Punkt-und Geraden-Konfigurationen in der affinen Ebene

Bachelorarbeit

vorgelegt
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von
Julius Klauck

Betreuer
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler

September 2013

Hiermit versichere ich, die Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen geschrieben zu haben.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit mit dem Titel "Punkt-und-Geraden-Konfigurationen in der affinen Ebene" ist in der Zeit vom 26.06.2013 bis zum 25.09.2013 entstanden. Es geht dabei um die Bahnen von Punkt-Konfigurationen bzw. Geraden-Konfigurationen in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(K)$ zu einem Körper K unter der Operation der affinen Gruppe $K^2 \rtimes GL(2, K)$. Man kann die affine Ebene $\mathbb{A}^2(K)$ als die Punktmenge des K^2 auffassen und die affine Gruppe operiert nun auf r-Punkt-Konfigurationen bzw. r-Geraden-Konfigurationen durch Translationen (Verschiebungen) und linearen Abbildungen. Die Elemente der affinen Gruppe heißen affine Transformationen. Es sind hierbei die r-Punkt-Konfigurationen gerade die r-elementigen Teilmengen des K^2 und die r-Geraden-Konfigurationen die r-elementigen Teilmengen der Menge der Geraden in $\mathbb{A}^2(K)$.
Im ersten Kapitel werden zunächst grundlegende Aussagen über die affine Ebene und die affine Gruppe bereitgestellt, so erhalten wir z.B. die Aussage, dass affine Transformationen Geraden wieder in Geraden überführen. Außerdem respektieren affine Transformationen die Parallelität von Geraden, d.h. falls wir ein Paar paralleler Geraden haben, dann sind die beiden Geraden nach Anwendung einer affinen Transformation ebenfalls parallel .
In Kapitel 2 werden die Bahnen von Zwei-Punkt-Konfigurationen bzw. Drei-Punkt-Konfigurationen untersucht. Wir erhalten hier das Ergebnis, dass die affine Gruppe jeweils transitiv auf der Menge der Zwei-Punkt-Konfigurationen bzw. der Menge der nicht kollinearen Drei-Punkt-Konfigurationen (dies sind diejenigen Drei-Punkt-Konfigurationen, bestehend aus 3 Punkten, die nicht alle auf einer Geraden liegen) operiert, d.h. falls wir zwei beliebige Zwei-Punkt-Konfigurationen (bzw. nicht kollineare Drei-Punkt-Konfigurationen) a und b gegeben haben, dann gibt es eine affine Transformation, welche Konfiguration a in Konfiguration b überführt. Der schwierigste Fall sind die kollinearen Drei-Punkt-Konfigurationen, also diejenigen Drei-Punkt-Konfigurationen, bestehend aus 3 Punkten, die alle auf einer Geraden liegen. Hier erhalten wir für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ unendlich viele Bahnen und für $K = \mathbb{F}_q$ können wir unter Beachtung der Charakteristik des Körpers und der Kongruenzbedingungen, die von q erfüllt werden, konkrete Formeln angeben, die Aussagen über die Anzahl der Bahnen machen (siehe Satz 2.22).
Bei Vier-Punkt-Konfigurationen, welche in den Kapiteln 3 und 4 untersucht werden, ist die Situation schon deutlich komplexer. Daher werden wir zunächst, mit Hilfe des Begriffs der "kombinatorischen Äquivalenz" eine Vergröberung des Begriffs der affinen Äquivalenz vornehmen, wodurch wir sehen, dass die Menge der Vier-Punkt-Konfigurationen unter der Operation der affinen Gruppe in mindestens 5 Bahnen zerfällt. Diese 5 kombinatorischen Fälle werden dann in den Kapiteln 3 und 4 weiter verfeinert. So können wir in allen Fällen in Abhängigkeit des Körpers Aussagen über die Anzahl der Bahnen und Ordnung der Fixgruppen der verschiedenen Konfigurationen machen.
In den Kapiteln 5 und 6 untersuchen wir dann die Bahnen von Zwei-Geraden-Konfigurationen bzw. Drei-Geraden-Konfigurationen. Wir werden sehen, dass es für Zwei-Geraden-Konfigurationen genau zwei Bahnen gibt unter der

Operation der affinen Gruppe.
Für die Menge der Drei-Geraden-Konfigurationen können wir 4 kombinatorische Fälle unterscheiden, in 3 dieser 4 Fälle operiert die affine Gruppe transitiv.
Der vierte und schwierigste Fall beinhaltet alle Drei-Geraden-Konfigurationen, wo die 3 Geraden parallel sind. Diese Konfigurationen weisen einen starken Zusammenhang zu den kollinearen Drei-Punkt-Konfigurationen auf . Somit können wir auch in dieser Situation, in Abhängigkeit des Körpers, Aussagen über die Anzahl der Bahnen und Ordnung der Fixgruppen machen.

Notation

In der gesamten Arbeit gilt die folgende Notation:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{P}$ =Menge der Primzahlen ,
- $\mathbb{Q}$ =Körper der rationalen Zahlen ,
- $\mathbb{R}$ =Körper der reellen Zahlen ,
- $\mathbb{C}$ =Körper der komplexen Zahlen ,
- $\mathbb{F}_q$ =Körper mit q Elementen, wobei $q = p^n$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Inhaltsverzeichnis

1 Die affine Ebene und die affine Gruppe zu einem Körper K

Es soll K in Kapitel 1 ein beliebiger Körper sein.

1.1 Definition

Die affine Ebene $\mathbb{A}^2(K)$ zu K ist die Punktmenge des K^2 mit der Verknüpfung

$$\mathbb{A}^2(K) \times \mathbb{A}^2(K) \to K^2$$
$$(P, Q) \mapsto Q - P.$$

Diese Verknüpfung ordnet zwei Punkten P,Q den Verbindungsvektor $Q - P$ zu.
Die Geraden in $\mathbb{A}^2(K) = K^2$ sind die eindimensionalen affinen Unterräume des K^2.
Zwei Geraden $A = \{a + \alpha b \mid \alpha \in K\}$ und $B = \{c + \beta d \mid \beta \in K\}$mit $a, c \in K^2$ und $b, d \in K^2 \setminus \{0\}$ heißen parallel, falls b und d linear abhängig sind. Wir schreiben dafür $A \parallel B$.

1.2 Bemerkung

Es ist leicht zu sehen , dass für zwei Geraden $A = \{a + \alpha b \mid \alpha \in K\}$ und $B = \{c + \beta d \mid \beta \in K\}$ mit $a, c \in K^2$ und $b, d \in K^2 \setminus \{0\}$ gilt:
$A = B$ gilt genau dann, wenn es $\gamma, \delta \in K^2$ gibt mit $b = \gamma d$ und $a = c + \delta d$.

1.3 Lemma

Es gelten folgende Aussagen:
(i) Eine Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$ ist eindeutig bestimmt durch zwei Punkte.
(ii) Es gilt das Parallelenaxiom , d.h. ist x ein Punkt in $\mathbb{A}^2(K)$ und A eine Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$, dann gibt es genau eine Gerade B in $\mathbb{A}^2(K)$, die durch x verläuft und parallel ist zu A.
(iii)Es gibt drei Punkte in $\mathbb{A}^2(K)$, die nicht auf einer Geraden liegen. Man sagt dann , dass diese Punkte in allgemeiner Lage sind.

Beweis:
(i) Sei A eine Gerade , die durch zwei Punkte a und b verläuft $(a, b \in K^2, a \neq b)$.
Dann kann man A schreiben als $A = \{a + \alpha(b - a) \mid \alpha \in K\}$.
Sei nun $B = \{c + \beta d \mid \beta \in K\}$ eine Gerade, die ebenfalls durch die Punkte a und b verläuft ($c \in K^2, d \in K^2 \setminus \{0\}$) . Dann gibt es ein $\beta' \in K$ mit $c + \beta' d = a$ und es gibt $\beta'' \in K$ mit $c + \beta'' d = b$. Man erhält also $b - a = (\beta''$ -$\beta')d$, also muss schon $A = B$ gelten (wegen Bemerkung 1.2) .
(ii) Sei $x \in K^2$ und $A = \{a + \alpha b \mid \alpha \in K\}$ mit $a \in K^2, b \in K^2 \setminus \{0\}$. Dann ist die eindeutig bestimmte Gerade B die parallel ist zu A und die durch x verläuft, gegeben durch $B = \{x + \beta b \mid \beta \in K\}$.

Denn sei $C = \{c + \gamma d \mid \gamma \in K\}$ mit $c \in K^2, d \in K^2 \setminus \{0\}$ eine Gerade , die parallel ist zu A und die durch x verläuft, dann sind b und d linear abhängig , also gilt $C = \{c + \gamma d \mid \gamma \in K\} = C = \{c + \gamma\'b \mid \gamma\' \in K\}$. Da C durch x verläuft , existiert $\gamma\'\'\ \in K$ mit $x = c + \gamma\'\'b$. Also erhält man $C = \{x + \delta b \mid \delta \in K\} = B$ für $\delta := \gamma\' - \gamma\'\'$.
(iii) Betrachte die Gerade A , die durch $x, y \in K^2$ verläuft $(x \neq y)$, also $A = \{x + \alpha u \mid \alpha \in K\}$ mit $u := y - x$. Wähle nun $v \in K^2$ linear unabhängig zu u und setze $z := x + v$, dann gilt $z \notin A$, denn falls $z \in A$ gelten würde , dann würde ein $\alpha\' \in K$ existieren mit $x + \alpha\'u = x + v$. Dies wäre ein Widerspruch zur Tatsache , dass u und v linear unabhängig sind.

$\square$

1.4 Lemma

(i) Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden in $\mathbb{A}^2(K)$.
(ii) Für $K = \mathbb{F}_q$ gibt es $q + 1$ Äquivalenzklassen und jede Äquivalenzklasse enthält q Elemente . Insbesondere gibt es in $\mathbb{A}^2(K)$ also $q(q + 1)$ Geraden.

Beweis:
(i) Reflexivität und Symmetrie sind klar, es bleibt die Transitivität zu zeigen. Hierzu seien $A = \{a + \alpha b \mid \alpha \in K\}$,$B = \{c + \beta d \mid \beta \in K\}$ und $C = \{u + \gamma v \mid \gamma \in K\}$ gegeben mit $a, c, u \in K^2$ und $b, d, v \in K^2 \setminus \{0\}$. Falls nun $A \parallel B$ und $B \parallel C$ gilt , d.h. b, d sind linear abhängig und d, v sind linear abhängig , dann ist es klar , dass auch b und v linear abhängig sind , also gilt $A \parallel C$.
(ii) Sei nun $K = \mathbb{F}_q$ und sei $A_1 = \{a_1 + \alpha_1 b \mid \alpha_1 \in K\}$ eine Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$. Mit $[A_1]$ soll im folgenden die Äquivalenzklasse bezeichnet werden , die von A_1 repräsentiert wird. Wähle $a_2 \in K^2$ mit $a_2 \notin A_1$, dann gilt $A_2 = \{a_2 + \alpha_2 b \mid \alpha_2 \in K\} \in [A_1]$ und $A_1 \neq A_2$. Dann wähle $a_3 \in K^2$ mit $a_3 \notin A_1 \cup A_2$, dann gilt $A_3 = \{a_3 + \alpha_3 b \mid \alpha_3 \in K\} \in [A_1]$ und $A_3 \neq A_2, A_3$. Führe dies fort bis zur Wahl von $a_q \notin A_1 \cup \ldots \cup A_{q-1}$, dann gilt $A_q = \{a_q + \alpha_q b \mid \alpha_q \in K\} \in [A_1]$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $1 \leq i, j \leq q, i \neq j$. Durch die q unterschiedlichen Geraden sind nun alle Punkte in $\mathbb{A}^2(K)$ abgedeckt , d.h. dieses Verfahren kann nicht mehr fortgesetzt werden. Mit Hilfe von Bemerkung 1.2 sieht man ,dass es keine weiteren Geraden mehr gibt , die in $[A_1]$ liegen , also enthält jede Äquivalenzklasse q Elemente.
Kommen wir nun zur Anzahl der Äquivalenzklassen. Es sei $B_1 = \{a + \beta_1 b_1 \mid \beta_1 \in K\}$ mit $a \in K^2$ und $b \in K^2 \setminus \{0\}$. Mit $[B_1]$ soll im folgenden die Äquivalenzklasse bezeichnet werden , die von B_1 repräsentiert wird. Wähle $b_2 \in K^2$ mit $b_2 \notin Kb_1$, dann gilt $B_2 = \{a + \beta_2 b_2 \mid \beta_2 \in K\} \notin [B_1]$. Wähle dann $b_3 \in K^2$ mit $b_3 \notin Kb_1 \cup Kb_2$ dann gilt $B_3 = \{a + \beta_3 b_3 \mid \beta_3 \in K\} \notin [B_1], [B_2]$. Führe dies fort bis zur Wahl von $b_{q+1} \in K^2$ mit $b_{q+1} \notin Kb_1 \cup \ldots \cup Kb_q$. Es gilt dann $B_{q+1} = \{a + \beta_{q+1} b_{q+1} \mid \beta_{q+1} \in K\} \notin [B_1], \ldots, [B_q]$.
Wegen $Kb_1 \cup \ldots \cup Kb_{q+1} = K^2 = A^2(K)$ kann dieses Verfahren nicht mehr

fortgesezt werden. Es kann also keine weiteren Äquivalenzklassen mehr geben , also gibt es $q+1$ Äquivalenzklassen.

$\square$

1.5 Definition

Eine $n-$Punkt-Konfiguration in $\mathbb{A}^2(K) = K^2$ ist eine n-elementige Teilmenge von K^2.
Die Menge aller $n-$Punkt-Konfigurationen wird mit P_n bezeichnet.
Eine $n-$Geraden-Konfiguration in $\mathbb{A}^2(K) = K^2$ ist eine $n-$elementige Teilmenge von H , wobei mit H die Menge aller Geraden in $\mathbb{A}^2(K)$ bezeichnet wird.
Die Menge aller $n-$Geraden-Konfigurationen wird mit L_n bezeichnet.

1.6 Bemerkung

Für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gilt: $\#(P_n) = \infty$ und $\#(L_n) = \infty$.
Für $K = \mathbb{F}_q$ gilt: $\#(P_n) = \binom{q^2}{n}$ mit $q^2 \geq n$ und $\#(L_n) = \binom{q(q+1)}{n}$ mit $q(q+1) \geq n$.

Im Folgenden wollen wir ein Kriterium bereitstellen , um zu überprüfen , ob drei verschiedene Punkte auf einer Geraden liegen.

1.7 Lemma

Ist A eine Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$ und sind x, y zwei verschiedene Punkte von A , dann gilt:
$A = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in K, \alpha + \beta = 1\}$ mit $x \in K^2$ und $y \in K^2 \setminus \{0\}$.

Beweis:
$A = \{x + \gamma(y - x) \mid \gamma \in K\} = \{(1-\gamma)x + \gamma y \mid \gamma \in K\}$.

$\square$

1.8 Proposition

Drei verschiedene Punkte x,y, und z in $\mathbb{A}^2(K)$ liegen genau dann auf einer Geraden , wenn es α, β,und $\gamma \in K$ gibt mit
$(*)$ $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ und $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

Beweis:
Seien x, y, z auf einer Geraden , dann betrachten wir die eindeutig bestimmte Gerade , die durch x und y verläuft. Da z auch auf dieser Geraden liegt , kann man z schreiben als $z = x + \beta(y - x)$ für ein $\beta \in K$, also folgt $(*)$.
Gilt umgekehrt $(*)$, so darf man o.E. $\gamma \neq 0$ und nach Normierung $\gamma = -1$ annehmen. Dann folgt $z = \alpha x + \beta y$ mit $\alpha + \beta = 1$, also liegt z auf der Verbindungsgeraden von x und y (Lemma 1.7) . $\square$

1.9 Korollar

Drei verschiedene Punkte x, y und z in $\mathbb{A}^2(K)$ liegen genau dann auf einer Geraden , wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ gilt.}$$

Beweis:

Die Aussage ist eine direkte Folge aus Proposition 1.8 .

□

1.10 Definition

Für $x, y, z \in K^2$ definiere die alternierende Funktion $[x, y, z] := \det(x-z, y-z)$

1.11 Satz

Drei Punkte $x, y, z \in K^2$ liegen genau dann auf einer Geraden , wenn $[x, y, z] = 0$ gilt.
Man sagt dann auch , dass die drei Punkte kollinear sind.

Beweis:

Schreibe $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in K^2$, dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$= y_1 z_2 - y_2 z_1 - x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 = (x_1 - z_1)(y_2 - z_2) - (x_2 - z_2)(y_1 - z_1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 - z_1 & y_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 & y_2 - z_2 \end{pmatrix} = \det(x - z, y - z) = [x, y, z].$$

Nun folgt die Aussage aus Korollar 1.9 .

□

1.12 Definition/Lemma

Es sei $G := K^2 \rtimes GL(2,K) \subset Sym(K^2)$ die Menge der Abbildungen der Form

$$f : K^2 \to K^2;\ x \mapsto Mx + q \ \text{ mit } M \in GL(2,K) \text{ und } q \in K^2 \ .$$

Es ist $G = K^2 \rtimes GL(2,K)$ das semidirekte Produkt der additiven Gruppe K^2 mit der multiplikativen Gruppe $GL(2,K)$.
Man nennt G die affine Gruppe und die Elemente von G werden als affine Transformationen bezeichnet .

Beweis:
Zunächst zeigen wir , dass $K^2 \rtimes GL(2,K)$ bzgl. Hintereinanderausführung eine Gruppe ist.
Sind $(q,M),(p,N) \in G$ und sei $x \in K^2$, dann gilt

$$(p,N) \circ (q,M)(x) = (p,N)((q,M)(x)) = (p,N)(Mx+q)$$
$$= N(Mx+q)+p = (NM)x + Nq + p = (Nq+p, NM)(x) \ .$$

Wir sehen , dass die Hintereinanderausführung zweier affiner Transformationen wieder eine affine Transformation ist.
Das neutrale Element von G ist gegeben durch $(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2)$, wobei E_2 die 2×2 - Einheitsmatrix bezeichnet. Weiter ist zu einem Element $(q,M) \in G$ das Inverse gegeben durch $(-M^{-1}q, M^{-1})$.
Die Assoziativität erhält man durch Nachrechnen .
Nun bleibt noch zu zeigen , dass es sich bei G um das semidirekte Produkt von K^2 und $GL(2,K)$ handelt . Es ist klar , dass die Menge der Translationen K^2 und die Menge der bijektiven , linearen Abbildungen $GL(2,K)$ jeweils Untergruppen von G sind . Wir müssen nun zeigen , dass K^2 sogar eine normale Untergruppe von G ist. Sei dazu $(q,M) \in G$ beliebig und $(p,E_2) \in K^2$ eine Translation , dann gilt :

$$(q,M) \circ (p,E_2) \circ (q,M)^{-1} = (q,M) \circ (p,E_2) \circ (-M^{-1}q, M^{-1})$$
$$= (Mp+q, ME_2) \circ (-M^{-1}q, M^{-1}) = (M(-M^{-1}q) + Mp + q, MM^{-1})$$
$$= (-q + Mp + q, E_2) = (Mp, E_2) \in K^2.$$

Wir sehen also , dass K^2 eine normale Untergruppe von G ist .

$\square$

1.13 Lemma

(i) Durch eine affine Transformation wird eine Gerade wieder in eine Gerade überführt.
(ii) Zwei Geraden A und B sind genau dann parallel zueinander, wenn die Geraden $f(A)$ und $f(B)$ parallel sind für ein $f \in G$.

Beweis:
(i) Ist $A = \{a + \alpha u \mid \alpha \in K\} = a + Ku$ eine Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$ mit $a \in K^2$ und $u \in K^2 \setminus \{0\}$. Für $f = (q, M) \in G$ gilt dann:

$$f(A) = (q, M)(a + Ku) = M(a + Ku) + q = Ma + q + K(Mu) \ .$$

(ii) Seien A und B parallel , also oBdA ist $A = \{a + \alpha u \mid \alpha \in K\}$ und $B = \{b + \beta u \mid \beta \in K\}$, dann gilt nach (i) :
$f(A) = Ma + q + K(Mu)$ und $f(B) = Mb + q + K(Mu)$. Also sind $f(A)$ und $f(B)$ parallel.
Sind dagegen $f(A)$ und $f(B)$ parallel , so sind nach dem gerade Gezeigten $f^{-1}(f(A))$ und $f^{-1}(f(B))$ parallel , d.h. es sind A und B parallel.

□

1.14 Bemerkung

Für $K = \mathbb{F}_q$ gilt: $\#(G) = q^3(q^2 - 1)(q - 1)$.

Denn man hat q^2 Möglichkeiten eine Translation zu wählen und man hat $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ Möglichkeiten eine invertierbare $2 \times 2-$Matrix auszuwählen .

2 Zwei-und Drei-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$

Es ist klar , dass $G = K^2 \rtimes GL(2,K)$ eine Operation auf P_n definiert.

2.1 Lemma

Die affine Gruppe G operiert transitiv auf P_2, d.h. falls $\{x,y\}$ und $\{u,v\}$ zwei 2-Punkt-Konfigurationen sind , dann existiert ein $h \in G$ mit
$\{h(x), h(y)\} = \{u,v\}$.
Die Abbildung h ist nicht eindeutig bestimmt. Auf diesen Sachverhalt werden wir im weiteren Verlauf von Kapitel 2 eingehen (siehe Proposition 2.6) .

