

Fachbereich 9 - Mathematik

# Arithmetisch definierte Graphen über rationalen Funktionenkörpern

Udo Nonnengardt

*1992 Nonnengardt, Udo*

Fachbereich 9 MATHEMATIK

Nr. 26578-00

Universität des Saarlandes

# Vorwort

Jean-Pierre Serre hat in seinem Buch "Trees" (Springer-Verlag 1980) eine Methode entwickelt, mit der man arithmetische Informationen über Untergruppen von  $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$  erlangen kann. Hierbei läßt man die entsprechende Untergruppe auf dem sogenannten Bruhat-Tits-Baum operieren. Hierdurch werden bestimmte Knoten und Kanten des Baumes identifiziert, wodurch ein Graph entsteht. Die Homologie dieses Graphen beinhaltet dann arithmetische Information über die betrachtete Untergruppe von  $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ , und zwar entspricht der  $\mathbb{Z}$ -Rang der Homologie dem Rang der Kommutatorfaktorgruppe.

Diese Methode wenden wir auf Hecke-Kongruenzuntergruppen an. Dabei beobachtet man, daß die Struktur der Quotientengraphen gewissen Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Es treten nur Knoten mit 1,2,3 oder  $q+1$  Kanten auf. Dies werden wir in zwei Struktursätzen beweisen. Ferner werden wir die auftretenden Knoten und Kanten parametrisieren und Formeln für ihre Anzahl herleiten. Dann haben wir die Quotientengraphen gut im Griff und können leicht eine Formel für den  $\mathbb{Z}$ -Rang der Homologie auf den Quotientengraphen herleiten. Wir geben sogar einen Algorithmus an, wie man sich zu einer konkret gegebenen Hecke-Kongruenzuntergruppe eine Basis der Homologie berechnen kann.

An dieser Stelle möchte ich mich noch ganz herzlich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere bei Herrn Prof.Dr E.-U. Gekeler für das interessante Thema und die gute Betreuung. Er hat mir durch das Beantworten vieler Fragen und das Beseitigen mancher Mißverständnisse viel geholfen. Ich möchte auch Herrn Dipl.Math. A. Schweizer für manch klärendes Gespräch danken. Abschließender Dank gehört meiner Frau, die mir das Anfertigen sämtlicher Skizzen abgenommen hat.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	
1.1 Graphentheoretische Grundlagen	1
1.2 Algebraische Grundlagen	6
<b>2 Der Baum <math>\mathcal{T}</math> und der Graph <math>\Gamma_u \setminus \mathcal{T}</math></b>	
2.1 Der Baum von $SL_2$ über einem lokalen Körper	14
2.2 Die Operation von $GL_2(k[T])$ auf einem geeigneten Baum	21
2.3 Die Berechnung von $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$	23
2.4 Motivation	25
<b>3 Der Graph <math>\Gamma_{0(n)} \setminus \mathcal{T}</math> für primäres <math>n</math></b>	
3.1 Grundlegende Überlegungen	31
<i>Hauptsatz 1</i>	39
3.2 Kanten der Stufe $\Lambda_0 \Lambda_1$	40
3.3 Knoten der Stufe $\Lambda_k$ ( $k \geq 1$ )	41
3.4 Spitzen	44
3.5 Zwischenergebnis	45
3.6 Knoten der Stufe $\Lambda_0$	45
3.7 Isolani-Knoten	50
<i>Hauptsatz 2</i>	52
<b>4 Der Graph <math>\Gamma_{0(n)} \setminus \mathcal{T}</math> für zusammengesetztes <math>n</math></b>	
4.1 Grundlegende Überlegungen	53
4.2 Kanten der Stufe $\Lambda_0 \Lambda_1$	56
4.3 Knoten der Stufe $\Lambda_k$ ( $k \geq 1$ )	59
4.4 Spitzen	62
4.5 Knoten der Stufe $\Lambda_0$	62
<i>Hauptsatz 3</i>	63
4.6 Anzahl der Knoten je Knotentyp	64
<b>5 Homologie der Graphen <math>\Gamma_{0(n)} \setminus \mathcal{T}</math></b>	
5.1 Dimension $g(n)$ der Homologie der Graphen $\Gamma_{0(n)} \setminus \mathcal{T}$	67
<i>Hauptsatz 4</i>	68
5.2 Basisbestimmungsalgorithmus für $H_1(\Gamma_{0(n)} \setminus \mathcal{T}, \mathbf{Z})$	69
5.3 Dimension $g_{\text{neu}}(n)$ des Raumes der Neufornen	75
5.4 $g_{\text{gew}}(n)$ im quadratfreien Fall	77
<b>6 Liste der Graphen <math>\Gamma_{0(n)} \setminus \mathcal{T}</math></b>	
6.1 $\text{Grad}(n) < 3$	80
6.2 $\text{Grad}(n) = 3$	82
6.3 $\text{Grad}(n) = 4$	84
6.4 $\text{Grad}(n) = 5$	95
<b>7 Anhang</b>	
Programm und einige explizite Beispiele	112

# NOTATIONEN

$\#(M)$	Kardinalität der Menge $M$		
$ M $	Kardinalität der Menge $M$		
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1,2,3,\dots\}$		
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}$ mit der Null $\{0,1,2,3,\dots\}$		
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen		
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen		
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen		
$\mathbb{F}_q$	Körper mit $q$ Elementen		
$e, e_1, \dots$	Kanten eines Graphen	Def. 1.1	S. 1
$E(X)$	Kantenmenge des Graphen $X$	Def. 1.1	S. 1
$v, v_1, \dots$	Knoten eines Graphen	Def. 1.1	S. 1
$V(X)$	Knotenmenge des Graphen $X$	Def. 1.1	S. 1
$G'$	Kommutatorgruppe von $G$	Def. 1.25	S. 6
$G^{ab}$	Faktorkommutatorgruppe von $G$	Def. 1.25	S. 6
$Gx$	Bahn von $x$ unter $G$	Def. 1.27	S. 6
$G_x$	Fixgruppe von $x$ in $G$	Def. 1.28	S. 6
$Z(G)$	Zentrum der Gruppe $G$	Def. 1.24	S. 6
$v$	diskrete Bewertung	Def. 1.30	S. 6
$O_{k,v}$	Bewertungsring des Körpers $k$ bezüglich $v$	Def. 1.31	S. 6
$\pi$	Uniformisierende	Def. 1.32	S. 6
$L, L', \dots$	Gitter	Def. 2.1	S.14
$\Lambda, \Lambda'$	Gitterklassen	Def. 2.2	S.14
$d(\Lambda, \Lambda')$	Abstand der Gitterklasse $\Lambda$ von der Gitterklasse $\Lambda'$	Def. 2.4	S.15
$T$	Bruhat-Tits-Baum	Def. 2.6	S.15
$G_L, G_\Lambda, G_{\Lambda\Lambda'}$	Stabilisatoren	Def. 2.16	S.19
$\Gamma$	Fundamentalebene von $T$ modulo $\Gamma$	Satz 2.26	S.22
$[v]_k$	Klasse von $v$ modulo $G_k$	Def. 3.9	S.38
$[v]_{k,k+1}$	Klasse von $v$ modulo $G_k \cap G_{k+1}$	Def. 3.9	S.38
$V_k(n)$	Menge der Knoten der Stufe $\Lambda_k$ von $\Gamma_0(n) \backslash T$	Def. 3.9	S.38
$E_{k,k+1}(n)$	Menge der Kanten der Stufe $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$ von $\Gamma_0(n) \backslash T$	Def. 3.9	S.38

# 1 Grundlagen

## 1.1 Graphentheoretische Grundlagen

### Definition 1.1 (Graph / endlicher Graph)

Ein Graph  $X$  besteht aus zwei Mengen  $V = V(X) = \{v_1, v_2, \dots\}$  und  $E = E(X) = \{e_1, \bar{e}_1, e_2, \bar{e}_2, \dots\}$  und zwei Abbildungen:

$$E \rightarrow V \times V \quad e \mapsto (o(e), t(e))$$

$$E \rightarrow E \quad e \mapsto \bar{e}$$

die folgenden Bedingungen genügen:

Für alle  $e \in E$  gilt:  $\bar{\bar{e}} = e$ ,  $\bar{e} \neq e$ ,  $o(e) = t(\bar{e})$

Ein Graph heißt endlich, wenn  $E$  und  $V$  endliche Mengen sind.

Folgende Bezeichnungen führe ich ein:

$v$  ist Knoten von  $X$        $v \in V(X)$

$e$  ist Kante von  $X$        $e \in E(X)$

die zu  $e$  inverse Kante       $\bar{e}$

Startknoten von  $e$        $o(e) = t(\bar{e})$

Zielknoten von  $e$        $t(e) = o(\bar{e})$

Enden von  $e$        $o(e)$  und  $t(e)$

$v$  und  $w$  sind benachbart       $v$  und  $w$  sind Enden einer Kante

### Definition 1.2 (Untergraph)

Ein Untergraph  $X'$  von  $X$  ist ein Graph, für den folgende Eigenschaften gelten:

$$(1) \quad V(X') \subset V(X); \quad E(X') \subset E(X)$$

$$(2) \quad \forall e \in E(X') : t(e) \in V(X'); \quad o(e) \in V(X')$$

### Definition 1.3 (Orientierung)

Eine Orientierung eines Graphen  $X$  ist eine Teilmenge  $E_+ \subset E(X)$ , so daß  $E(X) = E_+ \cup \bar{E}_+$ . Diese existiert immer. Ein Graph mit Orientierung heißt gerichteter oder orientierter Graph. Wir bezeichnen  $\bar{E}_+$  auch als  $E_-$ .

