Lie Algebren und ihre Darstellungen

Vortrag 8 : Innere Derivationen und Jordanzerlegung

---

1 Aufgaben

Aufgabe 1.1. *Seien x, y, z eine Basis für eine dreidimensionale lösbare Lie-Algebra. Weiter soll gelten:*

$$[x, y] = z \quad [x, z] = y \quad [y, z] = 0$$

Damit können wir ad x, ad y *und* ad z *als folgende Matritzen darstellen:*

$$\text{ad } x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ad } y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ad } z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Killingform in Bezug auf die Basis $\{x, y, z\}$ schreiben als:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist das Radikal der Killingform $\{by + cz | b, c \in K\}$.

Aufgabe 1.2. *Sei L eine einfache Lie Algebra. Weiter seien $\beta(x, y)$ und $\gamma(x, y)$ zwei symmetrische assoziative Bilinearformen auf L. Wenn nun β, γ nicht ausgeartet sind, gilt es zu zeigen, dass sie sich nur um einen skalaren Faktor unterscheiden.*

L ist bezüglich ad *ein irreduzibles L-Modul und der Dualraum L^* ebenso. Wir können eine lineare Abbildung $\phi : L \to L^*, x \mapsto \beta_x$ definieren, wobei $\beta_x \in L^*$ durch $\beta_x(y) = \beta(x, y)$ vollständig bestimmt ist. Aus der Assoziativität folgt für $x, y, z \in L$:*

$$\begin{aligned} \phi((\text{ad } x).y)(z) &= \beta_{[x,y]}(z) \\ &= -\beta([y, x], z) \\ &= -\beta(y, [x, z]) \\ &= -\beta_y((\text{ad } x).z) \\ &= ((\text{ad } x).\beta_y)(z) \\ \Rightarrow \phi((\text{ad } x).y) &= (\text{ad } x).\phi(y) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass ϕ ein L-Modulhomomorphismus ist. Auf ähnliche Weise können wir ein $\psi : L^* \to L, f \mapsto x_f$ definieren. Dabei ist x_f definiert durch die Eigenschaft $f(z) = \gamma(x_f, z)$ für alle z. Dieses x_f existiert, da γ nicht ausgeartet ist. Dabei sind die Regeln zum Rechnen in dualen L-Moduln essenziell.
Sei V ein L-Modul. Dann ist V^* ebenfalls ein L-Modul durch die Eigenschaft:

$$(x.f)(v) = -f(x.v) \quad \forall\, v \in V, f \in V^*, x \in L$$

Damit können wir und nun ein ad* *definieren:*

$$((\text{ad}^* \; x).f)(y) = -f((\text{ad } x)(y)) \quad \forall f \in V^*, x, y \in L$$

Analog zu oben finden wir nun für $f \in L^*$:

$$\begin{aligned}
\gamma(x_{(\text{ad}^* \; x).f}, z) &= ((\text{ad}^* \; x).f)(z) \\
&= -f([x, z]) \\
\gamma((\text{ad } x).x_f, z) &= -\gamma([x_f, x], z) \\
&= -\gamma(x_f, [x, z]) \\
&= -f([x, z]) \\
\Rightarrow x_{(\text{ad}^* \; x).f} &= (\text{ad } x).x_f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi((\text{ad } x).f) &= x_{(\text{ad } x).f} \\
(\text{ad } x).\psi(f) &= (\text{ad } x).x_f
\end{aligned}$$

Nun folgt aus obiger Gleichung $x_{(\text{ad } x).f} = (\text{ad } x).x_f$:

$$\psi((\text{ad } x).f) = (\text{ad } x).\psi(f)$$

Also ist ψ ebenfalls ein L-Modulhomomorphismus. Damit ist $\psi \circ \phi$ ein L-Modulendomorphismus von L, der mit allen (ad x) *kommutiert. Da L ein irreduzibles L-Modul ist folgt nach Schur's Lemma:*

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi &= \lambda I \quad (\lambda \in K) \\
x_{\beta_x} &= \psi(\beta_x) \\
&= \lambda x \\
\gamma(\lambda x, y) &= \gamma(x_{\beta_x}, y) \\
&= \beta_x(y) = \beta(x, y) \\
\Rightarrow \beta(x, y) &= \lambda\gamma(x, y) \quad \forall x, y \in L
\end{aligned}$$

2 Innere Derivationen

Im gesamten Unterabschnitt sei L eine halbeinfache Lie Algebra über einem Körper K mit $\text{char}(K) = 0$.

Als weitere Konsequenz dessen, dass die Killing-Form nicht-ausgeartet ist, haben wir einen wichtigen Satz über $\text{Der}(L)$ einer halbeinfachen Lie Algebra, jedoch benötigen wir zunächst einen kleines Hilfslemma.

Lemma 2.1. *Seien $x, y \in L$ und $\delta \in \text{Der}(L)$. Dann ist* (ad L) *ein Ideal von* $\text{Der}(L)$, *es muss also gelten:*

$$[\delta, (\text{ad } x)] = (\text{ad } \delta x).$$

Satz 2.2. *Für eine halbeinfache Lie Algebra L gilt:* $\mathrm{Der}(L) = (\mathrm{ad}\ L)$.

