Lie Algebren und ihre Darstellungen

Vortragender: Martin Michajlow

Vortrag 9 : Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, K)$

0 Erinnerung

Im Folgenden sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$. Ebenso sei jeder K-Vektorraum V endlich dimensional.

0.1 Die spezielle Lie Algebra $\mathfrak{sl}(2, K)$

Die „spezielle lineare Lie Algebra" $\mathfrak{sl}(2, K)$ umfasst alle Elemente A von $\mathfrak{gl}(2, K)$ mit $\mathrm{tr}(A) = 0$. Eine Basis von L ist gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $[hx] = 2x$, $[hy] = -2y$, $[xy] = h$.

Definition 0.2 (L-Modul)**.** Sei L eine (beliebige) Lie Algebra. Ein K-Vektorraum V mit einer Verknüpfung $L \times V \to V, (x, v) \mapsto x.v$ heißt „L-Modul" wenn für beliebige $x, y \in L$, $v, w \in V$, $a, b \in K$ gilt:

M1 $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$,

M2 $x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w)$,

M3 $[xy].v = x.y.v - y.x.v$.

Durch eine Darstellung $\Phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ wird V zum L-Modul mit $x.v = \Phi(x)(v)$. Ein L-Modul heißt *irreduzibel*, wenn er nur $\{0\}$ und sich selbst als Untermodul hat.

Im Folgenden ist L immer $\mathfrak{sl}(2, K)$.

1 Gewichte und Maximalvektoren

Sei V ein beliebiger L-Modul, der durch die Darstellung $\Phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ induziert wird. Da h (nach der abstrakten Jordanzerlegung) halbeinfach ist, ist $\Phi(h)$ diagonalisierbar in $\mathfrak{gl}(V)$. Somit lässt sich V in Eigenräume des Endomorphismus $\Phi(h)$ zerlegen, also $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ wobei $\lambda \in K$ und $V_\lambda = \{v \in V | h.v = \lambda v\}$ gilt. (Es gibt für jedes $\lambda \in K$ einen solchen Unterraum V_λ von V. Dieser ist $\{0\}$, wenn λ kein Eigenwert von $\Phi(h)$ ist.)

Definition 1.1. Sei $V_\lambda \neq \{0\}$. Dann nennt man λ ein **Gewicht** von h in V, V_λ einen **Gewichtsraum**.

Lemma 1.2. *Sei $v \in V_\lambda$. Dann gilt:*

(i) $x.v \in V_{\lambda+2}$,

(ii) $y.v \in V_{\lambda-2}$.

Beweis. Wir rechnen einfach nach:

(i) $h.(x.v) = [hx].v + x.h.v = 2x.v + \lambda x.v = (\lambda + 2)x.v$,

(ii) $h.(y.v) = [hy].v + y.h.v = -2y.v + \lambda y.v = (\lambda - 2)y.v$.

□

Bemerkung 1.3. Da V als endlich dimensional angenommen wurde, hat V endlich viele Gewichtsräume. Somit gibt es $\alpha, \beta \in K$, so dass $V_\alpha \neq \{0\}$ und $V_{\alpha+2} = \{0\}$, wie auch $V_\beta \neq \{0\}$ und $V_{\beta-2} = \{0\}$. Damit folgt aus Lemma 1.2, dass $\Phi(x)$ und $\Phi(y)$ nilpotent sind.

Definition 1.4. Sei V ein L-Modul und $V_\lambda \neq 0$ ein Gewichtsraum, so dass für $0 \neq v \in V_\lambda$ gilt $x.v = 0$. Dann nennt man v einen **Maximalvektor** zum Gewicht λ.

2 Klassifizierung von irreduziblen L-Moduln

Definition 2.1. Es sei V ein irreduzibler L-Modul. Wähle einen Maximalvektor $v_0 \in V_\lambda$ aus. Weiter sei $v_{-1} := 0, v_i := \frac{1}{i!} y^i.v_0$ (für $i \geq 0$).

Lemma 2.2. *Sei, ausgehend von einem Maximalvektor v_0, v_i wie in 2.1 definiert für alle $i \geq -1$. Dann gilt*

(i) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i$,

(ii) $y.v_i = (i+1)v_{i+1}$,

(iii) $x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt im Wesentlichen durch Nachrechnen.

(i) Aus Lemma 1.2 folgt durch wiederholte Anwendung $y^i.v_0 \in V_{\lambda-2i}$. Damit folgt die Behauptung.

