Cartan Kriterium und Killing Form

Jonas Baltes

26. Mai, 2015

Im ganzen Handout bezeichnet K den zugrundeliegenden, algebraisch abgeschlossenen Körper des beliebigen, endlich-dimensionalen Vektorraums V. Desweiteren sei $\text{char}(K) = 0$. Mit e_{ij} wird die Matrix mit einer 1_K im i-j-ten Eintrag und sonst überall Nullen bezeichnet.

1 Cartan Kriterium

Sei L eine Lie Algebra. Offensichtlich ist L auflösbar wenn $[LL]$ nilpotent ist. Dies ist dann der Fall, wenn jedes $ad_{[LL]}\, x,\ x \in [LL]$ nilpotent ist (siehe *Engels Theorem*).

Satz 1. Seien $A \subset B$ zwei Unterräume von $\mathfrak{gl}(V)$ mit $dim(V) < \infty$. Setze

$$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \,|\, [x, B] \subset A\}.$$

Ist $x \in M$ mit $Tr(xy) = 0$ für alle $y \in M$, dann ist x nilpotent.

Die zentrale Idee des Beweises liegt darin, zu zeigen, dass der nilpotente Anteil (aus der *Jordan Zerlegung*) eines solchen $x \in M$ mit x selbst übereinstimmt.

Beweis. Sei $x = s + n$ die Jordan-Zerlegung, mit n nilpotent und s halbeinfach. Wähle eine Basis, sodass $s = diag(a_1, \ldots, a_n)$. Da $\text{char}(K) = 0$ ist $\mathbb{Q} \subset K$. Bezeichne mit E den Unterraum von K (über $\mathbb{Q}$) mit $E = \langle a_1, ..., a_n \rangle_{\mathbb{Q}}$. Es bleibt zu zeigen, dass $s = 0$ und somit $E = \{0\}$. Aus *Lineare Algebra 1* wissen wir, dass die Aussage $\{0\} = E^*$ (der Dualraum zu E) dazu äquivalent ist. D.h wir müssen zeigen, dass eine beliebige lineare Funktion $f : E \to \mathbb{Q}$ identisch zur Nullfunktion ist.

Sei also f gegeben und $y \in \mathfrak{gl}(V)$ mit $y = diag(f(a_1), ..., f(a_n))$. Aus der Rechnung im 2. Vortrag ist bekannt, dass

$$\operatorname{ad} s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}, \quad \operatorname{ad} y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}.$$

Nach der Lagrange-Interpolation existiert ein $r(T) \in K[T]$ mit

$$r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j) = f(a_i - a_j).$$

Dieses Polynom besitzt keinen konstanten Term k, da $k = r(0) = f(0) = 0$. Die Wohldefiniertheit dieses Polynoms folgt aus der Linearität von f.

$$\rightsquigarrow \operatorname{ad} y = r(\operatorname{ad} s)$$

Denn für alle $0 < i, j \leq dim(V)$ gilt:

$$(\operatorname{ad} s)^n\, e_{ij} = (a_i - a_j)(\operatorname{ad} s)^{n-1}\, e_{ij} = \ldots = (a_i - a_j)^n\, e_{ij}$$

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow r(\operatorname{ad} s)e_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\operatorname{ad} s)^k\; e_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_i - a_j)^k\, e_{ij} \\ &= r(a_i - a_j)\, e_{ij} = [f(a_i) - f(a_j)]e_{ij} \\ &= \operatorname{ad} y\, e_{ij}\end{aligned}$$

Da $ad\, s$ der halbeinfache Teil von $ad\, x$ ist, folgt mit Satz 2.1.2 des letzten Vortrags zur *Jordan Zerlegung*: $ad\, s$ ist Polynom in $ad\, x$ ohne konstanten Term. Da $\operatorname{ad} x(B) \subset A$ gilt auch $\operatorname{ad} y(B) \subset A$. Also ist $y \in M$. Nach Vorraussetzung ist $Tr(xy) = 0$, also ist $\sum_i a_i f(a_i) = 0$. Da $a_i \in K$ und $f(a_i) \in \mathbb{Q}$, gilt nach Anwendung von f

$$\sum_i f(a_i)^2 = 0 \rightarrow f = 0$$

da $E = \langle a_1, ..., a_n \rangle$. $\square$

Lemma. Für Endomorphismen $x, y, z \in \mathfrak{gl}(V)$ gilt:

$$\operatorname{Tr}([xy]z) = \operatorname{Tr}(x[yz]) \tag{1}$$

Beweis. Der Kommutator gibt für Endomorphismen $x, y, z \in \mathfrak{gl}(V)$ vor:

