# Gruppen der Ordnung $p^3$

## Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

**Nane Neu**

Saarbrücken, August 2013

Angefertigt unter der Betreuung von

**Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler**

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, im August 2013

Nane Neu

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit mit dem Titel „Gruppen der Ordnung $p^3$" zur Erlangung des Bachelorgrades in Mathematik ist in der Zeit vom 02. Mai 2013 bis zum 02. August 2013 unter der Betreuung von Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler entstanden.

Während dieses Zeitraums habe ich mich mit der Klassifikation von nichtabelschen Gruppen der Ordnung $p^3$ und deren Darstellungen über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ beschäftigt.

Otto Hölder beschrieb 1893 in seinem Werk *Die Gruppen der Ordnungen $p^3$, $p^2q$, $pqr$, $p^4$* erstmals alle unterschiedlichen Gruppen dieser Ordnungen.

Dabei benutzte er nicht das von Évariste Galois um 1846 eingeführte Konzept einer Gruppe als *Gesamtheit aller Permutationen der Wurzeln und alle darin enthaltenen multiplikativ abgeschlossenen kleineren Gesamtheiten* ([Sch90], Seite 301), sondern er sah eine Gruppe *ganz allgemein [...] , ihre Operationen sind keine Buchstabenvertauschungen [...] mehr, sondern lediglich Symbole, für welche ein Gesetz der Verknüpfung definiert ist*, ([Höl93]).

Damit lehnt er sich eher an das von Camille Jordan, 1870 in *Traité des substitutions et des équations algébriques* ausgearbeitete System von Begriffen der Gruppentheorie an, welches noch bis heute Bestand hat, ([Sch90], Seite 306).

Zu Beginn dieser Bachelorarbeit werden zuerst die Eigenschaften von Gruppen der Ordnung $p^n$ ($n \in \mathbb{N}$), den sogenannten *p-Gruppen* untersucht, wobei $p$ eine Primzahl ist.
Im Anschluss daran werden die nichtabelschen Gruppen der Ordnung $p^3$ klassifiziert. In diesem Fall findet man zu jeder Primzahl $p$ genau 2 solche Gruppen, abhängig davon, ob die Gruppen eine zyklische Untergruppe der Ordnung $p^2$ besitzen, oder nicht.

Außerdem wird in diesem Kapitel bewiesen, dass eine solche Gruppe genau $p^2 + p - 1$ viele verschiedene Konjugationsklassen besitzt. Dies liefert gerade die Anzahl der irreduziblen Darstellungen der Gruppe über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Im zweiten Kapitel geht es darum, genau diese $p^2 + p - 1$ verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $G$ über $\mathbb{C}$ zu bestimmen. Es zeigt sich, dass davon $p^2$ viele eindimensional sind und $p - 1$ viele die Dimension $p$ haben.

Die eindimensionalen Darstellungen lassen sich, wie man an gegebener Stelle sieht, direkt durch $p$-te Einheitswurzeln angeben.

Für die Darstellungen der Dimension $p$ wird jedoch die Theorie der induzierten Charaktere benötigt, die zum Beispiel in dem Buch *Algebra* von Serge Lang ([Lan70]) ausführlich diskutiert wird.

Dann ergeben sich die Werte der Charaktere zu den $p - 1$ vielen noch fehlenden Darstellungen auf den einelementigen Konjugationsklassen als $p$ mal eine entsprechende $p$-te Einheitswurzel und auf den restlichen Konjugationsklassen als 0.

Diese Arbeit richtet sich an Leser, die mit den Grundbegriffen der Gruppentheorie vertraut sind. Außerdem sind Kenntnisse der Darstellungstheorie hilfreich, obwohl sie auch nicht unbedingt erforderlich sind. Die wichtigsten Begriffe werden als Hilfestellung nochmals am Anfang des 2. Kapitels zusammengestellt.


## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich während meines Studiums unterstützt und begleitet haben.

Mein besonderer Dank gilt dabei Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler für das interessante Thema und die intensive Betreuung und Anleitung während der Enstehungsphase dieser Bachelorarbeit.

Außerdem bedanke ich mich herzlich bei Marcel Köster, der mir viele hilfreiche Tipps bezüglich LaTeX gab, die das Setzen dieser Arbeit sehr erleichtert haben;

bei meinen Eltern, die mir zur Seite standen und durch finanzielle Unterstützung das Mathematikstudium ermöglichten;

und bei allen, die diese Arbeit korrekturgelesen haben.


## Notation

Die folgenden Bezeichnungen sind für die ganze Arbeit gültig:

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $=$ | $\{1,2,3,\dots\}$, |
| $\mathbb{Z}$ | $=$ | Der Ring der ganzen Zahlen, |
| $\mathbb{P}$ | $=$ | Die Menge aller Primzahlen, |
| $\mathbb{C}$ | $=$ | Der Körper der komplexen Zahlen, |
| $\lvert M\rvert$ | $=$ | Die Anzahl der Elemente in der Menge $M$, |
| $[G:U]$ | $=$ | Der Index der Untergruppe $U$ in $G$, |
| $\langle x\rangle$ | $=$ | $\{1,x,x^2,\dots\}$, das Erzeugnis von $x$, |
| $\langle x,y\rangle$ | $=$ | $\{x^iy^j \mid i,j\geq 0\}$, das Erzeugnis von $x$ und $y$, |
| $[x,y]$ | $=$ | $xyx^{-1}y^{-1}$, der Kommutator von $x$ und $y$, |
| $G'$ | $=$ | $\langle\, [x,y] \mid x,y\in G\rangle$ , die Kommutatorengruppe von $G$, |
| $(a,b)$ | $=$ | Der größte gemeinsame Teiler von $a$ und $b$, |
| $U \triangleleft G$ | $=$ | Die Untergruppe $U$ ist Normalteiler von $G$, |
| $\binom{n}{k}$ | $=$ | $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ , der Binomialkoeffizient von $n$ über $k$. |

# 1 Gruppen der Ordnung $p^3$

Im ganzen Kapitel sei $2 < p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl.

## 1.1 Abelsche Gruppen der Ordnung $p^3$

### 1.1.1 Satz: Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen

Jede endliche abelsche Gruppe ist eine direkte Summe von zyklischen Untergruppen.

*Beweis:*
[SP08], Seite 134, Satz 7.7 .

$\square$

Betrachtet man eine abelsche Gruppe $G$ der Ordnung $p^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann gibt es zu jeder Partition von $k$ bis auf Isomorphie genau eine solche Gruppe.
Sei nun $(k_1, \ldots, k_r)$ eine Partition von $k$ ($r \in \mathbb{N}$), so existiert eine Gruppe $G$ mit

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} C_{p^{k_i}},$$

wobei $C_{p^{k_i}}$ die zyklische Gruppe mit $p^{k_i}$ Elementen bezeichnet.
Es gibt bis auf Isomorphie genau so viele verschiedene abelsche Gruppen der Ordnung $p^k$, wie es Partitionen von $k$ gibt.
Für $k = 3$ bedeutet dies, dass es bis auf Isomorphie 3 verschiedene abelsche Gruppen der Ordnung $p^3$ gibt. Diese sind von der Form

$$\begin{aligned} G_1 &\cong C_{p^3}, \\ G_2 &\cong C_{p^2} \times C_p, \\ G_3 &\cong (C_p)^3. \end{aligned}$$

(vgl. [Mey80], Seiten 77-79, [SP08] Seite 134)

Im restlichen Kapitel betrachten wir nur noch nichtabelsche $p$-Gruppen $G$.

## 1.2 Eigenschaften von nichtabelschen $p$-Gruppen

### 1.2.1 Satz: Klassengleichung

Sei $R$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von $G$, dann gilt

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\substack{r \in R \\ r \notin Z}} [G : Z_G(r)] \ .$$

**Bemerkung:**
Der Index $[G : Z_G(r)]$ bezeichnet die Größe der Konjugationsklasse von $r$ und ist ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ von $G$.

*Beweis:*
[SP08], Seite 126, Satz 6.6 .

□

### 1.2.2 Korollar

Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist $G$ abelsch.

*Beweis:*
Sei $G/Z(G)$ zyklisch, d.h. $G/Z(G)$ ist von einem Element erzeugt. Schreibe somit $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$ mit einem $a \in G$. Man kann nun jedes Element $g \in G$ schreiben als $g = a^k z$ mit $z \in Z$, $k \in \mathbb{N}$, da jedes Element von $G$ in einer Nebenklasse von $Z(G)$ liegt und jede Nebenklasse eine Potenz von $aZ(G)$ ist.
Seien nun $g_1, g_2 \in G$ mit $g_i = a^{k_i} z_i$ , wobei $z_i \in Z$ für $i = 1{,}2$. Dann ist

$$g_1 g_2 = a^{k_1} z_1 a^{k_2} z_2 = a^{k_1+k_2} z_1 z_2 = a^{k_2+k_1} z_2 z_1 = a^{k_2} z_2 a^{k_1} z_1 = g_2\, g_1 \ .$$

Somit ist $G$ kommutativ.

