L$ und $w \in V_{(\Lambda),I}$ beliebig aber fest gewählt, weiter sei $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl derart, dass $\{w, x.w, \ldots, x^m.w\}$ linear abhängig ist. Wir bezeichnen im Folgenden

$$W := \langle \{w, \ldots, x^{m-1}.w\} \rangle,$$

wobei für W gilt: $\dim(W) = m$. Definiere weiter $W_i := \langle \{w, x.w, \ldots, x^{i-1}.w\} \rangle$ für $i \geq 2$, für $i = 1$ setze $W_1 = \langle w \rangle$. Durch Induktion nach i wollen wir zeigen:

(i) W_i ist y-invariant für beliebiges $y \in I$ und $1 < i \leq m$;

(ii) y wird bezüglich W durch eine obere Dreiecksmatrix dargestellt, deren Diagonaleinträge genau $\Lambda(y)$ sind.

Zusammengefasst lautet also die Bedingung: $yx^{i-1}.w = \Lambda(y)x^{i-1}.w + u, u \in W_{i-2}$.

Induktionsbehauptung:

$$yx^{i-1}.w = \Lambda(y)x^{i-1}.w + u, u \in W_{i-2}. \tag{1}$$

Induktionsanfang:

$i = 1$:
Nach Definition gilt $y.w = \Lambda(y)w \in W_1$.

$i = 2$:
Zum besseren Verständnis prüfen wir die Induktionsbehauptung auch für $i = 2$ noch einmal nach: Es gilt dann

$$yx.w = \underbrace{\Lambda(y)x.w}_{\in W_2} + \underbrace{\Lambda([y,x]) \cdot w}_{\in W_1}.$$

Also $yx.w \in W_2$ wie gefordert - $\Lambda([y,x]) \cdot w$ kann als Linearkombination der Basisvektoren von W_1 dargestellt werden, ein Basisvektor der nur in der Basis von W_2, aber nicht in der Basis von W_1 vorkommt, kann nichts zur Linearkombination von $\Lambda([y,x])w$ beitragen, damit muss der Diagonaleintrag wieder $\Lambda(g)$ gewesen sein.

Induktionsschritt: $i > 1$**:**

Wir überlegen uns ganz allgemein, dass gilt

$$\begin{aligned} yx^i.w &= xyx^{i-1}.w - xyx^{i-1}.w + yxx^{i-1}.w \\ &= xyx^{i-1}.w - [x,y]x^{i-1}.w = xyx^{i-1}.w + [y,x]x^{i-1}.w. \end{aligned}$$

Für $1 < i \leq m-1$ gilt dann

$$yx^i.w = xyx^{i-1}.w + [y,x]x^{i-1}.w \quad .$$

Nach Induktionsvoraussetzung (1) gilt damit also insgesamt

$$\begin{aligned} xyx^{i-1}.w + [y,x]x^{i-1}.w &= x(\Lambda(y)x^{i-1}.w + u) + \Lambda([y,x]) \cdot x^{i-1}.w \\ &= \Lambda(y)x^i.w + x.u + v, \end{aligned}$$

wobei $v = \Lambda([y,x]) \cdot x^{i-1}.w \in W_{i-2}$, weiter gilt $x.u \in W_{i-1}$, da $u \in W_{i-2}$ - dass u aus W_{i-1} stammen muss, sieht man schnell, wenn man eine Linearkombination für u einsetzt. W ist also wie gewünscht y-invariant. Da wir auch die Diagonalbedingung für y gezeigt haben, gilt $\mathrm{tr}(y) = m\Lambda(y)$, und da weiter $[x,y] \in I \,\forall\, x \in L, y \in I$, gilt auch

$$0 = \mathrm{tr}([x,y]) = m\Lambda([x,y])$$

wegen $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ und wegen $\mathrm{char}(K) = 0$ haben wir gezeigt, was zu zeigen war. $\square$

Satz 1.5 (von Lie). *Sei V ein K-Vektorraum mit* $\dim(V) = n < \infty$ *und* $V \neq \{0\}$. *Ferner sei L eine auflösbare lineare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann haben alle Endomorphismen in L einen gemeinsamen Eigenvektor $v \in V$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage mithilfe von Induktion nach der Dimension $m < n^2$ von L.

Induktionsanfang: $m = 1$**:**

Für $\dim(L) = 1$ ist die Situation klar, da alle Endomorphismen in L kommutieren und es sich deshalb um eine Ansammlung von Diagonalmatrizen handeln muss, diese haben alle einen gemeinsamen Eigenvektor.