$$[x, y]z = xyz - yxz, \quad x[y, z] = xyz - xzy$$

Aus

$$\operatorname{Tr}(y(xz)) = \operatorname{Tr}((xz)y)$$

folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2 (Cartan Kriterium)**.** Sei L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V), dim(V) < \infty$ und $\operatorname{Tr}(xy) = 0$ für alle $x \in [LL]\,, y \in L$. Dann ist L auflösbar.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $[LL]$ oder alle $x \in [LL]$ nilpotent sind. Denn ist x nilpotent, so gilt dies auch für $\operatorname{ad} x$ und *Engels Theorem* greift. Analog zu (Satz 1): $A = [LL]$, $B = L$. Daraus ergibt sich $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V)|\ [x, L] \subset [LL]\}$. Es folgt, dass offensichtlich $L \subset M$. Wir müssen also für alle $w \in [LL]$ zeigen: $\operatorname{Tr}(wz) = 0$ für alle $z \in M$ (nicht nur $z \in L$).

Da jedes $w \in [LL]$ eine Darstellung der Form $w = \sum_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$ mit $x_i, y_i \in L$ besitzt, gilt für $z \in M$:

$$\mathrm{Tr}(wz) = \mathrm{Tr}(\sum_{i=1}^{n}[x_i y_i]z) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}([x_i y_i]z) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}([y_i z]x_i) = 0$$

(da nach Konstruktion $[y_i z] \in [LL]$). □

Corollar. Auch die Umkehrung von Cartans Kriterium gilt.

Beweis. Sei $x \in L \subset \mathfrak{gl}(V)$ und $y \in [LL]$ beliebig. Dann besitzt y eine Darstellung $y = \sum_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ mit $a_i, b_i \in L$. Nach *Lies Theorem* sind $x, a_i, b_i \in \mathfrak{t}(V)$ da L auflösbar ist. Offensichtlich ist $a_i b_i - b_i a_i = [a_i, b_i] = y \in \mathfrak{n}(V)$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Also $Tr(xy) = 0$ für alle $x \in [LL], y \in L$, da x und y beliebig gewählt waren.

Satz 3. Sei L eine Lie-Algebra mit $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y) = 0$ für alle $x \in [LL]\ , y \in L$. Dann ist L auflösbar.

Beweis. Äquivalent zu obigen Bedingungen ist, dass für die Unteralgebra $ad\, L$ von $\mathfrak{gl}(L)$ gilt: $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ für alle $x \in \mathrm{ad}\,[LL] = [\mathrm{ad}\, L\ \mathrm{ad}\, L]$ und $y \in \mathrm{ad}\, L$. Somit kann Cartans Kriterium angewendet werden und $\mathrm{ad}\, L$ ist auflösbar. Bezeichne mit

$$\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L),\ x \mapsto \mathrm{ad}\, x.$$

Da $L/\mathrm{Ker\ ad} \cong \mathrm{im\ ad} = \mathrm{ad}L$ ist $L/\mathrm{Ker\ ad}$ auflösbar. Da $\mathrm{Ker\ ad} = \mathrm{Z}(L)$ auflösbares Ideal ist, ist auch L auflösbar (s. Proposition aus Vortrag 4). □

2 Killing-Form

2.1 Kriterium für Halbeinfachheit

Definition. Sei L eine Lie Algebra. Für $x, y \in L$ ist durch

$$\kappa(x,\ y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y)$$

die Killing-Form definiert.

Lemma. κ ist eine symmetrische Bilinearform. Darüberhinaus ist sie assoziativ im Sinne von

$$\kappa(x,\ [y\, z]) = \kappa([x\, y],\ z).$$

(wegen Lemma 1 und $\mathrm{ad}\,[x,\ y] = [\mathrm{ad}\, x,\ \mathrm{ad}\, y]$). □

Lemma. Sei I ein Ideal von L, κ die Killing-Form von L und κ_I die Killing-Form auf I. Dann ist $\kappa_I = \kappa|_{I\times I}$

Beweis. Aus *Lineare Algebra 1* wissen wir: Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum, und $\phi : V \to V$ ein Vektorraum-Endomorphismus mit $\phi(V) \subset W$, dann ist $\mathrm{Tr}(\phi) = \mathrm{Tr}(\phi|_W)$ (s. Anhang). Sei nun $x, y \in I$, dann ist $\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y$ ein Endomorphismus, der L auf I abbildet. Also ist $\kappa(x, y) = \kappa_I(x, y)$ für $x, y \in I$. Und somit $\kappa_I = \kappa|_{I\times I}$. □

Definition. Eine symmetrische Bilinearform $\beta : L \times L \to K$ heißt nicht-ausgeartet, wenn das Radikal

$$S = \{x \in L \mid \beta(x, y) = 0 \quad \forall y \in L\}$$

gleich Null ist.