□

### 1.2.3 Satz

Das Zentrum $Z := Z(G)$ einer $p$-Gruppe $G \neq \{1\}$ ist nicht trivial.

*Beweis:*
Sei $|G| = p^k$, $r \in G \setminus Z$, dann existiert ein $1 \neq g \in G$ sodass $rg \neq gr$, das heißt

$$Z_G(r) = \{g \in G \mid gr = rg\} \subsetneqq G \, .$$

Somit ist $[G : Z_G(r)] > 1$ und außerdem ein Teiler von $|G| = p^k$. Also wird
$[G : Z_G(r)] > 1$ von $p$ geteilt. Mit der Klassengleichung (1.2.1) gilt

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{\substack{r \in R \\ r \notin Z}} [G : Z_G(r)] \ .$$

Da nun $|G|$ sowie $[G : Z_G(r)]$ von $p$ geteilt werden, wird auch $|Z(G)|$ von $p$ geteilt.

□

### 1.2.4 Korollar

Sei $G$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung $p^3$, dann gilt für das Zentrum:

$$|Z(G)| = p \ .$$

*Beweis:*
Sei $|G| = p^3$. Da $G$ nichtabelsch ist, gilt $|Z| \neq p^3$. Aus 1.2.3 wissen wir, dass $|Z| \neq 1$. Wäre nun $|Z| = p^2$, so wäre $|G/Z| = p$ und damit $G/Z$ zyklisch, mit 1.2.2 wäre $G$ dann abelsch.
Also bleibt nur der Fall $|Z| = p$ .

□

### 1.2.5 Korollar

Für die Kommutatorengruppe $G'$ von $G$ gilt

$$G' = Z \ .$$

Dann schreiben wir

$$\overline{G} := G/G' = G/Z \ .$$

*Beweis:*
Es gilt $G/G'$ ist abelsch und $G'$ ist minimal mit dieser Eigenschaft. $G/Z$ ist abelsch mit Ordnung $p^2$, also gilt $G' \subset Z$ . Laut 1.2.4 ist $Z$ nun aber zyklisch mit Primzahlordnung $p$, d.h. $Z$ besitzt keine nichttrivialen Untergruppen. Da $G' = \{1\}$ bedeuten würde, dass $G$ schon abelsch ist, gilt $G' = Z$.

□

### 1.2.6 Satz

$G$ hat $p^2 + p - 1$ viele Konjugationsklassen.

*Beweis:*
Da alle Elemente im Zentrum von $G$ einelementige Konjugationsklassen bilden und $[G : Z_G(r)]$ die Ordnung von $G$ teilt, bleiben für die übrigen Konjugationsklassen nur die Größen $p$ oder $p^2$.
Hätte eine Klasse $p^2$ viele Elemente, so wäre $|Z_G(r)| = p$. Da aber $r \notin Z(G)$ sich selbst zentralisiert, liegen mindestens alle $p$ Elemente aus $Z(G)$ und das Element $r$ in $Z_G(r)$. Dies bedeutet aber, dass $|Z_G(r)| > p$. Da $|Z_G(r)|$ die Gruppenordnung $p^3$ teilt, muss also $|Z_G(r)| = p^2$ gelten.
Also kann keine Konjugationsklasse mit $p^2$ vielen Elementen existieren und die restlichen Konjugationsklassen haben die Größe $p$. Für ihre Anzahl $a$ gilt mit der Klassengleichung:

$$p^3 = p + ap \ , \qquad \text{d.h.} \ \ a = p^2 - 1 \ .$$

Nun haben wir $p^2 - 1$ viele $p$-elementige Konjugationsklassen und $p$ viele Einelementige. Insgesamt hat eine nichtabelsche Gruppe $G$ der Ordnung $p^3$ also $p^2+p-1$ viele Konjugationsklassen.

□

### 1.2.7 Lemma: Beschreibung der Konjugationsklassen

Betrachte die Restklassenabbildung

$$\begin{aligned} \pi : G &\to \overline{G} \\ x &\mapsto \bar{x} \ . \end{aligned}$$

Dann ist jedes Urbild $\pi^{-1}(\bar{x})$ von $1 \neq \bar{x} \in \overline{G}$ eine Konjugationsklasse von $G$, und davon gibt es genau $p^2 - 1$ viele. Zusätzlich bildet jedes $z \in Z$ eine eigene einelementige Klasse, also $p$ viele (da $|Z| = p$).

Somit haben wir mit den Bezeichnungen

$$C_G(x) = \pi^{-1}(\bar{x}) \quad \text{für alle} \quad \bar{1} \neq \bar{x} \in \overline{G} \;,$$

$$C_G(z) = \{z\} \quad \text{für jedes} \quad z \in Z$$

die $p^2 + p - 1$ Konjugationsklassen von G bestimmt.

*Beweis:*
In dem Beweis von 1.2.1 haben wir gezeigt, dass der Zentralisator $Z_G(x)$ von $x \in G \setminus Z$ die Größe $p^2$ hat, das bedeutet, dass die Bahn von $x$ unter Konjugation genau $p$ viele Elemente besitzt.
Es bleibt zu zeigen, dass konjugierte Elemente *modulo* $Z = G'$ gleich sind.
Seien $x, x' \in G \setminus Z$ konjugiert, dann gibt es ein $y \in G$ mit $yxy^{-1} = x'$.
Da $Z = G'$ die Ordnung $p$ hat und somit zyklisch ist, wird $Z$ von jedem Kommutator $[a,b]$ mit beliebigen $a,b \in G$ erzeugt, also auch von $[x^{-1}, y]$. Es gilt für alle $x \in G$:

$$x[x^{-1}, y] = xx^{-1}yxy^{-1} = x'.$$

Damit gilt $C_G(x) \subseteq \pi^{-1}(\bar{x})$.
Die zweite Inklusion folgt analog.

□

## 1.3 Die nichtabelschen Gruppen der Ordnung $p^3$

### 1.3.1 Lemma

Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $p^3$ und $H \subset G$ eine Untergruppe der Ordnung $p^2$, so gelten

(i) $Z \subset H$ ,

(ii) $H \triangleleft G$ .

*Beweis:*

(i) $(Z \subset H) \Leftrightarrow (x \in Z \Rightarrow x \in H) \Leftrightarrow (x \notin H \Rightarrow x \notin Z)$
Sei also $x \notin H$. Dann findet man ein $y \in H$, sodass $xy \neq yx$, somit ist $x \notin Z$.

(ii) Mit (i) gilt
$$Z \subset H \subset G\,.$$
Weiter ist
$$Z \triangleleft G \quad \text{und} \quad H/Z \triangleleft G/Z\,,$$
da $G/Z$ abelsch ist. Daraus folgt dann schon, dass $H \triangleleft G$ .

□

### 1.3.2 Satz

Falls $G$ eine zyklische Untergruppe $H$ der Ordnung $p^2$ besitzt, so ist

$$G \cong D_{p^3} := \langle\ x,y \mid x^{p^2} = y^p = 1\ ,\ yxy^{-1} = x^{p+1}\ \rangle\ .$$

*Beweis:*
Es gelten

- $H \lhd G$ (wegen 1.3.1).
- Sei $H = \langle\ x \mid x^{p^2} = 1\ \rangle$ und $y \in G$ mit $y \notin H$, sodass $\langle\, y\,, x\,\rangle = G$, dann ist $y^p \in H$.

Es gilt dann

$$yxy^{-1} = x^j,\ \text{mit } (j,p^2) = 1 \text{ und } j \neq 1\,,$$

das heißt $1 < j \leq p^2 - 1$ , mit $(j,p) = 1$ .
Für ein $s \in \mathbb{Z}$ ist

$$y^s x\, y^{-s} = x^{j^s}.$$

Da $y^p \in H$ und $H$ abelsch ist, gilt damit $y^p x\, y^{-p} = x^{j^p} = x$ . Es gilt also für $j$

$$j^p \equiv 1 (mod\ p^2)\,.$$

Das heißt, die Potenzen $j, \ldots, j^{p-1}$ durchlaufen alle $p-1$ Elemente der Ordnung $p$ in $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^*$. Insbesondere also auch $p+1$, da

$$(p+1)^p \equiv \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} p^k \equiv \binom{p}{0} + \binom{p}{1} p + \binom{p}{2} p^2 + \cdots + \binom{p}{p} p^p \equiv 1\,(\,mod\ p^2).$$

Deshalb kann man $s$ so wählen, dass gilt $j^s \equiv p+1\,(\,mod\ p^2)$, also $y^s x\, y^{-s} = x^{p+1}$.
Mit Umbenennung von $y^s$ in $y$ ergibt sich $yxy^{-1} = x^{p+1}$.