(ii) ist die Definition von v_i in rekursiver Form.

(iii) Induktion über i.

  a) Der Fall $i = 0$ ist klar, da v_0 Maximalvektor ist.

  b) Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für $i - 1$ bewiesen.

  c) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} ix.v_i &\overset{(ii)}{=} x.y.v_{i-1} \\ &= [xy].v_{i-1} + y.x.v_{i-1} \\ &= h.v_{i-1} + y.x.v_{i-1} && \mid \text{Induktionsvoraussetzung und (i)} \\ &= (\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)y.v_{i-2} && \mid \text{(ii)} \\ &= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (i-1)(\lambda - i + 2)v_{i-1} \\ &= i(\lambda - i + 1)v_{i-1} \end{aligned}$$

  Teile beide Seiten durch i.

□

2.3 Folgerungen aus Lemma 2.2

Aus (i) folgt, dass die v_i Eigenvektoren von $\Phi(h)$ zu verschiedenen Eigenwerten sind und damit linear unabhängig. Sei m die kleinste ganze Zahl, so dass gilt: $v_m \neq 0, v_{m+1} = 0$. Nach (ii) gilt dann $v_{m+i} = 0$ für alle $i > 0$.

(i),(ii) und (iii) zeigen, dass der V-Unterraum mit der Basis $\{v_0, \ldots, v_m\}$ ein L-Untermodul bildet. (Betrachte hierzu, dass die Abgeschlossenheit unter Multiplikation mit x, y und h gerade durch (i),(ii),(iii) beschrieben ist. Jede Linearkombination von v_i wird damit auf eine Linearkombination von v_i abgebildet.)
Nennen wir diesen L-Untermodul U. V ist irreduzibel und es gilt $U \neq \{0\}$. Somit gilt $U = V$.

Korollar 2.4. *Mit der Basis $\{v_0, \ldots, v_m\}$ von V lassen sich $\Phi(x), \Phi(y)$ und $\Phi(h)$ bezüglich dieser explizit in Matrixform aufschreiben. Dabei hat $\Phi(h)$ Diagonalgestalt, $\Phi(x)$ ist eine strikte obere Dreiecksmatrix und $\Phi(y)$ ist eine strikte untere Dreiecksmatrix. Somit lässt sich $\Phi(a)(v)$ für ein beliebiges $a \in L$ und $v \in V$ berechnen.*

Beweis. Die Gestalten von $\Phi(h), \Phi(x), \Phi(y)$ ergeben sich direkt aus den Abbildungsvorschriften in (i),(ii) und (iii). Die anderen Aussagen sind klar. $\square$

Betrache nun Gleichung (iii) für $i = m + 1$: $0 = (\lambda - m)v_m$. Da $v_m \neq 0$ folgt $\lambda = m$. Also ist das Gewicht eines Maximalvektors (von h) eine nicht negative ganze Zahl.

Definition 2.5. Sei V ein L-Modul. Dann nennt man das größte (positive) Gewicht λ von h das **Höchstgewicht** oder **Maximalgewicht** von V.

Da V=U gilt, $\{v_0, \ldots, v_m\}$ Basis von U ist und alle v_i unterschiedliche Eigenwerte haben, gilt für ein Gewicht μ mit $V_\mu \neq \{0\}$, $\dim(V_\mu) = 1$. Es gibt also (bis auf Skalierung) genau einen Maximalvektor, nämlich v_0 mit $\lambda = m = \dim(V) - 1$ (da es $m + 1$ Eigenvektoren von $\Phi(h)$ gibt, die V aufspannen).
Damit lässt sich ein zusammenfassender Satz formulieren:

Satz 2.6. *Sei V ein irreduzibler L-Modul für $L = \mathfrak{sl}(2, K)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) V ist direkte Summe von Gewichtsräumen V_μ, mit $\mu = m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$, wobei $m + 1 = dim(V)$ und $dim(V_\mu) = 1$ für alle μ.

(ii) V hat einen (bis auf skalare Vielfache $\neq 0$) eindeutigen Maximalvektor zum Gewicht m.

(iii) Die Operation zwischen L und V ist durch die Formeln in Lemma 2.2 definiert, wenn die Basis nach der vorgegeben Vorschrift gewählt wurde. Insbesondere existiert (bis auf Isomorphie) höchstens ein irreduzibler L-Modul jeder möglichen Dimension $m+1$, $m \geq 0$.