Induktionsschritt: $m > 1$**:**

Betrachte nun $\dim(L) > 1$. Dann ist $[L, L] \subsetneq L$, da L auflösbar ist. $L/[L, L]$ ist abelsch, deshalb ist jeder Unterraum von $L/[L, L]$ gleichermaßen auch Ideal von L. Ist $I \subset L$ ein Ideal mit Kodimension $\operatorname{codim}(I, L) = 1$ (I enthält also automatisch auch $[L, L]$, da L/I abelsch sein muss), dann ist die Menge $J = \{w \in L | w + [L, L] \in I\}$ ebenfalls ein Ideal von L mit Kodimension $\operatorname{codim}(J, L) = 1$. Nach dem Vortrag über den Satz von Engel ist jede Unteralgebra einer auflösbaren Lie-Algebra selbst auflösbar, also ist J als Ideal auch auflösbar. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $0 \neq v \in V$, der gemeinsamer Eigenvektor für alle $y \in J$ ist. Sei $\Lambda : J \to K$ das zugehörige Gewicht, der zugehörige Gewichtsraum $V_{(\Lambda),J}$ ist invariant unter L. Sei $z \in L \setminus J$. Da $\operatorname{Im}(z|_{V_{(\Lambda),J}}) \subset V_{(\Lambda),J}$ besitzt z einen Eigenvektor $v \in V_{(\Lambda),J}$ zum Eigenwert $\gamma \in K$. An dieser Stelle immitieren wir den Beweis des Satzes von Engel: Wir wissen, dass jedes $x \in L$ darstellbar ist als $x = y + \beta z$, $y \in J$, $\beta \in K$, deshalb gilt

$$x.v = y.v + \beta z.v = (\Lambda(y) + \beta\gamma)v,$$

v ist also auch Eigenvektor von x. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen und die Behauptung gezeigt. □

Korollar 1.6. *Betrachte die gleiche Situation wie in 1.5. Es gilt: Alle Endomorphismen in L haben bezüglich einer Fahnenbasis obere Dreiecksgestalt.*

Beweis. Der Beweis wird wieder über Induktion nach der Dimension n von V geführt.

Induktionsanfang $n = 1$**:**

Der Fall $\dim(V) = 1$ ist wieder klar.

Indutkionsschritt: $n > 1$**:**

Betrachte nun $\dim(V) > 1$. Nach 1.5 gibt es einen von Null verschiedenen Eigenvektor $v \in V$, der gemeinsamer Eigenvektor für alle $x \in L$ ist. Es sei $U := \langle\{v\}\rangle$. Jede Abbildung $x \in L$ induziert dann eine lineare Abbildung $\overline{x}$ auf L/U, die Abbildung $L \to \mathfrak{gl}(V/U); x \mapsto \overline{x}$ ist dann ein Lie Algebren Homomorphismus. Das Bild von L unter dieser Abbildung ist nach dem Vortrag über den Satz von Engel eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V/U)$. Es gilt weiter $\dim(L/U) = n-1$, nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun eine Basis $\{v_i + U | 1 \leq i \leq n-1\}$ von V/U bezüglich der alle Abbildungen $\overline{x}$ durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Die

Menge $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ ist dann eine Basis von V. Bezüglich dieser Basis werden alle Elemente von L durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt. □

Korollar 1.7. *Betrachte die Situation wie in 1.5. Dann gilt: L stabilisiert eine Fahne $\mathcal{F} \subset V$, also $L \subset S(\mathcal{F})$.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass die in 1.6 beschriebenen Elemente die Teilmenge eines Stabilisators sind, da alle Elemente des Stabilisators einer Fahne obere Dreiecksgestalt haben - es ist im Grunde nur eine Paraphrasierung von 1.6 ohne Koordinaten. □

Beispiel 1.8. Betrachte $\mathfrak{n}(n, K)$ als Beispiel für eine auflösbare lineare Lie Algebra. Wir werden nun gemeinsame Eigenvektoren für $\mathfrak{n}(n, K)$ suchen. Wir wissen: Das Bild des i-ten kanonischen Einheitsvektors e_i unter einer Abbildungsmatrix ist die i-te Spalte der Abbildungsmatrix. Wir suchen nun Vektoren, die multipliziert mit den Elementen von $\mathfrak{n}(n, K)$ immer in ihrem Erzeugnis liegen, sich also nur um skalare Faktoren unterscheiden. Für nilpotente Matrizen liegt in der zweiten Spalte der erste Eintrag, der von Null verschieden sein kann und alleine in einer Spalte steht - e_2 ist also auf jeden Fall ein Eigenvektor für alle Matrizen in $\mathfrak{n}(n, K)$. Trivialerweise ist außerdem e_1 Eigenvektor zum Eigenwert 0 für alle Endomorphismen aus $\mathfrak{n}(n, K)$.

Korollar 1.9 (Definition)**.** *Sei L auflösbar. Dann existiert eine Kette von Idealen von L der Gestalt*

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = L,$$

so dass $\dim(L_i) = i$. Zusatzinformation: Eine solche Reihe nennt man Hölderreihe von L (Quelle: Hilgert-Neeb).