Es ist $y^p$ kein Erzeuger von $H$, denn dann hätte $y$ die Ordnung $p^3$ und $G$ wäre abelsch. Somit kann man $y^p$ schreiben als $y^p = x^{ap}$ mit $0 < a < p$.
Damit gilt, dass $(x^{-a}y)^p = 1$ ist. Also liegt $x^{-a}y$ nicht in $H$, hat aber die Ordnung $p$.

Schreibt man nun $x^{-a}y$ an Stelle von $y$, so hat $G$ die gewünschte Gestalt

$$G \cong D_{p^3} := \langle\ x,y \mid x^{p^2} = y^p = 1\ ,\ yxy^{-1} = x^{p+1}\ \rangle\ .$$

□

### 1.3.3 Korollar

Für das Zentrum $Z := Z(D_{p^3})$ gilt

$$Z = \langle x^p \rangle\ ,$$

und es ist

$$D_{p^3} = \{\ x^i y^j \mid 0 \leq i < p^2\ ,\ 0 \leq j < p\ \}\ .$$

*Beweis:*
Die Elemente $x^i y^j$ der angegebenen Form sind alle verschieden, da $H := \langle x \rangle$ normal in $G$ ist.

$\square$

### 1.3.4 Satz

Besitzt $G$ keine zyklische Untergruppe der Ordnung $p^2$, so ist

$$G \cong Q_{p^3} := \langle\ x{,}y \mid x^p = y^p = [x{,}y]^p = 1\ \rangle\ .$$

*Beweis:*
Sei $G$ eine Gruppe, die keine zyklische Untergruppe der Ordnung $p^2$ hat, so besitzt $G$ nur Elemente der Ordnung $p$ oder 1, d.h.

$$x^p = 1 \quad \forall\, 1 \neq x \in G\,.$$

Seien nun $x, y \in G$, sodass ihre Klassen $\bar{x}, \bar{y}$ die Gruppe $\overline{G}$ erzeugen. Angenommen $x$ und $y$ kommutieren, so ist $G$ die direkte Summe von $\langle x, y \rangle$ und $Z$, also abelsch. Demnach ist $z := [x, y]$ nichttrivial und erzeugt nach 1.2.5 das Zentrum $Z$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

$\square$

### 1.3.5 Korollar

Für das Zentrum $Z := Z(Q_{p^3})$ gilt

$$Z = \langle [x, y] \rangle,$$

und es ist

$$Q_{p^3} = \{\ x^i y^j z^k \mid 0 \leq i{,}j{,}k < p\ ,\ z := [x, y]\ \}\ .$$

*Beweis:*
Da $H := \langle x, z \rangle$ normal in $G$ liegt und $x$ und $y$ nicht kommutieren, sind die Elemente der Form $x^i y^j z^k$ alle verschieden.

$\square$

# 2 Darstellungen von $G$ über $\mathbb{C}$

In Kapitel 1 haben wir die nichtabelschen Gruppen der Ordnung $p^3$ klassifiziert. Nun wollen wir ihre Darstellungen über $\mathbb{C}$ bestimmen.

## 2.1 Allgemeines zur Darstellungstheorie

### 2.1.1 Definition

Es sei $K[G] = \sum\limits_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$ ($a_\sigma \in K$) der Gruppenring für einen Körper $K$ und eine Gruppe $G$, und $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum.

(i) Eine *Darstellung* $\rho$ von $G$ (über $K$) ist ein Homomorphismus

$$\rho\colon G \to Aut_K(V).$$

Man nennt $V$ dann den *Darstellungsraum* von $G$.
Die *Dimension* einer Darstellung ist definiert als die Dimension des Darstellungsraums $V$.
Seien nun $\rho$ und $\rho'$ zwei Darstellungen von $G$ mit Darstellungsräumen $V$ und $V'$. Die beiden Darstellungen heißen *äquivalent* oder *isomorph*, wenn ein Isomorphismus $\tau\colon V \to V'$ existiert, so dass gilt

$$\tau \circ \rho(s) \circ \tau^{-1} = \rho'(s) \quad \text{für alle} \;\; s \in G.$$

Eine Darstellung heißt *irreduzibel*, falls $V$ als $K[G]$-Modul einfach ist.
Man kann $V$ als $K[G]$-Modul auffassen, weil jeder $K$-Algebrenhomomorphismus

$$\psi\colon K[G] \to End_K(V)$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho\colon G \to Aut_K(V)$$

(also eine Darstellung von $G$ in $V$) induziert. Die Operation von $K[G]$ auf $V$ ist dabei definiert als

$$(x,v) \mapsto \psi(x)v \;.$$

Umgekehrt induziert jede Darstellung $\rho$ von $G$ einen $K$-Algebrenhomomorphismus $\psi$ durch lineare Fortsetzung:
Sei $\alpha = \sum\limits_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$ und $x \in V$, definiere

$$\psi(\alpha)x := \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \rho(\sigma)x \;.$$

(ii) Der *Charakter* $\chi = \chi_\rho$ einer Darstellung $\rho$ ist definiert als die $K$-wertige Funktion

$$\chi\colon G \to K \quad \text{mit} \quad \chi(s) = tr(\rho(s)) \quad (s \in G) \ ,$$

wobei $tr(\rho(s))$ die Spur eines Endomorphismus bezeichnet.
Man sieht nun, dass die Charaktere zweier äquivalenter Darstellungen gleich sind, denn es gilt $tr(\tau \circ \rho(s) \circ \tau^{-1}) = tr(\rho(s))$.

Der Charakter einer irreduziblen Darstellung heißt *irreduzibler* Charakter.

Die *Dimension* eines Charakters ist definiert als die Dimension seines zugehörigen Darstellungsraums.

(iii) Eine *Klassenfunktion* von $G$ (über $K$) ist eine Funktion $f\colon G \to K$, sodass gilt

$$f(\sigma\tau\sigma^{-1}) = f(\tau) \text{ für } \sigma, \tau \in G \ .$$

Man kann auch hier den Definitionsbereich einer Klassenfunktion $f$ linear auf $K[G]$ fortsetzen (vgl. (i)). Wir bezeichnen die Menge aller Klassenfunktionen auf $K[G]$ mit $X(K[G])$.

Man sieht direkt, dass Charaktere Klassenfunktionen sind.

### 2.1.2 Bemerkung:

Der Charakter einer Darstellung bestimmt diese eindeutig bis auf Isomorphie. Deswegen können wir nun genauso gut von Charakteren wie von Darstellungen sprechen und die beiden Begriffe gleichwertig benutzen.

Im Folgenden sei unser Körper $K$ immer der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Wenn wir von Darstellungen sprechen, meinen wir damit immer Darstellungen über $\mathbb{C}$.

### 2.1.3 Satz

(i) Es gibt nur endlich viele Isomorphieklassen irreduzibler Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_n$ von $G$. Für ihre Anzahl gilt:

$$|\{ \text{ irreduzible Charaktere von G } \}| = |\{ \text{ Konjugationsklassen von G } \}| \ .$$

(ii) Bezeichne mit $d_i$ die Dimension der irreduziblen Charaktere $\chi_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Es gilt die Dimensionsformel:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = |G| \ ,$$

(vgl. [Ser72], Seite 19, Satz 7).

### 2.1.4 Korollar

In unserem Fall ist $G$ nichtabelsch mit Ordnung $p^3$ und besitzt $p^2 + p - 1$ viele Konjugationsklassen (vgl. 1.2.6). Das bedeutet, dass es $p^2 + p - 1$ viele verschiedene irreduzible Darstellungen von $G$ über $\mathbb{C}$ gibt.

□

### 2.1.5 Bemerkung:

Die irreduziblen Charaktere bilden eine Orthonormalbasis von $X(\mathbb{C}[G])$ bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle\chi_1,\chi_2\rangle_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\,\chi_2(g^{-1}) \ .$$

Dabei gelten die Orthogonalitätsrelationen:

(i) Der Charakter $\chi$ einer Darstellung ist irreduzibel $\Leftrightarrow \langle\chi,\chi\rangle = 1$ .

