(Pro)Seminar Algebra und Zahlentheorie,

Lie-Algebren und ihre Darstellungen

Kap. II, 6.1-6.3 L-Moduln und ihre Homomorphismen

Referent: Patrick Henn

1 Moduln über Lie-Algebren

Im Folgenden seien Vektorräume endlichdimensional. Ein K-Vektorraum heißt L-Modul über einer Lie-Algebra, wenn es eine Verknüpfung gibt : $L \times V \to V$ wobei $(x, v) \mapsto x.v$, die folgende Bedingungen erfüllt:
$\forall a, b \in K, \forall v, w \in V, \forall x, y \in L$ gilt:

$$(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v) \tag{1}$$

$$x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w) \tag{2}$$

$$[xy].v = x.y.v - y.x.v \tag{3}$$

1.1 Definition L-Modul-Homomorphismus

Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt Homomorphismus von L-Moduln, wenn V und W L-Moduln sind und es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &\text{ ist linear} \\ \varphi(x.v) &= x.\varphi(v) \end{aligned} \tag{4}$$

Ist φ zusätzlich ein Isomorphismus, dann heißt φ auch Isomorphismus von L-Moduln und wir sagen V und W erzeugen äquivalente Darstellungen.

1.2 Beispiele

L-Moduln können auf viele Arten erzeugt werden.

1.2.1 Der Dualraum

Ist V ein L-Modul, dann ist der zugehörige Dualraum V* ebenfalls L-Modul, das sogenannte duale L-Modul. Dabei definiert man für $f \in V^*, v \in V, x \in L$ die Verknüpfung durch: $(x.f)(v) := -f(x.v)$.
Das dritte Axiom gilt nach folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} ([xy].f)(v) &= -f([xy].v) \\ &= -f(x.y.v - y.x.v) \\ &= -f(x.y.v) + f(y.x.v) \\ &= (x.f)(y.v) - (y.f)(x.v) \\ &= -(y.x.f)(v) + (x.y.f)(v) \\ &= (x.y.f)(v) - (y.x.f)(v) \end{aligned} \tag{5}$$

1.2.2 Das Tensorprodukt

Sind V und W L-Moduln, dann bezeichnet $V \otimes W$ das Tensorprodukt zwischen V und W. Die Multiplikation mit Elementen der Lie Algebra ist dann definiert durch x.$(v \otimes w)$ = (x.v)⊗w + v⊗(x.w) für einen Erzeuger v⊗w.
Wir rechnen das dritte Axiom wieder nach:

$$\begin{aligned}([xy].(v \otimes w) : &= [xy].v \otimes w + v \otimes [xy]w \\ &= (x.y.v - y.x.v) \otimes w + v \otimes (x.y.w - y.x.w) \\ &= (x.y.v \otimes w + v \otimes x.y.w) - (y.x.v \otimes w + v \otimes y.x.w) \\ &= (x.y - y.x).(v \otimes w)\end{aligned} \tag{6}$$

Haben wir einen Vektorraum gegeben, dann gibt es den nützlichen Isomorphismus $\psi : V^* \otimes V \to End(V)$. Ist V nun ein L-Modul (und damit V^* nach 1.2.1 ebenfalls), dann wird $V^* \otimes V$ durch die oben definierte Multiplikation ebenfalls L-Modul. Also können wir End(V) durch ψ auch als L-Modul betrachten.

1.3 Definition Irreduzibel

Ein L-Modul V heißt irreduzibel, wenn es genau zwei L-Untermoduln besitzt.
Beachte: Nach dieser Definition ist ein nulldimensionaler Vektorraum nicht irreduzibel. Diese Wahl erleichtert die nachfolgende Definition.

1.4 Definition Vollständig Reduzibel

Ein L-Modul V heißt vollständig reduzibel, wenn es die direkte Summe von irreduziblen L-Untermoduln ist.

2 Irreduzible Darstellungen

2.1 Definition Darstellung

Sei L eine Lie Algebra. Eine Darstellung von L ist ein Homomorphismus $\varphi : L \to gl(V)$, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist.
Wir nennen φ irreduzibel, wenn die einzigen unter $\varphi(x)$, für alle x $\in$ L, invarianten Räume 0 und V selbst sind.
Durch $x.v := \varphi(x)(v)$ erfüllt eine Darstellung die Axiome eines L-Moduls.

2.2 Definition Treu

Wir nennen eine Darstellung treu, wenn sie injektiv ist. Dann existiert eine Umkehrabbildung, sodass die Lie Algebra anhand des Bildes der Darstellung in gl(V) betrachtet werden kann.