Corollar. Da κ assoziativ ist, ist ihr Radikal S ein Ideal. Desweiteren ist κ nicht-ausgeartet, wenn die Determinante von κ bezüglich einer beliebigen Basis ungleich Null ist, also $\det(\kappa) \neq 0$ (siehe *Lineare Algebra 1*).

*Erinnerung:*Eine Lie Algebra L heißt halb-einfach, wenn das größte auflösbare Ideal $\mathrm{Rad}(L) = \{0\}$.

Lemma. Eine Lie Algebra L ist genau dann halb-einfach, wenn L keine abelschen Ideale besitzt.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $Rad(L) = \{0\}$. Gäbe es ein abelsches Ideal I, so wäre dies in $Rad(L) = \{0\}$ enthalten.
"$\Leftarrow$" Sei jedes Abelsche Ideal $I = \{0\}$. Wäre $\mathrm{Rad}(L) \neq \{0\}$, so wäre das letzte Glied $\neq \{0\}$ in der abgeleiteten Serie von $Rad(L)$ ein abelsches Ideal, also gleich Null.

Satz 4. Sei $L \neq \{0\}$ eine Lie Algebra. Dann ist L halb-einfach genau dann, wenn die Killing-Form nicht-ausgeartet ist.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $\mathrm{Rad}(L) = \{0\}$ und S das Radikal von κ. Nach der Definition ist $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y) = 0$ für alle $x \in S$, $y \in L$ (insbesondere $y \in [SS]$). Nach Cartans Kriterium ist somit S auflösbar. Also ist $S \subset \mathrm{Rad}(L) = \{0\}$. Somit ist κ nicht-ausgeartet.

"$\Leftarrow$" Sei $S = \{0\}$. Es reicht zu zeigen, dass jedes abelsche Ideal I in S enthalten ist. Sei also $x \in I$, $y \in L$. Dann bildet ad x ad y von $L \to L \to I$ ab und somit $(\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y)^2$ nach $[II] = \{0\}$ ab. Das heißt dass $\mathrm{ad}\, x\ \mathrm{ad}\, y$ nilpotent ist, und somit $\kappa(x, y) = 0$. Also ist $I \subset S = \{0\}$. □

2.2 Beispiel

Als Beispiel berechnen wir die Killing-Form von $\mathfrak{sl}(2, K)$. Wir benutzen die Standartbasis, in der Reihenfolge (x_1, x_2, x_3), wobei

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} x_2(x_1) &= x_2 \cdot x_1 - x_1 \cdot x_2 = 2x_1 \\ \operatorname{ad} x_2(x_2) &= 0 \\ \operatorname{ad} x_2(x_3) &= -2x_3 \\ \rightsquigarrow \operatorname{ad} x_2 &= \operatorname{diag}(2, 0, -2) \end{aligned}$$

Durch Berechnung der anderen beiden Fälle entsteht

$$\operatorname{ad} x_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{ad} x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für κ:

$$(\kappa)_{ij} = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x_i \cdot \operatorname{ad} x_j)$$

Da κ symmetrisch ist, reicht es die untere Matrixhälfte zu berechnen. Z.B:

$$(\kappa)_{3,1} = \operatorname{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Durch Nachrechnen ergibt sich:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$\det(\kappa) = -128$$

Damit ist die Killing-Form nicht-ausgeartet und $\mathfrak{sl}(2, K)$ halbeinfach.

3 Einfache Ideale von L

Definition. Eine Lie Algebra heißt *direkte Summe* von Idealen $I_1, \ldots I_n$,wenn $L = I_1 + \ldots + I_n$ (als direkte Vektorraumsumme). Das impliziert: $[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = 0$. Man schreibt:

$$L = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$$

Satz 5. Sei L halbeinfache Lie Algebra. Dann existieren einfache Ideale $L_1, \ldots, L_n$, mit

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n.$$

Darüberhinaus ist jedes einfache Ideal von L gleich einem der L_i; und die Killing-Form auf L_i ist gleich $\kappa|_{L_i \times L_i}$.