Korollar 2.7. *Sei V ein endlich dimensionaler (nicht notwendigerweise irreduzibeler) L-Modul, der durch $\Phi : L \times V \to V$ definiert ist.*

(i) Dann sind alle Eigenwerte von $\phi(h)$ ganzzahlig und jeder tritt gemeinsam mit seinem Negativen gleich oft auf.

(ii) Jede Zerlegung von V in eine direkte Summe von irreduzibelen Untermoduln hat die gleiche Anzahl von Summanden, nämlich $dim(V_0)+dim(V_1)$ (wobei V_0 und V_1 die entsprechenden Gewichtsräume sind).

Erinnerung 2.8. *Satz von Weyl: Sei $\Phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlich dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie Algebra. Dann ist Φ vollständig reduzibel.*

Beweis. Für $V = 0$ ist nichts zu zeigen.
Andernfalls lässt sich Gebrauch vom *Satz von Weyl* machen.
Äquivalent zur Folgerung des Satzes ist: V ist als L-Modul vollständig reduzibel und besitzt daher eine Zerlegung in eine direkte Summe von irreduziblen L-Moduln. Da $\mathfrak{sl}(2, K)$ halbeinfach und V endlich dimensional ist (also äquivalent dazu, dass Φ endlich dimensional ist), greift der Satz und V ist eine direkte Summe von irreduziblen L-Moduln. Für jedes einzelne gilt Satz 2.6 *(i)*. Mit der Vereinigung der Untermoduln folgt deshalb *(i)*. Außerdem hat jeder irreduzible Untermodul entweder das Gewicht 1 oder 0, jedoch nicht beide (da alle Gewichte entweder gerade oder ungerade sind). Dies folgt ebenfalls aus Satz 2.6 *(i)*. Somit ist auch *(ii)* des Korollars bewiesen. □

Bemerkung 2.9. Die Struktur von endlich dimensionalen Darstellungen der Lie Algebra L, bzw ihren L-Moduln, ist nun weitestgehend untersucht, ohne jedoch zu betrachten, ob ein L-Modul V jedes beliebigen Maximimalgewichts $m \in \mathbb{N}$ existiert, und wie diese aussehen. Diese Aufgabe soll im Folgenden angegangen werden.

Für $m \in \{0, 1, 2\}$, also $\dim(V) \in \{1, 2, 3\}$, sind die gesuchten L-Module einfach zu finden:

(i) $m = 0$: „Der triviale L-Modul“ $V := K, \Phi(h) = \Phi(x) = \Phi(y) = 0$. Es existiert genau ein Gewichtsvektor.

(ii) $m = 1$: „Die natürliche Darstellung“ $V := K^2$

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi(y) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Phi(h) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = v_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) $m = 2$: „Die adjungierte Darstellung“ $V := \mathfrak{sl}(2, K)$ (Wiederholung aus Vortrag 5)

$$v_0 := x, v_1 := h, v_m = v_2 := y.$$

Damit ist:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \Phi(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Diagonalgestalt von $\Phi(h)$, obere/untere Dreiecksgestalt von $\Phi(x), \Phi(y)$.)

3 Konstruktion von L-Moduln beliebigen Höchstgewichts

Wir betrachten den Vektorraum $\mathscr{R} = K[X, Y]$ der Polynome in 2 Variablen, der mit der Polynommultiplikation sogar zum einem Ring bzw. zu einer Algebra wird. Eine Basis von $\mathscr{R}$ ist die Menge der Monome $\{X^i Y^j | i, j \in \mathbb{N}\}$.

Sei $\Phi : \mathfrak{sl}(2, K) \to \mathfrak{gl}(\mathscr{R})$ die lineare Abbildung

$x \mapsto X\frac{\partial}{\partial Y}$,

$y \mapsto Y\frac{\partial}{\partial X}$,

$h \mapsto (X\frac{\partial}{\partial Y}) \circ (Y\frac{\partial}{\partial X}) - (Y\frac{\partial}{\partial X}) \circ (X\frac{\partial}{\partial Y})$.

Anmerkung.

(i) Diese Definition hat zunächst nichts mit Analysis zu tun, wir betrachten lediglich die Abbildungsvorschriften der Differentialoperatoren auf $\mathscr{R}$.

(ii) $\Phi(h) = [\Phi(x), \Phi(y)]$ im Sinne der Klammerung über Vektorräumen linearer Abbildungen.