### Definition 1.4 (Morphismus)

Ein Morphismus  $\phi : X \rightarrow X'$  von Graphen besteht aus zwei Abbildungen  $\varphi_V : V(X) \rightarrow V(X')$ ,  $\varphi_E : E(X) \rightarrow E(X')$  mit den Eigenschaften:

$\forall e \in E(X)$  gilt:

$$(1) \quad o(\varphi_E(e)) = \varphi_V(o(e))$$

$$(2) \quad t(\varphi_E(e)) = \varphi_V(t(e))$$

$$(3) \quad \varphi_E(\bar{e}) = \overline{\varphi_E(e)}.$$

Wenn die Abbildungen  $\varphi_V$  und  $\varphi_E$  zusätzlich bijektiv sind, nennt man  $\phi$  Isomorphismus von Graphen.

**Definition 1.5 (Morphismus von orientierten Graphen)**

Unter einem Morphismus  $\phi : X \rightarrow X'$  von orientierten Graphen versteht man einen Morphismus nach Definition 1.4, wobei  $X$  und  $X'$  orientierte Graphen sind und zusätzlich gilt:

$$(4) \quad \varphi_E(E_+(X)) \subset E_+(X') \text{ oder } \varphi_E(E_+(X)) \subset E_-(X')$$

**Definition 1.6 (Darstellung eines Graphen)**

Ein Knoten  $v$  wird dargestellt durch einen Punkt  $\bigcirc$ ,  
 eine Kante  $e$  durch einen Pfeil von  $o(e)$  nach  $t(e)$   $\longrightarrow$   
 und  $\{e, \bar{e}\}$  durch eine Verbindungslinie  $\text{---}$ .

**Definition 1.7 (Pfad<sub>n</sub>, Kreis<sub>n</sub>, Pfad<sub>∞</sub>, Pfad<sub>-∞,∞</sub>)**

a) Pfad<sub>n</sub> sei folgender Graph

$$V(\text{Pfad}_n) = \{v_0, \dots, v_n\},$$

$$E_+(\text{Pfad}_n) = \{e_1, \dots, e_n\},$$

$$o(e_i) = v_{i-1}, \text{ und } t(e_i) = v_i.$$

$$\text{Darstellung: } \bigcirc^{v_0} \xrightarrow{e_1} \bigcirc^{v_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_n} \bigcirc^{v_n}.$$

b) Kreis<sub>n</sub> ist der Graph

$$V(\text{Kreis}_n) = \{v_0, \dots, v_n\},$$

$$E_+(\text{Kreis}_n) = \{e_0, e_1, \dots, e_n\},$$

$$o(e_i) = v_{i-1}, \text{ und } t(e_i) = v_i, \text{ mit } o(e_0) = v_n.$$

$$\text{Darstellung: } \bigcirc^{v_n} \xrightarrow{e_0} \bigcirc^{v_0} \xrightarrow{e_1} \bigcirc^{v_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_n} \bigcirc^{v_n}.$$

c) Pfad<sub>∞</sub> habe folgende Gestalt

$$V(\text{Pfad}_\infty) = \{v_0, v_1, \dots\}$$

$$E_+(\text{Pfad}_\infty) = \{e_1, e_2, \dots\} \text{ mit } o(e_i) = v_{i-1}, t(e_i) = v_i.$$

$$\text{Darstellung: } \bigcirc^{v_0} \xrightarrow{e_1} \bigcirc^{v_1} \xrightarrow{e_2} \dots$$

c) Pfad<sub>-∞,∞</sub> wird definiert als

$$V(\text{Pfad}_{-\infty, \infty}) = \{v_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

$$E_+(\text{Pfad}_{-\infty, \infty}) = \{e_i \mid o(e_i) = v_i, t(e_i) = v_{i+1}; i \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{Darstellung: } \dots \xrightarrow{e_{-1}} \bigcirc^{v_{-1}} \xrightarrow{e_0} \bigcirc^{v_0} \xrightarrow{e_1} \bigcirc^{v_1} \xrightarrow{e_2} \dots$$

**Definition 1.8 (Weg / geschlossener Weg / reduzierter Weg /  
Reduktion / Komposition von Wegen)**

- a) Ein Weg der Länge  $n$  ( $n \geq 0$ ) in  $X$  ist ein Morphismus  $\Phi$  von  $\text{Pfad}_n$  nach  $X$ . Der Weg geht von  $v$  nach  $w$ , wenn  $\varphi_V(v_0) = v$  und  $\varphi_V(v_n) = w$  ist. Ein Weg wird auch durch die Kanten-Folge  $(\varphi_E(e_1), \dots, \varphi_E(e_n))$  beschrieben.
- b) Ein geschlossener Weg der Länge  $n$  ( $n \geq 0$ ) in  $X$  ist ein Morphismus von  $\text{Kreis}_n$  nach  $X$ .
- c) Einen geschlossenen Weg der Form  $(e, \bar{e})$  nenne ich eine Sackgasse. Wenn ein Weg der Länge  $n$  von  $v$  nach  $w$  eine Sackgasse enthält, so gibt es auch einen Weg der Länge  $n-2$  von  $v$  nach  $w$ . Ein Weg ohne Sackgassen heißt **reduzierter Weg**. Aus jedem Weg  $\phi$  erhält man durch Weglassen der Sackgassen einen wohlbestimmten reduzierten Weg  $\phi^{\text{red}}$ , die **Reduktion** von  $\phi$ .
- d) Ist  $\phi$  ein Weg der Länge  $n$  von  $u$  nach  $v$  und  $\psi$  ein Weg der Länge  $m$  von  $v$  nach  $w$ , so verstehen wir unter  $\psi * \phi$  den durch  $\phi$  und  $\psi$  bestimmten Weg der Länge  $m+n$  von  $u$  nach  $w$ .

**Definition 1.9 (Fundamentalgruppe)**

Sei  $v \in V(X)$  Knoten des Graphen  $X$ . Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(v, X)$  bezüglich des Basis-knotens  $v$  ist die Menge aller reduzierten geschlossenen Wege von  $v$  nach  $v$ . Das Produkt zweier Elemente  $\phi$  und  $\psi$  ist durch  $\phi \cdot \psi = (\phi * \psi)^{\text{red}}$  gegeben. So ergibt sich eine (nichtkommutative) Gruppenstruktur.

**Definition 1.10 (Halbgerade / Gerade / Ende eines Graphen)**

- a) Eine Halbgerade in  $X$  ist ein Untergraph von  $X$ , der isomorph zu  $\text{Pfad}_\infty$  ist.
- b) Eine Gerade in  $X$  ist ein Untergraph von  $X$ , der isomorph zu  $\text{Pfad}_{-\infty, \infty}$  ist.
- c) Zwei Halbgeraden sind äquivalent, wenn sie sich nur in endlich vielen Knoten und Kanten voneinander unterscheiden. Ein Ende eines Graphen  $X$  ist eine Äquivalenzklasse von Halbgeraden.

**Definition 1.11 (Zusammenhangskomponente)**

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten durch mindestens einen Weg verbunden sind. Ein maximaler (bzgl. Inklusion) zusammenhängender Untergraph von  $X$  heißt eine **Zusammenhangskomponente** von  $X$ .

**Definition 1.12 (Zykel)**

Ein Zykel ist eine Äquivalenzklasse reduzierter geschlossener Wege bzgl. der Äquivalenzrelation der zyklischen Vertauschung ( $v_i \mapsto v_{i+1}; e_i \mapsto e_{i+1}$ ). Ein Graph ohne Zykel der Länge  $n > 0$  heißt azyklisch. Ein Zykel der Länge 1 heißt Schleife.

**Definition 1.13 (kombinatorisch)**

Ein Graph  $X$  heißt kombinatorisch, wenn  $X$  keine reduzierten geschlossenen Wege der Länge  $\leq 2$  besitzt.

**Definition 1.14 (bipartit)**

Ein Graph  $X$  heißt bipartit, wenn für die Knotenmenge eine Zerlegung  $V(X) = V_1 \dot{\cup} V_2$  existiert, so daß für alle  $e \in E(X)$  gilt:

$$o(e) \in V_1 \Rightarrow t(e) \in V_2, \text{ bzw. } o(e) \in V_2 \Rightarrow t(e) \in V_1 .$$

Ein bipartiter Graph besitzt eine natürliche Orientierung durch  $E_+(X) = \{e \in E(X) \mid t(e) \in V_1\}$ .

**Definition 1.15 (Baum/maximaler Unterbaum)**

Ein zusammenhängender azyklischer Graph heißt Baum. Ein maximaler Unterbaum eines zusammenhängenden Graphen  $X$  ist ein maximaler (bzgl. Inklusion) zusammenhängender azyklischer Untergraph von  $X$ .

**Anmerkungen:**

Zu einer Zusammenhangskomponente eines Graphen gibt es im allgemeinen verschiedene maximale Unterbäume. Ein maximaler Unterbaum  $T$  eines zusammenhängenden Graphen  $X$  enthält alle Knoten von  $X$ .

In jedem Baum  $T$  gibt es zwischen zwei Knoten  $v$  und  $w$  genau einen reduzierten Weg von  $v$  nach  $w$ .

**Definition 1.16 (Zykelbasis)**

Sei  $Y = X \setminus \{e_i, \bar{e}_i \mid i \in I\}$  ein maximaler Unterbaum von  $X$ ,  $I$  eine Indexmenge. Zu jedem Paar  $\{e_i, \bar{e}_i\}$  sei eine Kante  $e_i$  ausgewählt. Dann gibt es einen eindeutig festgelegten Zykel  $c_i$  in  $Y \cup \{e_i, \bar{e}_i\}$ , der  $e_i$  enthält. Die Menge  $C$  der Zykel  $c_i$  nennen wir eine Zykelbasis von  $X$ .

**Anmerkung:**

Betrachtet man die Zykel als Vektoren in dem Vektorraum der  $\mathbb{R}$ -wertigen alternierenden Funktionen auf den orientierten Kanten des Graphen  $X$ , so entspricht eine Zykelbasis einer Basis des von den Zykeln erzeugten Untervektorraumes. In diesem Zusammenhang ist eine Zykelbasis also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Entsprechendes gilt für den  $\mathbb{Z}$ -Modul der  $\mathbb{Z}$ -wertigen Funktionen.