(ii) Sind $\chi_1$ und $\chi_2$ Charaktere zweier nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen ($\chi_1 \not\sim \chi_2$), so gilt

$$\langle\chi_1,\chi_2\rangle = 0 \ .$$

(iii) Zwei nicht irreduzible Charaktere $\chi, \chi' \in X(\mathbb{C}[G])$ lassen sich als Linearkombinationen der irreduziblen Charaktere $\chi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ schreiben:

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\chi_i \ , \ \ \chi' = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i\chi_i \ , \quad (\lambda_i, \lambda'_i \in \mathbb{C} \ \forall \ i) \ .$$

Sie heißen *orthogonal* oder *disjunkt*, falls gilt

$$\langle\,\chi,\chi'\,\rangle = 0\,.$$

(vgl. [Ser72], Seite 14) .

### 2.1.6 Bemerkung:

Ist $H$ eine endliche abelsche Gruppe, so definiere die *Charaktergruppe* $\hat{H} := Hom(H, \mathbb{C}^*)$. Da jede irreduzible Darstellung von $H$ eindimensional ist, ist $\hat{H}$ gerade die Menge aller irreduziblen Darstellungen von $H$.

Sei nun $H \subset G$ eine normale, abelsche Untergruppe von $G$. Dann operiert $G$ auf $\hat{H}$ durch Konjugation wie folgt:

$$\hat{H} \times G \longrightarrow \hat{H}, \qquad \chi^{\sigma}(x) = \chi(\sigma x \sigma^{-1})\,,$$

für $x \in H$, $\sigma \in G$, $\chi \in \hat{H}$. Weil $H$ abelsch ist, operiert $H$ trivial auf $\hat{H}$ und somit operiert auch $G/H$ auf $\hat{H}$ .

### 2.1.7 Satz

Sei $G$ eine endliche abelsche Gruppe, so gelten:

(i) Sei $g \in G$ fest, so gilt $\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{, falls } g = 1, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$

(ii) Sei $\chi \in \hat{G}$ fest, so gilt $\sum_{g\in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{, falls } \chi \text{ trivial,} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$

*Beweis:*
[SP08], Seite 141, Satz 7.14 .

□

### 2.1.8 Notation:
Seien $G$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von $G$.
In diesem Kapitel verwenden wir immer die folgenden Bezeichnungen:
Wir schreiben

- $Res_H^G\,\chi$ für die Einschränkung eines Charakters $\chi$ von $G$ auf $H$,
- $Ind_H^G\,\chi$ für die Induktion eines Charakters $\chi$ von $H$ nach $G$,
- Entsprechendes gilt für $Res_H^G\,\rho$, $Ind_H^G\,\rho$, mit einer Darstellung $\rho\colon G \to Aut_K(V)$ von $G$.

Die Begriffe $Res_H^G\,\chi$, $Ind_H^G\,\chi$ werden in [Lan70], Kapitel XVIII, §6 - §7 ausführlich diskutiert.

## 2.2 Die eindimensionalen Darstellungen

Die eindimensionalen Darstellungen der Gruppe $G$ über $\mathbb{C}$ sind gerade die Homomorphismen $\rho\colon G \to \mathbb{C}^*$.
Es gilt

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h).$$

Somit gilt auch

$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} \text{ und } \rho(1_G) = 1 \quad \forall g,h \in G.$$

Da $\mathbb{C}$ kommutativ ist, gilt weiter

$$\rho([g,h]) = \rho(ghg^{-1}h^{-1}) = \rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})\rho(h^{-1}) = \rho(g)\rho(g^{-1})\rho(h)\rho(h^{-1}) = 1.$$

Man sieht nun, dass $[g,h]$ und damit auch $G'$ im Kern von $\rho$ liegen. Somit hat $\rho$ auf den Nebenklassen aus $G/G'$ jeweils konstante Werte und induziert kanonisch eine Darstellung $\bar{\rho}$ von $\overline{G} := G/G'$ durch $\bar{\rho}(g\overline{G}) := \rho(g)$.
Umgekehrt ist $\rho$ vollständig durch $\bar{\rho}$ bestimmt.
(Vgl. [Mey76], Seite 124)

Daraus ergibt sich direkt das folgende Lemma.

### 2.2.1 Lemma
Sei $G$ eine endliche Gruppe, dann besitzt $G$ gerade $[G : G']$ viele eindimensionale Darstellungen.

□

**Bemerkung:**
In unserem Fall gilt laut 1.2.5 $\qquad G' = Z(G)$ .
Damit erhalten wir, dass

$$[G : G'] = [G : Z(G)] = p^2$$

die Anzahl der eindimensionalen Darstellungen von $G$ ist.

### 2.2.2 Beschreibung der Darstellungen

Betrachte nun eine Untergruppe $H$ der Ordnung $p^2$ von $G$. Da $H$ abelsch ist, hat $H$ genau $p^2$ viele Konjugationsklassen. Also gibt es $p^2$ viele verschiedene eindimensionale Charaktere von $H$.
Für $h \in H$ gilt

$$\chi(h)^{|H|} = \chi(h^{|H|}) = \chi(1) = 1 \ .$$

Somit sind die Werte der eindimensionalen Charaktere von $H$ durch $p^2$-te Einheitswurzeln gegeben (vgl. [Lan70], Seite 460).

In unserem Fall benutzen wir $\overline{G} = G/Z$, um die eindimensionalen Darstellungen von $G$ zu finden. Wir betrachten die Abbildungen

$$G \xrightarrow{\pi} \overline{G} \xrightarrow{\alpha_{jk}} \mathbb{C}^*,$$

wobei $\pi$ die Restklassenabbildung bezeichnet.
Da $\overline{G}$ elementarabelsch ist, schreibe $\overline{G} = \langle g,h \rangle$. Es ist $\alpha_{jk}$ definiert durch

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{jk}: & \overline{G} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & g & \longmapsto & \omega^j \\ & h & \longmapsto & \omega^k \end{array} \qquad \text{mit } \omega := e^{\frac{2\pi i}{p}} \ .$$

Mit der Komposition $\chi_{jk} := \alpha_{jk} \circ \pi$ für $0 \leq j,k < p$ erhalten wir also eine explizite Beschreibung der $p^2$ vielen eindimensionalen Charaktere und damit auch der Darstellungen von $G$.
**Beachte:** Bei abelschen Gruppen reicht es, die Charaktere auf den Erzeugern der Gruppe anzugeben.

## 2.3 Darstellungen von $G$ durch induzierte Charaktere

Um nun die restlichen $p - 1$ Darstellungen zu finden, benutzen wir folgende Sätze.

### 2.3.1 Satz: Zerlegungssatz von Mackey

Sei $G$ eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $S$ ein Repräsentantensystem von $H \backslash G / H$. Dann gilt für eine Klassenfunktion $f \in X(\mathbb{C}[H])$

$$Res_H^G Ind_H^G \ f = \sum_{s \in S} \ Ind_{H \cap sHs^{-1}}^H \ f^s$$

mit den Klassenfunktionen $f^s \in X(\mathbb{C}[G])$ , $f^s(x) := f(sxs^{-1})$ .

*Beweis:*
[Sim96], Seite 91, Theorem V.6.2 .

□

### 2.3.2 Korollar

In unserem Fall: $|G| = p^3$, $H \lhd G$ mit $|H| = p^2$, $\chi \in \hat{H}$ eine Klassenfunktion gilt:

$$sHs^{-1} = H \quad \text{und} \quad H \backslash G / H = H/G \ .$$

Somit vereinfacht sich die Aussage des obigen Satzes zu

$$Res_H^G Ind_H^G \ \chi = \sum_{s \in S} \chi^s,$$

wobei $s$ ein Repräsentantensystem $S$ von $G/H$ durchläuft.

□

### 2.3.3 Satz: Frobenius Reziprozität

Seien $H \subset G$ eine Untergruppe, $\varphi$ eine komplexwertige Klassenfunktion auf $H$ und $\psi$ eine Klassenfunktion auf $G$, dann gilt

$$\langle \, \varphi \, , Res_H^G \, \psi \, \rangle_H = \langle \, Ind_H^G \, \varphi \, , \psi \, \rangle_G \ .$$

*Beweis:*
[Ser72], Seite 40, Satz 14 .

□

### 2.3.4 Satz: Mackeys Irreduzibilitätskriterium

Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und $\rho\colon H \to Aut_{\mathbb{C}}(V)$ eine Darstellung mit Charakter $\chi$ , dann gilt:
Der induzierte Charakter $Ind_H^G \, \chi$ ist irreduzibel genau dann, wenn gilt:

(i) $\chi$ ist irreduzibel,

(ii) die Charaktere $Res_{H \cap sHs^{-1}}^H \, \chi$ und $Res_{H \cap sHs^{-1}}^{sHs^{-1}} \, \chi^s$ sind disjunkt für $s \in G \setminus H$ und $\chi^s(x) = \chi(sxs^{-1})$ für $s \in sHs^{-1}$.