Beweis. Da L halbeinfach ist, ist das Zentrum $Z(L) = \{0\}$, daher ist $L \cong (\mathrm{ad}\ L)$. Setzen wir nun $M = (\mathrm{ad}\ L)$ und $D = \mathrm{Der}(L)$, dann wissen wir aus der Halbeinfachheit von M, dass auch κ_M nicht-ausgeartet ist. Nach Lemma 2.1 ist $[D, M] \subset M$. Setze nun

$$I := M^{\perp} = \{\delta \in D | \kappa_D(\delta, M) = 0\}.$$

Dann ist I ein Ideal von D und es gilt $\dim(I) \geq \dim(D) - \dim(M)$. Wir können für den Schnitt $I \cap M = \{0\}$ schließen, da $\kappa_D|_{D\times M}$ nicht-ausgerartet ist. Da I und M beide Ideale von D sind, folgt $[I, M] \subset I \cap M = \{0\}$. Sei nun $\delta \in I$, dann gilt nach Lemma 2.1: $(\mathrm{ad}\ \delta x) = [\delta, (\mathrm{ad}\ x)] = 0$ für alle $x \in L$. Daraus folgt $\delta x = 0$ für alle $x \in L$, da $L \cong (\mathrm{ad}\ L)$ - also $\delta = 0$. Deshalb ist $I = \{0\}$. Damit gilt $0 \geq \dim(D) - \dim(M)$ und die Behauptung folgt. □

Das Ergebnis dieses Satzes kann nun zur Definition einer abstrakteren Jordanzerlegung herangezogen werden. Für eine endlichdimensionale K-Algebra $\mathfrak{A}$ gilt nach Lemma 2.1.5 aus Vortrag 5, dass $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ alle halbeinfachen und alle nilpotenten Anteile der Elemente aus $\mathrm{End}_K(\mathfrak{A})$ enthält.

Definition 2.3. Sei $x \in L$, dann liegt $(\mathrm{ad}\ x) \in \mathrm{End}_K(L)$ und wir können es mithilfe der Jordanzerlegung in seinen halbeinfachen und seinen nilpotenten Anteil zerlegen, die beide in $\mathrm{Der}(L) = (\mathrm{ad}\ L)$ liegen. Da $\mathrm{ad} : L \to Der(L)$ bijektiv ist $\exists! s, n \in L$, sodass;

$$(\mathrm{ad}\ x) = (\mathrm{ad}\ s) + (\mathrm{ad}\ n).$$

Dann ist $x = s + n$ mit $[s, n] = 0$, da s ad-halbeinfach und n ad-nilpotent ist; wir nennen diese den halbeinfachen und den nilpotenten Anteil von x. Wir nennen $x = s + n$ die *abstrakte* Jordanzerlegung von x.

Bemerkung 2.4. *Betrachte die gleiche Sitation wie in Definition 2.3. Für s und n wird (auch im Folgenden) oft x_s und x_n notiert.*

Wir müssen uns nun die wichtige Frage stellen:

Ist $L \subset \mathfrak{gl}(V)$, ist dann bereits die abstrakte Jordanzerlegung gleich der gewöhnlichen?

Für den Moment wollen wir nur den Spezialfall $L = \mathfrak{sl}(V)$ betrachten, wobei V endlichdimensional sein soll.

Beweis. Sei $x \in L$. Dann können wir x mit der gewöhnlichen Jordanzerlegung zerlegen zu $x = x_s + x_n$, wobei x_s der halbeinfache und x_n der nilpotente Anteil von x sind. Nun ist $\mathrm{tr}(x_n) = 0$ und somit auch $\mathrm{tr}(x_s) = 0$ da $\mathrm{tr}(x) = \mathrm{tr}(x_s) + \mathrm{tr}(x_n)$ - also liegen auch x_s und x_n in $\mathfrak{sl}(V)$. Nach Lemma 2.1.4 aus Vortrag 5 gilt: $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\ x_s)$ ist halbeinfach und $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\ x_n)$ ist nilpotent. Damit ist auch $(\mathrm{ad}_L\ x_s)$ halbeinfach und $(\mathrm{ad}_L\ x_n)$ nilpotent. Daraus ergibt sich

$$[(\mathrm{ad}_L\ x_s), (\mathrm{ad}_L\ x_n)] = (\mathrm{ad}_L\ [x_s, x_n]) = 0.$$

Damit ist die gewöhnliche Jordanzerlegung gleichzeitig auch die abstrakte und wir haben das gewünschte Ergebnis erhalten. □

3 Erhaltung der abstrakten Jordanzerlegung

Lemma 3.1. *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Sei*

$$x = x_s + x_n$$

die gewöhnliche Jordan-Zerlegung von $x \in \mathrm{End}(V)$. Dann folgt aus $x \in L$ auch schon $x_s, x_n \in L$.