2.3 Lemma

Seien $\phi, \psi \in \text{End(V)}$ mit $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$. Dann sind $\ker(\phi)$ und Eigenräume von ϕ invariant unter ψ. $\square$

2.4 Schurs Lemma

Im Folgenden nehmen wir o.B.d.A. an, dass K=$\mathbb{C}$. Dabei nutzen wir nur die Eigenschaften von $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen zu sein und Charakteristik 0 zu haben.
Sei $\phi : L \to gl(V)$ eine irreduzible Darstellung von L. Dann sind die einzigen Endomorphismen von V, die mit allen $\phi(x)$ kommutieren, die Skalaren.
Beweis:
Sei $\phi : L \to gl(V)$ irreduzibel und $\pi \in End_L(V)$ sodass ϕ und π kommutieren

$$\Rightarrow \pi \circ \phi(x) = \phi(x) \circ \pi \ \forall x \in L \tag{7}$$

Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $\text{Ker}(\pi - \lambda \cdot I_V) \neq 0$. Dann ist λ Eigenwert von π. Da ϕ irreduzibel ist und nach 2.3 die Eigenräume von π invariant lässt, folgt:

$$\begin{aligned} & \phi(x) \circ (ker(\pi - \lambda \cdot I_V)) \subseteq ker(\pi - \lambda \cdot I_V) \\ \Rightarrow \quad & (ker(\pi - \lambda \cdot I_V)) = V \\ \Rightarrow \quad & \pi - \lambda \cdot I_V = 0 \qquad \forall v \in V \\ \Rightarrow \quad & \pi = \lambda \cdot I_V \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\square$

3 Casimir Operator

Wir verallgemeinern die Killing Form. Sei L Lie Algebra, $\varphi : L \to gl(V)$ treue Darstellung des L-Moduls V. Wir definieren eine symmetrische bilineare Form $\beta : V \times V \to K$:

$$\beta(x, y) := tr(\varphi(x) \circ \varphi(y)) \ \ \forall x, y \in L \tag{8}$$

Wir beobachten: Ist und φ die adjungierte Darstellung, ist dies die Killing Form. Also definieren wir analog zur Killing Form:

$$Rad(\beta) := \{x \in L : \beta(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in L\} \tag{9}$$

Bemerkung: Wir stellen analog zur Killing Form fest, dass β assoziativ ist in dem Sinne:

$$\beta([xy], z) = \beta(x, [yz]) \ \forall x, y, z \in L \tag{10}$$

Damit ist auch das Radikal von β ein Ideal.

3.1 Lemma

Sei L eine halbeinfache Lie Algebra und $\varphi : L \to gl(V)$ eine treue Darstellung von L. Dann ist β nicht ausgeartet.

Beweis:
Da I=Rad(β) Ideal ist und $\beta(x,y) = 0 \ \forall x, y \in I$, wissen wir, dass $\varphi(I) \subset gl(V)$ eine auflösbare Unter-Lie-Algebra ist (nach dem Cartan Kriterium). Da φ treu ist, ist also auch I auflösbar. Nach Voraussetzung war L halbeinfach, d.h. I=0. $\square$

3.2 Zur Konstruktion des Casimir Operators

Ist ϕ treu, so gibt es zu $\{x_1, ..., x_n\}$, einer Basis von L, dazugehörige Elemente $\{y_1, ..., y_n\}$, sodass gilt:

$$\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij} \text{ für alle } i, j \in \{1, ..., n\} \tag{11}$$

3.3 Lemma

Sei x $\in$ L und $[x, x_i] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Dann folgt:

$$[x, y_i] = \sum_{j=1}^{n} -a_{ji} y_j \quad \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{12}$$

Beweis:

$$\beta([x, x_i], y_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta(x_j, y_k) = a_{ik} \tag{13}$$

Schreiben wir dann für$[x, y_k] = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} y_j$, gewinnen wir durch die Assoziativität:

$$a_{ik} = \beta([x, x_i], y_k) = -\beta([x_i, x], y_k) = -\beta(x_i, [x, y_k]) = -\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \beta(x_i, y_j) = -b_{ki} \tag{14}$$

$\square$

3.4 Der Casimir Operator

Sei L eine halbeinfache Lie Algebra, V ein L-Modul und $\varphi : L \to gl(V)$ eine treue Darstellung von L. Wir definieren den Casimir Operator als Abbildung $C : V \to V$ durch:

$$C(v) := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_i \cdot v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \varphi(y_i) \tag{15}$$

Dabei spricht man bei letzterem vom zu φ korrespondierenden Casimir Operator. Die x_i und die y_i sind wie in (3.2) gewählt.