*Beweis:*
[Ser72], Seite 42, Abschnitt 7.5 .

□

### 2.3.5 Korollar

In unserer Situation (vergleiche 2.3.2) ergibt sich

$$Ind_H^G \chi \text{ ist irreduzibel } \Leftrightarrow \chi \text{ irreduzibel und } \langle \chi, \chi^s \rangle = 0 \text{ für } s \notin H \ .$$

□

### 2.3.6 Lemma: Formel von Mackey

Es seien $H \subset G$ eine Untergruppe von $G$, $\varphi$ ein Charakter von $H$ und $\chi := Ind_H^G(\varphi)$ der durch $\varphi$ induzierte Charakter, dann gilt

$$\chi = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{h \in G \\ hgh^{-1} \in H}} \varphi(hgh^{-1})$$

(vgl. [Ser72], Seite 40).

**Notation:**

Sei von nun an unsere Situation die von 2.3.2. Im restlichen Kapitel werden wir die rechte Operation von $G/H$ auf $\hat{H} : (\chi, \sigma) \mapsto \chi^\sigma$ (vgl. 2.1.6) als linke Operation schreiben: $(\sigma, \chi) \mapsto \sigma(\chi)$. Dies geht, da $G/H$ kommutativ ist.

### 2.3.7 Proposition

$\hat{H}$ zerfällt unter $G/H$ in $p$ viele einelementige und in $p-1$ viele $p$-elementige Bahnen.

*Beweis:*

Da $G/H$ wie in 2.1.6 auf $\hat{H}$ operiert, gilt für einen Repräsentanten $\sigma \in S$

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\chi), \chi \rangle_H = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma(\chi) = \chi \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in H : \sigma(\chi)(x)\chi^{-1}(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in H : \sigma x \sigma^{-1} x^{-1} \in Ker(\chi) \ . \end{aligned}$$

Ist $\sigma \notin H$, so ist dies äquivalent zu $\chi_{|Z} = 1$ , da die Kommutatoren $\sigma x \sigma^{-1} x^{-1}$ das Zentrum $Z$ erzeugen.

Also:

$$\chi_{|Z} = 1 \Leftrightarrow \forall\, \sigma \in S : \langle \sigma(\chi), \chi \rangle_H = 1\,,$$

woraus folgt

$$\sum_{\sigma \in S} \langle \sigma(\chi), \chi \rangle_H = p\ .$$

Wir haben gesehen, dass $\chi \in \hat{H}$ unter $G/H$ fest bleibt, genau dann wenn, $\chi_{|Z} = 1$ ist. Deshalb zerfallen die $p^2 - p$ restlichen Charaktere $\chi \in \hat{H}$ mit $\chi_{|Z} \neq 1$ in $p - 1$ viele Bahnen der Länge $p$ unter $G/H$.

□

### 2.3.8 Satz

Sei $\chi \in \hat{H}$, $Ind_H^G(\chi)$ der von $\chi$ induzierte Charakter von $G$. Dann gilt

$$\langle Ind_H^G(\chi), Ind_H^G(\chi) \rangle_G = \begin{cases} p, & \text{wenn } \chi_{|Z} = 1\,, \\ 1, & \text{wenn } \chi_{|Z} \neq 1\,. \end{cases}$$

*Beweis:*
Sei $\chi \in \hat{H}$, es gilt

$$\begin{aligned}
\langle Ind_H^G(\chi), Ind_H^G(\chi)\rangle_G &= \langle Res_H^G Ind_H^G(\chi), \chi\rangle_H \quad \text{(Frobenius Reziprozität)} \\
&= \sum_{\sigma\in S} \langle \sigma(\chi), \chi\rangle_H \quad \text{(Mackey)} \\
&= (*) \ .
\end{aligned}$$

Sei $\chi_{|Z} = 1$, dann gilt mit 2.3.7

$$(*) = \sum_{\sigma\in S} 1 = p \ .$$

Sei $\chi_{|Z} \neq 1$. Nach 2.3.7 ist dies äquivalent dazu, dass $\langle \sigma(\chi), \chi\rangle_H = 0$ für $\sigma \neq 1$.
Also gilt

$$(*) = \langle \chi, \chi\rangle_H + \sum_{1\neq\sigma\in S} \langle \sigma(\chi), \chi\rangle_H = 1 \ .$$

□

**2.3.9 Satz**
Seien $\chi, \chi' \in \hat{H}$, $\chi_{|Z} \neq 1 \neq \chi'_{|Z}$, und $Ind_H^G(\chi)$ bzw. $Ind_H^G(\chi')$ die von $\chi$ und $\chi'$ induzierten Charaktere von $G$, so gilt

$$\langle Ind_H^G(\chi), Ind_H^G(\chi')\rangle_G = \begin{cases} 1, & \chi \text{ und } \chi' \text{ liegen in derselben Bahn von } G/H, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned}
\langle Ind_H^G(\chi), Ind_H^G(\chi')\rangle_G &= \langle Res_H^G Ind_H^G(\chi), \chi'\rangle_H \quad \text{(Frobenius Reziprozität)} \\
&= \sum_{\sigma\in G/H} \langle \sigma(\chi), \chi'\rangle_H \quad \text{(Mackey)}
\end{aligned}$$

Nach der Art, wie $\hat{H}$ unter $G/H$ in Bahnen zerfällt (vgl. Beweis von 2.3.7), ergibt sich: Alle $\sigma(\chi)$ sind verschieden von $\chi'$, falls $\chi$ und $\chi'$ nicht in derselben Bahn liegen; und genau eines der $\sigma(\chi)$ ist $\chi'$, falls $\chi$ und $\chi'$ in derselben Bahn liegen. Daraus folgt die Behauptung.

□

Zusammenfassend gilt nun:
Man bekommt $p^2$ viele induzierte Charaktere von $G$ durch die Charaktere $\chi \in \hat{H}$.
Aus 2.3.9 wird nun klar, dass $Ind_H^G(\chi)$ genau dann irreduzibel ist, wenn $\chi_{|Z} \neq 1$, und dass zwei solche induzierte Charaktere $Ind_H^G(\chi)$, $Ind_H^G(\chi')$ genau dann äquivalent sind, wenn $\chi$ und $\chi'$ in derselben Bahn liegen. Schreibe dann $\chi \sim \chi'$.
Die $p-1$ vielen $p$-dimensionalen Charaktere sind $Ind_H^G(\chi)$, wobei $\chi$ ein Repräsentantensystem der Klassen von $\chi \in \hat{H}$ mit $\chi_{|Z} \neq 1$ durchläuft modulo der Operation

von $G/H$. Diese kann man nun mit der Mackey-Formel (2.3.6) berechnen.
Wir haben jetzt $p-1$ viele verschiedene Charaktere der Dimension $p$ gefunden, und diese sind nun alle.

## Die $p$-dimensionalen Darstellungen der $D_{p^3}$

Betrachte nun die Gruppe

$$D_{p^3} = \langle\, x,y \,|\, x^{p^2} = y^p = 1\,, yxy^{-1} = x^{p+1}\,\rangle = \{\, x^i y^j \,|\, 0 \leq i < p^2\,, 0 \leq j < p \,\}\ .$$

Man findet als Repräsentanten der einzelnen Konjugationsklassen

$$\begin{array}{lll} x^{ap} & , & 0 \leq\ a < p\ , \\ x^b y^c & , & 0 \leq\ b\,,c < p\,,\ (b,c) \neq (0,0)\ . \end{array}$$

Sei $H := \langle x \,|\, x^{p^2} = 1\rangle$ die zyklische, normale Untergruppe von $G$ der Ordnung $p^2$. Dann lassen sich die irreduziblen Charaktere $\chi_j \in \hat{H}$ wie folgt beschreiben:

$$\chi_j(x) = \nu^j \qquad 0 \leq\ j < p^2\,,\ \text{mit}\ \nu := e^{\frac{2\pi i}{p^2}}\,.$$

**Beobachtung:**
Da nach 1.3.3 $Z(D_{p^3}) = \langle x^p \rangle$, gilt

$$\chi_{j|Z} \neq 1 \Leftrightarrow j \not\equiv 0\,(\,mod\ p)\,.$$

Nun ist

$$\chi_i \sim \chi_j \Leftrightarrow i \equiv j\,(\,mod\ p)\,,$$

denn für $y \in G$ ist

$$y(\chi_i)(x) = \chi_i(yxy^{-1}) = \chi_i(x^{p+1}) = \chi_{i(p+1)}(x)\,.$$

Damit gilt

$$\chi_1 \sim \chi_{p+1} \sim \chi_{2p+1} \sim \cdots \sim \chi_{(p-1)p+1}\,.$$

Also repräsentieren $\chi_1, \ldots, \chi_{p-1}$ die $G/H$-Bahnen auf $\hat{H}$.