Beweis. Um das Lemma zu beweisen, überlegen wir uns zuerst, was die Aussage genau für die Eigenschaften von L bedeutet:

(i) Zuerst versuchen wir, eine gute Charakterisierung von L in $\mathfrak{gl}(V)$ zu finden.

Behauptung: Wir können L schreiben als

$$L = N := N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) \cap \bigcap_{\substack{W \subset V \\ W \text{ Untermodul}}} SN_{\mathfrak{gl}(V)}(W),$$

wobei wir definieren

a) $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) := \{y \in \mathfrak{gl}(V) | [y, L] \subset L\}$,

b) $SN_{\mathfrak{gl}(V)}(W) := \{y \in \mathfrak{gl}(V) | y(W) \subset W \text{ und } \mathrm{tr}(y|_W) = 0\}$.

Beweis.

a) „$\subset$“:

$L \subset N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ folgt sofort aus der Tatsache, dass L eine Lie Algebra ist. Ebenso folgt für $y \in L$, dass $y(W) \subset W$ gilt schon daraus, dass W eine L-Unterdarstellung ist. Da L halbeinfach ist, ist $L = [L, L]$, also kann man $y \in L$ schreiben als Summe von Lie-Klammern:

$$y = \sum_i [x_i^{'}, x_i^{''}] \text{ mit } x_i^{'}, x_i^{''} \in L.$$

Daher gilt $\mathrm{tr}(y|_W) = 0$.

b) „$\supset$“:

Wir finden ein Ideal $I \subset N$, für das

$$N = I \oplus L$$

gilt, dann gilt insbesondere $[L, I] = 0$. Damit wissen wir: Jedes $y \in I$ operiert auf jedem L-Untermodul W durch einen L-Endomorphismus $y|_W$, auf einem einfachen Untermodul W operiert y wie eine Skalarmultiplikation ($y|_W = \lambda_W \in K$); $\mathrm{tr}(y|_W) = 0$ impliziert überdies $y|_W = 0$ (Charakteristik $= 0$!) . Da V wegen des Satzes von Weyl die direkte Summe geeigneter einfacher L-Darstellungen ist, folgt $y = 0$, also war schon $I = \{0\}$. $\square$

(ii) Nun zeigen wir, dass mit $x \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ auch der halbeinfache und der nilpotente Anteil von x in $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ liegen; dieses ist äquivalent zu $(\text{ad } x)(L) \subset L$. Dann gilt aber auch $(\text{ad } x)_s(L) \subset L$ und daher folgt $x_s \in N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$. Analog zeigt man die gewünschte Eigenschaft für x_n.

(iii) Als letzten Schritt zeigen wir noch, dass $x \in SN_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ impliziert, dass $x_s, x_n \in SN_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$. x_s und x_n lassen sich bekanntermaßen als Polynome ohne konstanten Term schreiben, deshalb gilt also $x_{s,n}(W) \subset W$. Weiter ist $\text{tr}(x_n) = 0$ und somit folgt auch

$$\text{tr}(x_s) = \text{tr}(x - x_n) = 0.$$

Darum muss also $x_s, x_n \in L$ gelten und die Behauptung folgt.

$\square$

Satz 3.2. *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, L eine halbeinfache V-Lie Algebra und $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung von L. Weiter sei $x = s + n$ die abstrakte Jordanzerlegung von $x \in L$. Dann ist*

$$\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$$

die gewöhnliche Jordanzerlegung von $\rho(x) \in \text{End}_K(V)$.

Beweis. Sei $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlichdimensionale L-Darstellung. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(\text{ad } x)"] & \rho(L) \arrow[r, hook] \arrow[d, "(\text{ad } \rho(x))"] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "(\text{ad } \rho(x))"] \\
L \arrow[r, two heads] & \rho(L) \arrow[r, hook] & \mathfrak{gl}(V)
\end{tikzcd}$$

Wegen den Eigenschaften der gewöhnlichen Jordan-Zerlegung kommutiert das Diagramm auch mit den halbeinfachen Anteilen.
Nach Definition gilt $(\text{ad}_L\ x)_s = (\text{ad}_L\ s)$ und wir wissen bereits, dass

$$(\text{ad}_{\mathfrak{gl}(L)}\ \rho(s)) = (\text{ad}_{\mathfrak{gl}(L)}\ \rho(x)_s)$$

gilt. Also erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(\text{ad}_L\ s)"] & \rho(L) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "(\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\ \rho(x)_s)"] \\
L \arrow[r, two heads] & \rho(L) \arrow[r, hook] & \mathfrak{gl}(V)
\end{tikzcd}$$

Da die beiden Quadrate kommutieren steht am Mittelpfeil

$$(\text{ad}_{\rho(L)}\ \rho(s)) = (\text{ad}_{\rho(L)}\ \rho(x)_s).$$

Da aber schon

$$(\mathrm{ad}_{\rho(L)}) : \rho(L) \to \mathfrak{gl}(\rho(L))$$

injektiv ist, gilt $\rho(s) = \rho(x)_s$. Die Argumentation funktioniert analog für den nilpotenten Teil. $\square$