**Definition 1.17 (Abstand)**

Seien  $v, w$  Knoten des Graphen  $X$ . Unter dem Abstand von  $v$  und  $w$  (geschrieben:  $dis(v, w)$ ) versteht man die Länge des kürzesten Weg von  $v$  nach  $w$  (falls ein solcher existiert).



**Definition 1.18 (Durchmesser)**

Sei  $X$  ein endlicher Baum. Der größte Abstand von Knoten, der in  $X$  auftritt, heißt Durchmesser von  $X$  (geschrieben:  $\text{diam}(X)$ ), also:

$$\text{diam}(X) = \max_{v,w \in V(X)} \text{dis}(v,w).$$

**Satz 1.19**

Sei  $X$  ein Baum mit Durchmesser  $\text{diam}(X) = n < \infty$ . Dann gilt:

- (1) Die Menge  $t(X)$  der Endknoten des Baumes ist nichtleer.
- (2) Sei  $X'$  der Graph, der aus  $X$  durch Weglassen von  $t(X)$  und der zugehörigen Kanten entsteht. Für  $n \geq 2$  hat  $X'$  den Durchmesser  $n-2$ .
- (3) Für  $n=0$  ist  $X$  isomorph zu Pfad<sub>0</sub> (Darstellung:  $\circ$  ).  
Für  $n=1$  ist  $X$  isomorph zu Pfad<sub>1</sub> (Darstellung:  $\circ - \circ$  ).

BEWEIS: siehe bei [Se, Chapter 1, 2.2 Prop.10].

**Definition 1.20 (Homologie)**

Die  $\mathbb{Z}$ -wertige Homologie  $H_1(X, \mathbb{Z})$  eines Graphen  $X$  ist der  $\mathbb{Z}$ -Modul der Flüsse von  $X$ . Ein Fluß von  $X$  ist eine Abbildung  $f: E(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit den Eigenschaften:

- (1)  $f$  hat als Funktion auf den Kanten von  $X$  endlichen Träger;
- (2)  $\forall e \in E(X)$  ist  $f(\bar{e}) = -f(e)$ ;
- (3)  $\forall v \in V(X)$  ist  $\sum_{t(e)=v} f(e) = 0$ .

Entsprechend definiert man die  $\mathbb{R}$ -wertige Homologie  $H_1(X, \mathbb{R})$  etc.

**Satz 1.21**

Zwischen der Homologie eines Graphen und der Fundamentalgruppe des Graphen zu einem Knoten  $v$  besteht folgender Zusammenhang:

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(v, X)^{ab} \quad (\text{vgl. 1.25 - Definition von } (\ )^{ab}).$$

BEWEIS: siehe bei [Se, Chapter 1, 5.1 ff].

**Satz 1.22 (Euler-Formel)**

Sei  $X$  ein endlicher Graph,  $c_0$  die Anzahl der Knoten und  $c_1$  die Anzahl der ungerichteten Kanten von  $X$ .  $n$  bezeichne die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und  $h_1$  den  $\mathbb{Z}$ -Rang von  $H_1(X, \mathbb{Z})$ . Dann gilt  $h_1 = c_1 - c_0 + n$ .

Der klassische Beweis geht durch Induktion über die Anzahl der Kanten, wobei unterschieden werden muß, ob durch eine zugefügte Kante ein neuer Zykel entsteht oder nicht.

**Korollar 1.23 (Euler-Formel für Bäume)**

Sei  $X$  ein endlicher Baum,  $c_0$  die Anzahl der Knoten und  $c_1$  die Anzahl der ungerichteten Kanten von  $X$ . Dann gilt  $c_1 = c_0 - 1$ .

BEWEIS: Ein Baum hat keine Zyklen und ist zusammenhängend.  $\square$

## 1.2 Algebraische Grundlagen

1. Grundlagen aus der Gruppentheorie:**Definition 1.24 (Zentrum)**

Sei  $G$  Gruppe.  $Z(G) := \{g \in G \mid xg = gx \ \forall x \in G\}$

**Definition 1.25 (Kommutatorgruppe / Faktorkommutatorgruppe)**

Sei  $G$  Gruppe.

$$G' := \langle \{[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\} \rangle$$

Dann ist  $G'$  normale Untergruppe von  $G$  und die Faktorkommutatorgruppe

$$G^{ab} := G/G' \text{ ist abelsch.}$$

**Definition 1.26 (Operation)**

Sei  $G$  Gruppe und  $M$  Menge. Man sagt  $G$  operiert (von links) auf  $M$ , wenn eine Abbildung

$$G \times M \rightarrow M$$

$$(g, x) \mapsto gx \text{ gegeben ist,}$$

$$\text{für die gilt: (1) } 1 \cdot x = x$$

$$(2) (gh)x = g(hx)$$

**Definition 1.27 (Bahn/Orbit)**

Sei  $G$  eine Gruppe, die auf der Menge  $M$  operiert, und sei  $x \in M$ .

$Gx := \{gx \mid g \in G\}$  heißt die Bahn (oder der Orbit) von  $x$ .

**Definition 1.28 (Fixgruppe/Stabilisator)**

Sei  $G$  eine Gruppe, die auf der Menge  $M$  operiert, und sei  $x \in M$ .

$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$  heißt die Fixgruppe (oder der Stabilisator) von  $x$ .

**Satz 1.29**

Sei  $G$  eine Gruppe, die auf der Menge  $M$  operiert, und sei  $x \in M$ . Die Abbildung  $G \rightarrow M$ ;  $g \mapsto gx$  induziert eine Bijektion zwischen den Mengen  $G/G_x$  und  $Gx$ .

2. Grundlagen aus der Bewertungstheorie**Definition 1.30 (diskrete Bewertung)**

Eine diskrete Bewertung  $v$  eines Körpers  $k$  ist ein surjektiver Homomorphismus  $v: k^* \rightarrow \mathbb{Z}$ , für den gilt:

$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)) \text{ für alle } x, y \in k \text{ mit } x, y, x+y \neq 0.$$

Man setzt außerdem  $v(0) = +\infty$ .

**Definition 1.31 (Bewertungsring)**

$O_{k,v} := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\}$  ist der Bewertungsring von  $k$  bezüglich der Bewertung  $v$ . Er heißt auch der Ring der  $v$ -ganzen Zahlen von  $k$ .

**Definition 1.32 (Uniformisierende)**

Es existiert ein Element  $\pi \in k^*$  mit  $v(\pi) = 1$ . Ein solches Element heißt *Uniformisierende*. Jedes Element  $x \neq 0$  von  $k$  läßt sich darstellen als  $x = u\pi^r$  mit  $r = v(x)$  und einer Einheit  $u$  von  $O_{k,v}$ .

**Definition 1.33 (Restkörper)**

Der Körper  $O_{k,v}/\pi O_{k,v}$  heißt der *Restkörper* von  $k$  bezüglich der Bewertung  $v$ . Falls er endlich ist, bezeichnet man seine Kardinalität mit  $q$ .

3. Die Gruppe  $GL_2(k)$  und ihre Untergruppen**Definition 1.34 ( $GL_2(k)$ )**

Sei  $k$  kommutativer Ring.

$$GL_2(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in k \text{ und } ad - bc \in k^* \right\}$$

Man rechnet leicht nach, daß  $GL_2(k)$  bzgl. Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Für das Zentrum von  $GL_2(k)$  ergibt sich:

**Satz 1.35 ( $Z(GL_2(k))$ )**

Sei  $k$  kommutativer Ring.

$$Z(GL_2(k)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in k^* \right\}$$

BEWEIS: Die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

führen auf  $b = c$ ,  $a = d$ ,  $a + b = d$ , d.h.  $b = c = 0$ ,  $a = d$ .

Umgekehrt liegt  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  in  $Z(GL_2(k))$ . □

Eine häufig vorkommende Faktorgruppe von  $GL_2(k)$  ist:

**Definition 1.36 ( $PGL_2(k)$ )**

Sei  $k$  kommutativer Ring.

$PGL_2(k) := GL_2(k)/Z(GL_2(k))$  heißt *projektive lineare Gruppe*.

**Definition 1.37 (projektive Gerade  $\mathcal{P}^1(k)$ )**

Sei  $k$  kommutativer Ring. Wir betrachten die Menge

$$M = \{(x, y) \in k^2 \mid kx + ky = k\}$$

und definieren die Äquivalenzrelation

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1.$$

Die Menge der Restklassen der Menge  $M$  bezüglich dieser Äquivalenzrelation bezeichnet man als die projektive Gerade über dem kommutativen Ring  $k$  und die Restklasse von  $(x, y)$  mit  $(x : y)$ .

$$\mathcal{P}^1(k) := \{(x : y) \mid kx + ky = k\}$$

Die Restklasse  $(1 : 0)$  wird auch mit  $\infty$  bezeichnet. Die Restklasse  $(0 : 1)$  bzw.  $(1 : 1)$  heißt auch kurz die 0 bzw. die 1.

**Bemerkung 1.38**

$GL_2(k)$  operiert (vgl. Def. 1.26) auf  $\mathcal{P}^1(k)$  durch:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x : y) = (ax + by : cx + dy)$$

Die Bahn und der Stabilisator von  $\infty$  sehen dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} G_\infty &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (1 : 0) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k) \right\} \\ &= \{(a : c) \mid a, c \in k; a \text{ und } c \text{ teilerfremd}\} = \mathcal{P}^1(k) \\ &\quad (\text{d.h. } G \text{ operiert transitiv auf } \mathcal{P}^1(k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_\infty &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (1 : 0) = (1 : 0) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(k) \right\} \end{aligned}$$

Der Stabilisator von  $\infty$  hat noch einen besonderen Namen:

**Definition 1.39 (Borel-Gruppe)**

Sei  $k$  kommutativer Ring.

$$B(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in k^* \right\} = G_\infty \text{ ist die Standard-Borel-Gruppe.}$$

Eine Borel-Gruppe ist eine zu  $B(k)$  konjugierte Untergruppe von  $GL_2(k)$ .