### 2.3.10 Berechnung der Charaktere

Da $H$ normal in $G$ ist, liegt jede Konjugationsklasse, die ein Element aus $H$ enthält, schon komplett in $H$.
Umgekehrt liegt kein Element einer Konjugationsklasse in $H$, wenn sie schon eins enthält, das nicht in $H$ liegt.

(i) Sei $x^{ap} \in Z$ mit $0 \leq a < p$, für jedes $j$ mit $0 < j < p$ gilt

$$\begin{aligned}
Ind_H^G\,(\chi_j)(x^{ap}) &= \tfrac{1}{p^2} \sum_{\substack{g \in G \\ g\,x^{ap} g^{-1} \in H}} \chi_j(g\,x^{ap} g^{-1}) \\
&= \tfrac{1}{p^2} \sum_{g \in G} \chi_j(x^{ap}) \\
&= \tfrac{1}{p^2}\; p^3\, \chi_j(x^{ap}) \\
&= p\,\nu^{\,ajp} \\
&= p\,\omega^{\,aj} \quad \text{mit} \quad \omega := e^{\frac{2\pi i}{p}} \;.
\end{aligned}$$

(ii) Sei nun $x^b \in H$ mit $(0 < b < p)$, dann

$$\begin{aligned}
Ind_H^G\,(\chi_j)(x^b) &= \tfrac{1}{p^2} \sum_{\substack{g \in G \\ g\,x^b g^{-1} \in H}} \chi_j(g\,x^b g^{-1}) \\
&= \tfrac{1}{p^2} \sum_{g \in H} \chi_j(x^b) + \tfrac{1}{p^2} \sum_{g \in G \setminus H} \chi_j(g\,x^b g^{-1}) \\
&= \nu^{\,jb} + \tfrac{1}{p^2} \sum_{\substack{0<k<p \\ 0 \leq l < p^2}} \chi_j(x^l y^k\, x^b\, y^{-k} x^{-l}) && \text{mit } g := x^l y^k \\
& && 0 < k < p\,,\; 0 \leq l < p^2 \\
&= \nu^{\,jb} + \tfrac{1}{p^2} p^2 \sum_{0<k<p} \chi_j(x^{(1+kp)b}) \\
&= \nu^{\,jb} + \sum_{0<k<p} \chi_j(x^b)\chi_j(x^{kbp}) \\
&= \nu^{\,jb} + \chi_j(x^b) \sum_{0<k<p} \chi_j(x^{kbp}) \\
&= \nu^{\,jb} - \nu^{\,jb} \qquad = \; 0\;.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich, da $x^{kbp}$, mit $bp$ fest, $Z \setminus \{1\}$ durchläuft und mit 2.1.7 gilt, dass $\sum\limits_{0<k<p} \chi_j(x^{kbp}) = -1\,$.

(iii) Sei nun $x^b y^c \notin H$ mit $0 \leq\; b < p\,,\, 0 < c < p$, so gilt

$$Ind_H^G\,(\chi_j)(x^b y^c) = \frac{1}{p^2} \sum_{\substack{g \in G \\ g\,x^b y^c g^{-1} \in H}} \chi_j(g\,x^b y^c g^{-1}) = 0,$$

da $g\,x^b y^c g^{-1} \notin H \;\forall\, g \in G$ .

Damit ergeben sich folgende Werte auf den unterschiedlichen Konjugationsklassen:

| | $x^{ap}$ | $x^b y^c$ |
|---|---|---|
| $\chi_j$ | $p\;\omega^{aj}$ | $0$ |

mit $\quad 0 < j < p\,, \quad 0 \leq a < p\,, \quad \begin{array}{c} 0 \leq b,c < p\,, \\ (b,c) \neq (0,0) \end{array} \quad$ und $\omega := e^{\frac{2\pi i}{p}}$ .

## Die p-dimensionalen Darstellungen der $Q_{p^3}$

Nun zur Gruppe

$$Q_{p^3} = \langle\; x,y \mid x^p = y^p = [x,y]^p = 1 \;\rangle = \{\; x^i y^j z^k \mid 0 \leq i,j,k < p \;,\; z := [y,x] \;\} \;.$$

Die Repräsentanten der Konjugationsklassen sind gegeben durch

$$\begin{array}{ccl} z^a & , & 0 \leq\; a < p\,, \\ x^b y^c & , & 0 \leq\; b,c < p,\; (b,c) \neq (0,0)\;. \end{array}$$

Es ist $H := \langle x,z \rangle$ eine elementarabelsche, normale Untergruppe der $Q_{p^3}$ der Ordnung $p^2$. Es gilt

$$z = [y,x] = yxy^{-1}x^{-1} \;\text{ d.h. }\; yxy^{-1} = zx.$$

Die irreduziblen Charaktere $\chi_{m,l} \in \hat{H}$ kann man wie folgt beschreiben:

$$\chi_{m,l}: \quad \begin{array}{rcl} \chi_{m,l}(x) & = & \omega^m \\ \chi_{m,l}(z) & = & \omega^l \end{array} \qquad 0 \leq\; m,l < p\,,\text{ mit } \omega := e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

**Beobachtung:**
Da $Z = \langle [x,y] \rangle$, gilt

$$\chi_{m,l|Z} \neq 1 \Leftrightarrow l \not\equiv 0\,(\,mod\;p),$$

denn für $y \in G$ ist

$$y(\chi_{m,l})(z) = \chi_{m,l}(z) = \omega^l \;.$$

Weiter gilt

$$\chi_{m,l} \sim \chi_{n,k} \Leftrightarrow m \equiv n\,(\,mod\;p\,)\,,$$

denn

$$y(\chi_{m,l})(x) = \chi_{m,l}(zx) = \omega^{m+l} = \chi_{m+l,l}(x),$$

damit

$$\chi_{m,l} \sim \chi_{m+l,l} \sim \chi_{m+2l,l} \sim \cdots \sim \chi_{m+(p-1)l,l}\,.$$

Das heißt $\chi_l := \chi_{0,l}$, $(1 \leq l < p)$ ist ein Repräsentantensystem der $G/H$-Bahnen auf $\hat{H}$.

### 2.3.11 Berechnung der Charaktere

(i) Sei $z^a \in Z$ mit $0 \leq a < p$, für jedes $l$ mit $0 < l < p$ gilt

$$\begin{aligned} Ind_H^G(\chi_l)(z^a) &= \tfrac{1}{p^2} \sum_{\substack{g \in G \\ g\, z^a g^{-1} \in H}} \chi_l(g\, z^a g^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{p^2} \sum_{g \in G} \chi_l(z^a) \\ &= \tfrac{1}{p^2}\, p^3\, \chi_l(z^a) \\ &= p\,\omega^{al}\,. \end{aligned}$$

(ii) Sei nun $z^a x^b \in H$ mit $0 \leq a < p\,,\ 0 < b < p$, dann

$$\begin{aligned} Ind_H^G(\chi_l)(z^a x^b) &= \tfrac{1}{p^2} \sum_{\substack{g \in G \\ g\, z^a x^b g^{-1} \in H}} \chi_l(g\, z^a x^b g^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{p^2} \sum_{g \in H} \chi_l(z^a x^b) + \tfrac{1}{p^2} \sum_{g \in G \setminus H} \chi_l(g z^a x^b g^{-1}) \\ &= \omega^{al} + \tfrac{1}{p^2} \sum_{\substack{0<k<p \\ 0 \leq i,j < p}} \chi_j(z^i x^j y^k\, z^a x^b\, y^{-k} x^{-j} z^{-i}) && \text{mit } g := z^i x^j y^k\,, \\ & && 0 < k < p\,,\ 0 \leq i,j < p \\ &= \omega^{al} + \tfrac{1}{p^2}\, p^2 \sum_{0<k<p} \chi_l(z^a z^{bk} x^b) \\ &= \omega^{al} + \sum_{0<k<p} \chi_l(z^a x^b) \chi_l(z^{bk}) \\ &= \omega^{al} + \chi_l(z^a x^b) \sum_{0<k<p} \chi_j(z^{bk}) \\ &= \omega^{al} - \omega^{al} \qquad = \ 0\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich, da $z^{bk}$, mit $b$ fest, $Z \setminus \{1\}$ durchläuft und mit 2.1.7 gilt, dass $\sum\limits_{0<k<p} \chi_j(z^{bk}) = -1\,.$

(iii) Sei nun $z^a x^b y^c \notin H$ mit $0 \leq a, b < p\,,\ 0 < c < p\,,$ so gilt wegen $H \triangleleft G$

$$Ind_H^G(\chi_j)(z^a x^b y^c) = \frac{1}{p^2} \sum_{\substack{g \in G \\ g\, z^a x^b y^c g^{-1} \in H}} \chi_j(g\, z^a x^b y^c g^{-1}) = 0\,,$$

da $g\, z^a x^b y^c g^{-1} \notin H\ \forall\, g \in G\,.$

Damit ergeben sich folgende Werte auf den unterschiedlichen Konjugationsklassen:

| | $z^a$ | $x^b y^c$ |
|---|---|---|
| $\chi_l$ | $p\ \omega^{al}$ | $0$ |

mit $\quad 0 < l < p\,, \qquad 0 \leq a < p\,, \qquad \begin{array}{c} 0 \leq b,c < p\,, \\ (b,c) \neq (0,0) \end{array} \qquad$ und $\omega := e^{\frac{2\pi i}{p}}$ .