Beweis: Wenden wir auf $\{x,y\} \in P_2$ die affine Transformation
$g := (-x, E_2) \in G$ an, erhalten wir $\{g(x), g(y)\} = \{0, y-x\}$ mit $y - x \neq 0$.
Man findet leicht ein $M \in GL(2,K)$ mit $M(y-x) = e_1$, setze dann $f_1 := (0,M) \circ (-x, E_2) \in G$. Dann gilt $\{f_1(x), f_1(y)\} = \{0, e_1\}$.
Dies kann man analog für $\{u,v\} \in P_2$ machen, d.h. es gibt ein $f_2 \in G$ mit $\{f_2(u), f_2(v)\} = \{0, e_1\}$.
Wenn man nun $h := f_2^{-1} \circ f_1$ setzt , dann gilt $\{h(x), h(y)\} = \{u,v\}$.

2.2 Sprechweise

Eine 3-Punkt-Konfiguration $\{x,y,z\}$ in $\mathbb{A}^2(K)$ mit $[x,y,z] = 0$ heißt kollinear.

2.3 Satz

Die affine Gruppe G operiert transitiv auf den nicht kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen.
Genauer: Sind $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ und $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$ zwei nicht kollineare 3-Punkt-Konfigurationen, dann exisitiert ein eindeutig bestimmtes $h \in G$ mit $h(\tilde{x}) = \tilde{u}$, $h(\tilde{y}) = \tilde{v}$ und $h(\tilde{z}) = \tilde{w}$.

Beweis:

Sei $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\} \in P_3$ wie in Satz , wende die affine Transformation $(-\tilde{x}, E_2) \in G$ an. Es gilt dann $(-\tilde{x}, E_2)(\tilde{x}) = 0$, $(-\tilde{x}, E_2)(\tilde{y}) = y$ und $(-\tilde{x}, E_2)(\tilde{z}) = z$ mit $y := \tilde{y} - \tilde{x}$ und $z := \tilde{z} - \tilde{x}$.
Nun wollen wir ein $M \in GL(2,K)$ finden mit $My = e_1$ und $Mz = e_2$.
Für $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ mit $\alpha_i \in K$ ($1 \leq i \leq 4$) erhält man folgendes
Gleichungssystem mit den 4 Unbestimmten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 :
$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 1$
$\alpha_3 y_1 + \alpha_4 y_2 = 0$
$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0$
$\alpha_3 z_1 + \alpha_4 z_2 = 1$
Dies kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } A := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det A = (y_2z_1 - y_1z_2)(y_1z_2 - y_2z_1) \neq 0$ (da y und z linear unabhängig sind, und dies folgt aus der Voraussetzung $[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}] = 0$).
Daher ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar, d.h. M ist eindeutig bestimmt. Außerdem ist $M \in GL(2, K)$, denn falls M nicht invertierbar wäre, wären die Zeilenvektoren von M linear abhängig, d.h. man könnte ein $\lambda \in K$ finden mit $\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$.Dann würde aber gelten
$\alpha_3z_1 + \alpha_4z_2 = \lambda(\alpha_1z_1 + \alpha_2z_2) = 1$. Dies ist ein Widerspruch, also muss M invertierbar sein.
Nun setze $f := (0, M) \circ (-\tilde{x}, E_2) \in G$, dann ist f eindeutig bestimmt und es gilt $f(\tilde{x}) = 0$, $f(\tilde{y}) = e_1$ und $f(\tilde{z}) = e_2$.

Dies kann man analog für $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\} \in P_3$ machen, dann erhält man ein eindeutig bestimmtes $g \in G$ mit $g(\tilde{u}) = 0$, $g(\tilde{v}) = e_1$ und $g(\tilde{w}) = e_2$.
Setze nun $h := g^{-1} \circ f$, dann ist h eindeutig bestimmt und erfüllt $h(\tilde{x}) = \tilde{u}$, $h(\tilde{y}) = \tilde{v}$ und $h(\tilde{z}) = \tilde{w}$.

□

2.4 Korollar

Die Fixgruppe einer nicht kollinearen 3-Punkte-Konfiguration $\{x, y, z\}$ ist isomorph zur S_3.

Beweis: Dies ist eine Folge aus Satz 2.3 .

□

2.5 Bemerkung

Für $K = \mathbb{F}_q$ kann man nun auch eine explizite Formel für die Anzahl der nicht kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen angeben. Sei dazu $s := \{x, y, z\}$ eine nicht kollineare 3-Punkt-Konfiguration , sei Gs die $G-$Bahn von s und sei G_s die Fixgruppe von s bzgl. G .
Es gilt $\#(G) = q^3(q^2 - 1)(q - 1)$ (Bemerkung 1.14) und $\#(G_s) = 6$ (Korollar 2.4) , somit erhält man folgendes Resultat:

Es gibt $\#(Gs)= \frac{\#(G)}{\#(G_s)} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{6}$ nicht kollineare

3-Punkt-Konfigurationen.

2.6 Proposition

(i) Die Fixgruppe einer 2-Punkt-Konfiguration $\{x,y\}$ ist für $K=\mathbb{Q},\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ unendlich .
(ii) Für $K=\mathbb{F}_q$ hat die Fixgruppe die Ordnung $2(q^2-q)=2q(q-1)$.

Beweis:

(i) Da $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ unendlich viele Elemente enthalten, finden wir eine Folge $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $z_i\in K^2, z_i\neq z_j$ für $i\neq j$, wobei keines der Folgenglieder auf der Verbindungsgerade von x und y liegt. Für jedes $i\in\mathbb{N}$ erhält man ein, durch die Bedingungen $f_i(x)=x$, $f_i(y)=y$ und $f_i(z_1)=z_i$, eindeutig bestimmtes $f_i\in G$ und diese sind alle verschieden voneinander (Satz 2.3) . Also gilt (i).

(ii) Die Verbindungsgerade von x und y enthält q Elemente , also gibt es noch (q^2-q) Punkte $a_i\in\mathbb{F}_q^2$ $(1\leq i\leq n:=q^2-q)$ mit $[x,y,a_i]\neq 0$. Für jedes i erhält man ein , durch die Bedingungen $g_i(x)=x$, $g_i(y)=y$ und $g_i(a_1)=a_i$, eindeutig bestimmtes $g_i\in G$ $(1\leq i\leq n)$. Dies sind auch schon alle affinen Transformationen , die x auf x abbilden und y auf y abbilden. Denn wenn wir ein $h\in G$ betrachten , welches durch die Bedingungen $h(x)=x$, $h(y)=y$ und $h(a_j)=a_k$ eindeutig bestimmt ist $(1\leq k\leq n$, $2\leq j\leq n)$ dann gilt oBdA $h(a_1)=a_r$ $(r\neq k,\ 1\leq r\leq n,\ r$ fest). Dann ist aber $h=g_r$.
Dies kann man analog für $h_i\in G$ machen mit $h_i(x)=y$, $h_i(y)=x$ und $h_i(a_1)=a_i$ machen .
Also hat man insgesamt $2n=2(q^2-q)=2q(q-1)$ verschiedene affine Transformationen , welche eine 2-Punkt-Konfiguration in sich selbst überführen .

$\square$

2.7 Bemerkung

Für $K=\mathbb{F}_q$ können wir jetzt eine Formel für die Anzahl der 2-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$ angeben. Das Ergebnis sollte $\binom{q^2}{2}$ sein (Bemerkung 1.6) .

Sei dazu $s:=\{x,y\}\in P_2$. Dann ist $\#(G_s)=2q(q-1)$ nach Proposition 2.6. Also erhält man folgendes :

Anzahl der 2-Punkt-Konfigurationen
$=\#(Gs)=\frac{\#(G)}{\#G_s}=\frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q(q-1)}=\frac{q^2(q^2-1)}{2}=\binom{q^2}{2}$.

Es stimmt also das Ergebnis der kombinatorischen Überlegung aus Bemerkung 1.6 überein mit dem Ergebnis der gruppentheoretischen Überlegung .

Als letztes wollen wir in Kapitel 2 die kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen untersuchen .

2.8 Definition

Eine kollineare 3-Punkt-Konfiguration ist in Normalform , falls sie von der Form $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist, mit $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$.

2.9 Lemma

(i) Jede kollineare 3-Punkt-Konfiguration $\{x, y, z\}$ kann durch eine affine Transformation in Normalform überführt werden .

(ii) Ist $f \in G$ eine affine Transformation , die $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt , so gilt $f(z) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$ und λ ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Es sei oBdA $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (sonst wende Translation $(-x, E_2) \in G$ an). Wir finden nun leicht ein $M \in GL(2, K)$ mit $My = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.Da x, y und z auf einer Geraden liegen (und $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$gilt) sind y und z linear abhängig , d.h. es existiert ein eindeutig bestimmtes $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$ mit $\lambda y = z$. Also gilt $Mz = M(\lambda y)=$ $\lambda My = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$. Also gilt (i) und (ii).

$\square$

2.10 Lemma

Sei $\{x, y, z\} \in P_3$ eine kollineare 3-Punkt-Konfiguration .
(i) Für $K = \mathbb{F}_q$ existieren $q(q-1)$ verschiedene $h \in G$ mit $h(x) = x$, $h(y) = y$ und $h(z) = z$.

(ii) Für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ existieren unendlich viele $f \in G$ mit $f(x) = x$, $f(y) = y$ und $f(z) = z$.

Beweis:

(i) Nach Beweis von Proposition 2.6 (ii) gibt es $q(q-1)$ $h_i \in G$ $(1 \leq i \leq q(q-1)$) mit $h_i(x) = x$ und $h_i(y) = y$.
Wir zeigen nun , dass für ein solches h_i schon $h_i(z) = z$ gilt .
Um dies zu zeigen nehmen wir an , dass für $h_i \in G$ folgendes gilt:

$$h_i(x) = x \ , \ h_i(y) = y \text{ und } h_i(z) \neq z \ .$$

Nach 2.9 gibt es ein $g \in G$ mit $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g(z) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ eindeutig bestimmt.

Andererseits betrachten wir die Konfiguration
$\{h_i(x), h_i(y), h_i(z)\} = \{x, y, h_i(z)\}$ mit $h_i(z) \neq z$.
Dann gibt es ein $f \in G$ mit

$f(h_i(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(h_i(y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f(h_i(z)) = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \neq \lambda$.

Dies ist ein Widerspruch zu 2.9(ii) .Also gibt es insgesamt $q(q-1)$ verschiedene affine Transformationen , die alle 3 Punkte auf sich selbst abbilden.
(ii) Folge aus 2.6 und dem im Teil (i) Gezeigten.

□

2.11 Proposition

Sei $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\} \in P_3$ eine kollineare 3-Punkt-Konfiguration , dann gibt es höchstens 6 verschiedene Normalformen dieser Konfiguration.
Genauer: Ist $f \in G$ eine affine Transformation mit
$f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Dann hat man folgende 6 möglichkeiten für die Normalform dieser Konfiguration :

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

4) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

5) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

6) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Beweis:

Die 6 Möglichkeiten erhält man durch Vertauschen der Rollen von x, y und z beim Überführen in Normalform .

Setze $x := f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y := f(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $z := f(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu 1) Dies ist klar.

Zu 2) Man betrachte $h_1 := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}) \in G$,

dann gilt $h_1(x) = x$, $h_1(z) = y$ und $h_1(y) = \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu 3) Man betrachte $h_2 := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) \circ (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in G$,

dann gilt $h_2(x) = y$, $h_2(y) = x$ und $h_2(z) = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu 4) Man betrachte $h_3 := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} \end{pmatrix}) \circ (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in G$

dann gilt $h_3(y) = x$, $h_3(z) = y$ und $h(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu 5) Man betrachte $h_4 := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\lambda} \end{pmatrix}) \circ (\begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in G$

dann gilt $h_4(x) = y$, $h_4(z) = x$ und $h_4(y) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu 6) Man betrachte $h_5 := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda} \end{pmatrix}) \circ (\begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in G$

dann gilt $h_5(y) = y$, $h_5(z) = x$ und $h_5(x) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

□

2.12 Definition

Zwei n-Punkt-Konfigurationen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\{y_1, \ldots, y_n\}$ in $\mathbb{A}^2(K)$ heißen affin äquivalent , falls es ein $f \in G$ gibt mit
$\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ $=$$\{y_1, \ldots, y_n\}$.

2.13 Satz

Seien $\{x, y, z\}$ und $\{u, v, w\}$ zwei kollineare 3-Punkt-Konfigurationen . Es sei $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}\right\}$ die eindeutig bestimmte Normalform von $\{x, y, z\}$, die wir erhalten durch eine affine Transformation , die x auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$und y auf $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ abbildet.
Analog sei$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}\right\}$die eindeutig bestimmte Normalform von $\{u, v, w\}$, die wir erhalten durch eine affine Transformation, die u auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$und v auf $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ abbildet , dann gilt:

$\{x, y, z\}$und $\{u, v, w\}$sind affin äquivalent genau dann ,wenn
$\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \left\{\mu, \frac{1}{\mu}, 1-\mu, \frac{1}{1-\mu}, \frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu}{\mu-1}\right\}$ gilt .

Beweis:

Falls $\{x, y, z\}$ und $\{u, v, w\}$ affin äquivalent sind , dann gibt es ein $f \in G$ mit $\{f(x), f(y), f(z)\} = \{u, v, w\}$. Also müssen die beiden Konfigurationen dieselben Normalformen besitzen und somit müssen die beiden Mengen übereinstimmen (siehe Proposition 2.11) .
Falls $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \left\{\mu, \frac{1}{\mu}, 1-\mu, \frac{1}{1-\mu}, \frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu}{\mu-1}\right\}$ gilt , dann haben die beiden Konfigurationen dieselben Normalformen , d.h. sie sind affin äquivalent .

$\square$

2.14 Lemma

Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$:
(i) Für $\lambda = 2, \frac{1}{2}$ oder -1 gilt : $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \left\{2, \frac{1}{2}, -1\right\}$.

(ii) Für $\lambda \in K \setminus \left\{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ ist die Menge $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ 6-elementig .

Beweis:

(i) klar
(ii) Da $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}\}$ gilt , kann höchstens die Bedingung $\frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda$ dazu führen , dass die betrachtete Menge nicht 6-elementig ist .
Es ist $\frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda$ äquivalent zu $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Da diese Gleichung in $\mathbb{Q}$ bzw. in $\mathbb{R}$ keine Lösungen hat , muss die betrachtete Menge immer 6-elementig sein .

$\square$

2.15 Lemma

Sei $K = \mathbb{C}$ dann gilt :
(i) Für $\lambda = 2, \frac{1}{2}$oder -1 gilt : $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \{2, \frac{1}{2}, -1\}$.

(ii) Für $\lambda = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ oder $\lambda = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ gilt
$\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \{\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\}$

(iii) Für $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\}$ ist die Menge $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ 6-elementig .

Beweis:

(i) klar.
(ii) Betrachten wir wie im Beweis von 2.16 die Gleichung $X^{-1} = 1 - X$ bzw. $X^2 - X + 1 = 0$ mit $X \in \mathbb{C}$ .Falls λ diese Bedingung erfüllt , dann gilt

$\frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ und $\lambda = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Somit ist die betrachtete Menge nur 2-elementig und enthält die zwei eindeutig bestimmten Nullstellen des Polynoms $X^2 - X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.
Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ und $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$.
(iii) klar.

$\square$

2.16 Lemma

$\mathbb{F}_q$ enthält genau dann die beiden nichttrivialen 3.Einheitswurzeln , wenn $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ gilt.

Beweis:

Falls $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ gilt , dann sei $\alpha \in K$ ein primitives Element , d.h. es gilt $\mathbb{F}_q^* = \{\alpha, \ldots \alpha^{q-1} = 1\}$. Wenn man nu $\lambda := \alpha^{\frac{q-1}{3}}$setzt , dann gilt $\lambda \neq 1$ und $\lambda^3 = \alpha^{q-1} = 1$, d.h. λ ist eine nichttriviale 3.Einheitswurzel.
Es ist klar , dass die zweite nichttriviale 3.Einheitswurzel λ^2 ist .

Falls $q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ gilt , dann kann es keine nichttriviale 3.Einheitswurzel geben . Denn wenn wir annehmen , dass $\lambda \in K$ eine solche Einheitswurzel ist , dann gilt $\lambda^3 = 1$, wobei man λ schreiben kann als $\lambda = \alpha^i$ mit $i \in \mathbb{N}$, $i \neq k(q-1)$ für $k \in \mathbb{Z}$ und für ein primitives Element $\alpha \in K$. Dann hätte man die Gleichung $\alpha^{3i} = 1 = \alpha^{(q-1)+m(q-1)}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und somit müsste gelten : $3i = (m+1)(q-1)$. Wegen $i \neq k(q-1)$ kann $m+1$ nicht durch 3 teilbar sein und wegen $q \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ ist $q-1$ nicht durch 3 teilbar , also hat man einen Widerspruch .

□

2.17 Lemma

Sei $K = \mathbb{F}_q$, dann gilt :
Es gibt λ_1,$\lambda_2 \in K$ mit $\frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_1$ bzw. $\frac{1}{\lambda_2} = 1 - \lambda_2$ genau dann , wenn $q \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ gilt .

Beweis:

Falls $q \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ gilt, dann seien $\mu_1$und μ_2 die beiden nichttrivialen 3.Einheitswurzeln, die in K enthalten sind (Lemma 2.16) .
Betrachten wir nun das Polynom $X^2 - X + 1 \in \mathbb{F}_q[X]$, dann gilt :
$(X + \mu_1)(X + \mu_2) = X^2 + (\mu_1 + \mu_2)X + \mu_1\mu_2 = X^2 - X + 1$.
Setzen wir nun $\lambda_1 := -\mu_1$ und $\lambda_2 := -\mu_2$, dann sind λ_1 und λ_2 die Nullstellen von $X^2 - X + 1 \in \mathbb{F}_q[X]$ und erfüllen somit
$\frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_1$bzw. $\frac{1}{\lambda_2} = 1 - \lambda_2$.

Falls $q \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ gilt , dann enthält K nicht die beiden nichttrivialen 3.Einheitswurzeln , also kann $X^2 - X + 1 \in \mathbb{F}_q[X]$ keine Nullstellen haben .

□

2.18 Lemma

Es ist $2^r \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ genau dann, wenn $r \in \mathbb{N}$ gerade ist .

Beweis:

Sei r gerade , schreibe daher $r = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.
Für $n = 1$ erhalten wir $r = 2$ und sehen , dass $4 \equiv 1(\text{mod } 3)$ gilt .
Nehmen wir an , dass für $n \geq 2$ gilt : $2^r = 2^{2n} \equiv 1(\text{mod } 3)$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $2^{2n} = 3k + 1$.
Dann gilt $2^{2(n+1)} = 4(3k+1) = 12k+4 = 3\hat{k}+3+1 = 3(\hat{k}+1)+1$ $(\hat{k} := 4k)$.
Also gilt $2^{2(n+1)} \equiv 1(\text{mod } 3)$.

Nehmen wir dagegen an , dass $r \in \mathbb{N}$ ungerade ist , können wir r schreiben als $r = 2n+1$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun durch Inudktion nach n , dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^{2n+1} \equiv 2(\text{mod } 3)$.
Für $n = 1$, also $r = 3$, sehen wir , dass $2^3 = 8 \equiv 2(\text{mod } 3)$ gilt .
Nehmen wir nun an , dass für $n \geq 2$ gilt: $2^{2n+1} \equiv 2(\text{mod } 3)$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $2^{2n+1} = 3k+2$, dann gilt
$2^{2(n+1)+1} = 4 \cdot 2^{2n+1} = 4(3k+2) = 12k+8 = 3\hat{k}+6+2 = 3(\hat{k}+2)+2$
$(\hat{k} := 4k)$. Also gilt $2^{2(n+1)+1} \equiv 2(\text{mod } 3)$.

$\square$

2.19 Proposition

(i) Sei $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2, 3$ und $q \equiv 1(\text{mod } 3)$:
1) Für $\lambda = 2, \frac{1}{2}$oder -1 gilt : $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \left\{2, \frac{1}{2}, -1\right\}$.

2) Für $\lambda_1,\, \lambda_2 \in K$ mit $\frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_1$ bzw. $\frac{1}{\lambda_2} = 1 - \lambda_2$ gilt:

$$\left\{\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, 1-\lambda_1, \frac{1}{1-\lambda_1}, \frac{\lambda_1-1}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\right\}$$
$$= \left\{\lambda_2, \frac{1}{\lambda_2}, 1-\lambda_2, \frac{1}{1-\lambda_2}, \frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\right\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

3) Für $\lambda \in K \setminus \left\{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \lambda_1, \lambda_2\right\}$ ist die Menge
$\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ 6-elementig .

(ii) Sei $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2, 3$ und $q \not\equiv 1(\text{mod } 3)$:

1) Für $\lambda = 2, \frac{1}{2}$oder -1 gilt : $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \left\{2, \frac{1}{2}, -1\right\}$.

2) Für $\lambda \in K \setminus \left\{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ gilt :$\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ ist 6-elementig.

(iii) Sei $K = \mathbb{F}_{3^r}$ mir $r \in \mathbb{N}$.
1) Für $\lambda = 2 = \frac{1}{2} = -1$ gilt : $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\} = \{2\}$.

2) Für $\lambda \in K \setminus \{0,1,2\}$ gilt : $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ ist 6-elementig .

(iv) Sei $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ und r gerade .

1) Für λ_1, $\lambda_2 \in K$ mit $\frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_1$ bzw. $\frac{1}{\lambda_2} = 1 - \lambda_2$ gilt:
$\left\{\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, 1-\lambda_1, \frac{1}{1-\lambda_1}, \frac{\lambda_1-1}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\right\}$
$= \left\{\lambda_2, \frac{1}{\lambda_2}, 1-\lambda_2, \frac{1}{1-\lambda_2}, \frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\right\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$

2) Für $\lambda \in K \setminus \{0,1,\lambda_1,\lambda_2\}$ ist die Menge $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ 6-elementig .