Beweis. Wir wissen bereits um die Existenz einer solchen Reihe von Idealen, vergleiche 0.9. □

Lemma 1.10. *Wenn L auflösbar ist, ist $[L, L]$ nilpotent.*

Beweis. Wir suchen uns eine Reihe von Idealen wie in 1.9. Bezüglich einer Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$, wobei $\{x_1, \ldots, x_i\}$ L_i aufspannt, liegen die Matrizen der adjungierten Darstellung ad L in $\mathfrak{t}(n, K)$. Deshalb liegen die Matrizen $(\mathrm{ad}_L\ [L, L])$ in $\mathfrak{n}(n, K)$, damit ist $(\mathrm{ad}_L\ [L, L])$ nilpotent für alle $x \in [L, L]$, damit ist $[L, L]$ nilpotent nach dem Satz von Engel. □

2 Jordan-Chevalley Zerlegung

Im gesamten Abschnitt ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit beliebiger Charakteristik.

2.1 Satz über die Jordan-Chevalley Zerlegung

Definition 2.2. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, sei weiter $A \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann ist das Minimalpolynom p von A dasjenige normierte Polynom kleinsten Grades mit Koeffizienten in K, so dass $p(A) = 0$ gilt.

Satz 2.3. *Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und sei $x \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gelten:*

*(i) Es gibt eindeutig bestimmte $x_s, x_n \in \mathrm{End}_K(V)$, die $x = x_s + x_n$ erfüllen, dabei ist x_s diagonalsierbar und x_n nilpotent - man nennt x_s auch halbeinfach (**s**emisimple).*

(ii) Es existieren Polynome $p(X), q(X) \in K[X]$ ohne konstante Terme in einer Unbestimmten, so dass $x_s = p(x), x_n = q(x)$. Außerdem kommutieren x_s und x_n mit allen Endomorphismen, mit denen x kommutiert.

(iii) Sind $A \subset B \subset V$ Unterverktorräume und $x(B) \subset A$, dann gilt auch $x_n(B) \subset A$ und $x_s(B) \subset A$.

Man nennt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ die (additive) Jordan-Chevalley-Zerlegung von x (manchmal auch einfach Jordan-Zerlegung) - die multiplikative Zerlegung hat die Gestalt

$$x = x_s \cdot (\mathbf{1} + x_s^{-1} x_n),$$

ist also offensichtlich äquivalent zur additiven Jordan-Chevalley-Zerlegung. Man nennt x_n den nilpotenten- und x_s den halbeinfachen Anteil von x.

Beweis. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von x mit Multiplizitäten $m_1, \ldots, m_k$, so dass das charakteristische Polynom χ_x die Gestalt

$$\chi_x(X) = \prod_{1 \leq i \leq k} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

hat. Sind nun $V^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i}$ die verallgemeinerten Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten, so ist V die direkte Summe all dieser Unterräume, die jeweils x-invariant sind. $x|_{V^{\lambda_i}}$ hat offensichtlich das charakteristische Polynom $(X - \lambda_i)^{m_i}$.

Man wendet nun den chinesischen Restsatz an, um ein Polynom $p(X) \in K[X]$ zu finden, für das die Kongruenzen

(i) $p(X) \equiv \lambda_i \pmod{(X - \lambda_i)^{m_i}}$,

(ii) $p(X) \equiv 0 \pmod{X}$

gelten.

Setze $q(X) = X - p(X)$. Beide Polynome haben nun keinen konstanten Term nach Wahl von $p(X)$. Setze $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Weil nun beide Polynome Polynome in x sind, kommutieren sie miteinander, insbesondere kommutieren sie mit jedem Endomorphismus, der mit x kommutiert.

Des Weiteren sind alle Unterräume von V, die x-invariant sind, auch x_s-invariant und x_n-invariant, im Speziellen sind die verallgemeinerten Eigenräume x_s-invariant und x_n-invariant.

Die Kongruenz $p(X) \equiv \lambda_i \pmod{(X - \lambda_i)^{m_i}}$ zeigt, dass die Einschränkung von $x_s - \lambda_i \mathbf{1}$ auf die verallgemeinerten Eigenräume die Nullabbildung ist für alle i, also dass x_n Diagonalgestalt auf den verallgemeinerten Eigenräumen annimmt und dabei den einzigen Eigenwert λ_i hat.

Nach Definition gilt $x_n = x - x_s$, was die Nilpotenz von x_n offensichtlich macht. $p(X)$ und $q(X)$ haben keine konstanten Koeffizienten, also ist nun insgesamt auch (iii) gezeigt.