# 3 Der Spezialfall $p = 2$

## 3.1 Klassifikation

Sei nun $p = 2$, dann findet man genau 5 bis auf Isomorphie verschiedene Gruppen der Ordnung 8.
Die abelschen Gruppen der Ordnung 8 findet man mit Hilfe von 1.1.1:

$$\begin{aligned} G_1 &\cong C_8, \\ G_2 &\cong C_4 \times C_2, \\ G_3 &\cong (C_2)^3. \end{aligned}$$

Die *nichtabelschen Gruppen* sind die Folgenden:

(1) Die Diedergruppe mit 8 Elementen

$$D_8 := \langle x,y | x^4 = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle = \{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\},$$

(2) Die Quaternionengruppe

$$Q_8 := \langle i,j,k | i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k \rangle = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

(vgl. [Suz86], Seite 67, (4.13)).
Man sieht, dass die Gruppe $D_8$ analog zum allgemeinen Fall ($p > 2$) definiert ist. Die Gruppe $Q_8$ jedoch wird von Elementen der Ordnung 4 erzeugt. Hätte die $Q_8$ nur Elemente vom Grad 2, so wäre sie abelsch, also muss sie Elemente der Ordnung 4 besitzen.

Ihre *Konjugationsklassen* sind

(1) $D_1 = \{1\}, D_2 = \{x^2\}, D_3 = \{x, x^3\}, D_4 = \{y, xy^2\}, D_5 = \{xy, x^3y\}$,

(2) $Q_1 = \{1\}, Q_2 = \{-1\}, Q_3 = \{i, -i\}, Q_4 = \{j, -j\}, Q_5 = \{k, -k\}$.

Also gilt für ihre *Zentren*

(1) $Z(D_8) = \{1, x^2\}$,

(2) $Z(Q_8) = \{1, -1\}$.

Für die *Kommutatorengruppe* gilt in beiden Fällen $G' = Z(G)$ (wie in 1.2.5), und $\overline{G} := G/Z$ ist elementarabelsch (1.2.2).

## 3.2 Darstellungen über $\mathbb{C}$

Da es je 5 Konjugationsklassen gibt, gibt es auch 5 irreduzible Darstellungen über $\mathbb{C}$.

Die *eindimensionalen Darstellungen* $\rho_{D_{jk}} := \alpha_{D_{jk}} \circ \pi$ von $D_8$ und $\rho_{Q_{ab}} := \alpha_{Q_{ab}} \circ \pi$ von $Q_8$ sind jeweils gegeben durch die Restklassenabbildung $\pi \colon G \to \overline{G}$ (für $G = D_8, Q_8$) und durch die Darstellungen $\alpha_{D_{jk}}$ und $\alpha_{Q_{ab}}$ von $\bar{D}_8$ und $\bar{Q}_8$:

(1) Mit $D_8/Z(D_8) = \{\bar{1}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}\bar{y}\} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ :

$$\begin{array}{rcccl} \alpha_{D_{jk}}\colon & \bar{x} & \mapsto & (-1)^j & \\ & \bar{y} & \mapsto & (-1)^k & \qquad \forall j,k \in \{0,1\}\,. \end{array}$$

(2) Mit $Q_8/Z(Q_8) = \{\bar{1}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{i}\bar{j}\} = \langle \bar{i}, \bar{j} \rangle$ :

$$\begin{array}{rcccl} \alpha_{Q_{ab}}\colon & \bar{i} & \mapsto & (-1)^a & \\ & \bar{j} & \mapsto & (-1)^b & \qquad \forall a,b \in \{0,1\}. \end{array}$$

Damit haben wir nun die 4 eindimensionalen Darstellungen gefunden, es fehlt also noch eine irreduzible Darstellung der Dimension 2. Diese finden wir, indem wir die irreduziblen Darstellungen einer normalen Untergruppe $H$ der Ordnung 4 nach $G$ *induzieren.*

(1) $G \cong D_8$:
Sei $H = \langle x \rangle$, dann ist der induzierte Charakter $\psi := Ind_H^{D_8}(\chi)$ von $G$ gegeben durch einen der Charaktere $\chi_a \in \hat{H}$ von $H$, wobei $\chi_{a|Z} \neq 1$. Diese sind gegeben durch

$$\chi_a(x) = \omega^a \qquad \text{mit } 0 < a \leq 3\,,\ \omega := e^{\frac{2\pi i}{4}}.$$

Es ist nun $\qquad \chi_{a|Z} \neq 1 \Leftrightarrow a \not\equiv 0\,(\,mod\ 2)\,,$

und $\qquad \chi_a \sim \chi_b \Leftrightarrow a \equiv b\,(\,mod\ 2)\,.$

Wähle also $\chi := \chi_1$, und $1, x, x^2, y, xy$ als Repräsentanten der Konjugationsklassen von $D_8$:

$$\begin{array}{lclclclcl}
\psi(1) & = & \frac{1}{4} \sum\limits_{\substack{h \in D_8 \\ h\,1\,h^{-1} \in H}} \chi(h\,1\,h^{-1}) & = & \frac{8}{4}\,\chi(1) & = & 2 \cdot 1 & = & 2 \\
\psi(x^2) & = & \frac{1}{4} \sum\limits_{\substack{h \in D_8 \\ h\,x^2 h^{-1} \in H}} \chi(h\,x^2 h^{-1}) & = & \frac{8}{4}\,\chi(x^2) & = & 2 \cdot (-1) & = & -2 \\
\psi(x) & = & \frac{1}{4} \sum\limits_{\substack{h \in D_8 \\ h\,x\,h^{-1} \in H}} \chi(h\,x\,h^{-1}) & = & \frac{1}{4} \sum\limits_{h \in H} \chi(x) & + & \frac{1}{4} \sum\limits_{h \in D_8 \setminus H} \chi(h\,x\,h^{-1}) & & \\
& = & \chi(x) + \chi(x^3) & = & i - i & = & & & 0
\end{array}$$

$$\psi(y) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h\in D_8 \\ h\,y\,h^{-1}\in H}} \chi(h\,y\,h^{-1}) = 0$$

$$\psi(xy) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h\in D_8 \\ h\,xy\,h^{-1}\in H}} \chi(h\,xy\,h^{-1}) = 0 \qquad \text{(da } y, xy \notin H \text{ gilt, sind die Summen leer)}$$

(2) $G \cong Q_8$:
Sei $H = \langle j \rangle$, dann ist der induzierte Charakter $\phi := Ind_H^{Q_8}(\varphi)$ von $Q_8$ gegeben durch einen der Charaktere $\varphi_b \in \hat{H}$ von $H$, wobei $\varphi_{b|Z} \neq 1$. Diese sind gegeben durch

$$\varphi_b(j) = \omega^b \qquad \text{mit } 0 < b \leq 3\,,\ \omega := e^{\frac{2\pi i}{4}}\ .$$

Es ist nun $\quad \varphi_{b|Z} \neq 1 \Leftrightarrow b \not\equiv 0\,(\,mod\ 2)\,,$

und $\quad \varphi_b \sim \varphi_c \Leftrightarrow b \equiv c\,(\,mod\ 2)\,.$

Wähle also $\varphi := \varphi_1$, und $1, -1, i, j, k$ als Repräsentanten der Konjugationsklassen von $Q_8$:

$$\phi(1) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h\in Q_8 \\ h\,1\,h^{-1}\in H}} \varphi(h\,1\,h^{-1}) = \frac{8}{4}\,\varphi(1) = 2\cdot 1 = 2$$

$$\phi(-1) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h\in Q_8 \\ h\,(-1)h^{-1}\in H}} \varphi(h\,(-1)h^{-1}) = \frac{8}{4}\,\varphi(-1) = 2\cdot(-1) = -2$$

$$\begin{aligned}\phi(j) &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{h\in Q_8 \\ h\,j\,h^{-1}\in H}} \varphi(h\,j\,h^{-1}) = \frac{1}{4}\sum_{h\in H}\varphi(j) + \frac{1}{4}\sum_{h\in Q_8\setminus H}\varphi(h\,j\,h^{-1}) \\ &= \varphi(j) + \varphi(-j) = \varphi(j) - \varphi(j) = 0\end{aligned}$$

$$\phi(i) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h\in Q_8 \\ h\,i\,h^{-1}\in H}} \varphi(h\,i\,h^{-1}) = 0$$

$$\phi(k) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h\in Q_8 \\ h\,k\,h^{-1}\in H}} \varphi(h\,k\,h^{-1}) = 0 \qquad \text{(da } i, k \notin H \text{ gilt, sind die Summen leer)}$$

Somit haben wir alle 5 irreduziblen Darstellungen der nichtabelschen Gruppen der Ordnung 8 über $\mathbb{C}$ bestimmt.