(v) Sei $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ und r ungerade .

Für alle $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$ ist die Menge $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ ist 6-elementig .

Beweis: Die Aussagen folgen aus den vorangegangenen Lemmata und unter Beachtung der Charakteristik der jeweiligen Körper.

□

2.20 Proposition

Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$:
Es gibt unendlich viele Bahnen von kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$.
Genauer : Es gibt genau eine Bahn , in der es möglich ist die Konfigurationen wieder in sich selbst zu überführen durch eine affine Tansformation , die zwei der drei Punkte vetauscht und den dritten Punkt fixiert .
Dabei sind die zwei Punkte , die man vertauschen kann, ohne die Konfiguration zu verändern , eindeutig bestimmt .
In den anderen Bahnen ist es nur möglich die Konfigurationen wieder in sich selbst zu überführen, indem jeder der drei Punnkte wieder auf sich selbst abgebildet wird (siehe Lemma 2.10) .

Beweis:

Ein Repräsentant für die Bahn , in der es möglich ist 2 Punkte zu vertauschen, ohne die Konfiguration zu verändern , ist
$\left\{x = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\} \in P_3$, es ist also $\lambda = 2$ (mit dem λ aus 2.11) .

Hier gilt $\lambda = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, dies bedeutet , dass es ein $f \in G$ gibt mit $f(x) = z$, $f(y) = y$ und $f(z) = x$.

So erfüllt z.B. $f := (\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda} & 0\\0 & \frac{1}{1-\lambda}\end{pmatrix}) \circ (\begin{pmatrix}-\lambda\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}) \in G$

(mit $\lambda := 2$) diese Bedingungen . (siehe Beweis von Proposition 2.11)
Dies ist allerdings die einzige Permutation der Punkte x, y und z, die man durch eine affine Transformation durchführen kann
(denn $\frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda} \neq 2$ für $\lambda = 2$) .

Nun zu Begründung warum es nur eine solche Bahn gibt. Wir wissen nach Lemma 2.9 ,dass wir jede kollineare 3-Punkt-Konfiguration in Normalform überführen können , also können wir oBdA die Konfiguration
$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}\right\}$ mit $\mu \neq 0, 1$ betrachten . Wenn diese Konfiguration nicht in der obigen Bahn liegt , muss $\mu \neq 2, \frac{1}{2}, -1$ gelten (wegen 2.14 (i)) . Dann sind nach 2.14 (ii) aber alle 6 Normalformen von

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}\right\}$ verschieden , d.h. für eine solche Konfiguration ist es

nicht möglich nichttriviale Permutationen der drei Punkte vorzunehmen . Also ist die Bahn mit dem Repräsentanten

$\left\{x = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\} \in P_3$ die einzige Bahn mit dieser Eigenschaft .

Es bleibt noch zu zeigen , dass es unendlich viele Bahnen von kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen gibt. Sei dazu

$s_1 := \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix}\right\} \in P_3$ mit $\lambda_1 \in K \setminus \left\{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}\right\}$, dann wähle
$s_2 := \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_2\\0\end{pmatrix}\right\} \in P_3$ mit
$\lambda_2 \in K \setminus \left\{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, 1-\lambda_1, \frac{1}{1-\lambda_1}, \frac{\lambda_1-1}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\right\}$.

Dann liegen s_1 und s_2 nicht in einer Bahn (Satz 2.13). Wenn wir dann
$s_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in P_3$ mit $\lambda_3 \in K$, $\lambda_3 \neq$
$\left\{0, \pm 1, 2, \frac{1}{2}, \lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, 1-\lambda_1, \frac{1}{1-\lambda_1}, \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}, \lambda_2, \frac{1}{\lambda_2}, 1-\lambda_2, \frac{1}{1-\lambda_2}, \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}\right\}$
wählen , ist s_3 nicht affin äquivalent zu $s_1$und s_2.
Es ist klar ,dass man dieses Verfahren unendlich oft fortsetzen kann , da $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ unendlich viele Elemente besitzen . Daher gibt es unendlich viele Bahnen .

$\square$

2.21 Proposition

Sei $K = \mathbb{C}$.
Hier ist alles wie in Proposition 2.20 bis auf den Unterschied , dass es zusätzlich eine eindeutig bestimmte Bahn gibt , in der man die 3-Punkt-Konfigurationen wieder in sich selbst überführen kann durch affine Transformationen , die zyklische Permutationen der 3 Punkte bewirken .
Ein Repräsentant für diese Bahn ist die Konfiguration

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in P_3 \text{ mit } \lambda_1 := \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \text{ .}$$

Beweis:

Betrachten wir $\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in P_3$ mit $\lambda_1 := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Es gilt $\lambda_1 = \frac{1}{1-\lambda_1} = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1}$. (siehe Lemma 2.15) .

Man kann nun die affine Transformation

$f_1 := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1 - 1} \end{pmatrix}) \circ (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in G$ auf $\{x, y, z\}$ anwenden , dann gilt

$$f_1(y) = x \text{ , } f_1(z) = y \text{ und } f_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = z \text{ .}$$

Dies entspricht der zyklischen Permutation $(xyz)^2 = (xzy)$.

Andererseits kann man auch die affine Transformation

$f_2 := (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\lambda_1} \end{pmatrix}) \circ (\begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \in G$ auf $\{x, y, z\}$ anwenden , dann gilt

$$f_2(x) = y \ , \ f_2(z) = x \text{ und } f_2(y) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = z \ .$$

Dies entspricht der zyklischen Permutation (xyz) .

Ein weiterer Repräsentant dieser Bahn ist die Konfiguration
$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\lambda_2 := \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ (Lemma 2.15 (ii))

Dies ist auch die einzige Bahn , in der man zyklische Permutationen der drei Punkte vornehmen kann . Denn für alle Konfigurationen ,

die eine Normalform $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\mu \neq \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

haben ,sind wir entweder in der Situation , dass man keine nichttriviale Permutationen der 3 Punkte durchführen kann , oder dass man nur zwei Punkte vertauschen kann (vgl. Lemma 2.15) .

$\square$

2.22 Satz

(i) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2, 3$ und $q \equiv 1 (\text{mod } 3)$ gilt:

- Es gibt $\frac{q-7}{6}$ Bahnen mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben .

(ii) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2, 3$ und $q \not\equiv 1 (\text{mod } 3)$ gilt:

- Es gibt $\frac{q-5}{6}$ Bahnen mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben .

(iii) Für $K = \mathbb{F}_{3^r}$ $(r \in \mathbb{N})$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-3}{6}$ Bahnen mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $6q(q-1)$ haben .

(iv) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ und r gerade gilt :

- Es gibt $\frac{q-4}{6}$ Bahnen mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben .

(v) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ und r ungerade gilt :

- Es gibt $\frac{q-2}{6}$ Bahnen mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben .

Beweis:

(i) Da $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ gilt , gibt es λ_1,$\lambda_2 \in K$ mit $\frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_1$bzw. $\frac{1}{\lambda_2} = 1 - \lambda_2$ (Proposition 2.19) .
Betrachten wir die Konfiguration $\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in P_3$

dann sehen wir , dass diese Konfiguration ein Repräsentant der eindeutig bestimmten Bahn ist , in der wir zyklische Permutationen der drei Punkte vornehmen können (wie im Beweis von 2.21).
Mit Hilfe von Lemma 2.10 folgt nun , dass $\{x, y, z\}$ eine Fixgruppe der Ordnung $3q(q-1)$ hat.

Die Konfiguration $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Repräsentant für die einzige

Bahn, in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben (wie im Beweis von 2.20).

Kommen wir nun zu den Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Alle Konfigurationen , die in dieser Bahn liegen , müssen 6 echt verschiedene Normalformen haben , denn dann kann man keine nichtrivialen Permutationen der drei Punkte vornehmen und somit haben sie Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ (Lemma 2.10).
Dass solche Bahnen existieren , folgt aus Proposition 2.19(i),3),
es muss allerdings noch gezeigt werden , dass es genau $\frac{q-7}{5}$ solche Bahnen gibt.
Dazu betrachten wir die Konfiguration

$s_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Damit s_1 eine Fixgruppe der Ordnung

$q(q-1)$ hat , muss gelten $\mu_1 \in K \setminus \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \lambda_1, \lambda_2\}$, d.h. man hat $(q-7)$ Möglichkeiten zur Wahl von μ_1. Da s_1 dann 6 verschiedene Normalformen hat , hat man noch $(q-7)-6$ Möglichkeiten μ_2 zu wählen

damit $s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Fixgruppe der Ordnung $q(q-1)$ hat

und nicht in einer Bahn liegt mit s_1 .

Damit hat man für die Wahl von $s_n := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ noch

$(q-7)-6(n-1)$ Möglichkeiten damit s_n eine Fixgruppe der Ordnung $q(q-1)$ hat und nicht in einer Bahn mit $s_1, \ldots s_{n-1}$ liegt .

Mit dieser Überlegung folgt , dass es genau $\frac{q-7}{6}$ solche Bahnen gibt .

(ii) Dass es genau eine Bahn mit Fixgruppe der Ordnung $2q(q-1)$ gibt , folgt wie in Beweis von 2.20 .
Da $q \not\equiv 1 (\text{mod } 3)$ gilt , gibt es keine Bahn mit Fixgruppe der Ordnung $3q(q-1)$ (Prop. 2.19(ii)).
Nun zu den Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Man hat $q-5$ Möglichkeiten γ zu wählen

damit $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 6 verschiedene Normalformen hat ,

nämlich $\gamma \in K \setminus \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}\}$.

Man erhält mit der selben Überlegung wie in (i) also $\frac{q-5}{6}$ solche Bahnen .

(iii) Die Konfiguration $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Repräsentant für die einzige

Bahn , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $6q(q-1)$ haben (Proposition 2.19(iii)).
Nun zu den Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ hat 6 verschiedene Normalformen für

$\mu \in K \setminus \left\{0, 1, 2 = -1 = \frac{1}{2}\right\}$, d.h. man hat $q-3$ Möglichkeiten μ zu wählen

damit $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}\right\}$ eine Fixgruppe der Ordnung $q(q-1)$ hat .

Mit der gleichen Überlegung wie in (i) , erhält man $\frac{q-3}{6}$ solche Bahnen .

(iv) Es gibt λ_1,$\lambda_2 \in K$ mit $\frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_1$bzw. $\frac{1}{\lambda_2} = 1 - \lambda_2$
(Proposition 2.19(iv)) .

Daher gibt es genau eine Bahn mit Fixgruppe der Ordnung $3q(q-1)$ (genau wie im Beweis von 2.21)
Man hat $q-4$ Möglichkeiten μ zu wählen damit

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}\right\}$ eine Fixgruppe der Ordnung $q(q-1)$ hat .

Mit der gleichen Überlegung wie in (i) erhält man also $\frac{q-4}{6}$ solche Bahnen .

(v) Mit Hilfe von Proposition 2.19(v) sieht man , dass jede Konfiguration 6 verschiedene Normalformen hat , da die Menge $\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ für alle $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$ 6-elementig ist .

Daher muss es $\frac{q-2}{6}$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ geben .

$\square$

Zum Abschluss des Kapitels , wollen wir für alle 5 Fälle , die in Satz 2.22 behandelt wurden , ein Beispiel betrachten .

2.23 Beispiele

Zu 2.22(i) : Wir betrachten $K = \mathbb{F}_q$ mit $q = 5^2 = 25$.
Kombinatorische Überlegung liefert : Es gibt $q(q+1)\binom{q}{3} = 25 \cdot 26 \cdot \binom{25}{3} = 1\,495\,000$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen

Nun mit Hilfe von Satz 2.22 :

- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben . Sei s_1 ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gs_1) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_1})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{2} = 195\,000$.

- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben . Sei s_2 ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gs_2) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_2})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{3q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{3} = 130\,000$.

- Es gibt $\frac{q-7}{6} = 3$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Wähle s_3, s_4, s_5 aus den 3 verschiedenen Bahnen , dann gilt

  $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_i})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = q^2(q^2-1) = 390\,000$ ($3 \leq i \leq 5$)

Also gibt es insgesamt $195\,000 + 130\,000 + 3 \cdot 390\,000 = 1\,495\,000$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

Zu 2.22(ii): Wir betrachten $K = \mathbb{F}_q$ mit $q = 5^3 = 125$
Kombinatorische Überlegung liefert : Es gibt $125 \cdot 126 \cdot \binom{125}{3} = 5\,004\,562\,500$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben . Sei s_1 ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gs_1) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_1})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{2} = 122\,062\,500$.

- Es gibt $\frac{q-5}{6} = 20$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Wähle je ein Element aus diesen Bahnen ($s_2, \ldots, s_{21}$) , dann gilt

  $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_i})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = q^2(q^2-1) = 244\,125\,000$ ($2 \leq i \leq 21$)

Also gibt es insgesamt $122\,062500 + 20 \cdot 244\,125\,000 = 5\,004\,562\,500$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

Zu 2.22(iii): Wir betrachten $K = \mathbb{F}_q$ mit $q = 3^3 = 27$.
Kombinatorische Überlegung liefert : Es gibt $27 \cdot 28 \cdot \binom{27}{3} = 2\,211\,300$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

Mit Hilfe von Satz 2.22 :

- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $6q(q-1)$ haben . Sei s_1 ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gs_1) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_1})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{6q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{6} = 88\,452$.

- Es gibt $\frac{q-3}{6} = 4$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Wähle je ein Element aus diesen Bahnen ($s_2, \ldots, s_5$) , dann gilt

  $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_i})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = q^2(q^2-1) = 530\,712$ $(2 \leq i \leq 5$)

Also gibt es insgesamt $88\,452 + 4 \cdot 530\,712 = 2\,211\,300$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

Zu 2.22(iv): Wir betrachten $K = \mathbb{F}_q$ mit $q = 2^6 = 64$.

Kombinatorische Überlegung liefert : Es gibt $64 \cdot 65 \cdot \binom{64}{3} = 173\,322\,240$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

Mit Hilfe von Satz 2.22 :

- Es gibt genau eine Bahn mit kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen , welche Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben . Sei s_1 ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gs_1) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_1})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{3q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{3} = 5\,591\,040$.

- Es gibt $\frac{q-4}{6} = 10$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Wähle je ein Element aus diesen Bahnen ($s_2, \ldots, s_{11}$) , dann gilt

  $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_i})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = q^2(q^2-1) = 16\,773\,120$ $(2 \leq i \leq 11$)

Also gibt es insgesamt $5\,591\,040 + 10 \cdot 16\,773\,120 = 173\,322\,240$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

Zu 2.22(v): Wir betrachten $K = \mathbb{F}_q$ mit $q = 2^7 = 128$

Kombinatorische Überlegung liefert : Es gibt $128 \cdot 129 \cdot \binom{128}{3} = 5\,636\,800\,512$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

Mit Hilfe von Satz 2.22 :

- Es gibt $\frac{q-2}{6} = 21$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Wähle je ein Element aus diesen Bahnen ($s_1, \ldots, s_{21}$) , dann gilt

  $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{\#(G_{s_i})} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = q^2(q^2-1) = 268\,419\,072$ $(1 \leq i \leq 21$)

Also gibt es insgesamt $21 \cdot 268\,419\,072 = 5\,636\,800\,512$ kollineare 3-Punkt-Konfigurationen .

3 Vier-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$

3.1 Definition

Seien s und t zwei 4-Punkt-Konfigurationen.Wir betrachten im Folgenden die 6 Verbindungsgeraden der 4 Punkte von s(bzw t). Nach Lemma 1.4 wissen wir, dass Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden definiert. Sei nun n_s(bzw. n_t) die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation , die von den Verbindungsgeraden der Konfiguration s (bzw. t) getroffen werden.
Weiter sei m_s(bzw m_t) diejenige Partition der 6 , die die Verteilung der Verbindungsgeraden von s (bzw t) auf die getroffenen Äquivalenzklassen beschreibt.
Dann heißen s und t kombinatorisch äquivalent , falls $n_s = n_t$ und falls die Partitionen m_s und m_t übereinstimmen.

3.2 Lemma

P_4 zerfällt in 5 Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation "kombinatorische Äquivalenz" :

1. Alle 6 Verbindungsgeraden sind verschieden voneinander und alle 6 Verbindungsgeraden sind paarweise nicht parallel zueinander. Wir sagen die 4-Punkt-Konfiguration ist in allgemeiner Lage .

2. Alle 6 Verbindungsgeraden sind verschieden voneinander und es gibt genau ein Paar paralleler Geraden .Wir sagen die 4-Punkt-Konfiguration ist vom Typ α .

3. Alle 6 Verbindungsgeraden sind verschieden voneinander und es gibt genau zwei Paare paralleler Geraden .Wir sagen die 4-Punkt-Konfiguration ist vom Typ β .

4. Von den 6 Verbindungsgeraden erhält man nur 4 echt voneinander Verschiedene . Diese 4 Geraden sind paarweise nicht parallel zueinander . Wir sagen die 4-Punkt-Konfiguration ist vom Typ γ . Dies ist der Fall , wo drei der vier Punkte auf einer Geraden liegen .

5. Von den 6 Verbindungsgeraden stimmen alle überein. Dies ist die Situation, wo alle 4 Punkte auf einer Geraden liegen. Solche Konfigurationen nennen wir kollineare 4-Punkt-Konfigurationen.

Beweis:

Falls $s_1 \in P_4$ in allgemeiner Lage ist , dann gilt
$n_{s_1} = 6$ und $m_{s_1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.
Falls $s_2 \in P_4$ vom Typ α ist , dann gilt $n_{s_2} = 5$ und $m_{s_2} = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Falls $s_3 \in P_4$ vom Typ β ist , dann gilt $n_{s_3} = 4$ und $m_{s_3} = 2 + 2 + 1 + 1$.
Falls $s_4 \in P_4$ vom Typ γ ist , dann gilt $n_{s_4} = 4$ und $m_{s_4} = 3 + 1 + 1 + 1$.
Falls $s_5 \in P_4$ kollinear ist , dann gilt $n_{s_5} = 1$ und $m_{s_5} = 6$.
Durch scharfes Hinsehen erkennt man , dass dies alle Äquivalenzklassen sind.

□

3.3 Lemma

Affine Äquivalenz impliziert kombinatorische Äquivalenz .

Beweis:

Definition 3.1 und Lemma 1.13 .

□

3.4 Bemerkung

Mit Lemma 3.2 und Lemma 3.3 sieht man , dass P_4 bzgl. der Operation der affinen Gruppe in mindestens 5 Bahnen zerfällt .

3.5 Lemma

Seien $x, y, z \in K^2$ und ist π eine Permutation von x, y, z , so gilt:
$[\pi(x), \pi(y), \pi(z)] = sgn(\pi)[x, y, z]$ (vgl. Definition 1.10).

Beweis:

Nachrechnen.

□

3.6 Lemma

Seien $x, y, z \in K^2$. Für jede affine Transformation $f = (q, M) \in G$ gilt:
$[f(x), f(y), f(z)] = \det(M)[x, y, z]$.

Beweis:

Es gilt $[x, y, z] = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ (siehe Beweis von 1.11).

Weiter gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

$= \det(x,y) + \det(y,z) + \det(z,x)$.

Somit erhält man
$[f(x), f(y), f(z)] = [Mx + q, My + q, Mz + q] = [Mx, My, Mz]$

$= \det(Mx, My) + \det(My, Mz) + \det(Mz, Mx)$

$= \det(M \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}) + \det(M \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}) + \det(M \begin{pmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{pmatrix})$

$=\det M(\det(x,y) + \det(y,z) + \det(z,x) = \det M[x,y,z]$.

□

3.7 Satz

Sei $\{x, y, z, a\}$ eine nicht kollineare 4-Punkt-Konfiguration und nicht vom Typ γ . Ist dann $f = (q, M) \in G$, mit $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, gegeben , so gilt

$$f(a) = \begin{pmatrix} \frac{-[x,z,a]}{[x,y,z]} & \frac{[x,y,a]}{[x,y,z]} \end{pmatrix}.$$

Beweis:

$f(a)$ ist wohldefiniert , da x , y und z nach Voraussetzung nicht auf einer Geraden liegen und somit $[x, y, z] \neq 0$ (Satz 1.11) .
Wir betrachten nun $f = (q, M) \in G$ wie in Satz , ein solches f exisitert nach Satz 2.2 . Es gilt nun :

$\det(M)[x, y, z] = [f(x), f(y), f(z)] = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$.
Also gilt $\det M = [x, y, z]^{-1}$.

Weiter gilt $[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(a)] = \det \begin{pmatrix} -\tilde{a}_1 & 1 - \tilde{a}_1 \\ -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_2 \end{pmatrix} = \tilde{a}_2$ mit $\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} := f(a)$.

Andererseits gilt $[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, f(a)] = \det M[x,y,a] = \frac{[x,y,a]}{[x,y,z]}$, $\tilde{a_2} = \frac{[x,y,a]}{[x,y,z]}$.

Betrachte $[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, f(a)] = -\tilde{a}_1$, andererseits gilt auch

$[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, f(a)] = \det M[x,z,a] = \frac{[x,z,a]}{[x,y,z]}$, also $\tilde{a_1} = \frac{-[x,z,a]}{[x,y,z]}$.