**Bemerkung 1.40 ( $GL_2(k)/B(k) \cong \mathcal{P}^1(k)$ )**

Nach Satz 1.29 existiert eine Bijektion zwischen den Mengen  $GL_2(k)/G_\infty$  und  $G_\infty$ . Also gilt  $GL_2(k)/B(k) \cong \mathcal{P}^1(k)$ .

Die Bijektion ist durch  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a : c)$  gegeben.

Die Borel-Gruppen haben weitere wichtige Eigenschaften:

**Satz 1.41**

$B(k)$  ist eine auflösbare Gruppe, und es gilt:

$B(k) \triangleright U(k) \triangleright \{1\}$  mit abelschen Quotienten,

wobei:  $U(k) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid u \in k \right\}$ .

BEWEIS: Wir zeigen, daß:

$$1) B(k)' \subset U(k)$$

$$2) U(k)' = \{1\}$$

zu 1) Betrachte:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also  $U(k) \subset B(k)'$ .

zu 2) Betrachte:

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also  $U(k)' = \{1\}$ . □

**Satz 1.42**

Es gilt  $B(k)/U(k) \cong T(k)$

mit:  $T(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in k^* \right\}$ .

BEWEIS: Ist klar wegen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
□

Anmerkung: Es gilt nicht:  $B(k) = T(k) \times U(k)$

( da  $T(k) \times U(k)$  abelsch ! )

4. Zerlegungen von  $GL_2(k)$ **Satz 1.43 (Bruhat-Zerlegung)**

Sei  $k$  ein Körper. Jedes Element  $g \in GL_2(k) \setminus B(k)$  hat eine eindeutige Darstellung in der Form  $g = bwu$  mit  $b \in B(k)$ ,  $u \in U(k)$  und

$$w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Es gilt also: } GL_2(k) = B(k) \dot{\cup} B(k)wU(k).$$

BEWEIS: Sei  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k)$ . Ich unterscheide zwei Fälle:

1)  $c = 0$ . Dann ist  $g \in B(k)$ .

2)  $c \neq 0$ . Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta u + \alpha \\ \delta & \delta u \end{pmatrix}$$

$$\text{ist äquivalent zu } \delta = c \quad u = \frac{d}{c} \quad \beta = a \quad \alpha = \frac{bc-ad}{c},$$

was die Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung zeigt.  $\square$

**Satz 1.44 (Iwahori-Zerlegung)**

Sei  $k$  vollständig diskret bewerteter Körper.

$O_k := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\}$  der Ring  $v$ -ganzer Zahlen von  $k$ ;  $\mathcal{K} := GL_2(O_k)$

Dann gilt:  $GL_2(k) = \mathcal{K} \cdot B(k) = B(k) \cdot \mathcal{K}$ .

BEWEIS: Sei  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k)$ . Ich unterscheide drei Fälle:

$$1) \ c = 0. \text{ Dann ist } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{\in B(k)}.$$

$$2) \ c \neq 0 \text{ und } v(a) \leq v(c). \text{ Dann gilt } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}}_{\in B(k)}.$$

$$3) \ c \neq 0 \text{ und } v(a) > v(c). \text{ Hier ist } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a}{c} & \frac{a-c}{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} c & \frac{dc+bc-ad}{c} \\ 0 & \frac{ad-bc}{c} \end{pmatrix}}_{\in B(k)}.$$

Also gilt  $GL_2(k) = \mathcal{K} \cdot B(k)$ , d.h.  $\forall x \in GL_2(k) \exists y \in \mathcal{K} \ b \in B(k): x = y \cdot b$ .  
Durch Inversenbildung erhält man  $x^{-1} = b^{-1}y^{-1}$ , d.h.  $GL_2(k) = B(k) \cdot \mathcal{K}$

$\square$

**Satz 1.45** ( $PGL_2(k)$  operiert transitiv auf  $\mathcal{P}^1(k)$ )

Sei  $k$  Körper.  $PGL_2(k)$  operiert scharf 3-fach transitiv auf  $\mathcal{P}^1(k)$ , d.h.:

Seien  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  vorgegebene Tripel von verschiedenen Punkten aus  $\mathcal{P}^1(k)$  (also:  $u \neq v; v \neq w; u \neq w$  und  $x \neq y; y \neq z; x \neq z$ ). Dann existiert genau ein  $g \in PGL_2(k)$  mit:  $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} gx \\ gy \\ gz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ .

**BEWEIS:** Man zeigt:  $\exists g \in GL_2(k) : g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix}$ . Dieses ist bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.

1.Fall:  $x, y, z \neq \infty$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 : 1) \\ (y_1 : 1) \\ (z_1 : 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + b = 0 \\ ay_1 + b = cy_1 + d \\ cz_1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g = a \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ \frac{y_1 - x_1}{y_1 - z_1} & -z_1 \frac{y_1 - x_1}{y_1 - z_1} \end{pmatrix} \text{ mit } \det(g) = a^2(x_1 - z_1) \frac{y_1 - x_1}{y_1 - z_1} \neq 0$$

2.Fall:  $x = \infty$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 : 0) \\ (y_1 : 1) \\ (z_1 : 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = cy_1 + d \\ cz_1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g = c \begin{pmatrix} 0 & (y_1 - z_1) \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix} \text{ mit } \det(g) = c^2(z_1 - y_1) \neq 0$$

3.Fall:  $y = \infty$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 : 1) \\ (1 : 0) \\ (z_1 : 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + b = 0 \\ a = c \\ cz_1 + d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g = a \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix} \text{ mit } \det(g) = a^2(x_1 - z_1) \neq 0$$

4.Fall:  $z = \infty$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 : 1) \\ (y_1 : 1) \\ (1 : 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + b = 0 \\ ay_1 + b = d \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g = a \begin{pmatrix} 1 & -x_1 \\ 0 & y_1 - x_1 \end{pmatrix} \text{ mit } \det(g) = a^2(y_1 - x_1) \neq 0$$

□

5. Maß auf  $\mathcal{K}$ 

Sei:

 $k$  vollständig diskret bewerteter Körper, $O_k := \{x \in k \mid v(x) \geq 0\}$  der Ring der  $v$ -ganzen Zahlen von  $k$ , $\mathcal{K} := GL_2(O_k)$ . $O_k$  habe endlichen Restklassenkörper mit Kardinalität  $q$ .**Satz 1.46 (Haar-Maß)**

Auf einer lokalkompakten topologischen Gruppe  $G$  gibt es bis auf skalare Vielfache ein eindeutig bestimmtes linksinvariantes Borel-Maß  $\mu$ . Dieses heißt das Haar-Maß auf  $G$ .

BEWEIS: siehe z.B. [La, S.351f.]

Ich werde jetzt zeigen, daß  $\mathcal{K}$  kompakt ist und eine offene Umgebungsbasis von  $1_{\mathcal{K}}$  konstruieren, so daß wir durch Festsetzung eines Maßes auf dieser Basis ein Maß auf ganz  $\mathcal{K}$  erhalten.

Setze  $\kappa_0 = \mathcal{K}$ .Für  $n \geq 1$  sei

$$\kappa_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 + a\pi^n & b\pi^n \\ c\pi^n & 1 + d\pi^n \end{pmatrix}, a, b, c, d \in O_k \right\} \quad (\text{Dies ist eine Gruppe}).$$

Definition einer Metrik:

$$\text{Sei } \wp_n := \left\{ \begin{pmatrix} a\pi^n & b\pi^n \\ c\pi^n & d\pi^n \end{pmatrix}, a, b, c, d \in O_k \right\}.$$

$$d_{add}(A, B) = \begin{cases} q^{-n}, n = \max\{n \mid A - B \in \wp_n\} & , A \neq B \\ 0 & , A = B \end{cases}$$

definiert offensichtlich eine Metrik auf  $O_k^{2 \times 2}$ .

Durch

$$d_{mult}(A, B) = \begin{cases} q^{-n}, n = \max\{n \mid AB^{-1} \in \kappa_n\} & , A \neq B \\ 0 & , A = B \end{cases}$$

ist aber auf  $\mathcal{K}$  die gleiche Metrik definiert,denn für  $A, B \in \mathcal{K}$  ist

$$A - B \in \wp_n \Leftrightarrow AB^{-1} - E \in \wp_n \Leftrightarrow AB^{-1} \in \kappa_n.$$

Mit Schubfachsluß sieht man, daß  $O_k$  (folgen-)kompakt ist (Der Restklassenkörper ist endlich!). Daraus folgt dann, daß  $\kappa_n$  ( $n \geq 0$ ) kompakt ist.



Für  $\{\kappa_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  gilt:

- (1) Die  $\kappa_n$  sind offene Umgebungen der  $1_{\mathcal{K}}$ , da  $\mu$  eine diskrete Bewertung ist.
- (2)  $\bigcap_n \kappa_n = \{1_{\mathcal{K}}\}$
- (3) Jede offene Umgebung von  $1_{\mathcal{K}}$  liegt in einer der  $\kappa_n$ .

$\{\kappa_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist also eine offene Umgebungsbasis der  $1_{\mathcal{K}}$ .

Somit sind alle Voraussetzungen für obigen Satz erfüllt.

Deshalb setzen wir einfach  $\mu(\mathcal{K}) := 1$  fest. Hierdurch wird ein Haar-Maß auf  $\mathcal{K}$  eindeutig festgelegt.

#### Lemma 1.47

Es gilt:

$\mathcal{K}/\kappa_1 \cong GL_2(\mathbb{F}_q)$  und folglich  $[\mathcal{K} : \kappa_1] = (q-1)^2(q+1)q$ ,  
sowie  $\kappa_n/\kappa_{n+1} \cong (\mathbb{F}_q)^4$ , woraus  $[\kappa_n : \kappa_{n+1}] = q^4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  folgt.