Beweis. Sei I ein beliebiges Ideal von L. Man setze

$$I^{\perp} = \{x \in L \,|\, \kappa(x,\, y) = 0 \; \forall y \in I\}.$$

Dann ist wegen der Assoziativität von κ auch $I^{\perp}$ ein Ideal. Die Anwendung von Cartans Kriterium auf $I \cap I^{\perp}$ zeigt, dass $I \cap I^{\perp}$ auflösbar ist, und daher $I \cap I^{\perp} \subset \mathrm{Rad}(L) = \{0\}$. Da $\dim I +\dim I^{\perp} = \dim L$, ist $L = I \oplus I^{\perp}$.

Nun per Induktion nach $\dim L$ die Zerlegung:
Der Fall $dim(L) = 0$ ist klar.
Induktionsschritt: $dim(L) \leq n \rightsquigarrow dim(L) = n+1$
Sei $dim(L) = n+1$. Besitzt L kein echtes Ideal $I \neq \{0\}$, so ist L bereits einfach.

Sonst: Sei $L_1 \neq \{0\}$ ein minimales Ideal bezüglich der Dimension. Also ist $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$. Außerdem ist jedes Ideal J von L_1 ein Ideal von L, denn

$$[JL] = [J, L_1 \oplus L_1^{\perp}] \subset J + \underbrace{[JL_1^{\perp}]}_{=0} = J. \tag{2}$$

Daher ist auch $Rad(L_1)$ ein auflösbares Ideal in L, also $Rad(L_1) = \{0\}$ und L_1 ist halbeinfach. Aus der Minimalität folgt somit direkt die Einfacheit. Aus dem selben Grund ist $L_1^{\perp}$ halbeinfach. Da $dim(L_1^{\perp}) \lneq n+1$ splittet sich durch die Induktionsannahme $L_1^{\perp}$ in eine direkte Summe einfacher Ideale auf. Somit folgt die Zerlegung.

Nun zeigen wir, dass alle einfachen Ideale eindeutig sind. Sei I ein einfaches Ideal von L, dann ist $[LI]$ ein Ideal von I, mit $[LI] \neq 0$ ist, da $\mathrm{Z}(L) = \{0\}$. Daher ist $[IL] = I$, andererseits ist $I = [IL] = [IL_1] \oplus \ldots \oplus [IL_n]$, sodass alle außer ein Summand $= \{0\}$ sind. Z.B $[IL_i] = I$. Dann ist $I \subset L_i$ (da L_i Ideal ist) und $I = L_i$ da L_i einfach ist. $\square$

Corollar. Wenn L halbeinfach ist, dann ist

- $L = [LL]$,
- jedes Ideal I von L selbst halbeinfach,
- jedes Ideal I eine Summe einfacher Ideale,
- jedes homomorphe Bild von L halbeinfach.

Beweis.

$$[LL] = [LL_1] \oplus \ldots \oplus [LL_n] = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n = L$$

zeigt die erste Aussage.
Aus dem letzten Beweis wissen wir, dass $Rad(I)$ ein auflösbares Ideal von L ist. Daher ist $Rad(I) = 0$ und I halbeinfach.
Da I als Lie Algebra halbeinfach ist, besitzt es eine Darstellung als Summe einfacher Ideale $I = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$. Diese Ideale sind auch in L einfache Ideale und die Behauptung folgt.
Sei $A = \phi(L)$ ein homomorphes Bild von L. Dann ist A ein Ideal und

$$A \cong L/Ker\phi.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass L/I für alle Ideale I halbeinfach ist. Da $L = I \oplus I^\perp$ gilt

$$L/I \cong I^\perp.$$

Da $I^\perp$ halbeinfach ist, gilt die Aussage. □

4 Anhang

4.1 Lagrange Interpolation

Seien $x_i, y_i \in K$ die vorgegebenen, endlich vielen Werte, sodass für alle $i \in I$ (Indexmenge) gelten soll:

$$f(x_i) = y_i$$

für $f(X) \in K[X]$.

Dann löst das Polynom

$$f(X) = \sum_{i \in I} \left(y_i \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

das Problem, denn für ein festes i ist

$$\left(\prod_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right) (x_k) = \delta_{ki}$$

und somit

$$f(x_k) = \sum_{i \in I} y_i \delta_{ki} = y_k.$$

4.2 Spur

Sei $W \subset V$ ein Unterraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f(V) \subset W$. Dann ist $Tr(f|_W) = Tr(f)$. Dazu betrachte die Matrixdarstellung von $f|_W$ unter einer Basis von W, die zu einer Basis von V erweitert wurde. Im Folgenden sei $n = dim(W)$.

$$f|_W = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Behält man die gewählte Basis bei, so ergibt sich für f:

$$f = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & * & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und $Tr(f|_W) = Tr(f)$.