□

3.8 Definition

Sei $\{x,y,z,a\}$ eine nicht kollineare 4-Punkt-Konfiguration und nicht vom Typ γ . Dann ist die Konfiguration in Normalform , falls sie von der Form

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, Q_4\right\}$ ist , mit $Q_4 \in K^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

3.9 Korollar (Zu Satz 3.7)

Sei $\{x,y,z,a\} \in P_4$ wie in 3.7, dann hat man 24 Möglichkeiten diese Konfiguration in Normalform zu überführen. Hierbei erhält man für Q_4 folgende Punkte:

1) Für das ,durch die Bedingungen $f_1(x) = 0$, $f_1(y) = e_1$ und $f_1(z) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_1 \in G$ gilt

$$f_1(a) = \begin{pmatrix} \frac{-[x,z,a]}{[x,y,z]} & \frac{[x,y,a]}{[x,y,z]} \end{pmatrix} = Q_4^{(1)}.$$

2) Für das ,durch die Bedingungen $f_2(x) = 0$, $f_2(y) = e_2$ und $f_2(z) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_2 \in G$ gilt

$$f_2(a) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,a]}{[x,y,z]} & \frac{-[x,z,a]}{[x,y,z]} \end{pmatrix} = Q_4^{(2)}.$$

3) Für das ,durch die Bedingungen $f_3(x) = e_1$, $f_3(y) = 0$ und $f_3(z) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_3 \in G$ gilt

$$f_3(a) = \begin{pmatrix} \frac{[y,z,a]}{[x,y,z]} & \frac{[x,y,a]}{[x,y,z]} \end{pmatrix} = Q_4^{(3)}.$$

4) Für das ,durch die Bedingungen $f_4(x) = e_2$, $f_4(y) = 0$ und $f_4(z) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_4 \in G$ gilt

$$f_4(a) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,a]}{[x,y,z]} & \frac{[y,z,a]}{[x,y,z]} \end{pmatrix} = Q_4^{(4)}.$$

5) Für das ‚durch die Bedingungen $f_5(x) = e_1$, $f_5(y) = e_2$ und $f_5(z) = 0$, eindeutig bestimmte $f_5 \in G$ gilt

$$f_5(a) = \begin{pmatrix} \frac{[y,z,a]}{[x,y,z]} & \frac{-[x,z,a]}{[x,y,z]} \end{pmatrix} = Q_4^{(5)}.$$

6) Für das ‚durch die Bedingungen $f_6(x) = e_2$, $f_6(y) = e_1$ und $f_6(z) = 0$, eindeutig bestimmte $f_6 \in G$ gilt

$$f_6(a) = \begin{pmatrix} \frac{-[x,z,a]}{[x,y,z]} & \frac{[y,z,a]}{[x,y,z]} \end{pmatrix} = Q_4^{(6)}.$$

7) Für das ‚durch die Bedingungen $f_7(a) = 0$, $f_7(y) = e_1$ und $f_7(z) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_7 \in G$ gilt

$$f_7(x) = \begin{pmatrix} \frac{[x,z,a]}{[y,z,a]} & \frac{-[x,y,a]}{[y,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(7)}.$$

8) Für das ‚durch die Bedingungen $f_8(a) = 0$, $f_8(y) = e_2$ und $f_8(z) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_8 \in G$ gilt

$$f_8(x) = \begin{pmatrix} \frac{-[x,y,a]}{[y,z,a]} & \frac{[x,z,a]}{[y,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(8)}.$$

9) Für das ‚durch die Bedingungen $f_9(a) = e_1$, $f_9(y) = 0$ und $f_9(z) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_9 \in G$ gilt

$$f_9(x) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,z]}{[y,z,a]} & \frac{-[x,y,a]}{[y,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(9)}.$$

10) Für das ‚durch die Bedingungen $f_{10}(a) = e_2$, $f_{10}(y) = 0$ und $f_{10}(z) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_{10} \in G$ gilt

$$f_{10}(x) = \begin{pmatrix} \frac{-[x,y,a]}{[y,z,a]} & \frac{[x,y,z]}{[y,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(10)}.$$

11) Für das ‚durch die Bedingungen $f_{11}(a) = e_1$, $f_{11}(y) = e_2$ und $f_{11}(z) = 0$, eindeutig bestimmte $f_{11} \in G$ gilt

$$f_{11}(x) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,z]}{[y,z,a]} & \frac{[x,z,a]}{[y,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(11)}.$$

12) Für das ‚durch die Bedingungen $f_{12}(a) = e_2$, $f_{12}(y) = e_1$ und $f_{12}(z) = 0$, eindeutig bestimmte $f_{12} \in G$ gilt

$$f_{12}(x) = \begin{pmatrix} \frac{[x,z,a]}{[y,z,a]} & \frac{[x,y,z]}{[y,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(12)}.$$

13) Für das ‚durch die Bedingungen $f_{13}(x) = 0$, $f_{13}(a) = e_1$ und $f_{13}(z) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_{13} \in G$ gilt

$$f_{13}(y) = \begin{pmatrix} \frac{-[x,y,z]}{[x,z,a]} & \frac{[x,y,a]}{[x,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(13)}.$$

14) Für das ,durch die Bedingungen $f_{14}(x) = 0$, $f_{14}(a) = e_2$ und $f_{14}(z) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_{14} \in G$ gilt

$$f_{14}(y) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,a]}{[x,z,a]} & \frac{-[x,y,z]}{[x,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(14)}.$$

15) Für das ,durch die Bedingungen $f_{15}(x) = e_1$, $f_{15}(a) = 0$ und $f_{15}(z) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_{15} \in G$ gilt

$$f_{15}(y) = \begin{pmatrix} \frac{[y,z,a]}{[x,z,a]} & \frac{[x,y,a]}{[x,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(15)}.$$

16) Für das ,durch die Bedingungen $f_{16}(x) = e_2$, $f_{16}(a) = 0$ und $f_{16}(z) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_{16} \in G$ gilt

$$f_{16}(y) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,a]}{[x,z,a]} & \frac{[y,z,a]}{[x,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(16)}.$$

17) Für das ,durch die Bedingungen $f_{17}(x) = e_1$, $f_{17}(a) = e_2$ und $f_{17}(z) = 0$, eindeutig bestimmte $f_{17} \in G$ gilt

$$f_{17}(y) = \begin{pmatrix} \frac{[y,z,a]}{[x,z,a]} & \frac{-[x,y,z]}{[x,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(17)}.$$

18) Für das ,durch die Bedingungen $f_{18}(x) = e_2$, $f_{18}(a) = e_1$ und $f_{18}(z) = 0$, eindeutig bestimmte $f_{18} \in G$ gilt

$$f_{18}(y) = \begin{pmatrix} \frac{-[x,y,z]}{[x,z,a]} & \frac{[y,z,a]}{[x,z,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(18)}.$$

19) Für das ,durch die Bedingungen $f_{19}(x) = 0$, $f_{19}(y) = e_1$ und $f_{19}(a) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_{19} \in G$ gilt

$$f_{19}(z) = \begin{pmatrix} \frac{[x,z,a]}{[x,y,a]} & \frac{[x,y,z]}{[x,y,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(19)}.$$

20) Für das ,durch die Bedingungen $f_{20}(x) = 0$, $f_{20}(y) = e_2$ und $f_{20}(z) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_{20} \in G$ gilt

$$f_{20}(z) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,z]}{[x,y,a]} & \frac{[x,z,a]}{[x,y,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(20)}.$$

21) Für das ,durch die Bedingungen $f_{21}(x) = e_1$, $f_{21}(y) = 0$ und $f_{21}(a) = e_2$, eindeutig bestimmte $f_{21} \in G$ gilt

$$f_{21}(z) = \begin{pmatrix} \frac{-[y,z,a]}{[x,y,a]} & \frac{[x,y,z]}{[x,y,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(21)}.$$

22) Für das ,durch die Bedingungen $f_{22}(x) = e_2$, $f_{22}(y) = 0$ und $f_{22}(a) = e_1$, eindeutig bestimmte $f_{22} \in G$ gilt

$$f_{22}(z) = \begin{pmatrix} \frac{[x,y,z]}{[x,y,a]} & \frac{-[y,z,a]}{[x,y,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(22)}.$$

23) Für das ,durch die Bedingungen $f_{23}(x) = e_1$, $f_{23}(y) = e_2$ und $f_{23}(a) = 0$, eindeutig bestimmte $f_{23} \in G$ gilt

$$f_{23}(z) = \begin{pmatrix} \frac{-[y,z,a]}{[x,y,a]} & \frac{[x,z,a]}{[x,y,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(23)}.$$

24) Für das ,durch die Bedingungen $f_{24}(x) = e_2$, $f_{24}(y) = e_1$ und $f_{24}(a) = 0$, eindeutig bestimmte $f_{24} \in G$ gilt

$$f_{24}(z) = \begin{pmatrix} \frac{[x,z,a]}{[x,y,a]} & \frac{-[y,z,a]}{[x,y,a]} \end{pmatrix} = Q_4^{(24)}.$$

Beweis:

Die 24 Möglichkeiten erhält man durch Vertauschen der Rollen von x, y, z und a beim Überführen in Normalform .
Die Charakterisierung der Punkte $Q_4^{(i)}$ ergibt sich aus Satz 3.7 und Lemma 3.5.

□

3.10 Korollar

Seien $\{x, y, z, a\}$ und $\{u, v, w, b\}$ wie in Satz 3.7 und seien $Q_4^{(1)}, \ldots, Q_4^{(24)}$ (bzw. $R_4^{(1)}, \ldots, R_4^{(24)}$) , die in Korollar 3.9 angegebenen Punkte für $\{x, y, z, a\}$ (bzw. $\{u, v, w, b\}$) , dann gilt
$\{x, y, z, a\}$ und $\{u, v, w, b\}$ sind affin äquivalent genau dann, wenn
$\left\{Q_4^{(1)}, \ldots, Q_4^{(24)}\right\} = \left\{R_4^{(1)}, \ldots, R_4^{(24)}\right\}$gilt .

Beweis: klar .

□

3.11 Notation

Seien $x, y \in K^2$, dann soll die eindeutig bestimmte Verbindungsgerade von x und y mit $x \vee y$ bezeichnet werden .
Falls A, B zwei nicht parallele Geraden in $\mathbb{A}^2(K)$ sind , soll mit $A \wedge B$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von A und B bezeichnet werden .

3.12 Lemma

(i) Ist $\{x, y, z, a\}$ eine 4-Punkt-Konfiguration vom Typ β . Dann sind die einzigen möglichen Punkte Q_4 in Normalform die Punkte $(1, 1)$, $(-1, 1)$ oder $(1, -1)$.
(ii) Ist $\{x, y, z, a\}$ eine 4-Punkt-Konfiguration vom Typ α . Dann sind die Punkte Q_4 in Normalform immer von der Form $(1, \lambda)$, $(\mu, 1)$ oder $(\delta, -\delta)$ mit λ, μ, $\delta \in K \setminus \{0, 1, -1\}$.

Beweis:

Wir betrachten eine Konfiguration , die sich in Normalform befindet also

$$s := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_4 \right\}.$$

Definiere jetzt die 3 Geraden A, B und C durch

- $A := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $C := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

A ist die eindeutig bestimmte Gerade durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, welche parallel ist zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee e_2$. Daher ist man für $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq Q_4 \in A$ in der Situation , dass s entweder vom Typ α oder vom Typ β ist .

B ist die eindeutig bestimmte Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, welche parallel ist zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee e_1$. Daher ist man für $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq Q_4 \in B$ in der Situation , dass s entweder vom Typ α oder vom Typ β ist .

C ist die eindeutig bestimmte Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, welche parallel ist zu $e_1 \vee e_2$. Daher ist man für $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq Q_4 \in C$ in der Situation , dass s entweder vom Typ α oder vom Typ β ist .

Betrachte nun die Schnittpunkte
$A \wedge B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \wedge C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $B \wedge C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Man sieht nun , dass s genau dann vom Typ β ist , wenn $Q_4 =(1,1)$, $(-1,1)$ oder $(1,-1)$ und man sieht , dass s genau dann vom Typ α ist , wenn $Q_4 \in (A \cup B \cup C) \setminus \{(1,1),(-1,1),(-1,1)\}$.

$\square$

3.13 Proposition

Die affine Gruppe G operiert transitiv auf der Menge der 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ β .

Beweis:

Dazu zeigen wir : Jede Konfiguration $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{a}\} \in P_4$ vom Typ β kann durch eine affine Transformation in die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ überführt werden . Nach Lemma 3.12 kann man

$\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{a}\}$ immer in$\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\}$ mit

$a = (1,1)$, $(-1,1)$ oder $(1,-1)$ überführen .

Falls $a = (-1,1)$ ist , erhalten wir : $[x,y,z] = [x,y,a] = [x,z,a] = [y,z,a] = 1$
Ein Vergleich mit Korollar 3.9 zeigt , dass man die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ überführen kann .

Falls $a = (1,-1)$ ist , erhalten wir :
$[x,y,z] = [y,z,a] = 1$ und $[x,y,a] = [x,z,a] = -1$.

Ein erneuter Vergleich mit Korrolar 3.9 zeigt , dass man auch

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ überführen kann .

$\square$

3.14 Proposition

Sei $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{a}\} \in P_4$ vom Typ α , dann ergeben sich für die Normalform folgende 12 Möglichkeiten :

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_4 \right\}$ mit $Q_4 \in$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda^{-1} \\ -\lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda^{-1} \\ \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

für ein $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\}$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir , dass es ein $f \in G$ gibt,

mit $\{f(\tilde{x}), f(\tilde{y}), f(\tilde{z}), f(\tilde{a})\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \right\}$ für ein $\lambda \neq 0, 1, -1$.
Wenn wir $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{a}\}$ in Normalform überführen , wissen wir nach Lemma 3.12(ii) , dass der 4.Punkt entweder die Form $(1, \mu)$, $(\nu, 1)$ oder $(\delta, -\delta)$ hat , mit μ,ν,$\delta \in K \setminus \{0, 1, -1\}$.

- Falls das, durch die Bedingungen $h(\tilde{x}) = 0$, $h(\tilde{y}) = e_1$ und $h(\tilde{z}) = e_2$ eindeutig bestimmte $h \in G$, nun $h(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} \nu \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt , dann lege $f \in G$ fest durch die Bedingungen
  $f(\tilde{x}) = 0$, $f(\tilde{y}) = e_2$ und $f(\tilde{z}) = e_1$, dann gilt $f(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \nu \end{pmatrix}$.
- Falls das, durch die Bedingungen $h(\tilde{x}) = 0$, $h(\tilde{y}) = e_1$ und $h(\tilde{z}) = e_2$ eindeutig bestimmte $h \in G$, nun $h(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$ erfüllt , dann lege $f \in G$ fest durch die Bedingungen
  $f(\tilde{x}) = e_1$, $f(\tilde{y}) = 0$ und $f(\tilde{z}) = e_2$, dann gilt $f(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}$.
- Falls das, durch die Bedingungen $h(\tilde{x}) = 0$, $h(\tilde{y}) = e_1$ und $h(\tilde{z}) = e_2$ eindeutig bestimmte $h \in G$, nun $h(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$ erfüllt ,
  dann setze $f := h \in G$.

Also gibt es oBdA ein $f \in G$ mit $f(\tilde{x}) = 0$, $f(\tilde{y}) = e_1$, $f(\tilde{z}) = e_2$ und $f(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.
Setze nun $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y := e_1$, $z := e_2$ und $a := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, dann gilt :
$[x, y, z] = 1$,
$[x, y, a] = \lambda$,
$[x, z, a] = -1$,
$[y, z, a] = -\lambda$.

Wenn man dies in die Liste von 3.9 einsetzt , erhält man , die in 3.14 angegebenen Punkte.

$\square$

3.15 Korollar

Kombinatorische Äquivalenz impliziert nicht affine Äquivalenz .

Beweis:

Seien $s_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\}$

und $s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ mit

$\mu \in K \setminus \left\{0, 1, -1, \lambda, -\lambda, \lambda^{-1}, -\lambda^{-1}\right\}$.

Dann sind s_1 und s_2 beides Konfigurationen vom Typ α , sie sind aber nicht affin äquivalent (Proposition 3.14) .

□

3.16 Lemma

Für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ gilt :

$[x, y, z] = 1$,
$[x, y, a] = \mu$,
$[x, z, a] = -\lambda$,
$[y, z, a] = 1 - \lambda - \mu$.

Beweis: Nachrechnen.

□

3.17 Satz

Sei $\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ in allgemeiner Lage , dann gilt :

- $\lambda, \mu \neq 0, 1$,
- $\lambda + \mu \neq 1$,
- $\lambda + \mu \neq 0$

und die 24 möglichen Punkte Q_4 in Normalform sind folgende :

1. (λ, μ) ,
2. (μ, λ) ,
3. $(1 - \lambda - \mu, \mu)$,

4. $(\mu, 1-\lambda-\mu)$,
5. $(1-\lambda-\mu, \lambda)$,
6. $(\lambda, 1-\lambda-\mu)$,
7. $(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+1}, \frac{\mu}{\lambda+\mu+1})$,
8. $(\frac{\mu}{\lambda+\mu+1}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu+1})$,
9. $(\frac{1}{1-\lambda-\mu}, \frac{\mu}{\lambda+\mu-1})$,
10. $(\frac{\mu}{\lambda+\mu-1}, \frac{1}{1-\lambda-\mu})$,
11. $(\frac{1}{1-\lambda-\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu-1})$,
12. $(\frac{\lambda}{\lambda+\mu-1}, \frac{1}{1-\lambda-\mu})$,
13. $(\frac{1}{\lambda}, \frac{-\mu}{\lambda})$,
14. $(\frac{-\mu}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$,
15. $(\frac{\lambda+\mu-1}{\lambda}, \frac{-\mu}{\lambda})$,
16. $(\frac{-\mu}{\lambda}, \frac{\lambda+\mu-1}{\lambda})$,
17. $(\frac{\lambda+\mu-1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$,
18. $(\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda+\mu-1}{\lambda})$,
19. $(\frac{-\lambda}{\mu}, \frac{1}{\mu})$,
20. $(\frac{1}{\mu}, \frac{-\lambda}{\mu})$,
21. $(\frac{\lambda+\mu-1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$,
22. $(\frac{1}{\mu}, \frac{\lambda+\mu-1}{\mu})$,
23. $(\frac{\lambda+\mu-1}{\mu}, \frac{-\lambda}{\mu})$,
24. $(\frac{-\lambda}{\mu}, \frac{\lambda+\mu-1}{\mu})$.

Beweis:

Es gilt $\lambda + \mu \neq 0$ und $\lambda, \mu \neq 1$ wegen Lemma 3.12 .
Da nicht mehr als 2 Punkte auf einer Geraden liegen dürfen , gilt $\lambda, \mu \neq 0$ und $\lambda + \mu \neq 1$.
Die 24 Punkte erhält man mit Lemma 3.16 und Korollar 3.9 .

□

3.18 Korollar

Sei K ein Körper mit $char(K) \neq 2,3$, ansonsten Situation wie in Satz 3.17 .
Für $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $a = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ erhält man nur 4 verschiedene Normalformen :

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$,
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$,
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Beweis :

Die Aussage folgt aus Satz 3.17 .

$\square$

3.19 Korollar

Sei K ein Körper mit $char(K) \neq 2,3$, ansonsten Situation wie in Satz 3.17 .
Für $a = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ erhält man höchstens 12 verschiedene Normalformen :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_4 \right\} \text{mit } Q_4 \in$$

$$\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2\lambda-1} \\ \frac{\lambda}{2\lambda-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1-2\lambda} \\ \frac{\lambda}{2\lambda-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2\lambda-1} \\ \frac{1}{1-2\lambda} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1/\lambda \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\lambda-1}{\lambda} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2\lambda-1}{\lambda} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\lambda-1}{\lambda} \\ 1/\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ \frac{2\lambda-1}{\lambda} \end{pmatrix} \}.$$

Beweis:

Diese Aussage folgt ebenfalls aus Satz 3.17 .

$\square$

Im Folgenden werden wir in Kapitel 3 noch die 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ und die kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen betrachten .

3.20 Proposition

Seien $\{x, y, z, a\}$ und $\{u, v, w, b\}$ zwei 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , wobei $[x, y, z] = 0$ und $[u, v, w] = 0$ gilt .
Dann sind die beiden Konfigurationen affin äquivalent genau dann , wenn die 3-Punkt-Konfigurationen $\{x, y, z\}$ und $\{u, v, w\}$ affin äquivalent sind .

Beweis:

Seien $\{x, y, z\}$ und $\{u, v, w\}$ affin äquivalent . Wegen $[x, y, z] = [u, v, w] = 0$ erfüllen oBdA alle $f \in G$ mit $f(x) = u$ und $f(y) = v$ die Bedingung $f(z) = w$.
Dann sei $g \in G$ die eindeutig bestimmte affine Transformation mit $g(x) = u$, $g(y) = v$ und $g(a) = b$. Dann muss also schon $g(z) = w$ gelten .
Sind dagegen $\{x, y, z, a\}$ und $\{u, v, w, b\}$ affin äquivalent, dann gibt es ein $h \in G$ mit $\{h(x), h(y), h(z), h(a)\} = \{u, v, w, b\}$. Da aber affine Transformationen die Kollinearität von Punkten respektieren (Lemma 3.6), muss schon $\{h(x), h(y), h(z)\} = \{u, v, w\}$gelten.