3.5 Eigenschaften des Casimir Operator

(i) C kommutiert mit allen $\varphi(x)$
(ii) tr(C) = dim(L)
(iii) C ist L-Modul-Homomorphismus
Beweis:
zu (i) rechnen wir für eine Darstellung ϕ von L $[\phi(x), C]$ x $\in$ L aus:

$$\begin{aligned}
[\phi(x), C] &= \sum_i [\phi(x), \phi(x_i)]\phi(y_i) + \sum_i \phi(x_i)[\phi(x), \phi(y_i)] \\
&= \sum_{ij} a_{ij}\phi(x_j)\phi(x_i) + \sum_{ij} b_{ij}\phi(x_i)\phi(x_j) \\
&= 0 \\
&\Rightarrow C \text{ kommutiert mit allen } \phi(x)
\end{aligned} \tag{16}$$

□

zu (ii) betrachte:

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} tr(\varphi(x_i) \circ \varphi(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, y_i) = n \tag{17}$$

□

zu (iii) zeigen wir: $C(x \cdot v) - x \cdot (C(v)) = 0$:

$$C(x \cdot v) - x \cdot (C(v)) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i(xv)) - \sum_{i=1}^{n} x(x_i(y_i v)) \tag{18}$$

Dazu addieren wir $0 = -x_i(x(y_i v)) + x_i(x(y_i v))$ zu jedem Summanden:

$$C(x \cdot v) - x \cdot (C(v)) = \sum_{i=1}^{n} x_i([y_i x]v) - \sum_{i=1}^{n} [x_i, x](y_i v) = 0 \tag{19}$$

□

Bemerkung:
Sobald wir den Satz von Weyl bewiesen haben, folgern wir aus der Existenz einer Zerlegung in irreduzible Untermoduln eines Moduls und damit einer Zerlegung von Darstellungen in irreduzible Darstellungen, dass der Casimir Operator sogar unabhängig von der Wahl der Basis $\{x_1, ..., x_n\}$ ist.

3.6 Beispiel

Sei L = $\mathfrak{sl}$(V), K ein Körper, V = $K^{2\times 2}$ und $\varphi : L \to gl(V)$ die Identität. Weiter ist (x,h,y) die Standardbasis von L und (y,$\frac{1}{2}$h,x) die dazu duale Basis:

x = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

h = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Dann ist $C = tr(\varphi(x_i)\varphi(y_j)) = tr(x_i y_j) = \delta_{ij}$, wie gewünscht.

y = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Der Casimir Operator errechnet sich nach Definition durch:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\varphi(y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = xy + \frac{1}{2}h^2 + yx = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{20}$$

4 Satz von Weyl

4.1 Lemma

Sei ϕ eine Darstellung einer halbeinfachen Lie Algebra L. Dann ist ϕ(L) $\subset \mathfrak{s}l(V)$. Damit operiert L trivial auf jedem eindimensionalem L-Modul.
Beweis:
Da L halbeinfach ist, gilt: L = [LL]. Betrachte dann:

$$\phi(L) = \phi([L, L]) = [\phi(L), \phi(L)] \subseteq [gl(V), gl(V)] \subseteq \mathfrak{sl}(V) \tag{21}$$

Ist V eindimensional, so gilt: $\phi(L) \subseteq \mathfrak{sl}(V) = 0$ □

4.2 Satz von Weyl

Sei $\phi : L \to gl(V)$ eine (endlichdimensionale) Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra mit V $\neq$ 0. Dann ist das L-Modul V vollständig reduzibel.
Beweis:
Sei V ein L-Modul, $\phi : L \to gl(V)$ eine Darstellung von L. Dann gibt es ein Untermodul W von V. Weiterhin nehmen wir an, dass ϕ treu ist. (Sollte ϕ nicht treu sein, betrachten wir einfach $\phi : L/I \to gl(V)$ mit I = ker(ϕ).)