BEWEIS: Man rechnet leicht nach, daß

$$\varphi_0 : \mathcal{K} \rightarrow GL_2(\mathbb{F}_q), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \bmod \pi & b \bmod \pi \\ c \bmod \pi & d \bmod \pi \end{pmatrix}$$

und für  $n \geq 1$

$$\varphi_n : \kappa_n \rightarrow (\mathbb{F}_q)^4, \quad \begin{pmatrix} 1 + a\pi^n & b\pi^n \\ c\pi^n & 1 + d\pi^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \bmod \pi & b \bmod \pi \\ c \bmod \pi & d \bmod \pi \end{pmatrix}$$

surjektive Homomorphismen sind mit Kern( $\varphi_n$ ) =  $\kappa_{n+1}$  ( $n \geq 0$ ).

Nach dem Homomorphiesatz gilt dann:

$$\mathcal{K}/\kappa_1 \cong GL_2(\mathbb{F}_q) \text{ und } [\mathcal{K} : \kappa_1] = |GL_2(\mathbb{F}_q)| = (q-1)^2(q+1)q$$

$$\kappa_n/\kappa_{n+1} \cong (\mathbb{F}_q)^4 \text{ und } [\kappa_n : \kappa_{n+1}] = |(\mathbb{F}_q)^4| = q^4 \quad (n \geq 1) \quad \square$$

#### Korollar 1.48

Da alle Nebenklassen gleiches Maß haben, und  $\mu(\mathcal{K}) := 1$  festgelegt ist, gilt somit:

$$\mu(\kappa_1) = \frac{1}{(q-1)^2(q+1)q} \quad \text{und}$$

$$\mu(\kappa_n) = \mu(\kappa_1) \cdot \frac{1}{q^{4(n-1)}} \quad (n \geq 1) .$$

## 2 Der Baum $\mathcal{T}$ und der Graph $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$

Große Teile der Abschnitte 2.1 bis 2.3 stammen aus dem Kapitel II des Buches "Trees" von Jean-Pierre Serre. Ich habe auch die dortigen Bezeichnungen und Definitionen weitgehend übernommen. Die Beweise der entnommenen Sätze habe ich ausgeführt, sofern sie nicht nur rein technischer Natur sind.

### 2.1 Der Baum von $SL_2$ über einem lokalen Körper

#### 1. Notation:

Sei  $K$  ein Körper mit der diskreten Bewertung  $v$  und  $O := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$  der Bewertungsring von  $K$ .

Sei  $\pi$  eine Uniformisierende und  $k := O/\pi O$  der Residuenkörper.

Sei weiter  $V$  ein Vektorraum der Dimension 2 über dem Körper  $K$ .

#### 2. Der Baum $\mathcal{T}$

##### Definition 2.1 (Gitter)

Der  $K$ -Vektorraum  $V$  habe Dimension 2. Ein freier  $O$ -Modul  $L := Om_1 + Om_2$  der Dimension 2, der den  $K$ -Vektorraum  $V$  erzeugt, heißt Gitter von  $V$ .

Bemerkung: Sei  $x \in K^*$ ,  $L$  Gitter von  $V$ . Dann ist auch  $xL$  ein Gitter von  $V$ . Also operiert die Gruppe  $K^*$  auf der Menge der Gitter.

##### Definition 2.2 (Gitterklasse)

Der Orbit eines Gitters unter der Operation von  $K^*$  auf der Menge der Gitter heißt (Gitter-)Klasse. Zwei Gitter, die zur selben Klasse gehören, heißen äquivalent.

##### Satz 2.3 (spezielle Gitter)

Sei  $L$  Gitter. Dann existiert in jeder Gitterklasse  $\Lambda'$  genau ein Gitter  $L'$ , das folgenden äquivalenten Bedingungen genügt:

- (1)  $L' \subset L$  und  $L'$  maximal in  $\Lambda'$  mit dieser Bedingung,
- (2)  $L' \subset L$  und  $L' \not\subset \pi L$ .

BEWEIS: Die Gitter einer Klasse sind bzgl. Inklusion geordnet und unterscheiden sich wegen:

$$xL = \langle xe_1, xe_2 \rangle = \langle \pi^{v(x)}e_1, \pi^{v(x)}e_2 \rangle = \pi^{v(x)} \langle e_1, e_2 \rangle$$

nur um  $\pi$ -Potenzen, was die Existenz und Eindeutigkeit eines  $L'$ , das der Bedingung (1) genügt, impliziert. Außerdem folgt aus obiger Aussage, daß (1) und (2) äquivalent sind.  $\square$

**Definition 2.4 (Abstand von Gitterklassen)**

Seien  $L \in \Lambda$  und  $L' \in \Lambda'$  zwei Gitter von  $V$ .  $L$  habe die O-Basis  $\{e_1, e_2\}$  und  $L'$  die Basis  $\{\pi^a e_1, \pi^b e_2\}$ . Dann heißt die ganze Zahl  $|a - b| =: d(\Lambda, \Lambda')$  der Abstand der Gitterklassen  $\Lambda$  und  $\Lambda'$ .

Nach dem Elementarteilersatz findet man O-Basen  $\{e_1, e_2\}$  von  $L$  und  $\{e'_1, e'_2\}$  von  $L'$ , so daß  $e_1 | e'_1$  oder  $e'_1 | e_1$  und  $e_2 | e'_2$  oder  $e'_2 | e_2$  gilt. Dann unterscheiden sich  $e_1$  und  $e'_1$  bzw.  $e_2$  und  $e'_2$  nur um  $\pi$ -Potenzen. Somit gilt  $e'_1 = \pi^a e_1$  und  $e'_2 = \pi^b e_2$ .

Der Abstand zweier Gitterklassen wird durch zwei frei wählbare Gitter definiert. Man muß also noch überprüfen, ob die Definition unabhängig von diesen Wahlen ist:

$\forall x, y \in K^*$  gilt:

$$\begin{aligned} xL &= \langle x e_1, x e_2 \rangle = \langle \pi^{v(x)} e_1, \pi^{v(x)} e_2 \rangle \\ yL' &= \langle y \pi^a e_1, y \pi^b e_2 \rangle = \langle \pi^{v(y)+a} e_1, \pi^{v(y)+b} e_2 \rangle \\ &= \langle \pi^{v(\frac{y}{x})+a} \pi^{v(x)} e_1, \pi^{v(\frac{y}{x})+b} \pi^{v(x)} e_2 \rangle \end{aligned}$$

Der Abstand von  $xL$  und  $yL'$  ist somit:

$$|(v(\frac{y}{x}) + b) - (v(\frac{y}{x}) + a)| = |b - a| \quad \square$$

Es wird hier nicht gezeigt, daß  $d$  eine Metrik ist. Dieser Beweis (vor allem die Dreiecksungleichung) fällt uns später in den Schoß, wenn wir sehen, daß  $T$  ein Baum ist.

*Folgerungen aus der Definition 2.4:*

1.  $d(\Lambda, \Lambda') = 0 \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda'$
2. Für  $\Lambda' \ni L' \subset L \in \Lambda$  gilt:  $d(\Lambda, \Lambda') = 1 \Leftrightarrow L/L' \cong \mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = k$

**Definition 2.5 ( $l(L/L')$ )**

Sei  $L = L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_r = L'$  mit  $L_i \neq L_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, r-1$  eine Kette echt absteigender Gitter von  $V$  (Jordan-Hölder Kette). Für  $i = 0, \dots, r-1$  soll es zwischen  $L_i$  und  $L_{i+1}$  keinen nichttrivialen Zwischenmodul mehr geben. Die wohlbestimmte Länge  $r$  dieser Kette bezeichnen wir mit  $l(L, L')$ .

**Definition 2.6 (Der Graph  $T$ )**

Zwei Gitterklassen  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  heißen benachbart, wenn  $d(\Lambda, \Lambda') = 1$  ist. Die Menge aller Gitterklassen bildet die Knotenmenge  $V(T)$  eines Graphen  $T$ . Als Kantenmenge definiere ich  $E(T) = \{(\Lambda, \Lambda') \mid \Lambda, \Lambda' \in V(T), d(\Lambda, \Lambda') = 1\}$ . Wir setzen  $o((\Lambda, \Lambda')) = \Lambda$  und  $t((\Lambda, \Lambda')) = \Lambda'$  und schreiben  $\Lambda\Lambda'$  für  $(\Lambda, \Lambda')$ .

Offensichtlich ist  $T$  ein kombinatorischer Graph; es gilt aber noch mehr:

**Satz 2.7** Der Graph  $T$  ist ein Baum.

**BEWEIS:**

1. zu zeigen:  $T$  ist zusammenhängend.

Nach Satz 1.13 besitzen zwei Knoten  $\Lambda, \Lambda'$  Repräsentanten  $L$  und  $L'$ , so daß  $L' \subset L$  und  $L' \not\subset \pi L$ . Dann gibt es eine (Jordan-Hölder)-Reihe:

$$L' = L_n \subset L_{n-1} \subset \dots \subset L_0 = L$$

so daß  $l(L_{i-1}/L_i) = 1$ , d.h. es existiert kein nichttrivialer Zwischenmodul zwischen  $L_{i-1}$  und  $L_i$ . Dann gilt aber  $d(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) = 1$ . Also gibt es einen Weg  $(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  der Länge  $n$  von  $\Lambda'$  nach  $\Lambda$ .

Also ist  $T$  zusammenhängend.

2. zu zeigen:  $T$  hat keine Zyklen.

Ich zeige durch vollständige Induktion, daß für jeden Weg  $(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  der Länge  $n$  ohne Sackgasse gilt  $\Lambda_0 \neq \Lambda_n$ ,  $d(\Lambda_0, \Lambda_n) = n$ .

Es genügt,  $L_n \not\subset \pi L_0$  zu zeigen.