□

3.21 Definition

Eine kollineare 4-Punkt-Konfiguration ist in Normalform , falls sie von der Form

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist , mit } \lambda, \mu \neq 0, 1 \text{ und } \lambda \neq \mu \ .$$

3.22 Lemma

Sei $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{a}\}$ eine kollineare 4-Punkt-Konfiguration . Dann gibt es höchstens 12 verschiedene Normalformen dieser Konfiguration .
Genauer : Ist $g \in G$ eine affine Transformation mit

$$g(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ g(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und es gelte } g(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } g(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \neq 0, 1$ und $\lambda \neq \mu$.
Dann haben die 12 möglichen Normalformen folgende Gestalt :

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu/\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\mu \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda/\mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-\lambda\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\mu\\0\end{pmatrix}\right\}$

5. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mu-1}{\lambda-1}\\0\end{pmatrix}\right\}$

6. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\mu}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\lambda-1}{\mu-1}\\0\end{pmatrix}\right\}$

7. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\lambda-1}{\lambda}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\\0\end{pmatrix}\right\}$

8. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{\lambda-1}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\\0\end{pmatrix}\right\}$

9. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{\lambda-\mu}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-\lambda}{\mu-\lambda}\\0\end{pmatrix}\right\}$

10. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\mu-1}{\mu}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mu-\lambda}{\mu}\\0\end{pmatrix}\right\}$

11. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\mu-1}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\lambda-\mu}{1-\mu}\\0\end{pmatrix}\right\}$

12. $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\mu-\lambda}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-\mu}{\lambda-\mu}\\0\end{pmatrix}\right\}$

Beweis:

Aus den 4 Punkten können wir 2 Punkte auswählen , die wir dann

auf $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$abbilden .

Da die 4 Punkte auf einer Geraden liegen , sind nach der Wahl von zwei Punkten, die auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ abgebildet werden , die anderen beiden Punkte eindeutig bestimmt und von der Form $\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}$ mit $\lambda,\mu \neq 0,1$ und $\lambda \neq \mu$.
Man hat hierfür $\binom{4}{2}\cdot 2 = 12$ Möglichkeiten .

Sei die Konfiguration $\left\{x=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},z=\begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix},a=\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}\right\}$ gegeben , dann gilt :

1. Für ein $f_1 \in G$ mit $f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_1(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, gilt $f_1(z) = z$ und $f_1(a) = a$.

2. Für ein $f_2 \in G$ mit $f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_2(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_2(y) = \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_2(a) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}\mu \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Für ein $f_3 \in G$ mit $f_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_3(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_3(y) = \begin{pmatrix} 1/\mu \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_3(a) = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Für ein $f_4 \in G$ mit $f_4(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_4(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_4(z) = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_4(a) = \begin{pmatrix} 1-\mu \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Für ein $f_5 \in G$ mit $f_5(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_5(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_5(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_5(a) = \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{\lambda-1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Für ein $f_6 \in G$ mit $f_6(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_6(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_6(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mu} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_6(z) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\mu-1} \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Für ein $f_7 \in G$ mit $f_7(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_7(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_7(y) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_7(a) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-\mu}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$.

8. Für ein $f_8 \in G$ mit $f_8(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_8(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_8(x) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_8(a) = \begin{pmatrix} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. Für ein $f_9 \in G$ mit $f_9(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_9(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   gilt $f_9(x) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f_9(y) = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda}{\mu-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. Für ein $f_{10} \in G$ mit $f_{10}(a) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $f_{10}(x) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

gilt $f_{10}(y) = \begin{pmatrix}\frac{\mu-1}{\mu}\\0\end{pmatrix}$ und $f_{10}(a) = \begin{pmatrix}\frac{\mu-\lambda}{\mu}\\0\end{pmatrix}$.

11. Für ein $f_{11} \in G$ mit $f_{11}(a) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $f_{11}(y) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

gilt $f_{11}(x) = \begin{pmatrix}\frac{\mu}{\mu-1}\\0\end{pmatrix}$ und $f_{11}(z) = \begin{pmatrix}\frac{\lambda-\mu}{1-\mu}\\0\end{pmatrix}$.

12. Für ein $f_{12} \in G$ mit $f_{12}(a) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $f_{12}(z) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

gilt $f_{12}(x) = \begin{pmatrix}\frac{\mu}{\mu-\lambda}\\0\end{pmatrix}$ und $f_{12}(y) = \begin{pmatrix}\frac{1-\mu}{\lambda-\mu}\\0\end{pmatrix}$.

$\square$

3.23 Satz

Seien $\{x, y, z, a\}$ und $\{u, v, w, b\}$ zwei kollineae 4-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$.

Es sei $\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix} \right\}$ die eindeutig bestimmte Normalform von $\{x, y, z, a\}$, die wir erhalten durch eine affine Transformation,

die x auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und y auf $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ abbildet.

Analog sei $\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\delta\\0\end{pmatrix} \right\}$ die eindeutig bestimmte Normalform von $\{u, v, w, b\}$, die wir erhalten durch eine affine Transformation,

die u auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und v auf $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ abbildet.

Dann gilt : $\{x, y, z, a\}$ und $\{u, v, w, b\}$ sind affin äquivalent genau dann, wenn

$$\{\{\lambda, \mu\} \left\{\tfrac{1}{\lambda}, \tfrac{\mu}{\lambda}\right\}, \left\{\tfrac{1}{\mu}, \tfrac{\lambda}{\mu}\right\}, \{1-\lambda, 1-\mu\}, \left\{\tfrac{1}{1-\lambda}, \tfrac{\mu-1}{\lambda-1}\right\}, \left\{\tfrac{1}{1-\mu}, \tfrac{\lambda-1}{\mu-1}\right\}, \left\{\tfrac{\lambda-1}{\lambda}, \tfrac{\lambda-\mu}{\lambda}\right\},$$
$$\left\{\frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\right\}, \left\{\frac{\lambda}{\lambda-\mu}, \frac{1-\lambda}{\mu-\lambda}\right\}, \left\{\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu-\lambda}{\mu}\right\}, \left\{\frac{\mu}{\mu-1}, \frac{\lambda-\mu}{1-\mu}\right\}, \left\{\frac{\mu}{\mu-\lambda}, \frac{1-\mu}{\lambda-\mu}\right\}\}$$
$$=$$
$$\{\{\gamma, \delta\} \left\{\tfrac{1}{\gamma}, \tfrac{\delta}{\gamma}\right\}, \left\{\tfrac{1}{\delta}, \tfrac{\delta}{\gamma}\right\}, \{1-\gamma, 1-\delta\}, \left\{\tfrac{1}{1-\gamma}, \tfrac{\delta-1}{\gamma-1}\right\}, \left\{\tfrac{1}{1-\delta}, \tfrac{\gamma-1}{\delta-1}\right\}, \left\{\tfrac{\gamma-1}{\gamma}, \tfrac{\gamma-\delta}{\gamma}\right\},$$
$$\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}, \frac{\delta-\gamma}{1-\gamma}\right\}, \left\{\frac{\gamma}{\gamma-\delta}, \frac{1-\gamma}{\delta-\gamma}\right\}, \left\{\frac{\delta-1}{\delta}, \frac{\delta-\gamma}{\delta}\right\}, \left\{\frac{\delta}{\delta-1}, \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}\right\}, \left\{\frac{\delta}{\delta-\gamma}, \frac{1-\delta}{\gamma-\delta}\right\}\}$$

Beweis :
Folge aus Lemma 3.22 .

□

4 Fixgruppen von Vier-Punkt-Konfigurationen

In diesem Kapitel wollen wir, unter Beachtung der Struktur des Körpers, die Fixgruppen zu den verschiedenen Bahnen der 4-Punkt-Konfigurationen bestimmen.

4.1 Proposition

(i) sei K ein Körper mit $char(K) \neq 2$ und sei $s := \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{a}\} \in P_4$ vom Typ β (siehe 3.2). Dann ist die Fixgruppe G_s isomorph zur Diedergruppe mit 8 Elementen.
(ii) Falls $char(K) = 2$ ist , dann gilt in der Situation von (i) : $G_s \cong S_4$.

Beweis:

(i) Man kann $s := \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{a}\} \in P_4$ nach Proposition 3.13 in die Konfiguration

$\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ überführen .

Es gilt dann : $[x, y, z] = [x, y, a] = 1$ und $[x, z, a] = [y, z, a] = -1$.
Wenn man die Auflistung in 3.9 betrachtet , sieht man dass genau die Punkte 1),2),7),8),17),18),21),22) dem Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entsprechen, und wenn man dann für diese Fälle die Permutationen der 4 Punkte x, y, z, a betrachtet , erhält man $G_s \cong \{Id, (yz), (xa), (xa)(yz), (xyaz), (xz)(ya), (xy)(za), (xzay)\}$

(ii) Wegen $char(K) = 2$ gilt $[x, y, z] = [x, y, a] = [x, z, a] = [y, z, a] = 1$, d.h. alle 24 Punkte aus 3.10 entsprechen dem Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Also erhält man $G_s \cong S_4$.

$\square$

4.2 Lemma

Für $K = \mathbb{C}$ erfüllen i und $-i$ die Gleichung $\lambda = -\lambda^{-1}$.
Es sind i und $-i$ die einzigen Lösungen dieser Gleichung .

Beweis: klar.

$\square$

4.3 Lemma

Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2$ gibt es $x \in K$ bzw. $-x \in K$, welche die Gleichung $\lambda = -\lambda^{-1}$ erfüllen genau dann , wenn $q \equiv 1(\text{mod } 4)$.

Beweis : Sei $\alpha \in K$ ein primitives Element , d.h. $\mathbb{F}_q^* = \{\alpha, \ldots, \alpha^{q-1} = 1\}$.
Falls $q \equiv 1(\text{mod } 4)$ gilt , dann setze $x := \alpha^{\frac{q-1}{4}}$. Wegen $q \equiv 1(\text{mod } 4)$ ist dies wohldefiniert und es gilt $x^2 = \alpha^{\frac{q-1}{2}} = -1$.

Falls es ein $x \in K$ gibt mit $x^2 = -1$ dann können wir schreiben :

$$x^2 = \alpha^{2i} = -1 = \alpha^{\frac{q-1}{2}+k(q-1)} \text{ für } i \in \mathbb{N} , i \neq l(q-1) \text{ und } k, l \in \mathbb{Z},$$

es gilt nun also $2i = \frac{q-1}{2} + k(q-1)$.
Dies ist äquivalent zu der Gleichung $i = \frac{(2k+1)(q-1)}{4}$. Da $2k+1$ nicht durch 4 teilbar ist , muss $q-1$ durch 4 teilbar sein. Es gilt also $q \equiv 1(\text{mod } 4)$.

$\square$

4.4 Satz

(i) Für $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ gilt : Es gibt unendlich viele Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$ vom Typ α (siehe 3.2). In allen Bahnen haben die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 2.

(ii) Für $K = \mathbb{C}$ gilt dasselbe wie in (i) bis auf den Unterschied , dass es zusätzlich genau eine Bahn von 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ α gibt ,wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 4 haben .

(iii) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2$ und $q \equiv 1(\text{mod } 4)$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-5}{4}$ Bahnen von 4-Punk-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$ vom Typ α mit Fixgruppen der Ordnung 2 .
- Es gibt genau eine Bahn von 4-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$ vom Typ α mit Fixgruppe der Ordnung 4 .

(iv) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2$ und $q \not\equiv 1(\text{mod } 4)$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-3}{4}$ Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$ vom Typ α mit Fixgruppen der Ordnung 2 .

(v) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$) gilt :

- Es gibt $\frac{q-2}{2}$ Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$ vom Typ α mit Fixgruppen der Ordnung 4.

Beweis:

(i) sei $s_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ vom Typ α für $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\}$.

Dann wähle $s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ mit

$\mu \in K \setminus \{0, 1, -1, \lambda, -\lambda, \lambda^{-1}, -\lambda^{-1}\}$ und somit liegen s_1 und s_2 nicht in einer Bahn (Proposition 3.14).

Nun wähle $s_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ mit

$\gamma \in K \setminus \{0, 1, -1, \lambda, -\lambda, \lambda^{-1}, -\lambda^{-1}, \mu, -\mu, \mu^{-1}, -\mu^{-1}\}$ und somit liegen s_1 , s_2 und s_3 in verschiedenen Bahnen.
Es ist klar , dass man dieses Verfahren unendlich oft fortsetzen kann (da $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ unendlich viele Elemente besitzen) , d.h es gibt unendlich viele Bahnen .
Nun zur Fixgruppe : Ist $s \in P_4$ vom Typ α , so können wir oBdA annehmen

$$s := \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \right\} \in P_4 \text{ (siehe 3.14).}$$

Dann gilt : $[x, y, z] = 1$, $[x, y, a] = \tilde{\lambda}$, $[x, z, a] = -1$ und $[y, z, a] = -\tilde{\lambda}$.
Betrachten wir nun die 24 Punkte in 3.9, sehen wir , dass genau die Punkte 1) und 18) dem Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda} \end{pmatrix}$ entsprechen .
Wenn wir nun für 1) und 18) die Permutation der Punkte x, y, z, a betrachten , erhalten wir $G_s \cong \{Id, (xz)(ya)\}$.

(ii) Es ist nur zu zeigen ,dass es genau eine Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 4 gibt .
Ein Repräsentant dieser Bahn ist gegeben durch

$$s := \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\} \in P_4.$$

Es gilt : $[x, y, z] = 1$, $[x, y, a] = i$, $[x, z, a] = -1$ und $[y, z, a] = -i$.
Durch Einsetzen dieser Werte in 3.9 und mit Lemma 4.2 sehen wir , dass die vier Punkte 1) , 18) , 10) und 23) aus 3.9 dem Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ entsprechen.
Daraus folgt $G_s \cong \{Id, (xz)(ya), (xazy), (xyza)\}$.

Ein weiterer Repräsentant dieser Bahn ist $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$.

Da i und $-i$ die einzigen Elemtente von $\mathbb{C}$ sind , die der Gleichung $\lambda = -\lambda^{-1}$ genügen , kann es keine weiteren Bahnen dieser Form geben .

(iii) Da $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ gilt , gibt es λ_1 , $\lambda_2 \in \mathbb{F}_q$ mit $\lambda_1 = -\lambda_1^{-1}$ bzw. $\lambda_2 = -\lambda_2^{-1}$ (nach Lemma 4.3) . Somit ist die Konfiguration

$s_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\}$ ein Repräsentant für die einzige Bahn mit

Fixgruppe der Ordnung 4 (wie in (ii) für $i = \lambda_1$ und $-i = \lambda_2$) .
Es bleibt noch zu zeigen , dass es $\frac{q-5}{4}$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung 2

gibt , dazu betrachten wir $s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right\}$. Wir haben $q - 5$

Möglichkeiten λ_3 zu wählen damit s_2 nicht affin äquivalent ist zu s_1 und damit s_2 wohldefiniert und vom Typ α ist (nämlich $\lambda_3 \in K \setminus \{0, 1, -1, \lambda_1, -\lambda_1\}$) .
Dann haben wir noch $(q - 5) - 4$ Möglichkeiten λ_4 zu wählen damit

$s_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \right\}$ nicht affin äquivalent ist zu s_1 oder s_2 ist und

damit s_3 wohldefiniert und vom Typ α ist
(nämlich $\lambda_4 \in K \setminus \left\{0, 1, -1, \lambda_1, -\lambda_1, \lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3^{-1}, -\lambda_3^{-1}\right\}$). Für die Wahl von s_4 haben wir dann noch $(q - 5) - 2 \cdot 4$ Möglichkeiten usw. .Mit dieser Überlegung folgt , dass es genau $\frac{q-5}{4}$ solche Bahnen gibt .

(iv) Da $q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ gilt , gibt es keine Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 4 , daher haben alle Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 2 .
Da man jede Konfiiguration vom Typ α auf die Form

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\}$ bringen kann ,

kann es höchstens $q - 3$ verschiedene Bahnen geben . Da aber nach der Wahl von

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Konfigurationen

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\lambda_1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda_1^{-1}\end{pmatrix}\right\}$ und

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\lambda_1^{-1}\end{pmatrix}\right\}$

alle in einer Bahn liegen ,gibt es genau $\frac{q-3}{4}$ Bahnen .

(v) Man kann jede Konfiguration vom Typ α auf die Form

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\right\}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1 = -1\}$ bringen . Wir müssen beachten ,dass nun $1 = -1$ gilt, wegen $char(K) = 2$, d.h. es kann höchsten $q - 2$ verschiedene Bahnen geben . Da aber nach der Wahl von

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda_1\end{pmatrix}\right\}$ auch die Konfiguration

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda_1^{-1}\end{pmatrix}\right\}$ in derselben Bahn liegt , folgt damit , dass es

genau $\frac{q-2}{2}$ Bahnen gibt (Beachte : $\lambda_1 = -\lambda_1$ und $\lambda_1^{-1} = -\lambda_1^{-1}$) .

Nun kommen wir zur Fixgruppe . Sei $s \in P_4$ vom Typ α , wir können oBdA

annehmen $s = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\right\}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\}$. Da es

in Körpern der Charakteristik 2 kein Vorzeichen gibt , erhält man für die Punkte 1) , 18) , 13) , 16) aus 3.9 jeweils den Punkt $\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}$ und somit gilt $G_s \cong \{Id, (xz)(ya), (ya), (xz)\}$.

□

4.5 Lemma

Sei $\left\{x = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}\right\} \in P_4$ in allgemeiner Lage .

Falls von den 24 Normalformen dieser Konfiguration (siehe 3.17) höchstens 12 echt verschieden sind , muss a von derselben Form sein wie einer der 12 Punkte Q_4 aus Korollar 3.19.

Beweis :

Wenn wir annehmen , dass a nicht von derselben Form wie einer der 12 Punkte Q_4 aus Korollar 3.19 ist , dann erkennt man durch scharfes Hinsehen , dass die 24 Normalformen in 3.17 alle verschieden sind .

$\square$

4.6 Lemma

Eine Konfiguration $\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right\} \in P_4$

in allgemeiner Lage mit der Eigenschaft ,dass sie höchstens 12 verschiedene Normalformen hat , kann immer in eine Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \right\}$ überführt werden , mit $\gamma \in K \setminus \{0,1\}$.

Beweis : Diese Aussage folgt aus Lemma 4.5 und Korollar 3.19 .

$\square$

4.7 Lemma

Sei K ein Körper mit $char(K) \neq 2,3$ und

$\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ in allgemeiner Lage .

Falls von den 12 Normalformen dieser Konfiguration (siehe 3.19) nur 4 verschieden voneinander sind , dann gilt $\lambda = -1$ oder $\lambda = \frac{1}{3}$.

Beweis:

Damit von den 12 Normalformen in 3.19 nur noch 4 echt verschieden sind , muss entweder $\frac{\lambda}{2\lambda-1} = \frac{1}{1-2\lambda}$ und somit $\lambda = -1$ gelten , oder es muss $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1-2\lambda}$ und somit $\lambda = \frac{1}{3}$ gelten .

$\square$

4.8 Satz

(i) Für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ gibt es unendlich viele Bahnen von 4-Punkt-Konfiguration, die in allgemeiner Lage sind .

Genauer : Es gibt unendlich viele Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage mit trivialen Fixgruppen und es gibt unendlich viele Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage mit Fixgruppen der Ordnung 2 .
Außerdem gibt es genau eine Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 6 .

(ii) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2, 3$ gilt :

- Es gibt genau eine Bahn von 4-Punkt-Konfigurationen in allgmeiner Lage mit Fixgruppe der Ordnung 6.
- Es gibt $\frac{q-5}{2}$ Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in allgmeiner Lage mit Fixgruppe der Ordnung 2.
- Es gibt $\frac{q^2-12q+35}{24}$ Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in allgmeiner Lage mit trivialen Fixgruppen .

(iii) Für $K = \mathbb{F}_{3^r}$ $(r \in \mathbb{N}\ ,\ r \geq 2\ )$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-3}{2}$ Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in allgmeiner Lage mit Fixgruppe der Ordnung 2.
- Es gibt $\frac{q^2-12q+27}{24}$ Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in allgmeiner Lage mit trivialen Fixgruppen .

(iv) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ $(r \in \mathbb{N}\ ,\ r \geq 2\ )$ gilt :

- Es gibt $\frac{q^2-6q+8}{24}$ Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen in allgmeiner Lage mit trivialen Fixgruppen .

Beweis :

(i) Wir zeigen zuerst , dass es unendlich viele Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen mit trivialen Fixgruppen gibt . Dazu betrachten wir

$$s_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \lambda, \mu \neq 0, 1\ ,\ \lambda + \mu \neq 1, 0 \text{ (siehe 3.17).}$$

Weiter wählen wir a so , dass a nicht von derselben Form wie einer der 12 Punkte Q_4 aus Korollar 3.19 ist , dann erhält man 24 verschiedene Normalformen (4.5 Lemma) . Also ist die Fixgruppe von s_1 trivial . Betrachten wir dann

$$s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{a} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \neq 0, 1 \text{ , } \tilde{\lambda} + \tilde{\mu} \neq 1, 0.$$

Nun müssen wir $\tilde{a}$ so wählen , dass $\tilde{a}$ nicht von derselben Form wie einer der 12 Punkte Q_4 aus Korollar 3.19 ist und ,dass s_2 verschieden ist von den 24 Normalformen von s_1. Dann liegen s_1 und s_2 in verschiedenen Bahnen und haben beide triviale Fixgruppen , es ist klar , dass es unendlich viele solcher Bahnen gibt .
Ein Repräsentant für eine Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 2 ist

$$r_1 := \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\} \in P_4 \text{ mit } \lambda_1 \neq 0, 1, -1 \text{ .}$$

Es gilt : $[x, y, z] = 1$, $[x, y, a] = \lambda_1$, $[x, z, a] = -\lambda_1$ und $[y, z, a] = 1 - 2\lambda_1$. Dann entsprechen genau die Punkte 1) und 2) aus 3.9 dem Punkt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ und somit gilt $G_{r_1} \cong \{Id, (yz)\}$.