Behauptung: Φ definiert eine Darstellung von L, $\mathscr{R}$ ist demnach ein L-Modul.

Beweis. Wir zeigen, dass Φ ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist. Die Linearitätseigenschaften von Φ sind offensichtlich, also bleibt zu zeigen, dass gilt:

$$\Phi([ab]) = [\Phi(a), \Phi(b)]\, \forall\, a, b \in L.$$

Wegen der Bilinearität und Antikommutativität des Klammeroperators genügt es, dies für die Basisvektoren von L zu zeigen.

- für $[xy]$ klar, wegen Anmerkung (ii).
- Durch konsequentes Nachrechnen erhält man

$$\begin{aligned}[\Phi(h), \Phi(x)] = &\left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) - \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \\ &- \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) + \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\Phi(h), \Phi(x)](X^i Y^j) = 2jX^{i+1}Y^{j-1} = 2X\frac{\partial}{\partial Y}(X^i Y^j) = 2\Phi(x)(X^i Y^j).$$

$$\Rightarrow [\Phi(h), \Phi(x)] = 2\Phi(x).$$

- Analog dazu rechnet man nach

$$\begin{aligned}[\Phi(h), \Phi(y)] = &\left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) - \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \\ &- \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) + \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) \circ \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\Phi(h), \Phi(y)](X^i Y^j) = -2iX^{i-1}Y^{j+1} = -2Y\frac{\partial}{\partial Y}(X^i Y^j) = -2\Phi(y)(X^i Y^j).$$

$$\Rightarrow [\Phi(h), \Phi(y)] = -2\Phi(y).$$

Bemerkung 3.1. Die Rechnungen ergeben auch für $i = 0$ oder $j = 0$ Sinn, da der Term mit Y^{j-1} bzw. X^{i-1} dann einen Faktor j bzw. i hat.

Somit ist gezeigt, dass Φ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, K)$ und $\mathscr{R}$ ein L-Modul ist. □

Betrachte nun den Unterraum $\mathscr{H}_m$ von $\mathscr{R}$, welcher aus den homogenen Polynomen von Grad m besteht, also jede Linearkombination von $X^m, X^{m-1}Y, X^{m-2}Y^2, \ldots, X^2Y^{m-2}, XY^{m-1}, Y^m$ sind. Setze $v_{-1} := 0, v_0 := X^m, v_i := \frac{1}{i!}y^i.v_0 = \frac{m!}{(m-i)!\cdot i!}X^{m-i}Y^i = \binom{m}{i}X^{m-i}Yi$. Offensichtlich bildet $\{v_0, \ldots, v_m\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathscr{H}_m$.

Behauptung $\mathscr{H}_m$ mit der Basis $\{v_o, \ldots, v_m\}$ ist ein irreduzibler L-Modul zum Höchstgewicht m.

Beweis. Es soll die Abgeschlossenheit unter Verknüpfung mit Elementen $a \in L$ gezeigt werden. Wegen der Linearität von Φ genügt es, dies wieder nur für die Basisvektoren h, x und y zu zeigen. Für alle $i \in \{0, 1, \ldots, m-1, m\}$ gilt

$$\begin{aligned}
h.v_i &= ((X\frac{\partial}{\partial Y}) \circ (Y\frac{\partial}{\partial X}) - (Y\frac{\partial}{\partial X}) \circ (X\frac{\partial}{\partial Y}))\frac{m!}{(m-i)!\cdot i!}X^{m-i}Y^i \\
&= ((m-i)(i+1) - i(m-i+1))\frac{m!}{(m-i)!\cdot i!}X^{m-i}Y^i \\
&= (m-2i)v_i.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle solche i

$$\begin{aligned}
x.v_i &= (X\frac{\partial}{\partial Y})\frac{m!}{(m-i)!\cdot i!}X^{m-i}Y^i \\
&= i \cdot \frac{m!}{(m-1)!\cdot i!}X^{m-i+1}Y^{i-1} \\
&= (m-i+1)\frac{m!}{(m-(i-1))!\cdot i!}X^{m-(i-1)}Y^{i-1} \\
&= (m-i+1)v_{i-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y.v_i &= (Y\frac{\partial}{\partial X})\frac{m!}{(m-i)!\cdot i!}X^{m-i}Y^i \\
&= (m-i)\frac{m!}{(m-i)!\cdot i!}X^{m-i-1}Y^{i+1} \\
&= (i+1)\frac{m!}{(m-(i+1))!\cdot (i+1)!}X^{m-(i+1)}Y^{i+1} \\
&= (i+1)v_{i+1}.
\end{aligned}$$