Induktionsanfang:

Für  $n=1$  ist die Aussage schon bewiesen, da  $T$  ein kombinatorischer Graph ist.

Induktionsannahme:

Es gelte also  $L_n \not\subset \pi L_0$  und es existiere  $L_n \subset L_{n-1} \subset \dots \subset L_0$   $l(L_{i-1}/L_i) = 1$ , also  $d(\Lambda_0, \Lambda_n) = n$  mit Basen:

$$L_{n-1} = \langle e_1, e_2 \rangle \quad (\Rightarrow \pi L_{n-1} = \langle \pi e_1, \pi e_2 \rangle) \quad \text{und} \quad L_n = \langle \pi e_1, e_2 \rangle.$$

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n+1$

Nach Satz 2.3 existiert ein  $L_{n+1} \subset L_n$  mit  $l(L_n/L_{n+1}) = 1$  und  $L_{n+1} \not\subset \pi L_n$ .

(a) Ich zeige zuerst:  $L_{n+1} \neq \pi L_{n-1}$

Beweis durch Widerspruch:

$$\text{Ann.: } \pi L_{n-1} = L_{n+1}, \Rightarrow L_{n+1} \in \Lambda_{n-1} \Rightarrow \Lambda_{n+1} = \Lambda_{n-1}$$

$\Rightarrow$  Pfad hat Sackgasse - Widerspruch zur Voraussetzung!

(b)  $L_{n+1}$  und  $\pi L_{n-1}$  sind maximal in  $L_n$ , aber verschieden, also gilt  $L_n = L_{n+1} + \pi L_{n-1} \subseteq L_{n+1} + \pi L_0$ .

Daraus folgt  $L_{n+1} \not\subset \pi L_0$ , sonst wäre  $L_n \subset \pi L_0$ , was ein Widerspruch zur Annahme ist.  $\square$

**Bemerkung:**

Wir wissen nun, daß  $T$  ein Baum ist, und  $d(\Lambda, \Lambda')$  dem üblichen Abstand  $dis(\Lambda, \Lambda')$  (vgl. Def. 1.17) von Knoten in einem Graphen entspricht. Somit ist auch klar, daß  $d$  eine Metrik ist.

3.  $GL(V)$  und  $SL(V)$ 

Sei  $V$  Vektorraum der Dimension 2 über dem Körper  $K$ .

**Definition 2.8** ( $GL(V)$ )

$$GL(V) := \text{Aut}(V) = \{\varphi : \varphi \text{ ist } K\text{-Automorphismus von } V\} \cong GL_2(K)$$

Bemerkung:  $GL(V)$  operiert auf  $T$ .

**Definition 2.9** ( $SL(V)$ )

$$SL(V) := \{\varphi \in GL(V) : \det(\varphi) = 1\} \cong SL_2(K)$$

**Definition 2.10** ( $GL^0(V)$ )

$$GL^0(V) := \text{Kern}(v \circ \det) \quad , \text{ mit } v \circ \det : GL(V) \rightarrow K^* \rightarrow \mathbb{Z} \\ \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid v(ad - bc) = 0 \right\}$$

**Definition 2.11** ( $GL^+(V)$ )

$$\text{Sei } \varphi : GL(V) \rightarrow K^* \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \quad g \mapsto (v(\det(g))) \pmod{2} . \\ GL^+(V) := \text{Kern}(\varphi) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid v(ad - bc) \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

Es gilt offensichtlich:

**Lemma 2.12**

$$SL(V) \subset GL^0(V) \subset GL^+(V) \subset GL(V)$$

**Definition 2.13** ( $\chi(L_1, L_2)$ )

Seien  $L_1, L_2, L_3$  drei Gitter von  $V$  mit  $L_3 \subset L_1 \cap L_2$ .

Setze  $\chi(L_1, L_2) = l(L_1/L_3) - l(L_2/L_3)$ .

(Dies hängt nicht von der Wahl von  $L_3 \subset L_1 \cap L_2$  ab.)

**Satz 2.14**

Seien  $L, L'$  zwei Gitter von  $\Lambda$ ,  $L' = sL$ ,  $s \in GL(V)$ . Dann gilt:  
 $\chi(L, L') = \chi(L, sL) = v(\det(s))$ .

**BEWEIS:**

Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis  $\{e_1, e_2\}$  und Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $L = \langle e_1, e_2 \rangle$  und  $sL = \langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \rangle$

1. Es ist  $s = \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix} \cdot \tilde{s}$  mit  $\tilde{s}$  in der Fixgruppe von  $L$ .

$$\text{Also } v(\det(s)) = v(\pi^{a+b}) + v(\det(\tilde{s})) = a + b.$$

2. Nun zeige ich durch Fallunterscheidung, daß gilt:  $\chi(L, sL) = a + b$

(a) Sei  $a, b \geq 0$ . Betrachte:

$$L = \underbrace{\langle e_1, e_2 \rangle \supset \langle \pi e_1, e_2 \rangle \supset \dots \supset \langle \pi^a e_1, e_2 \rangle}_{l(L/\tilde{L})=a} = \tilde{L}$$

$$\tilde{L} = \underbrace{\langle \pi^a e_1, e_2 \rangle \supset \langle \pi^a e_1, \pi e_2 \rangle \supset \dots \supset \langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \rangle}_{l(\tilde{L}/L')=b} = L'$$

$$L' = \underbrace{\langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \rangle \supset \dots \supset L_3}_{l(L'/L_3)}$$

$$\Rightarrow \chi(L, L') = a + b$$

(b) Sei  $a, b \leq 0$ . Analog zu 2.(a) (statt " $\supset$ " nimmt man " $\subset$ ")

$$\Rightarrow \chi(L, L') = a + b$$

(c) Sei  $a \geq 0, b < 0$ . Betrachte:

$$L = \underbrace{\langle e_1, e_2 \rangle \supset \dots \supset \langle \pi^a e_1, e_2 \rangle}_{l(L/\tilde{L})=a} = \tilde{L} = \underbrace{\langle \pi^a e_1, e_2 \rangle \supset \dots \supset L_3}_{l(\tilde{L}/L_3)}$$

$$L' = \underbrace{\langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \rangle \supset \dots \supset \langle \pi^a e_1, e_2 \rangle}_{l(L'/\tilde{L})=-b} = \tilde{L} = \underbrace{\langle \pi^a e_1, e_2 \rangle \supset \dots \supset L_3}_{l(\tilde{L}/L_3)}$$

$$\Rightarrow \chi(L, L') = a + b$$

(d) Sei  $b \geq 0, a < 0$ . Analog zu 2.(c) (statt " $\supset$ " nimmt man " $\subset$ ")

$$\Rightarrow \chi(L, L') = a + b \quad \square$$

### Korollar 2.15

Sei  $\Lambda$  Gitterklasse und  $s \in GL_2(K), L \in \Lambda$ . Dann gilt:

$$d(\Lambda, s\Lambda) \equiv \chi(L, sL) \pmod{2}.$$

BEWEIS: Nach Def. 2.4 gilt:

$$d(\Lambda, s\Lambda) = |a - b| \equiv a + b \equiv v(\det(s)) \equiv \chi(L, sL) \pmod{2} \quad \square$$

### 4. Die Wirkung von $GL(V)$ auf dem Baum $\mathcal{T}$

Die Gruppe  $GL(V)$  operiert auf dem Baum  $\mathcal{T}$ . Nach obigem Korollar gilt:

$s \in GL^+(V) \Leftrightarrow$  für ein bzw. alle  $\Lambda$  ist  $d(\Lambda, s\Lambda)$  gerade

Also operiert  $GL^+(V)$  auf  $\mathcal{T}$  ohne Umkehrung von Kanten, was jedoch nicht für ganz  $GL(V)$  gilt. Betrachte z.B.:

$\Lambda \ni L = \langle e_1, e_2 \rangle$  benachbart zu  $\langle \pi e_1, e_2 \rangle = L' \in \Lambda'$

für  $s = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  gilt:  $sL = L'$  und  $sL' = \pi L$ .

Also wird die Kante  $\Lambda\Lambda'$  auf die Kante  $\Lambda'\Lambda$  abgebildet.

Ich definiere daher:

**Definition 2.16 (Stabilisatoren  $G_L, G_\Lambda, G_{\Lambda\Lambda'}$ )**

Sei  $G$  Untergruppe von  $GL(V)$  und  $L \in \Lambda$  Gitter.

$$\begin{aligned} G_L &:= \{s \in G \mid sL = L\} && \text{Stabilisatorgruppe des Gitters } L \\ G_\Lambda &:= \{s \in G \mid s\Lambda = \Lambda\} && \text{Stabilisatorgruppe der Gitterklasse } \Lambda \\ G_{\Lambda\Lambda'} &:= \{s \in G \mid s\Lambda = \Lambda, s\Lambda' = \Lambda'\} && \text{Stabilisatorgruppe der Kante } \Lambda\Lambda' \end{aligned}$$

Anmerkung:  $s\Lambda = \Lambda \Leftrightarrow \exists x \in K^* : sL = xL$

**Satz 2.17**

Ist  $G$  eine Untergruppe von  $GL^0(V)$  und  $L$  ein Gitter in der Klasse  $\Lambda$ , so gilt  $G_L = G_\Lambda$ .

BEWEIS:

Sei  $s \in G_\Lambda$ .

Wegen  $G_\Lambda \subset GL^0(V)$  ist  $\chi(L, sL) = v(\det(s)) = 0$ .

Sei  $x \in K^*$  mit  $sL = xL$ .