# 4 Zusammenfassung und Ausblick

## 4.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Zusammengefasst gibt es also 5 Gruppen der Ordnung $p^3$, die bis auf Isomorphie verschieden sind. Diese sind

(1) $G_1 \cong C_{p^3}$ [1.1.1] ,

(2) $G_2 \cong C_{p^2} \times C_p$ [1.1.1] ,

(3) $G_3 \cong C_p \times C_p \times C_p$ [1.1.1] ,

(4) $G_4 \cong D_{p^3} = \langle\, x,y \,|\, x^{p^2} = y^p = 1\,, yxy^{-1} = x^{p+1}\,\rangle$ [1.3.2], $G_4 \cong D_8$ für $p = 2$ [3.1]

(5) $G_4 \cong Q_{p^3} = \langle\, x,y \,|\, x^p = y^p = [x,y]^p = 1\,\rangle$ [1.3.4], $G_5 \cong Q_8$ für $p = 2$ [3.1]

Dabei sind $G_1$, $G_2$, $G_3$ abelsch und $G_4$, $G_5$ nichtabelsch.

Die Darstellungen der nichtabelschen Gruppen lassen sich durch Charaktertafeln wie folgt beschreiben:

(i) $p > 2$:

a) $D_{p^3}$:

| | $1$ | $C_{D_{p^3}}(x^{ap})$ | $C_{D_{p^3}}(x^b y^c)$ |
|---|---|---|---|
| $\rho_{i,j}$ | $1$ | $\omega^{aip} = 1$ | $\omega^{bi+cj}$ |
| $\chi_k$ | $p$ | $p\ \omega^{ak}$ | $0$ |

mit $0 \leq\ i,j < p$ , $0 < a < p$ ,
$0 < k < p$ , $0 \leq\ b,c < p$ , wobei $(b,c) \neq (0,0)$
und $\omega := e^{\frac{2\pi i}{p}}$ .

[2.2.2, 2.3]

b) $Q_{p^3}$:

| | $1$ | $C_{Q_{p^3}}(z^a)$ | $C_{Q_{p^3}}(x^b y^c)$ |
|---|---|---|---|
| $\rho_{l,m}$ | $1$ | $1$ | $\omega^{bl+cm}$ |
| $\chi_h$ | $p$ | $p\ \omega^{ah}$ | $0$ |

mit $0 \leq\ l,m < p$ , $0 < a < p$ ,
$0 < h < p$ , $0 \leq\ b,c < p$ , wobei $(b,c) \neq (0,0)$
und $\omega := e^{\frac{2\pi i}{p}}$ .

[2.2.2, 2.3]

(ii) $p = 2$:

a) $D_8$:

| | $1$ | $C_{D_8}(x)$ | $C_{D_8}(y)$ | $C_{D_8}(x^2)$ | $C_{D_8}(xy)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_{0,0}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_{1,0}$ | 1 | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ |
| $\chi_{0,1}$ | 1 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $\chi_{1,1}$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 |
| $\psi_1$ | 2 | 0 | 0 | $-2$ | 0 |

b) $Q_8$:

| | $1$ | $C_{Q_8}(-1)$ | $C_{Q_8}(i)$ | $C_{Q_8}(j)$ | $C_{Q_8}(k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_{0,0}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_{1,0}$ | 1 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $\chi_{0,1}$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $\chi_{1,1}$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $\psi_1$ | 2 | $-2$ | 0 | 0 | 0 |

[3.2]

## 4.2 Ausblick

- Da in dieser Arbeit die Gruppen der Ordnung $p^3$ betrachtet wurden, liegt es nahe, sich zu fragen, wie man die Gruppen der Ordnungen $p^n$, mit $n > 3$ beschreiben kann.
  Dabei tauchen unter Anderem folgende Fragen auf.
  Wie viele Gruppen dieser Ordnung gibt es?
  Hängt diese Zahl nur von $n$ ab, oder auch von $p$?
  Wie sieht das Zentrum solcher Gruppen aus?
  Hat Z(G) immer die gleiche, oder je nach Isomorphiektyp verschiedene Ordnungen?

  Zum Beispiel kann man für $n = 4$ folgende Überlegungen anstellen, die das Zentrum $Z$ und deren Restklassengruppe $G/Z$ betreffen:
  Sei $G$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung $p^4$.
  Das Zentrum einer solchen Gruppe $G$ ist entweder von der Ordnung $p$ oder $p^2$ (vgl. 1.2.3 und1.2.2).
  Im Falle $p^2$ hat $G/Z$ die Ordnung $p^2$ und ist somit elementarabelsch.
  Im Falle $p$ allerdings hat $G/Z$ die Ordnung $p^3$ und damit gibt es 4 Möglichkeiten für $G/Z$, da es 5 bis auf Isomorphie verschiedene Gruppen der Ordnung $p^3$ gibt und davon genau eine zyklisch ist .

  Laut der Arbeit von Hölder *Die Gruppen der Ordnungen $p^3$, $p^2q$, $pqr$, $p^4$* [Höl93], auf die auch schon im Vorwort Bezug genommen wurde, gibt es 15 verschiedene Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung $p^4$.
  Davon sind laut 1.1.1 5 abelsch, da es genau 5 verschiedene Partitionen der 4

gibt. Das bedeutet, dass es 10 bis auf Isomorphie verschiedene nichtabelsche Gruppen der Ordnung $p^4$ gibt.

- In dieser Arbeit wurden die Darstellungen von $G$ über $\mathbb{C}$ untersucht.
  Viele der Aussagen, die dabei verwendet wurden, gelten nur deshalb, weil die Charakteristik 0 von $\mathbb{C}$ nicht die Gruppenordnung $|G|$ teilt.

  Betrachtet man nun Darstellungen von $G$ über einem Körper $F$ der Primzahlcharakteristik $p$, so kann man a priori nicht so viele Aussagen über die irreduziblen Darstellungen von $G$ über $F$ treffen.

  Laut dem Artikel *Darstellungstheorie der endlichen Gruppen* von Wilhelm Specht [Spe40] *trifft man indes vollständig andere Verhältnisse* in diesem Falle an.

  Dies macht die Untersuchung der Darstellungen von $G$ über einem solchen Körper $F$ zu einer sehr interessanten Aufgabe.

# Literatur


[Höl93] Hölder, Otto: *Die Gruppen der Ordnungen $p^3, pq^2, pqr, p^4$*. In: *Mathematische Annalen* 43 (1893), Nr. 2, S. 301–412

[Lan70] Lang, Serge: *Algebra*. Addison-Wesley, New York, 1970

[Mey76] Meyberg, Kurt: *Algebra, Teil 2*. Carl Hanser, München, 1976

[Mey80] Meyberg, Kurt: *Algebra, Teil 1*. Carl Hanser, Mnchen, 1980

[Sch90] Scholz, Erhard: *Geschichte der Algebra: Eine Einführung*. Bd. 16. BI-Wissenschaftsverlag, 1990

[Ser72] Serre, Jean-Pierre: *Lineare Darstellungen endlicher Gruppen*. Vieweg, Braunschweig, 1972

[Sim96] Simon, Barry: *Representations of Finite and Compact Groups.*. Bd. 10. AMS Bookstore, 1996

[SP08] Schulze-Pillot, Rainer: *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*. Springer DE, 2008

[Spe40] Specht, Wilhelm: Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 182 (1940), S. 242–248

[Suz86] Suzuki, Michio: *Group theory II*. Bd. 248. Springer-Verlag Berlin, 1986