Nun zur Erklärung , warum es unendlich viele solche Bahnen gibt : Sei r_1 wie oben , dann wähle

$$r_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\} \in P_4 \text{ mit } \lambda_2 \neq 0, 1, -1, \lambda_1, \tfrac{\lambda_1}{2\lambda_1 - 1},$$

dann liegen r_1 und r_2 nicht in einer Bahn (siehe 3.19) . Wenn wir dann

$$r_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \right\} \in P_4 \text{ mit } \lambda_3 \neq 0, 1, -1, \lambda_1, \tfrac{\lambda_1}{2\lambda_1 - 1}, \lambda_2, \tfrac{\lambda_2}{2\lambda_2 - 1}$$

wählen , dann liegen r_1, r_2 und r_3 in verschiedenen Bahnen. Man kann dieses Verfahren unendlich oft fortsetzen, also gibt es unendlich viele solche Bahnen.

Ein Repräsentant für die einzige Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 6 ist

$$t := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \in P_4.$$

Es gilt : $[x,y,z]=1$, $[x,y,a]=-1$, $[x,z,a]=1$ und $[y,z,a]=3$.
Wenn wir nun die Punkte in 3.9 berechnen , sehen wir, dass die Punkte 1) , 2), 13) , 14) , 19) , und 20) dem Punkt $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ entsprechen und somit gilt:
$G_t=\{Id,(yz),(ay),(az),(yza),(yaz)\}$.Wegen Lemma 4.7 und Korollar 3.18 ist dies die einzige Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 6 .

(ii) Die Bahn , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 6 haben , erhält man wie in (i) und wegen $char(K)\neq 2,3$ ist hier auch alles wohldefiniert . Denn falls $char(K)=2$ wäre , dann wäre die Konfiguration

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ nicht in allgemeiner Lage , sondern vom Typ β .
Falls $char(K)=3$ wäre , dann würden die Punkte $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ auf einer Geraden liegen .

Nun zu den Bahnen , in denen die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 2 besitzen . Die Konfigurationen mit Fixgruppen der Ordnung 2 sind diejenigen, die 12 verschiedene Normalformen haben und solche Konfigurationen kann man nach Lemma 4.6 immer in eine Konfiguration der Form

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}\right\}$ überführen mit $\lambda\in K\setminus\{0,1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$.

Die Einschränkung $\lambda\neq 0,1$ ist klar , auch die Einschränkung $\lambda\neq -1,\frac{1}{3}$ ist klar (sonst wäre man in der Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 6) .
Die Bedingung $\lambda\neq\frac{1}{2}$ muss deshalb gemacht werden ,

da $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ auf einer Geraden liegen.

Also kann es höchstens $q-5$ solche Bahnen geben . Da aber nach der Wahl von

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}\right\}$ auch die Konfiguration

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{2\lambda-1}\\\frac{\lambda}{2\lambda-1}\end{pmatrix}\right\}$ in derselben Bahn liegt (siehe 3.18),

gibt es insgesamt $\frac{q-5}{2}$ solche Bahnen .

Jetzt müssen wir noch die Bahnen betrachten , in denen die Konfigurationen triviale Fixgruppen besitzen . Dazu überlegen wir uns wie viele Möglickeiten wir haben a zu wählen , damit die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\}$ in allgemeiner Lage ist und alle 24 Normalformen

dieser Konfiguration verschieden sind .

Damit $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\}$ in allgemeiner Lage ist , muss gelten :

- $a \notin \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $a \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
- $a \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\} \right\}$
- $a \notin \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \setminus \{0, 1\} \right\}$

Dafür hat man also

$q^2 - (3 + 3 + 3(q-3) + 3(q-2)) = q^2 - 6q + 9$ Möglichkeiten.

Nun soll aber noch gelten , dass alle 24 Normalformen der Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\}$ verschieden sind . Daher müssen wir diejenigen Punkte,

die von den obigen Bahnen abgedeckt werden noch abziehen .

Dies sind $1 \cdot 4 + \frac{q-5}{2} \cdot 12$ Punkte . Damit erhält man

$q^2 - 6q + 9 - 4 - 12 \cdot \frac{q-5}{2} = q^2 - 12q + 35$ mögliche Punkte .

Dies ist nun die gesuchte Anzahl der Punkte a die erfüllen,dass

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\}$ in allgemeiner Lage ist und alle 24 Normalformen dieser Konfiguration verschieden sind .

Daher gibt es genau $\frac{q^2-12q+35}{24}$ Bahnen , in denen die Konfigurationen triviale Fixgruppen haben .

(iii) Es kann wegen $char(K) = 3$ keine Bahn geben mit Fixgruppe der Ordnung 6.
Nun zu den Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung 2 . Ein Repräsentant für eine solche Bahn ist

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\lambda_1 \in K \setminus \{0, 1, -1 = \frac{1}{2}\}$. Es gibt also höchstens

$q - 3$ solche Bahnen . Mit der gleichen Überlegung wie in (ii) erhält man $\frac{q-3}{2}$ solche Bahnen .
Zu den Bahnen mit trivialer Fixgruppe . Hier geht man ebenfalls wie in (ii) vor . Wenn man die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\}$ betrachtet , dann hat man $q^2 - 6q + 9$ Möglichkeiten

a zu wählen damit die Konfiguration in allgemeiner Lage ist . Hiervon müssen die Punkte subtrahiert werden , die schon in den obigen Bahnen liegen :

$q^2 - 6q + 9 - \frac{q-3}{2} \cdot 12 = q^2 - 12q + 27$.

Es gibt also $q^2 - 12q + 27$ Möglichkeiten wie man a wählen kann damit

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\}$ in allgemeiner Lage ist und alle 24 Normalformen

verschieden sind .

Somit erhält man genau $\frac{q^2-12q+27}{24}$ Bahnen mit trivialen Fixgruppen .

(iv) In Teil (ii) vom Beweis wurde gezeigt , dass es für $char(K) = 2$ keine Bahn geben kann , wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 6 haben . Es kann auch keine Konfigurationen geben mit Fixgruppen der Ordnung 2 , denn eine solche Konfiguration kann man nach Lemma 4.6 immer auf die Form

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \right\}$ bringen mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Wegen $char(K) = 2$ gilt

aber $\lambda + \lambda = 0$. Dies würde aber bedeuten , dass die Konfiguration vom Typ α ist (Lemma 3.2) .
Also kann es hier nur Konfigurationen mit trivialen Fixgruppen geben . Auch hier überlegen wir uns wieder , wie viele Möglichkeiten wir haben zur Wahl von a damit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \right\} \text{ in allgemeiner Lage ist .}$$

Es muss gelten :

- $a \notin \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $a \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \setminus \{0,1\} \right\}$
- $a \notin \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \setminus \{0,1\} \right\}$

Daraus folgt , dass man $q^2 - 4 - 3(q-2) - 3(q-2) = q^2 - 6q + 8$ Möglichkeiten hat .
Da jede der $(q^2 - 6q + 8)$ Konfigurationen 24 verschiedene Normalformen hat,

gibt es genau $\frac{q^2-6q+8}{24}$ verschiedene Bahnen .

□

4.9 Beispiele

(i) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{5^2} = \mathbb{F}_{25}$, also $q = 25$ und wollen die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage berechnen .
Mit kombinatorischer Überlegung erhalten wir Folgendes :

$\frac{q^2(q^2-1)(q^2-q)(q^2-6q+9)}{24} = 4\,719\,000\,000$.

Nun wollen wir die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage mit Hilfe von Satz 4.8 berechnen :

- Es gibt eine Bahn , wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 6 haben . Sei r ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gr) = \frac{\#(G)}{6} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{6} = 39\,000\,000$.

- Es gibt $\frac{q-5}{2} = 10$ Bahnen , wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 2 haben . Seien $s_1, \ldots, s_{10}$ Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{2} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2} = 117\,000\,000$ $(1 \leq i \leq 10$).

- Es gibt $\frac{q^2-12q+35}{24} = 15$ Bahnen , wo die Konfigurationen triviale Fixgruppen haben . Seien $t_1, \ldots, t_{15}$ Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt $\#(Gs_j) = \frac{\#(G)}{1} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{1} = 234\,000\,000$ $(1 \leq j \leq 15$).

Insagesamt erhält man also
$39\,000\,000 + 10 \cdot 117\,000\,000 + 15 \cdot 234\,000\,000 = 4\,719\,000\,000$.

(ii) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{3^3} = \mathbb{F}_{27}$, also $q = 27$ und wollen die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage berechnen .

Mit kombinatorischer Überlegung erhalten wir Folgendes :
$\frac{q^2(q^2-1)(q^2-q)(q^2-6q+9)}{24} = 8\,941\,435\,776$.

Nun wollen wir die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage mit Hilfe von Satz 4.8 berechnen :

- Es gibt $\frac{q-3}{2} = 12$ Bahnen , wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 2 haben . Seien $s_1, \ldots, s_{12}$ Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{2} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2} = 186\,279\,912$ $(1 \leq i \leq 12$).
- Es gibt $\frac{q^2-12q+27}{24} = 18$ Bahnen , wo die Konfigurationen triviale Fixgruppen haben . Seien $t_1, \ldots, t_{18}$ Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt:

  $\#(Gs_j) = \frac{\#(G)}{1} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{1} = 372\,559\,824$ $(1 \leq j \leq 18$).

Insgesamt erhält man also
$12 \cdot 186\,279\,912 + 18 \cdot 372\,559\,824 = 8\,941\,435\,776$.

(iii) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{2^5} = \mathbb{F}_{32}$, also $q = 32$ und wollen die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage berechnen .
Mit kombinatorischer Überlegung erhalten wir Folgendes :
$\frac{q^2(q^2-1)(q^2-q)(q^2-6q+8)}{24} = 36\,371\,005\,440$.

Nun wollen wir die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage mit Hilfe von Satz 4.8 berechnen :

- Es gibt $\frac{q^2-6q+8}{24} = 35$ Bahnen , wo die Konfigurationen triviale Fixgruppen haben . Seien $t_1, \ldots, t_{35}$ Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt $\#(Gs_i) = \frac{\#(G)}{2} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{1} = 1\,039\,171\,584$ $(1 \leq i \leq 35$).

Insgesamt erhält man also
$35 \cdot 1\,039\,171\,584 = 36\,371\,005\,440$.

4.10 Proposition

(i) Für $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Bahnen von 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ (siehe 3.2).
Genauer : Es gibt genau eine Bahn , in der die Konfigurationen Figruppen der Ordnung 2 haben und in allen anderen Bahnen haben die 4-Punkt-Konfigurationen triviale Fixgruppen

(ii) Für $K = \mathbb{C}$ gilt alles wie in (i) bis auf den Unterschied , dass es hier zusätzlich noch genau eine Bahn gibt , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 3 haben .

(iii) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2,3$ und $q \equiv 1(\text{mod } 3)$ gilt:

- Es gibt $\frac{q-7}{6}$ Bahnen mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche triviale Fixgruppen haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche Fixgruppe der Ordnung 2 haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche Fixgruppe der Ordnung 3 haben .

(iv) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2,3$ und $q \not\equiv 1(\text{mod } 3)$ gilt:

- Es gibt $\frac{q-5}{6}$ Bahnen mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche triviale Fixgruppen haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche Fixgruppe der Ordnung 2 haben .

(v) Für $K = \mathbb{F}_{3^r}$ $(r \in \mathbb{N})$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-3}{6}$ Bahnen mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche triviale Fixgruppen haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche Fixgruppe der Ordnung 6 haben .

(vi) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ und r gerade gilt :

- Es gibt $\frac{q-4}{6}$ Bahnen mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche triviale Fixgruppen haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche Fixgruppe der Ordnung 3 haben .

(vii) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ und r ungerade gilt :

- Es gibt $\frac{q-2}{6}$ Bahnen mit 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ , welche triviale Fixgruppen haben .

Beweis :

Es sind die 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ, diejenigen mit der Eigenschaft , dass man 3 Punkte auf einer Geraden hat und einen 4.Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt (siehe Lemma 3.2). Nach 3.20 wissen wir , dass 2 Konfigurationen vom Typ γ genau dann affin äquivalent sind, wenn die 2 dazugehörigen kollinearen 3-Punkt-Konfigurationen affin äquivalent sind, d.h die Anzahl der Bahnen muss mit den Ergebnissen aus 2.20, 2.21 , und 2.22 übereinstimmen .
Die Fixgruppen sind in 4.10 allerdings nicht mehr dieselben wie in 2.20 , 2.21 , 2.22 . Denn im Fall einer kollinearen 3-Punkt-Konfiguration $\{x, y, z\}$ existieren für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ unendlich viele $f \in G$ mit $f(x) = x$, $f(y) = y$ und $f(z) = z$ und für $K = \mathbb{F}_q$ existieren $q(q-1)$ affine Transformationen $h \in G$ mit $h(x) = x$, $h(y) = y$ und $h(z) = z$. In der Situation von 4.10 haben wir allerdings noch einen Punkt a , der nicht auf der Geraden durch x, y, z liegt und der unter den affinen Transformationen fixiert werden muss . Aber da eine affine Transformationen , die 3 nicht kollineare Punkte wieder auf sich selbst abbildet schon die Identität ist , sind die Fixgruppen von 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ isomorph zu Untergruppen von S_4 (für die Struktur der Untergruppen vgl. Beweis von 2.20 , 2.21 bzw. 2.22) .

$\square$

4.11 Satz

(i) Für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ gilt :
Es gibt unendlich viele Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen.
Genauer: Es gibt unendlich viele Bahnen , in denen es möglich ist eine Konfiguration $\{x, y, z, a\}$ in sich selbst zu überführen durch affine Transformationen , die eine Permutation $(xa)(yz)$ der 4 Punkte bewirken (evtl. nach Umbenennung der Punkte).
Außerdem gibt es unendlich viele Bahnen , in denen es nur möglich ist die Konfigurationen in sich selbst zu überführen , indem alle 4 Punkte auf sich selbst abgebildet werden .

(ii) Für $K = \mathbb{C}$ gilt dasselbe wie für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bis auf den Unterschied , dass es hier noch eine eindeutig bestimmte Bahn gibt , wo man die Konfigurationen wieder in sich selbst überführen kann durch affine Transformationen , welche die 4 Punkte zyklisch vertauschen . Ein Repräsentant dieser Bahn ist die Konfiguration

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Außerdem gibt es noch genau eine Bahn , wo man die Konfiguration wieder in sich selbst überführen kann durch affine Transformationen , die 3 der 4 Punkte zyklisch vertauschen .
Ein Repräsentant dieser Bahn ist die Konfiguration

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \lambda := -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \text{ und } \mu := -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \; .$$

(iii) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2$, $q \equiv 1(\text{mod } 4\ )$ und $q \equiv 1(\text{mod } 3\ )$ gilt :

- Es gibt genau eine Bahn von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q-5}{4}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt genau eine Bahn von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q^2-8q+7}{24}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

(iv) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2$, $q \equiv 1(\text{mod } 4\ )$ und $q \not\equiv 1(\text{mod } 3\ )$ gilt :

- Es gibt genau eine Bahn von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q-5}{4}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q^2-8q+15}{24}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

(v) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2$, $q \not\equiv 1(\text{mod } 4\ )$ und $q \equiv 1(\text{mod } 3\ )$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-3}{4}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt genau eine Bahn von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q^2-8q+7}{24}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

(vi) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2$, $q \not\equiv 1(\text{mod } 4\ )$ und $q \not\equiv 1(\text{mod } 3\ )$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-3}{4}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q^2-8q+15}{24}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

(vii) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ und r gerade) gilt :

- Es gibt genau eine Bahn von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $12q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q-4}{6}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q^2-6q+8}{24}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

$(viii)$ Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ und r ungerade) gilt :

- Es gibt $\frac{q-2}{6}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ besitzen .
- Es gibt $\frac{q^2-6q+8}{24}$ Bahnen von kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

Bevor wir uns dem Beweis von Satz 4.11 widmen , zeigen wir zunächst einige Lemmata .

4.12 Lemma

Sei $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ eine kollineare 4-Punkt-Konfiguration

(λ, $\mu \neq 0, 1$) mit $\mu = \lambda + 1$. Dann hat diese Konfiguration höchstens 6 verschiedene Normalformen :

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Beweis : Ersetze für die 12 möglichen Normalformen in Lemma 3.22 μ durch $\lambda + 1$.

$\square$

4.13 Lemma

Sei $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ eine kollineare 4-Punkt-Konfiguration

mit $\lambda = -\lambda^{-1}$ .Dann gibt es höchstens 3 verschiedene Normalformen für diese Konfiguration :

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Beweis : Die Aussage folgt aus der Bedingung $\lambda = -\lambda^{-1}$ und Lemma 4.12 .

$\square$

4.14 Lemma

Für $K = \mathbb{F}_q$ gibt es $\lambda, \mu \in K \setminus \{0,1\}$ mit $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$ genau dann, wenn $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ gilt .

Beweis : Die Bedingungen werden klarerweise nur von den beiden nichttrivialen 3.Einheitswurzeln erfüllt, also folgt die Aussage aus Lemma 2.16.

$\square$

4.15 Lemma

Sei $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in P_4$ eine kollineare 4-Punkt-Konfiguration

(λ, $\mu \neq 0, 1$) mit $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$. Dann gibt es höchstens 4 verschiedene Normalformen für diese Konfiguration :

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\mu-1}{\lambda-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mu} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\mu-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Beweis :

Betrachten wir die 12 Normalformen in 3.22 , sehen wir unter Beachtung von $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$,dass die Normalformen 1) , 2) , 3) übereinstimmen , weiterhin stimmen 4) ,7) , 10) überein , es stimmen 5), 9) , 11) überein und es stimmen 6) , 8) , 12) überein .

$\square$

4.16 Lemma

(i)Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$ gerade , gibt es $\lambda, \mu \in K \setminus \{0,1\}$ mit $\mu = \lambda + 1$, $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$.

(ii) Betrachte in der Situation von (i) die Konfiguration

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Dies ist die einzige Normalform dieser Konfiguration .

Beweis :

(i) Da r gerade ist , gilt $2^r \equiv 1(\text{mod } 3)$ (siehe Lemma 2.18) , d.h. es gibt $\lambda, \mu \in K \setminus \{0,1\}$ mit $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$ und zwar sind λ und μ die beiden nichttrivialen 3.Einheitswurzeln . Sie erfüllen daher $\lambda + \mu + 1 = 0$. Dies ist in Körpern der Charakteristik 2 äquivalent zu der Gleichung $\mu = \lambda + 1$.

(ii) Wegen der Bedingung $\mu = \lambda + 1$ erhalten wir die 6 verschiedenen Normalformen aus Lemma 4.12 .
Wegen $char(K) = 2$ sind von diesen 6 aber nur 3 Verschiedene dabei:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Wegen $\lambda = \mu^{-1} = \frac{1}{\lambda+1}$ stimmen auch diese 3 überein .

$\square$

4.17 Proposition

Sei K ein Körper mit $char(K) \neq 2$, weiter sei

$$s := \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

eine kollineare 4-Punkt-Konfigurationin $\mathbb{A}^2(K)$, dann gilt :

(i) Alle 12 möglichen Normalformen dieser Konfiguration sind verschieden genau dann wenn $\mu \neq \lambda + 1$ und ($\lambda \neq \mu^{-1}$ oder $\lambda^2 \neq \mu$) .
(ii) Es existieren genau 6 verschiedene Normalformen genau dann , wenn $\mu = \lambda + 1$ und $\lambda \neq -\lambda^{-1}$.
(iii) Es existieren genau 3 verschiedene Normalformen genau dann, wenn $\mu = \lambda + 1$ und $\lambda = -\lambda^{-1}$.
(iv) Es existieren genau 4 verschiedene Normalformen genau dann , wenn $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$.

Beweis :

(i) Falls $\mu = \lambda + 1$ oder ($\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$) , dann folgt mit Lemma 4.12 bzw. Lemma 4.15 , dass s weniger als 12 Normalformen hat .
Falls hingegen $\mu \neq \lambda + 1$ und ($\lambda \neq \mu^{-1}$oder $\lambda^2 \neq \mu$) gilt , erkennt man durch scharfes Hinsehen , dass alle 12 möglichen Normalformen verschieden sind .

(ii) Falls $\mu = \lambda + 1$ und $\lambda \neq -\lambda^{-1}$ gilt , erhält man die 6 Normalformen wie in Lemma 4.12 .
Falls hingegen $\mu \neq \lambda + 1$ oder $\lambda = -\lambda^{-1}$ gilt , erhält man entweder 3 verschiedene Normalformen (nämlich falls $\mu = \lambda + 1$, $\lambda = -\lambda^{-1}$) oder 12 verschiedene Normalformen (in den anderen Fällen) .

(iii) Falls $\mu = \lambda + 1$ und $\lambda = -\lambda^{-1}$ gilt , erhält man 3 verschiedene Normalformen (Lemma 4.13) .
Falls hingegen $\mu \neq \lambda + 1$ oder $\lambda \neq -\lambda^{-1}$ gilt , erhält man in jedem Fall mehr als 3 verschiedene Normalformen .

(iv) Falls $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$ gilt ,erhält man 4 verschiedene Normalformen (Lemma 4.15) .
Falls hingegen $\lambda \neq \mu^{-1}$ oder $\lambda^2 \neq \mu$ gilt , dann können nur die Fälle auftreten mit 12 ,6 oder 3 verschiedenen Normalformen .