Es ist  $0 = \chi(L, xL) = 2v(x)$ , also  $x$  invertierbar und

$L = xL = sL$ , d.h.  $s \in G_L$ . □

**Definition 2.18 (beschränkte Untergruppen)**

Eine Untergruppe  $G$  von  $GL(V)$  heißt beschränkt, wenn sie eine beschränkte Untergruppe des Vektorraumes  $\text{End}(V)$  ist. Identifiziert man  $GL(V)$  mit  $GL_2(K)$ , so bedeutet dies:

$$\exists d \in \mathbb{Z} : v(s_{i,j}) \geq d \quad \forall s = (s_{i,j}) \in G$$

**Satz 2.19** Sei  $G \subset GL^0(V)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $G$  ist beschränkt.
- (2) Es existiert eine Gitterklasse  $\Lambda$ , so daß die Bahn  $G\Lambda$  bzgl. des Abstandes im Baum  $T$  beschränkt ist.
- (3) Es existiert eine Gitterklasse  $\Lambda$ , die unter  $G$  stabil ist ( $G$  läßt den Knoten  $\Lambda$  fest).
- (4) Es existiert ein Gitter  $L$ , das unter  $G$  stabil ist ( $GL = L$ ).

BEWEIS:

$$(1) \Rightarrow (2) \quad G \ni s = \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix} \cdot \tilde{s}; \quad \tilde{s} \in GL_2(O)$$

Durchläuft  $s$  die beschränkte Menge  $G$ , so ist auch  $a, b$  nach unten beschränkt. Wegen  $s \in G \subset GL^0(V)$  ist  $v(\det(s)) = 0$  und somit  $v(\det(\tilde{s})) = -(a+b)$ .  $GL_2(O)$  ist jedoch auch eine beschränkte Untergruppe von  $G$ , woraus folgt, daß  $a$  und  $b$  auch nach oben beschränkt sind. Also ist auch  $d(\Lambda, s\Lambda) = |a-b|$  beschränkt, für  $\Lambda = O \oplus O$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Sei  $Y$  der Teilbaum, der von  $G\Lambda$  erzeugt wird. Es ist zu zeigen, daß  $Y$  mindestens einen Knoten enthält, der unter  $G$  stabil ist. Ich zeige nun durch vollständige Induktion über den Durchmesser: Ist  $Y$  ein Teilbaum von  $T$  von endlichem Durchmesser, der von  $G$  in sich selbst überführt wird, so besitzt  $G$  auf  $Y$  einen Fixpunkt. Für  $n=0$  ist die Behauptung offensichtlich. Für  $n=1$  gilt die Behauptung, da  $G \subset GL^0(V)$  ohne Umkehrung von Kanten operiert. Für  $n \geq 2$  hat der Teilbaum  $Y'$  aus Satz 1.19 den Durchmesser  $n-2$ .  $G$  operiert auch auf  $Y'$ , da durch  $G$  Endpunkte auf Endpunkte und Nichtendpunkte auf Nichtendpunkte abgebildet werden. Nach Induktionsannahme hat  $Y'$  einen Knoten  $\Lambda \in V(Y')$ , der stabil unter  $G$  ist. Dann hat aber auch  $Y$  einen Knoten, der unter  $G$  stabil ist.

(3)  $\Rightarrow$  (4) folgt nach Satz 2.17 .

(4)  $\Rightarrow$  (1) Sei  $L = \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle$ ,  $\{e_1, e_2\}$  eine Basis von  $V$  und  $\gamma: O^2 \rightarrow L$  (invertierbare Abbildung) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } G \subset G_L \subset \gamma GL_2(O) \gamma^{-1}$$

beschränkt, da  $GL_2(O)$  beschränkt ist.  $\square$

### Korollar 2.20

Die maximalen beschränkten Untergruppen von  $G \subset GL^0(V)$  sind die Stabilisatoren von Knoten.

Nun betrachte ich die Stabilisatoren von Kanten etwas genauer. Sei also  $\Lambda\Lambda' \in E(T)$  eine Kante von  $T$  und  $L \in \Lambda, L' \in \Lambda'$  mit  $L' \subset L$  und  $l(L/L') = 1$ . Weiter sei  $G$  Untergruppe von  $GL_2^0(K)$ .

Nach Definition 2.16 gilt:  $G_{\Lambda\Lambda'} = G_\Lambda \cap G_{\Lambda'}$ .

Im folgenden sei  $\{e_1, e_2\}$  die Standard-Basis von  $V = K^2$ .

Folgende drei Sätze finden sich in [Se] S.77 .

### Satz 2.21 (Iwahori-Untergruppen)

Ist  $L = e_1O \oplus e_2O$  und  $L' = e_1O \oplus \pi e_2O$ , so gilt:

$$G_{\Lambda\Lambda'} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K) \mid c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$$

Diese Untergruppe von  $GL_2(K)$  heißt die Standard-Iwahori-Untergruppe von  $GL_2(K)$ .

(Betrachtet man die Stabilisatoruntergruppen zu anderen Kanten, so sind diese konjugiert zur Iwahori-Gruppe.)



Wie sehen die Stabilisatoren von Enden und Geraden aus ?

**Satz 2.22 (Borel-Untergruppen)**

Ist  $\Lambda_i \ni L_i := e_1 O \oplus \pi^i e_2 O$  (für  $i \geq 0$ ), so gilt:

$$G_{\Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2 \dots} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(K) \right\} \text{ die in 1.39 definierte}$$

Standard-Borelgruppe  $B(K)$ .

**Satz 2.23 (Cartan-Untergruppen)**

Ist  $\Lambda_i \ni L_i := e_1 O \oplus \pi^i e_2 O$  (für  $i \in \mathbb{Z}$ ), so gilt:

$$G_{\dots \Lambda_0 \Lambda_1 \dots} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(K) \right\}$$

Diese Untergruppe von  $GL_2(K)$  heißt die Standard-Cartan-Untergruppe von  $GL_2(K)$ . Eine Cartan-Untergruppe ist eine zur Standard-Cartan-Untergruppe konjugierte Untergruppe von  $GL_2(K)$ .

## 2.2 Die Operation von $GL_2(k[T])$ auf einem geeigneten Baum

Seien:  $A = \mathbb{F}_q[T]$

$K = \mathbb{F}_q(T)$  mit der Gradbewertung ( $v(\frac{f}{g}) = \deg(g) - \deg(f)$ )

$O$  Bewertungsring von  $(K, v)$

$\pi = \frac{1}{T}$  Parameter

$e_1, e_2$  Standard-Basis von  $K^2$

$\Gamma = GL_2(A)$

$L_n := e_1 O \oplus \pi^n e_2 O$  ist ein Repräsentant der Gitterklasse  $\Lambda_n$ . Die  $\Lambda_n$  bilden als Knoten von  $T$  aufgefaßt die Halbgerade  $\Upsilon$ :

$$\Upsilon = \overset{\Lambda_0}{\circ} \longrightarrow \overset{\Lambda_1}{\circ} \longrightarrow \overset{\Lambda_2}{\circ} \longrightarrow \dots$$

Sei weiter:  $G_0 := GL_2(\mathbb{F}_q)$

$$G_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{F}_q^\times; b \in \mathbb{F}_q[T]; \deg(b) \leq n \right\} \quad (n \geq 1)$$

$Z := Z(\Gamma)$  Zentrum von  $\Gamma$  (Skalarmatrizen)

**Satz 2.24 (Fixgruppe der  $\Lambda_n$ )**

Mit obigen Bezeichnungen gilt:

(1) Die Gitterklassen  $\Lambda_n$  sind paarweise inäquivalent mod  $\Gamma$ , d.h.

$$\beta\gamma \in \Gamma : \gamma\Lambda_i = \Lambda_j \text{ für } i \neq j .$$

(2) Die  $G_n$  sind die Fixgruppen der  $\Lambda_n$ .

(3)  $G_0$  operiert transitiv auf der Menge der Kanten mit Ursprung  $\Lambda_0$ .

(4)  $G_n$  ( $n \geq 1$ ) hält die Kante  $\Lambda_n \Lambda_{n+1}$  fest und operiert transitiv auf den Kanten ( $\neq \Lambda_n \Lambda_{n+1}$ ) mit Ursprung in  $\Lambda_n$ .

BEWEIS: Der Beweis ist sehr technisch und bringt außer dem Satz keine neuen Erkenntnisse. Ich verweise daher auf [Se, S.87 Prop 3].

Der Grund für die Aufstellung dieses Satzes liegt erstens darin, daß man jetzt zeigen kann, daß  $\Upsilon$  ein Fundamentalbereich von  $T$  modulo  $\Gamma$  ist (siehe unten), und zweitens darin, daß man die Fixgruppen aller Kanten und Knoten von  $\Upsilon$  sehr gut beschreiben kann.

**Korollar 2.25** *Ist  $Y$  ein endlicher Untergraph von  $T$  und  $e \in E(T)$ , so gibt es nur endlich viele  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(e) \in Y$ .*

BEWEIS: Folgt direkt aus der Endlichkeit der entsprechenden Fixgruppe der Kante  $e$ .  $\square$

**Satz 2.26 (Fundamentalbereich von  $T$  modulo  $\Gamma$ )**

*Die Halbgerade:*

$$\Upsilon = \overset{\Lambda_0}{\circ} \longrightarrow \overset{\Lambda_1}{\circ} \longrightarrow \overset{\Lambda_2}{\circ} \longrightarrow \dots$$

*ist ein Fundamentalbereich von  $T$  modulo  $\Gamma$ .*

BEWEIS:

a) zu zeigen:  $\Upsilon$  enthält aus jeder Bahn von  $V(T)$  genau einen Vertreter.  
Nach Satz 2.24(1) gibt es aus jeder Bahn höchstens einen Knoten, der in  $\Upsilon$  liegt.

Es bleibt zu zeigen:  $\forall \Lambda \in V(T) \exists i \in \mathbb{N}_0, \gamma \in \Gamma : \gamma\Lambda = \Lambda_i$

Dies zeigt man leicht durch vollständige Induktion über  $d = d(\Lambda, \Lambda_0)$ :

$d = 0$ : Es ist  $\Lambda = \Lambda_0$ .