Zu zeigen bleibt nun noch die Eindeutigkeit der Zerlegung aus Punkt (i): Sei $x = \tilde{x}_s + \tilde{x}_n$ eine weitere derartige Zerlegung, dann muss gelten $\tilde{x}_s + \tilde{x}_n = x_s + x_n \Leftrightarrow \tilde{x}_s - x_s = x_n - \tilde{x}_n$. Alle auftauchenden Endomorphismen kommutieren bekanntermaßen, der einzige Endomorphismus, der zeitgleich sowohl halbeinfach als auch nilpotent ist, ist die Nullabbildung, das bedeutet aber schon die Gleichheit von x_s und $\tilde{x}_s$ wie die Gleichheit von x_n und $\tilde{x}_n$. $\square$

Korollar 2.4. *Sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Ist $x : V \to V$ halbeinfach, so ist auch* $\mathrm{ad}\ x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ *halbeinfach.*

Beweis. Da x nach Voraussetzung halbeinfach ist, gibt es eine Eigenbasis $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$, bezüglich der x als Diagonalmatrix dargestellt wird. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonaleinträge von x, außerdem $e_{i,j}$ die Standardbasismatrizen von $\mathfrak{gl}(V)$ bezüglich der gewählten Basis in V. Dann gilt

$$(\mathrm{ad}\ x)(e_{i,j}) = [x, e_{i,j}] = x \cdot e_{i,j} - e_{i,j}x = (\lambda_i - \lambda_j)e_{i,j},$$

also wird $\mathrm{ad}\ x$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt. $\square$

Lemma 2.5. *Sei $x \in \mathrm{End}_K(V)$ (V endlichdimensional) und $x = x_n + x_s$ seine Jordan-Chevalley-Zerlegung. Dann ist* $\mathrm{ad}\ x = \mathrm{ad}\ x_s + \mathrm{ad}\ x_n$ *die Jordan Zerlegung von* $\mathrm{ad}\ x$.

Beweis. Nach dem Vorangegangen ist $\mathrm{ad}\ x_s$ halbeinfach und $\mathrm{ad}\ x_n$ nilpotent. Da $[\mathrm{ad}\ x_s, \mathrm{ad}\ x_n] = \mathrm{ad}[x_s, x_n] = 0$ kommutieren $\mathrm{ad}\ x_s$ und $\mathrm{ad}\ x_n$, damit folgt die Behauptung aus dem Satz über die Jordan-Chevalley Zerlegung eines Endomorphismus. $\square$

Lemma 2.6. *Sei $\mathfrak{A}$ eine endlichdimensionale K-Algebra. Dann enthält* $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ *die halbeinfachen und nilpotenten Anteile von allen Elementen aus* $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$.

Beweis. Sei $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ eine Derivation, $\sigma + \nu$ die Jordan Zerlegung von δ, wobei σ der halbeinfache- und ν der nilpotent Anteil von δ sei und $\sigma, \nu \in \mathrm{End}(\mathfrak{A})$. Zeige nun, dass σ schon eine Derivation sein muss, darum auch ν. Sei $\lambda \in K$, definiere dann zu λ $\mathfrak{A}_\lambda := \{x \in \mathfrak{A} | (\delta - \lambda.\mathbf{1})^k x = 0\}$ für ein von x abhängiges $k \in \mathbb{N}$. $\mathfrak{A}$ ist die direkte Summe solcher $\mathfrak{A}_\lambda$ für die Eigenwerte λ von δ. Ist σ der halbeinfache Anteil, so wirkt er auf $\mathfrak{A}_{\lambda_i}$ wie eine Skalarmultiplikation mit λ_i, da σ Diagonalgestalt auf $\mathfrak{A}_{\lambda_i}$ annimmt. Für beliebige λ_1, λ_2 gilt $\mathfrak{A}_{\lambda_1}\mathfrak{A}_{\lambda_2} \subset \mathfrak{A}_{\lambda_1+\lambda_2}$ wegen

$$\big(\delta - (\lambda_1 + \lambda_2).\mathbf{1}\big)^n (x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \big((\delta - \lambda_1.\mathbf{1})^{n-i} x\big)\big((\delta - \lambda_2.\mathbf{1})^i y\big) \quad x, y \in \mathfrak{A}.$$

Sind nun $x \in \mathfrak{A}_{\lambda_1}$, $y \in \mathfrak{A}_{\lambda_2}$, dann ist $\sigma(xy) = (\lambda_1 + \lambda_2)xy$, weil $x, y \in \mathfrak{A}_{\lambda_1+\lambda_2}$ - möglicherweise schon 0 sind, auf der anderen Seite ist $(\sigma x)y + x(\sigma y) = \lambda_1 xy + x\lambda_2 y = (\lambda_1 + \lambda_2)xy$. Mit der Direktheit von

$$\bigoplus_{\lambda_i \in K} \mathfrak{A}_{\lambda_i}$$

folgt, dass σ bereits eine Derivation ist, was zu zeigen war. $\square$