$\square$

Beweis von Satz 4.11 :

(i) Betrachten wir die Konfiguration

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\} .$$

Man erhält in diesem Fall von den 12 möglichen Normalformen nur 6 Verschiedene (siehe Lemma 4.12). Es stimmen die Normalformen 1) und 12) aus 3.22 Lemma mit der Konfiguration $\{x, y, z, a\}$ überein .
Es gibt also affine Transformationen , die folgende Permutationen der Punkte bewirken : Id , $(xa)(yz)$ (vgl. Beweis von 3.22) .
Man hat für jede dieser beiden Permutationen allerdings unendlich viele Möglichkeiten affine Transformationen auszuwählen , die die gewünschte Permutation der 4 Punkte liefern .
Weiterhin müssen wir beachten , dass diese Konfiguration auch wirklich 6 Normalformen und nicht nur 3 Normalformen hat , denn die Gleichung $\lambda = -\lambda^{-1}$ ist äquivalent zu $\lambda^2 = -1$ und diese ist in $\mathbb{Q}$ bzw. in $\mathbb{R}$ nicht lösbar (siehe 4.17.(iii)) .

Wir müssen noch zeigen , dass es unendlich viele solcher Bahnen gibt , sei dazu

$s_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\lambda \in K \setminus \{0, 1, -1\}$. Wenn wir jetzt

$s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ wählen , mit

$\mu \in K \setminus \left\{0, 1, -1, \lambda, -\lambda, \lambda^{-1}, -\lambda^{-1}\right\}$, dann liegen s_1 und s_2 nicht in einer Bahn (siehe Lemma 4.12) .Nun kann man

$$s_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ wählen ,}$$

mit $\gamma \in K \setminus \{0, 1, -1, \lambda, -\lambda, \lambda^{-1}, -\lambda^{-1}, \mu, -\mu, \mu^{-1}, -\mu^{-1}\}$, dann liegen s_1 , s_2 und s_3 in unterschiedlichen Bahnen . Dieses Verfahren kann man unendlich oft fortsetzen , also muss es unendlich viele solcher Bahnen geben .
Kommen wir nun zu den Konfigurationen , wo es nicht möglich ist durch affine Transformationen eine nichttriviale Permutation der 4 Punkte vorzunehmen .
Also betrachten wir

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \mu \neq \lambda + 1.$$

Die Bedingung $\lambda = \mu^{-1}$und $\lambda^2 = \mu$ ist in $\mathbb{R}$ nur für $\lambda = \mu = 1$ lösbar , dies führt allerdings zu einem Widerspruch . Also besitzt diese Konfiguration 12 verschiedene Normalformen . (siehe 4.17(i)) .
Dies bedeutet , dass man keine nichttriviale Permutation der 4 Punkte bewirken kann .
Es ist klar , dass es unendlich viele Bahnen gibt , die solche Konfigurationen enthalten .

(ii) Hier bleibt zu zeigen , wie die 2 zusätzlichen Bahnen mit anderen Fixgruppen zustande kommen .
Zunächst betrachten wir die Konfiguration

$$s_1 := \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ und wir sehen,}$$

dass für i gilt : $i = -i^{-1}$. Mit Proposition 4.17 (iii) sehen wir dann , dass diese Konfiguration nur 3 verschiedene Normalformen besitzt .
Es entsprechen die Normalformen 1) , 6) , 7) und 12) aus 3.22 der Konfiguration s_1 .
Man erhält somit $Id, (xzay), (xyaz)$ und $(xa)(yz)$ als mögliche Permutationen der 4 Punkte , die durch affine Transformationen realisiert werden können .
Weiter müssen wir beachten , dass es nur eine solche Bahn gibt ,
da die Konfiguration

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ affin äquivalent zu } s_1 \text{ ist (Lemma 4.13) .}$$

Nun zu der anderen Bahn . Dazu betrachten wir die Konfiguration

$$s_2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

mit $\lambda := -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ und $\mu := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Es gilt $\lambda = \mu^{-1}$und $\lambda^2 = \mu$, also gibt es nach Proposition 4.17 (iv) genau 4 verschiedene Normalformen für s_2 . Die Normalformen 1) , 2) und 3) von s_2 (siehe 3.22) entsprechen der Konfiguration s_2 . Man erhält somit Id , (yaz) , (yza) als mögliche Permutationen der 4 Punkte , die durch affine Transformationen realisiert werden können. Es gibt nur eine solche Bahn wegen Proposition 4.17 (iv) und Lemma 4.14 .

(iii) Wegen $q \equiv 1(\text{mod } 4\ )$, gibt es nach Lemma 4.3 $\lambda_1 \in K \setminus \{0, 1\}$ mit $\lambda_1 = -\lambda_1^{-1}$ .Wir betrachten nun die Konfiguration

$$s := \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Man erhält wie in (ii) $Id, (xzay), (xyaz)$ und $(xa)(yz)$ als mögliche Permutationen der 4 Punkte , die durch affine Transformationen realisiert werden können . Für jede solche Permutation hat man $q(q-1)$ Möglichkeiten eine affine Transformation zu wählen (vgl. Lemma 2.10) . Also hat man hier eine Fixgruppe der Ordnung $4q(q-1)$. Die Bahn , die von s repräsentiert wird , ist auch die einzige Bahn mit Fixgruppe der Ordnung $4q(q-1)$ (aus dem gleichen Grund wie in (ii)) .

Wennn wir nun die Konfiguration

$$s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \lambda_2 \in K \setminus \{0, 1, -1, \lambda_1, -\lambda_1\}$$

betrachten , dann hat diese Konfiguration eine Fixgruppe der Ordnung $2q(q-1)$ (mit gleicher Überlegung wie in (ii)) . Dabei hat man $q-5$ Möglichkeiten s_2 zu wählen damit s_2 wohldefiniert ist und nicht affin äquivalent zu s_1 ist .
Nun haben wir noch $(q-5)-4$ Möglichkeiten

$$s_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_3 + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ zu wählen damit } s_3 \text{ nicht}$$

affin äquivalent zu s_1 oder s_2 ist

(nämlich $\lambda_3 \in K \setminus \left\{0, 1, -1, \lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \lambda_2^{-1}, -\lambda_2^{-1}\right\}$) .

Für die Wahl von

$s_4 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_4 + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ hat man dann noch $(q-5) - 2 \cdot 4$

Möglichkeiten damit s_1 ,s_2 ,s_3 und s_4 alle in verschiedenen Bahnen liegen .

Mit dieser Überlegung sieht man , dass es $\frac{q-5}{4}$ solche Bahnen gibt .

Wegen $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3\ )$, gibt es nach Lemma $\lambda, \mu \in K \setminus \{0,1\}$ mit $\lambda = \mu^{-1}$ und $\lambda^2 = \mu$.
Wir betrachten die Konfiguration
$r := \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Wie in (ii) erhält man Id , (yaz) , (yza) als mögliche Permutationen der 4 Punkte , die durch affine Transformationen realisiert werden können .
Also erhält man für diese Konfiguration eine Fixgruppe der Ordnung $3q(q-1)$.Die Bahn , die von r repräsentiert wird , ist auch die einzige Bahn mit Fixgruppe der Ordnung $3q(q-1)$ (aus dem gleichen Grund wie in (ii)) .
Nun zu den Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$. Dazu überlegen wir uns wie viele Möglichkeiten wir haben zur Wahl von $\{z, a\}$ damit die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 12 verschiedene Normalformen hat :

Für die Wahl $\{z, a\}$ hat man $\frac{(q-2)(q-3)}{2}$ Möglichkeiten , davon muss man aber alle Möglichkeiten weglassen , die in obigen Bahnen vorkommen .

Also erhält man $\frac{(q-2)(q-3)}{2} - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 - \frac{q-5}{4} \cdot 6 = \frac{q^2-8q+7}{2}$ Möglichkeiten zur Wahl von $\{z, a\}$ damit die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 12 verschiedene Normalformen hat .

Damit folgt ,dass es genau $\frac{\frac{q^2-8q+7}{2}}{12} = \frac{q^2-8q+7}{24}$ Bahnen gibt,

wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben .

(iv) Wegen $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4\ )$, gibt es genau 1 Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben (gleiche überlegung wie in (ii)).

Ebenfalls wie in (iii) erhält man $\frac{q-5}{4}$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben .

Wegen $q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3\ )$, gibt es keine Bahn , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben .

Mit der gleichen Überlegung wie in (iii) kommt man dann auf $\frac{q^2-8q+15}{24}$ Bahnen , wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

(v)Wegen $q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4\ )$ gibt es keine Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben .

Daher erhält man $\frac{q-3}{4}$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$.

Wegen $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3\ )$ gibt es eine Bahn , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben .

Mit gleicher Überlegung wie in (iii) erhält man $\frac{q^2-8q+7}{24}$ Bahnen gibt wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben .

(vi) Wegen $q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4\ )$ gibt es keine Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben .

Daher erhält man $\frac{q-3}{4}$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$.

Wegen $q \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3\ )$, gibt es keine Bahn , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben .

Mit der gleichen Überlegung wie in (iv) kommt man dann auf $\frac{q^2-8q+15}{24}$ Bahnen , wo die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ besitzen .

(vii) Nach Lemma 4.16 gibt es $\lambda, \mu \in K \setminus \{0,1\}$ mit der Eigenschaft , dass die Konfiguration

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ nur eine Normalform besitzt . Man erhält somit

$\{Id, (yaz), (yza), (xy)(za), (xzy), (xay), (xyz), (xaz), (xz)(ya), (xya), (xza), (xa)(yz)\} = A_4$

als die Menge der Permutationen , die durch affine Transformationen realisiert werden können .
Also hat man hier eine Fixgruppe der Ordnung $12q(q-1)$.

Nun zu den Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$. Dazu wähle die Konfiguration

$s_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $\mu_1 = \lambda_1 + 1$ und $\lambda_1 \in K \setminus \{0, 1, \lambda\}$.

Man hat hierfür genau $\frac{q-2}{2} - 1 = \frac{q-4}{2}$ Möglichkeiten.

(Beachte: Aus $\mu = \lambda + 1$ folgt wegen $char(K) = 2$ immer $\mu + 1 = \lambda$).

Es gibt für s_1 dann 3 verschiedene Normalformen (wegen $char(K) = 2$ und Lemma 4.12) und die Normalformen 1) , 4) , 9) und 12) (siehe 3.22) stimmen mit s_1 überein mit ,also erhält man $Id, (xy)(az)$, $(xz)(ya)$, $(xa)(yz)$ als Permutationen der 4 Punkte , die durch affine Transformationen realisiert werden können .

Da die 3 Normalformen von s_1 alle von der Form

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sind , hat man für die Wahl von

$s_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ noch $\frac{q-4}{2} - 3$ Möglichkeiten damit

s_1 und s_2 nicht affin äquivalent sind .
So sieht man , dass es insgesamt

$\frac{\frac{q-4}{2}}{3} = \frac{q-4}{6}$ Bahnen gibt , in denen die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben.

Wie in vorherigen Überlegungen erhält man $\frac{\frac{(q-2)(q-3)}{2} - \frac{q-4}{6} \cdot 3 - 1}{12} = \frac{q^2-6q+8}{24}$

Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$.

(vii) Da $2^r \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ für r ungerade , gibt es keine Bahn in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung $12q(q-1)$ haben .
Weiter erhält man $\frac{\frac{q-2}{2}}{3} = \frac{q-2}{6}$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ und damit gibt es

$\frac{\frac{(q-2)(q-3)}{2} - \frac{q-2}{6} \cdot 3}{12} = \frac{q^2-6q+8}{24}$ Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$.

$\square$

4.18 Beispiele

(i) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{5^2} = \mathbb{F}_{25}$,also $q = 25$ und wollen die Anzahl der kollinearen 4 -Punkt -Konfiguratonen berechnen .
Mit kombinatorischem Ansatz erhalten wir folgendes : $q(q+1)\binom{q}{4} = 8\,222\,500$.

Nun wollen wir die Anzahl der kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen mit Hilfe von Satz 4.11 berechnen :

- Es gibt genau 1 Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben. Ist $s \in P_4$ ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt $\#(Gs) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{4q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{4} = 97\,500$.
- Es gibt $\frac{q-5}{4} = 5$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben. Sind $r_1, \ldots, r_5 \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt $\#(Gr_i) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{2} = 195\,000 \ (1 \le i \le 5)$.
- Es gibt genau 1 Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben. Ist $t \in P_4$ ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt $\#(Gt) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{3q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{3} = 130\,000$.

- Es gibt $\frac{q^2-8q+7}{24} = 18$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben. Sind $l_1, \ldots, l_{18} \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_j) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{1} = 390\,000 \ (1 \leq j \leq 18)$.

Insgesamt erhält man also
$97\,500{+}5 \cdot 195\,000 + 130\,000 + 18 \cdot 390\,000 = 8\,222\,500$.

(ii) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{17}$,also $q = 17$ und wollen die Anzahl der kollinearen 4 -Punkt -Konfiguratonen berechnen .
Mit kombinatorischem Ansatz erhalten wir folgendes : $q(q+1)\binom{q}{4} = 728\,280$.

Nun wollen wir die Anzahl der kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen mit Hilfe von Satz 4.11 berechnen :

- Es gibt genau 1 Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben. Ist $s \in P_4$ ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gs) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{4q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{4} = 20\,808$.

- Es gibt $\frac{q-5}{4} = 3$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben. Sind $r_1, \ldots, r_3 \in P_4$jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_i) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{2} = 41\,616 \ (1 \leq i \leq 3)$.

- Es gibt $\frac{q^2-8q+15}{24} = 7$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben. Sind $l_1, \ldots, l_7 \in P_4$jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_j) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{1} = 83\,232 \ (1 \leq j \leq 7)$.

Insgesamt erhält man also $20\,808 + 3 \cdot 41\,616 + 7 \cdot 83\,232 = 728\,280$.

(iii) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{19}$,also $q = 19$ und wollen die Anzahl der kollinearen 4 -Punkt -Konfiguratonen berechnen .
Mit kombinatorischem Ansatz erhalten wir folgendes : $q(q+1)\binom{q}{4} = 1\,472\,880$.

Nun wollen wir die Anzahl der kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen mit Hilfe von Satz 4.11 berechnen :

- Es gibt $\frac{q-3}{4} = 4$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben. Sind $r_1, \ldots, r_4 \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_i) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{2} = 64\,980\ (1 \leq i \leq 4)$.

- Es gibt genau 1 Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $3q(q-1)$ haben. Ist $t \in P_4$ ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gt) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{3q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{3} = 43\,320$.

- Es gibt $\frac{q^2-8q+7}{24} = 9$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben. Sind $l_1, \ldots, l_9 \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_j) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{1} = 129\,960\ (1 \leq j \leq 9)$.

Insgesamt erhält man also
$4 \cdot 64\,980 + 43\,320 + 9 \cdot 129\,960 = 1\,472\,880$.

(iv) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{11}$,also $q = 11$ und wollen die Anzahl der kollinearen 4 -Punkt -Konfiguratonen berechnen .
Mit kombinatorischem Ansatz erhalten wir folgendes : $q(q+1)\binom{q}{4} = 43\,560$.

Nun wollen wir die Anzahl der kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen mit Hilfe von Satz 4.11 berechnen :

- Es gibt $\frac{q-3}{4} = 2$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $2q(q-1)$ haben. Sind $r_1, r_2 \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_i) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{2} = 7\,260\ (1 \leq i \leq 2)$.

- Es gibt $\frac{q^2-8q+15}{24} = 2$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben. Sind $l_1, l_2 \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_j) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{1} = 14\,520\ (1 \leq j \leq 2)$.

Insgesamt erhält man also
$2 \cdot 7\,260 + 2 \cdot 14\,520 = 43\,560$.

(v) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{2^6}$,also $q = 64$ und wollen die Anzahl der kollinearen 4 -Punkt -Konfiguratonen berechnen .
Mit kombinatorischem Ansatz erhalten wir folgendes :
$q(q+1)\binom{q}{4} = 2\,643\,164\,160$.

Nun wollen wir die Anzahl der kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen mit Hilfe von Satz 4.11 berechnen :

- Es gibt genau 1 Bahn mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $12q(q-1)$ haben. Ist $s \in P_4$ ein Repräsentant dieser Bahn , dann gilt

  $\#(Gs) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{12q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{12} = 1\,397\,760$.

- Es gibt $\frac{q-4}{6} = 10$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben. Sind $r_1, \ldots, r_{10} \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_i) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{4q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{4} = 4\,193\,280 \ (1 \leq i \leq 10)$.

- Es gibt $\frac{q^2-6q+8}{24} = 155$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben. Sind $l_1, \ldots, l_{155} \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_j) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{1} = 16\,773\,120 \ (1 \leq j \leq 155)$.

Insgesamt erhält man also
$1\,397\,760 + 10 \cdot 4\,193\,280 + 155 \cdot 16\,773\,120 = 2\,643\,164\,160$.

(vi) Wir betrachten $K = \mathbb{F}_{2^5}$,also $q = 32$ und wollen die Anzahl der kollinearen 4 -Punkt -Konfiguratonen berechnen .
Mit kombinatorischem Ansatz erhalten wir folgendes : $q(q+1)\binom{q}{4} = 37\,973\,760$.

Nun wollen wir die Anzahl der kollinearen 4-Punkt-Konfigurationen mit Hilfe von Satz 4.11 berechnen :

- Es gibt $\frac{q-2}{6} = 5$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $4q(q-1)$ haben. Sind $r_1, \ldots, r_5 \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_i) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{4q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{4} = 261\,888 \ (1 \leq i \leq 5)$.

- Es gibt $\frac{q^2-6q+8}{24} = 35$ Bahnen mit Konfigurationen , die Fixgruppen der Ordnung $q(q-1)$ haben. Sind $l_1, \ldots, l_{35} \in P_4$ jeweils Repräsentanten dieser Bahnen , dann gilt

  $\#(Gr_j) = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q(q-1)} = \frac{q^2(q^2-1)}{1} = 1\,047\,552 \ (1 \leq j \leq 35)$.

Insgesamt erhält man also
$5 \cdot 261\,888 + 35 \cdot 1\,047\,552 = 37\,973\,760$.

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir für $K = \mathbb{F}_{25}$ in (4.19) die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$, mit Hilfe der in den Kapiteln 1-4 erarbeiteten Aussagen , berechnen .

4.19 Beispiel

Sei $K = \mathbb{F}_{25}$, also $q = 25$.
Durch den kombinatorischen Ansatz , dass die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen der Anzahl der 4-elementigen Teilmengen von $\mathbb{A}^2(K)$ entspricht , erhält man das Ergebnis von
$\binom{25^2}{4} = \binom{625}{4} = 6\,296\,972\,500$ (vgl. Bemerkung 1.6) .
Nun können wir die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen mit einem anderen Ansatz berechnen , und zwar betrachten wir die verschiedenen Bahnen , die unter der Operation der affinen Gruppe entstehen . Dazu haben wir zuerst eine grobe Aufgliederung der Konfigurationen mit Hilfe des Begriffs der "kombinatorischen Äquivalenz " vorgenommen und dies dann weiter verfeinert :

1. 4-Punkt-Konfigurationen in allgemeiner Lage:
   Hiervon gibt es $4\,719\,000\,000$ (siehe Beispiel 4.9) .

2. 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ α :
   Hierzu betrachten wir 4.4 (iii) , dies liefert:
   Es gibt 5 Bahnen mit Fixgruppen der Ordnung der Ordnung 2 und es gibt 1 Bahn mit Fixgruppe der Ordnung 4 , also gibt es

   $5 \cdot \frac{\#(G)}{2} + 1 \cdot \frac{\#(G)}{4} = 585\,000\,000 + 58\,500\,000 = 643\,500\,000$

   4-Punkt-Konfigurationen vom Typ α .

3. 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ β :
   Hier wissen wir nach (3.13) ,dass es nur 1 Bahn gibt und, dass die Konfigurationen Fixgruppen haben , welche isomorph sind zur Diedergruppe mit 8 Elementen (Proposition 4.1) .
   Also erhält man $\frac{\#(G)}{8} = 29\,250\,000$ 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ β .

4. 4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ :
   Hierzu betrachten wir (4.10)(iii) , dies liefert :
   Es gibt genau eine Bahn , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 3 haben , es gibt genau eine Bahn , in der die Konfigurationen Fixgruppen der Ordnung 2 haben und es gibt $\frac{25-7}{6} = 3$ Bahnen , in der die Konfigurationen triviale Fixgruppen haben . Also erhält man

   $\frac{\#(G)}{3} + \frac{\#(G)}{2} + 3 \cdot \frac{\#(G)}{1} = 897\,000\,000$

   4-Punkt-Konfigurationen vom Typ γ .

5. Es gibt $8\,222\,500$ kollineare 4-Punkt-Konfigurationen (Beispiel 4.18) .

Wenn man nun die Anzahl der 4-Punkt-Konfigurationen in den 5 verschiedenen kombinatorischen Fällen aufaddiert , erhält man $6\,296\,972\,500$. Wir sehen also , dass beide Ansätze das gleiche Ergebnis liefern .

5 Zwei-Geraden-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$

5.1 Lemma

Die affine Gruppe operiert transitiv auf der Menge der 1-Geraden-Konfigurationen L_1 .

Beweis:
Seien A , B zwei beliebige Geraden in $\mathbb{A}^2(K)$ und seien x ,$y \in A$ ($x \neq y$) und u,$v \in B$ ($u \neq v$).
Dann gibt es nach Lemma 2.1 ein $h \in G$ mit $\{h(x), h(y)\} = \{u, v\}$,
d.h $h(A) = B$.

□

5.2 Proposition

Eine Gerade $A \in L_1$ hat eine Fixgruppe der Ordnung $q^2(q-1)^2$.