Damit folgt insbesondere für $v_0 = X^m$ und $v_m = Y^m$:

$$\begin{aligned}
x.v_0 &= 0, \\
y.v_m &= 0.
\end{aligned}$$

Somit ist $\mathscr{H}_m$ abgeschlossen. Außerdem ist $\mathscr{H}_m$ irreduzibel, da nach Korollar 2.7 für $\mathscr{H}_m$ $dim(V_0) + dim(V_1)$ die Zahl der irreduziblen Untermoduln ist, und hier $dim(V_0) + dim(V_1) = 1$ gilt. □

4 Zur Symmetrie von L-Moduln

Wir wollen die Symmetrieeigenschaften von endlich dimensionalen L-Moduln noch unter Gebrauch der Exponentialreihe für lineare Transformationen veranschaulichen.

Erinnerung 4.1. *Vortrag 3 zeigte folgende Eigenschaften der Exponentialreihe:*

(i) Sei $L^{'} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine beliebige lineare Lie Algebra, V ein beliebiger endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K ($\mathrm{char}(K) = 0$) und $a \in L$ nilpotent. Dann gilt für alle $b \in L$:

$$(\exp\ a)b(\exp\ a)^{-1} = \exp\left(\mathrm{ad}(a)\right)(b).$$

(ii) Sei $L^{''}$ eine beliebige Lie Algebra mit Elementen $a, b, c \in L^{''}$. Sei Ψ ein Homomorphismus, der $L^{''}$ zum Urbild hat. Dann gilt für beliebige $k \in \mathbb{N}$:

$$\Psi\left((\mathrm{ad}a)^k(b)\right) = (\mathrm{ad}\Psi(a))^k\,(\Psi(b)).$$

Darüber hinaus gilt für beliebige Mengen $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset L^{''}$ und zugehörige Exponenten $\{k_1, \ldots, k_n\} \subset \mathbb{N}$:

$$\Psi\left(\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{ad}a_i)^{k_i}(b)\right) = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{ad}\Phi(a_i))^{k_i}\,(\Phi(b)).$$

Sei $V(m)$ ein L-Modul mit Höchstgewicht $m \in \mathbb{N}$ (Existenz in Abschnitt 3 bewiesen). Sei nun $\Phi : L \to \mathfrak{gl}(V(m))$ eine irreduzible Darstellung mit Höchstgewicht m. Dann sind $\Phi(x), \Phi(y)$ nach Lemma 2.2 nilpotente Endomorphismen. Die Diskussion in Vortrag 3 hat gezeigt, dass dann durch

$$\tau = \exp\ \Phi(x) \circ \exp\ \Phi(-y) \circ \exp\ \Phi(x)$$

ein Isomorphismus von $V(m)$ definiert wird.

Korollar 4.2. *Sei $a \in L$, τ, Φ wie oben gewählt. Dann gilt:*

$$\tau \circ \Phi(a) \circ \tau^{-1} = \exp(\mathrm{ad}(\Phi(x)) \circ \exp(\mathrm{ad}(\Phi(-y)) \circ \exp(\mathrm{ad}(\Phi(x)) \circ \Phi(a).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\tau \circ \Phi(a) \circ \tau^{-1} &= \exp(\Phi(x)) \circ \exp(\Phi(-y)) \circ \boldsymbol{\{}\exp(\Phi(x)) \circ \Phi(a) \\
&\quad \circ \exp(\Phi(x))^{-1}\boldsymbol{\}} \circ \exp(\Phi(-y))^{-1} \circ \exp(\Phi(x))^{-1} && \mid (*) \\
&= \exp(\Phi(x)) \circ \exp(\Phi(-y)) \circ \boldsymbol{\{}\exp(\mathrm{ad}(\Phi(x))(\Phi(a)\boldsymbol{\}} \\
&\quad \circ \exp(\Phi(-y))^{-1} \circ \exp(\Phi(x))^{-1} && \mid (**) \\
&= \exp(\mathrm{ad}(\Phi(x)) \circ \exp(\mathrm{ad}(\Phi(x)) \circ \exp(\mathrm{ad}(\Phi(x)) \circ \Phi(a) && (1)
\end{aligned}$$

$(*)$ Anwendung von 4.1*(i)* auf $\boldsymbol{\{\ldots\}}$.