Wir beweisen den Satz von Weyl zuerst für den Spezialfall dim(W) = dim(V)-1:
In diesem Fall ist V/W ein triviales L-Untermodul und wir erhalten aus Lemma (4.1), dass L trivial darauf wirkt. Also gilt $C(V/W) = 0$ bzw. V/W $\subseteq ker(C)$ und damit insbesondere $C(V/W) \subseteq W$.Wir zeigen: Ker(C) ist ein Komplement zu W in V:
Nehmen wir an W sei irredzuibel. Da C ein L-Modul-Homomorphismus ist, ist ker(C) ein Untermodul von V. Wir wissen schon, dass $C(v) = 0$ für alle v $\in$ V/W. Da der Casimir Operator mit allen Endomorphismen kommutiert und W irreduzibel ist folgt durch Schurs Lemma, dass $C(w) = \lambda w$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ für alle w $\in$ W.
Wir behaupten $\lambda \neq 0$. Das sehen wir durch Berechnung der Spur von C. Einerseits folgt mit Gleichung (17), dass tr($C\big|_W$) = dim(W) $\neq$ 0. Jedoch würde $\lambda = 0$ aber tr($C\big|_W$) $= tr(0_{gl(W)}) = 0$ implizieren. Widerspruch!

Durch nachzählen der Dimensionen und $W \cap ker(C) = \{0\}$ sehen wir dann, dass V = W $\oplus$ ker(C) und wir sind fertig.

Doch was, wenn W garnicht irreduzibel ist? Dann Betrachten wir folgende Induktion:

$\underline{Induktionsanfang:}$

dim(W) = 0 und dim(V) = 1. Dann besitzt V eine Zerlegung als direkte Summe, in der ein eindimensionales Untermodul von V enthalten ist.

$\underline{Induktionsvoraussetzung:}$

Alle Moduln mit dim $\leq$ n-1 besitzen eine Zerlegung in eine direkte Summe von irreduziblen Untermoduln.

$\underline{Induktionsschritt:}$

Angenommen, $W \subset V$ habe ein Untermodul $\{0\} \neq W` \subset W$.

Dann wissen wir aus den Isomorphiesätzen:

$$(V/W`)/(W/W`) \cong (V/W) \tag{22}$$

Also hat W/W‘ ein eindimensionales Komplement in V/W‘. Dieses bezeichnen wir mit $\tilde{W}/W`$. Demzufolge gilt nun $\tilde{W}/W` \cong V/W$. Da nun dim($\tilde{W}$) <dim(V) und dim(W‘) <dim(W), greift die Induktionsvoraussetzung. W‘ hat also ein eindimensionales Komplement in $\tilde{W}$, sodass:

$$\tilde{W} = W` \oplus X \tag{23}$$

für ein eindimensionales X. Dann ist V = W $\oplus$ X und somit die Aussage für den Fall dim(V) = n gezeigt.

Ist W also nicht irreduzibel, so gibt es einen nichttrivialen Untermodul von W, wodurch die Induktion angewandt werden kann, um W auf den irreduziblen Fall zurückzuführen.

Wagen wir uns nun an den allgemeinen Fall: Sei W wieder ein L-Untermodul von V. Dann ist M := Hom(V,W), die Menge der linearen Abbildungen von V nach W, ebenfalls ein L-Modul durch die Definition:

$$(x \cdot f)(v) = x \cdot f(v) - f(x \cdot v) \quad \forall x \in L, f \in M \text{ und } v \in V. \tag{24}$$

Wir definieren weiter:

$$M_S := \{f \in M : f \downarrow_W = \lambda \cdot 1_W\} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}, \tag{25}$$

$$M_0 := \{f \in M : f \downarrow_W = 0\}. \tag{26}$$

Wir sehen leicht: $M_0 \subseteq M_S$ und beide sind selbst auch L-Moduln.

Der Quotient M_S/M_0 ist eindimensional, da jedes $f \in M_S$ in M_S/M_0 durch λ bestimmt ist. Nun können wir den Satz für den Spezialfall $\dim(V) = \dim(W) + 1$ anwenden, denn $\dim(M_S) = \dim(M_0) + 1$. So erhalten wir $M_S = M_0 \oplus C$, für ein eindimensionales Untermodul $C \subseteq M_S$. Folglich ist C ein triviales L-Modul und enthält damit insbesondere

ein Element $0 \neq f \in C$, sodass $x \cdot f = 0 \; \forall x \in L$. Daraus folgern wir, dass f Homomorphismus ist. Deshalb ist K:=ker(f) ein Untermodul von V.
Behauptung: $V = K \oplus W$.
Für $v \in K \cap W$ ist $f = 0_W$. Andererseits ist $f \downarrow_W = \lambda I_W$, also $f(w) = \lambda w$. Der einzige logische Ausweg ist nun, dass $K \cap W = \{0\}$. Also ist der Satz bewiesen, denn nun gilt:

$$\begin{aligned} dim(K) = dim(V) - dim(im(f)) \geq dim(V) - dim(W) \\ \Rightarrow V = K \oplus W \end{aligned} \tag{27}$$

$\square$