Beweis:
Sei A eine Gerade in $\mathbb{A}^2(K)$ und seien $x, y \in A$ und $z \notin A$.
Falls $f \in G$ die Bedingungen

$$f(x) = a \ ,$$

$$f(y) = b \ ,$$

$$f(z) = c$$

mit a , $b \in A$,$a \neq b$ und $c \notin A$ erfüllt , dann gilt $f(A) = A$.
Man hat für die Wahl eines solchen $f \in G$ also $q(q-1)(q^2-q) = q^2(q-1)^2$ verschiedene Möglichkeiten und dies sind auch alle affinen Transformationen , die A wieder auf sich selbst abbilden.

□

5.3 Bemerkung

Mit Hilfe von Proposition 5.2 hat man einen anderen Ansatz , um die Anzahl der Geraden in $\mathbb{A}^2(K)$ für $K = \mathbb{F}_q$ zu bestimmen :

Sei $s \in L_1$, dann gilt :

Anzahl der Geraden in $\mathbb{A}^2(K) = \#(Gs) = \frac{\#(G)}{\#(G_s)} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{q^2(q-1)^2} = q(q+1)$.

Dies ist das gleiche Ergebnis wie in Lemma 1.4.

5.4 Definition (vgl. Definition 3.1)

Seien $s = \{A_1, \ldots, A_r\}$ und $t = \{B_1, \ldots, B_r\}$ zwei r-Geraden-Konfigurationen.Nach Lemma 1.4 wissen wir , dass Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden definiert .
Sei nun n_s (bzw. n_t) die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen bzgl. dieser Äquivalenzrelation , die von den Geraden $A_1, \ldots, A_r$ (bzw. $B_1, \ldots, B_r$) getroffen werden und sei m_s(bzw. m_t) diejenige Partition von r, die die Verteilung von $A_1, \ldots, A_r$ (bzw. $B_1, \ldots, B_r$) auf die getroffenen Äquivalenzklassen beschreibt .
Weiter sei k_s(bzw. k_t) die Anzahl der echt voneinander verschiedenen Schnittpunkte, die in s (bzw. t) auftreten.
Dann heißen s und t kombinatorisch äquivalent , falls $n_s = n_t$, $k_s = k_t$ und falls die Partitionen $m_s$und m_t übereinstimmen .

5.5 Lemma

L_2 zerfällt bzgl. der Äquivalenzrelation "kombinatorische Äquivalenz" in zwei Äquivalenzklassen .

Beweis :
Eine Äquivalenzklasse besteht aus allen 2-Geraden-Konfigurationen , die die Eigenschaft haben, dass die zwei Geraden parallel sind .
Die zweite Äquivalenzklasse besteht aus allen 2-Geraden-Konfigurationen, die die Eigenschaft haben ,dass die beiden Geraden nicht parallel sind .
Es ist klar , dass es sonst keine Äquivalenzklassen mehr geben kann .

□

5.6 Bemerkung

Sind s und t zwei r-Geraden-Konfigurationen , dann wissen wir , dass aus der affinen Äquivalenz von s und t auch die kombinatorische Äquivalenz folgt (Lemma 1.13).
Daher sehen wir , dass L_2 bzgl. der Operation der affinen Gruppe in mindestens 2 Bahnen zerfällt .

5.7 Lemma

Die affine Gruppe operiert transitiv auf der Menge der 2-Geraden-Konfigurationen, die die Eigenschaft haben , dass die 2 Geraden parallel sind .

Beweis:
Seien $s = \{A, B\} \in L_2$ und $t = \{C, D\} \in L_2$ zwei Konfigurationen mit $A \parallel B$ und $C \parallel D$.
Dann wähle $x, y \in A$ und $z \in B$, wähle weiter $u, v \in C$ und $w \in D$.
Es ist zu beachten , dass die Geraden B und D durch die Wahl des Punktes z

bzw. w schon eindeutig bestimmt sind (wegen Parallelenaxiom 1.3(ii)) .
Dann gibt es nach Satz 2.2 ein $h \in G$ mit
$h(x) = u$, $h(y) = v$ und $h(z) = w$, also gilt $h(A) = C$ und $h(B) = D$.

□

5.8 Lemma

Die affine Gruppe operiert transitiv auf der Menge der 2-Geraden-Konfigurationen, die die Eigenschaft haben , dass die 2 Geraden nicht parallel sind .

Beweis :
Seien $\{A, B\}$und $\{C, D\}$ zwei solche Konfigurationen. Wegen $A \nparallel B$ und $C \nparallel D$ gibt es einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt x von A und B und einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt u von C und D .
Wähle $x \neq y \in A$ und $x \neq z \in B$, außerdem wähle $u \neq v \in C$ und $u \neq w \in D$.
Wegen Satz 2.2 gibt es $h \in G$ mit
$h(x) = u$, $h(y) = v$ und $h(z) = w$, also gilt $h(A) = C$ und $h(B) = D$.

5.9 Korollar

L_2 zerfällt bzgl. der Operation der affinen Gruppe in genau 2 Bahnen.

Beweis : Bemerkung 5.6 , Lemma 5.7 und Lemma 5.8 .

□

5.10 Satz

Sei $K = \mathbb{F}_q$, es gilt :
(i) Die 2-Geraden-Konfigurationen, die die Eigenschaft haben , dass die 2 Geraden nicht parallel sind, haben Fixgruppen der Ordnung $2(q-1)^2$.

(ii)Die 2-Geraden-Konfigurationen, die die Eigenschaft haben , dass die 2 Geraden parallel sind, haben Fixgruppen der Ordnung $2q^2(q-1)$.

Beweis:
(i) Sei $\{A, B\} \in L_2$ eine solche Konfiguration und sei x der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von A und B .
Es ist klar , dass eine affine Transformation, die die Konfiguration $\{A, B\}$ wieder in sich selbst überführt, notwendigerweise x auf x abbilden muss.
Überlegen wir uns zuerst, wie viele $f \in G$ mit $f(A) = A$ und $f(B) = B$ es gibt. Seien dazu $x \neq y \in A$ und $x \neq z \in B$. Falls $f \in G$ die Bedingungen

$$f(x) = x \ ,$$

$$f(y) = v \ ,$$

$$f(z) = w$$

mit $x \neq v \in A$ und $x \neq w \in B$ erfüllt, dann gilt $f(A) = A$ und $f(B) = B$.
Man hat für die Wahl eines solche $f \in G$ also $(q-1)^2$ verschiedene Möglichkeiten und dies sind alle affinen Transfomationen , die A auf A und B auf B abbilden.
Analog gibt es auch $(q-1)^2$ verschiedene affine Transformationen $g \in G$ mit $g(A) = B$ und $g(B) = A$.
Also gibt es insgesamt $2(q-1)^2$ affine Transformationen, die die Konfiguration $\{A, B\}$ wieder in sich selbst überführen .

(ii) Sei $\{A, B\} \in L_2$ mit $A \parallel B$ gegeben und seien $x, y \in A$ und $z \in B$.
Überlegen wir uns zuerst wie viele $f \in G$ mit $f(A) = A$ und $f(B) = B$ es gibt. Falls $f \in G$ die Bedingungen

$$f(x) = u \ ,$$

$$f(y) = v \ ,$$

$$f(z) = w$$

mit $u, v \in A$, $u \neq v$ und $w \in B$ erfüllt , dann gilt $f(A) = A$ und $f(B) = B$.
Für die Wahl eines solchen $f \in G$ hat man $q(q-1) \cdot q = q^2(q-1)$ verschiedene Möglichkeiten und dies sind alle affinen Transfomationen , die A auf A und B auf B abbilden.
Analog gibt es auch $q^2(q-1)$verschiedene affine Transformationen $g \in G$ mit $g(A) = B$ und $g(B) = A$.
Also gibt es insgesamt $2q^2(q-1)$ affine Transformationen, die die Konfiguration $\{A, B\}$ wieder in sich selbst überführen .

$\square$

5.11 Korollar

Sei $K = \mathbb{F}_q$, dann gilt :

(i) Es gibt $\frac{q^3(q+1)}{2}$ 2-Geraden-Konfigurationen, die die Eigenschaft haben , dass die 2 Geraden nicht parallel sind .

(ii) Es gibt $\frac{q(q^2-1)}{2}$ 2-Geraden-Konfigurationen, die die Eigenschaft haben , dass die 2 Geraden parallel sind .

Beweis :
(i) Sei s eine 2-Geraden-Konfiguration mit der Eigenschaft , dass die 2 Geraden nicht parallel sind , dann erhält man mit Hilfe von Satz 5.10 :
$$\#(Gs) = \frac{\#(G)}{\#(G_s)} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2(q-1)^2} = \frac{q^3(q+1)}{2}.$$

(ii) Sei t eine 2-Geraden-Konfiguration mit der Eigenschaft , dass die 2 Geraden parallel sind , dann erhält man mit Hilfe von Satz 5.10 :

$$\#(Gt) = \frac{\#(G)}{\#(G_t)} = \frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{2q^2(q-1)} = \frac{q(q^2-1)}{2}.$$

□

5.12 Korollar

Sei $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, dann gilt :
(i) Die Fixgruppen der 2-Geraden-Konfigurationen mit der Eigenschaft, dass die zwei Geraden nicht parallel sind, sind unendlich.
(ii)Die Fixgruppen der 2-Geraden-Konfigurationen mit der Eigenschaft, dass die zwei Geraden parallel sind, sind unendlich.

Beweis:
Betrachte jeweils , die im Beweis von 3.10(i) bzw. 3.10(ii) gestellten Bedingungen an die affinen Transformationen , damit sie die Konfiguration in sich selbst überführen.
Da nun $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ unendlich viele Elemente enthalten, finden wir hier auch unendlich viele affine Transformationen , die die gewünschten Eigenschaften besitzen.

□

6 Drei-Geraden-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$

6.1 Lemma

L_3 zerfällt bzgl. der Äquivalenzrelation "kombinatorische Äquivalenz" in 4 Äquivalenzklassen (vgl. Definition 5.4):

1. Alle 3 Geraden sind paarweise nicht parallel zueinander und es schneiden sich nicht mehr als 2 Geraden in einem Punkt.
   Wir sagen die 3-Geraden-Konfiguration ist vom Typ a.
2. Alle 3 Geraden sind paarweise nicht parallel zueinander und die 3 Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.
   Wir sagen die 3-Geraden-Konfiguration ist vom Typ b.
3. Es gibt ein Paar paralleler Geraden und die dritte Gerade ist nicht parallel zu diesen beiden Geraden.
   Wir sagen die 3-Geraden-Konfiguration ist vom Typ c.
4. Alle 3 Geraden sind parallel.
   Wir sagen die 3-Geraden-Konfiguration ist vom Typ d.

Beweis:
Zu 1. Falls $s \in L_3$ vom Typ a ist , gilt:$n_s = 3$, $m_s = 1 + 1 + 1$ und $k_s = 3$.
Zu 2. Falls $s \in L_3$ vom Typ b ist , gilt:$n_s = 3$, $m_s = 1 + 1 + 1$ und $k_s = 1$.
Zu 3. Falls $s \in L_3$ vom Typ c ist , gilt:$n_s = 2$, $m_s = 2 + 1$ und $k_s = 2$.
Zu 4. Falls $s \in L_3$ vom Typ d ist , gilt:$n_s = 1$, $m_s = 3$ und $k_s = 0$.

Es ist klar, dass es keine weiteren Äquivalenzklassen mehr geben kann.

□

6.2 Lemma

Die affine Gruppe G operiert transitiv auf der Menge der 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ a.

Beweis:
Seien s und t zwei 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ a. Die eindeutig bestimmten Schnittpunkte in s seien x, y und z , die eindeutig bestimmten Schnittpunkte in t seien u, v und w.
Nach Satz 2.2 finden wir ein $h \in G$ mit $h(x) = u$, $h(y) = v$ und $h(z) = w$ und somit $h(s) = t$.

□

6.3 Lemma

Die affine Gruppe G operiert transitiv auf der Menge der 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ b.

Beweis:
Es reicht zu zeigen, dass jede Konfiguration vom Typ b in die Konfiguration

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

überführt werden kann.
Sei dazu $\{D, E, F\}$ eine 3-Geraden-Konfiguration vom Typ b, wegen Lemma 5.8 kann man o.E. annehmen, dass $D = A$ und $E = B$ gilt, d.h der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der 3 Geraden muss $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein .

Es sei nun $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq z = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in F$ ein Punkt auf F, dann ist die Gerade F gegeben durch $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Wende nun die affine Transformation $f = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}) \in G$ auf

$\{D, E, F\}$ an. Dann gilt $f(D) = D = A$, $f(E) = E = B$ und $f(F) = C$.

$\square$

6.4 Lemma

Die affine Gruppe G operiert transitiv auf der Menge der 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ c.

Beweis:
Seien $\{A, B, C\}$mit $A \parallel B$ und $\{D, E, F\}$ mit $D \parallel E$ zwei Konfigurationen vom Typ c.
Sei x der Schnittpunkt von A mit C und y der Schnittpunkt von B mit C , weiter soll $x \neq z \in A$ sein.
Analog seien u, v die Schnittpunkte von D mit F bzw. E mit F und es sei $u \neq w \in D$.
Wir müssen hierbei beachten , dass die 3-Geraden-Konfigurationen durch diese Wahl der Punkte eindeutig festgelegt sind (wegen $1.3(i), (ii)$).
Dann gibt es nach Satz 2.2 ein $h \in G$ mit $h(x) = u$, $h(y) = v$ und $h(z) = w$, also
$h(A) = D$, $h(B) = E$ und $h(C) = F$.

$\square$

6.5 Proposition

Die 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ a haben Fixgruppen der Ordnung 6.

Beweis:
Sei $\{A, B, C\}$ eine Konfiguration vom Typ a mit eindeutig bestimmten Schnittpunkten x, y und z.
Damit $\{A, B, C\}$ wieder in sich selbst überführt wird, muss notwendigerweise die 3-Punkt-Konfiguration $\{x, y, z\}$ in sich selbst überführt werden.
Da x, y und z nicht kollinear sind , ist die Fixgruppe von $\{x, y, z\}$ isomorph zu S_3 (siehe Korollar 2.4).
Für jede dieser Permutationen der 3 Punkte wird auch die Konfiguration $\{A, B, C\}$wieder in sich selbst überführt, also erhält man eine Fixgruppe der Ordnung 6.

$\square$

6.6 Proposition

Für $K = \mathbb{F}_q$ gilt:
Die 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ b haben Fixgruppen der Ordnung $6(q-1)$.

Beweis:
Sei $\{A, B, C\}$ eine Konfiguration vom Typ b, wegen Lemma 6.2 können wir o.E annehmen $\left\{A = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Überlegen wir uns zuerst wie viele unterschiedliche affine Transformationen es gibt, die A auf A, B auf B und C auf C abbilden.
Damit ein $f \in G$ die Bedingungen $f(A) = A$ und $f(B) = B$ erfüllt, muss f folgende Form haben:

$$f = (\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}) \text{ mit } \alpha, \beta \in K \setminus \{0\}.$$

Dann gilt aber $f(C) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Es gilt klarerweise $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ genau dann wenn $\alpha = \beta$ ist.

Also hat man genau $(q-1)$ verschiedene affine Transformationen, die A auf A, B auf B und C auf C abbilden.
Wenn man nun berücksichtigt, dass man die Rollen von A, B und C vertauschen kann, kommt man auf $6(q-1)$ verschiedene affine Transformationen, die $\{A, B, C\}$ wieder in sich selbst überführen.

$\square$

6.7 Korollar

Sei $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann gilt:
Die Fixgruppe einer 3-Geraden-Konfiguration vom Typ b ist unendlich .

Beweis:
Dies sieht man, wenn man den Beweis von Proposition 6.6 betrachtet und den Körper $\mathbb{F}_q$ durch $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ersetzt.

□

6.8 Proposition

Für $K = \mathbb{F}_q$ gilt:
Die 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ c haben Fixgruppen der Ordnung $2(q-1)$.

Beweis:
Sei $\{A, B, C\}$ mit $A \parallel B$ eine Konfiguration vom Typ c, x soll der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von A mit C sein und y soll der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von B mit C sein, weiter sei $x \neq z \in A$.
Überlegen wir uns zuerst wie viele unterschiedliche affine Transformationen es gibt, die A auf A, B auf B und C auf C abbilden. Für ein solches $f \in G$ muss gelten:

$$f(x) = x$$

$$f(y) = y$$

$$f(z) = a$$

mit $a \in A$, $a \neq x$. Dies liefert $(q-1)$ verschiedene affine Transformationen und dies sind auch alle affinen Transformationen, die A auf A, B auf B und C auf C abbilden.
Da die affine Gruppe die Parallelität von Geraden respektiert, hat man nur noch die Möglichkeiten die Konfiguration $\{A, B, C\}$ wieder in sich selbst zu überführen durch affine Transformationen $h \in G$ mit $h(A) = B$, $h(B) = A$ und $h(C) = C$. Hiervon erhält man mit der gleiche Überlegung wie oben ebenfalls $q-1$ affine Transformationen .
Also gibt es insgesamt $2(q-1)$ verschiedene affine Transformationen, die die Konfiguration $\{A, B, C\}$ wieder in sich selbst zu überführen.

□

6.9 Korollar

Sei $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann gilt:
Die Fixgruppe einer 3-Geraden-Konfiguration vom Typ c ist unendlich .

Beweis:
Dies sieht man, wenn man den Beweis von Proposition 6.8 betrachtet und den Körper $\mathbb{F}_q$ durch $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ersetzt.

$\square$

6.10 Korollar

Sei $K = \mathbb{F}_q$, dann gilt:

(i) Es gibt $\frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{6}$ 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ a.

(ii) Es gibt $\frac{q^3(q^2-1)}{6}$ 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ b.

(iii) Es gibt $\frac{q^3(q^2-1)}{2}$ 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ c.

Beweis: (i) Lemma 6.2 und Proposition 6.5.
(ii) Lemma 6.3 und Proposition 6.6.
(iii) Lemma 6.4 und Proposition 6.8

$\square$

Zum Ende des Kapitels wollen wir noch einen kurzen Überblick über die 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d geben (ohne Beweise).

6.11 Satz

Seien $\{A, B, C\}$ und $\{D, E, F\}$ jeweils 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d mit $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ und $[x, y, z] = 0$.
Weiter sein $u \in D$, $v \in E$, $w \in F$ und $[u, v, w] = 0$.
Dann gilt:

$\{A, B, C\}$ und $\{D, E, F\}$ sind affin äquivalent genau dann, wenn $\{x, y, z\}$ und $\{u, v, w\}$ affin äquivalent sind.

6.12 Satz

(i) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2, 3$ und $q \equiv 1(\text{mod } 3)$ gilt:

- Es gibt $\frac{q-7}{6}$ Bahnen mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $q^2(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $2q^2(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $3q^2(q-1)$ haben .

(ii) Für $K = \mathbb{F}_q$ mit $char(K) \neq 2, 3$ und $q \not\equiv 1(\text{mod } 3)$ gilt:

- Es gibt $\frac{q-5}{6}$ Bahnen mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $q^2(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $2q^2(q-1)$ haben .

(iii) Für $K = \mathbb{F}_{3^r}$ $(r \in \mathbb{N})$ gilt :

- Es gibt $\frac{q-3}{6}$ Bahnen mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $q^2(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $6q^2(q-1)$ haben .

(iv) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ und r gerade gilt :

- Es gibt $\frac{q-4}{6}$ Bahnen mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $q^2(q-1)$ haben .
- Es gibt genau eine Bahn mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $3q^2(q-1)$ haben .

(v) Für $K = \mathbb{F}_{2^r}$ mit $r \in \mathbb{N}$,$r \geq 2$ und r ungerade gilt :

- Es gibt $\frac{q-2}{6}$ Bahnen mit 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d , welche Fixgruppen der Ordnung $q^2(q-1)$ haben .

Bemerkung zu Satz 6.12: Man erkennt hier einen sehr starken Zusammenhang zu Satz 2.22 (wegen Satz 6.11).
Der einzige Unterschied ist, dass sich die Fixgruppen um den Faktor q von den Fixgruppen in 2..22 unterscheiden.
Denn es gibt genau $q^2(q-1)$ verschiedene affine Transformationen $f \in G$, die für eine 3-Geraden-Konfiguration $\{A, B, C\}$ vom Typ d erfüllen:
$f(A) = A$, $f(B) = B$ und $f(C) = C$. Dagegen hat man nur $q(q-1)$ verschiedene affine Transformationen, die 3 kollineare Punkte wieder auf sich selbst abbilden (Lemma 2.10).

6.13 Beispiel

Für $K = \mathbb{F}_{25}$ (also $q = 25$) wollen wir die Anzahl der 3-Geraden-Konfigurationen in $\mathbb{A}^2(K)$, mit Hilfe der in Kapitel 6 erarbeiteten Aussagen, berechnen.
Nach Korollar 6.10 wissen wir:

- Es gibt $\frac{q^3(q^2-1)(q-1)}{6} = 39\,000\,000$ 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ a.
- Es gibt $\frac{q^3(q^2-1)}{6} = 1\,625\,000$ 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ b.
- Es gibt $\frac{q^3(q^2-1)}{2} = 4\,875\,000$ 3-Geraden-Konfigurationen vom Typ c.

Nach Satz 6.12 erhalten wir

$3q(q^2-1) + \frac{1}{2}q(q^2-1) + \frac{1}{3}q(q^2-1) = 46\,800 + 7\,800 + 5\,200 = 59\,800$
3-Geraden-Konfigurationen vom Typ d.

Also erhalten wir insgesamt $45\,559\,800$ 3-Geraden-Konfigurationen.

Dies stimmt auch überein mit der kombinatorischen Überlegung

$\binom{25\cdot 26}{3} = \binom{650}{3} = 45\,559\,800$ (siehe Bemerkung 1.6).

Literatur

Koecher, Krieg, Ebene Geometrie, Springer-Verlag, 2007.