$(**)$ jeweilige Anwendung von 4.1*(ii)* auf die zwei anderen Konjugationen.

□

Sei nun

$$\sigma : L \to L, a \mapsto (\exp \operatorname{ad}(x) \circ \exp \operatorname{ad}(-y) \circ \exp \operatorname{ad}(x))(a).$$

Im Folgenden wird die Anwendung von σ auf h untersucht:

$$b := \exp(\operatorname{ad}(x))(h).$$

Da $(\operatorname{ad}(x))(h) = -2x$ folgt für alle $i > 1 : (\operatorname{ad}(x))^i(h) = 0$. Damit ergibt sich

$$b = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(\operatorname{ad}(x))^k}{k!} \right)(h) = h - 2x.$$

$$c := \exp(\operatorname{ad}(-y))(b).$$

Mit

$$[-y, b] = [-y, h] - [-y, 2x] = -2y - 2h$$

folgt

$$(\operatorname{ad}(-y))^2(b) = [-y, -2y] + [-y, 2h] = 4y$$

und damit für alle $i > 2$ $(\operatorname{ad}(-y))^i(b) = 0$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} c &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(\operatorname{ad}(-y))^k}{k!} \right)(b) \\ &= b + [-y, b] + \frac{1}{2}[-y, [-y, b]] \\ &= h - 2x - 2y - 2h + 2y \\ &= -h - 2x \end{aligned}$$

$$d := \exp(\operatorname{ad}(x))(c)$$

Es gilt

$$[x, c] = [x, -h] = [h, x] = 2x.$$

Daraus folgt für alle $i > 1$

$$(\operatorname{ad}(x))^i(c) = 0.$$

Also ist

$$d = c + [x, c] = -h - 2x + 2x = -h.$$

Zusammenfassend:

$$\begin{aligned} \sigma(h) &= (\exp \operatorname{ad}(x) \circ \exp \operatorname{ad}(-y) \circ \exp \operatorname{ad}(x))(h) \\ &= (\exp \operatorname{ad}(x) \circ \exp \operatorname{ad}(-y))(b) \\ &= (\exp \operatorname{ad}(x))(c) \\ &= d \\ &= -h. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\Phi(\sigma(h)) = \Phi(-h) = -\Phi(h).$$

Unter Beachtung dessen, dass σ eine Linearkombination von Produkten wie in 4.1*(ii)* ist, lässt sich 4.1 *(ii)* auf $\Phi(\sigma)$ anwenden und es folgt:

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma(h)) &= \Phi((\exp \operatorname{ad}(x) \circ \exp \operatorname{ad}(-y) \circ \exp \operatorname{ad}(x))(h)) && \mid 4.1\textit{(ii)}\\ &= \exp(\operatorname{ad}(\Phi(x)) \circ \exp(\operatorname{ad}(\Phi(x)) \circ \exp(\operatorname{ad}(\Phi(x)) \circ \Phi(h) && \mid 4.2\\ &= \tau \circ \Phi(h) \circ \tau^{-1}.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\tau \circ \Phi(h) \circ \tau^{-1} = -\Phi(h),$$

oder äquivalent dazu:

$$\tau \circ \Phi(h) = -\Phi(h) \circ \tau. \tag{2}$$

Sei V ein beliebiger irreduzibler L-Modul zum Höchstgewicht m und $\{v_0, \dots, v_m\}$ eine Basis nach der Vorschrift in Lemma 2.2. Wendet man Gleichung (2) auf v_i an, sieht man:

$$\begin{aligned}\tau \circ \Phi(h)(v_i) &= (m-2i)\tau(v_i)\\ &= -\Phi(h) \circ \tau(v_i) && \mid \text{mit } -(m-2i) = m - 2(m-i)\\ \Rightarrow \tau(v_i) &= \tau(v_{m-i}).\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass τ, für einen beliebigen endlich dimensionalen irreduziblen L-Modul V, positive auf negative Gewichtsräume abbildet und umgekehrt. Da jeder endlich dimensionale (nicht notwendig irreduzible) L-Modul V' nach dem *Satz von Weyl* eine direkte Summe irreduzibler L-Untermoduln ist, gilt diese Aussage für jeden einzelnen Untermodul und folglich auch für deren Summe, V' selbst. Es gibt also eine Symmetrie zwischen positiven und negativen Gewichtsräumen eines L-Moduls. Dies ist keine neue Erkenntnis, der Sachverhalt ist jedoch explizit dargelegt.