$d \rightarrow d + 1$ : Sei  $\Lambda' \in V(T)$  mit  $d(\Lambda', \Lambda_0) = d$  und  $d(\Lambda', \Lambda) = 1$ .

Nach Induktionsvoraussetzung  $\exists i \in \mathbb{N}_0, \gamma \in \Gamma : \gamma\Lambda' = \Lambda_i$ .

Dann ist  $\gamma(\Lambda) = \tilde{\Lambda}$  mit  $d(\tilde{\Lambda}, \Lambda_i) = 1$ .

Nach Satz 2.24(3) bzw. (4) gilt dann:  $\tilde{\Lambda} \sim \Lambda_{i+1}$  oder  $\tilde{\Lambda} \sim \Lambda_{i-1}$ , womit Teil a) bewiesen ist.

b) zu zeigen:  $\Upsilon$  enthält aus jeder Bahn von  $E(T)$  genau einen Vertreter.  
Sei  $\Lambda\Lambda' \in E(T)$ .

Nach a)  $\exists \gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma\Lambda = \Lambda_i$ . Sei  $\gamma\Lambda\Lambda' = \Lambda_i\tilde{\Lambda}$ .

Nach Satz 2.24(3) bzw. (4)  $\exists \delta \in \Gamma$  mit

$\delta\Lambda_i = \Lambda_i$  und  $\delta\tilde{\Lambda} = \Lambda_{i+1}$  oder  $\Lambda_{i-1}$ .

Dann ist  $\delta\gamma\Lambda\Lambda' = \Lambda_i\Lambda_{i+1}$  oder  $\Lambda_i\Lambda_{i-1}$ .

Also enthält  $\Upsilon$  mindestens einen Vertreter.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß es höchstens ein Vertreter ist.

Sei dazu:  $\gamma\Lambda_i\Lambda_{i+1} = \Lambda_r\Lambda_s$  mit  $s \in \{r-1, r+1\}$ .

Dann gilt  $r = i, s = i+1$  nach Teil a).  $\square$

**Definition 2.27 (Stufe von Kanten bzw. Knoten)**

$v$  ist ein Knoten der Stufe  $\Lambda_n$ , wenn es ein  $\gamma \in \Gamma$  gibt, mit  $\gamma v = \Lambda_n$ .

$e$  ist eine Kante der Stufe  $\Lambda_n$ , wenn ein  $\gamma \in \Gamma$  existiert mit  $\gamma e = \Lambda_n\Lambda_{n+1}$ .

Zur Verdeutlichung wird  $e$  auch Kante der Stufe  $\Lambda_n\Lambda_{n+1}$  genannt.

2.3 Die Berechnung von  $\Gamma_u \setminus T$ 

$\Gamma_u$  sei eine Untergruppe von endlichem Index in  $\Gamma$ . Dann ist auch der Index  $[\Gamma : Z \Gamma_u] =: m$  endlich.

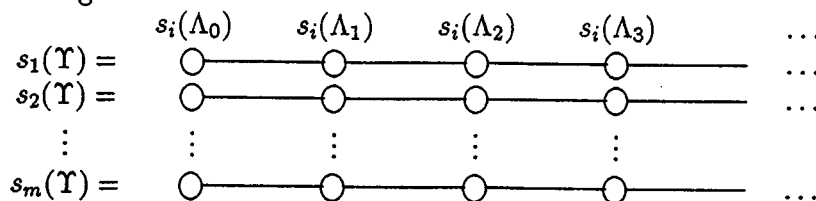
Sei  $V = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  ein Vertretersystem von  $Z\Gamma_u \setminus \Gamma$ , d.h.

$$\forall g \in \Gamma \quad \exists \gamma \in \Gamma_u, s_i \in V, z \in Z \quad : g = \gamma s_i z.$$

Man nimmt sich nun den Fundamentalbereich aus Satz 2.26

$$\Upsilon = \overset{\Lambda_0}{\circ} \xrightarrow{\Lambda_1} \overset{\Lambda_1}{\circ} \xrightarrow{\Lambda_2} \overset{\Lambda_2}{\circ} \xrightarrow{\dots} \dots$$

Wendet man ein  $s_i$  auf die  $\Lambda_j$  an, so erhält man eine Halbgerade  $s_i(\Upsilon)$ . Dies führt man für alle  $s_i$  durch und erhält somit folgendes graphisches Grundgerüst:

**Satz 2.28 (Konstruktion des Graphen)**

Man erhält den Graphen  $\Gamma_u \setminus T$ , indem man Kanten bzw. Knoten des graphischen Grundgerüsts entsprechend folgender Vorschriften identifiziert:

- (0) Es können nur Kanten bzw. Knoten der gleichen Stufe identifiziert werden.
- (1)  $s_i(\Lambda_n) \sim s_j(\Lambda_n) \Leftrightarrow \exists g \in G_n : s_i g s_j^{-1} \in Z\Gamma_u$
- (2)  $s_i(\Lambda_0 \Lambda_1) \sim s_j(\Lambda_0 \Lambda_1) \Leftrightarrow \exists g \in G_0 \cap G_1 : s_i g s_j^{-1} \in Z\Gamma_u$
- (3)  $s_i(\Lambda_n \Lambda_{n+1}) \sim s_j(\Lambda_n \Lambda_{n+1}) \Leftrightarrow \exists g \in G_n : s_i g s_j^{-1} \in Z\Gamma_u \quad (n \geq 1)$

BEWEIS:

a)  $U = \bigcup_{i=1}^m s_i(\Upsilon)$  enthält aus jeder Bahn von Knoten bzw. Kanten mindestens einen Vertreter. Also gilt  $\Gamma_u \setminus T = \Gamma_u \setminus U$ .

b) Es können nur Kanten bzw. Knoten der gleichen Stufe identifiziert werden:

Annahme:  $s_i(\Lambda_k) \sim s_j(\Lambda_l)$  mit  $k \neq l$

$$\Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma s_i \Lambda_k = s_j \Lambda_l$$

$$\Rightarrow \Lambda_l = s_j^{-1} \gamma s_i \Lambda_k$$

Dies ist jedoch unmöglich, da die  $\Lambda_i$  paarweise inäquivalent mod  $\Gamma$  sind (vgl. Satz 2.24), d.h. es gilt (0).

c) Für  $n \geq 0$  gilt:

$$\begin{aligned}
 & s_j(\Lambda_n) \sim s_i(\Lambda_n) \\
 \Leftrightarrow & \exists z \in Z \exists \gamma \in \Gamma : z\gamma s_j \Lambda_n = s_i \Lambda_n \\
 \Leftrightarrow & \exists z \in Z \exists \gamma \in \Gamma : z s_i^{-1} \gamma s_j \Lambda_n = \Lambda_n \\
 \Leftrightarrow & \exists z \in Z \exists \gamma \in \Gamma : z s_i^{-1} \gamma s_j \in G_n \quad (\text{Fixgruppe von } \Lambda_n) \\
 \Leftrightarrow & \exists z \in Z \exists \gamma \in \Gamma : z\gamma \in s_i G_n s_j^{-1} \cap \Gamma_u \\
 \Leftrightarrow & \exists g \in G_n : s_i g s_j^{-1} \in Z\Gamma_u, \quad \text{also (1)}.
 \end{aligned}$$

d) Es gilt analog zu c) :

$$s_i(\Lambda_0 \Lambda_1) \sim s_j(\Lambda_0 \Lambda_1) \Leftrightarrow \exists g \in G_0 \cap G_1 : s_i g s_j^{-1} \in Z\Gamma_u,$$

wobei  $G_0 \cap G_1$  Fixgruppe von  $\Lambda_0 \Lambda_1$  ist, also (2).

e) Für  $n \geq 1$  gilt:

$$s_i(\Lambda_n \Lambda_{n+1}) \sim s_j(\Lambda_n \Lambda_{n+1}) \Leftrightarrow \exists g \in G_n : s_i g s_j^{-1} \in Z\Gamma_u.$$

Dies folgt auch aus c), da  $G_n \cap G_{n+1} = G_n$  Fixgruppe von  $\Lambda_n \Lambda_{n+1}$  ist, also (3).

□

Anmerkung zum Satz:

Man erkennt leicht:

- (1) Fallen zwei Knoten  $s_i(\Lambda_n)$  und  $s_j(\Lambda_n)$  für  $n \geq 1$  zusammen, so auch die Kanten  $s_i(\Lambda_n \Lambda_{n+1})$  und  $s_j(\Lambda_n \Lambda_{n+1})$  und alle Folgeknoten und -Kanten (Beachte:  $\forall n \geq 1 : G_n \subset G_{n+1}$ ).
- (2) Der Graph  $\Gamma_u \setminus T$  hat  $\tilde{m}$  Enden mit  $1 \leq \tilde{m} \leq m$ .
- (3)  $\Gamma_u \setminus T$  ist bipartit ( $V_1 = \{s_i(\Lambda_j) | 1 \leq i \leq m; j \equiv 0 \pmod{2}\}$   
 $V_2 = \{s_i(\Lambda_j) | 1 \leq i \leq m; j \equiv 1 \pmod{2}\}$ ). Alle geschlossenen Wege haben somit gerade Länge.

### Korollar 2.29

$\Gamma_u \setminus T$  ist Vereinigung eines endlichen Graphen und endlich vieler Halbgeraden. Insbesondere ist der  $\mathbb{Z}$ -Rang der Homologie  $H_1(\Gamma_u \setminus T, \mathbb{Z})$  endlich (vgl. Satz 1.22).

## 2.4 Motivation

Es stellt sich die berechnete Frage, warum man sich für die Graphen  $\Gamma_u \setminus T$  interessiert. Ein Grund ist, daß man durch das Studium des Graphen den Rang der größten abelschen Faktorgruppe von  $\Gamma_u$  berechnen kann. Den genauen Zusammenhang stelle ich im folgenden dar.

**Lemma 2.30**

Es gilt:  $\gamma \in \Gamma$  hat endliche Ordnung  $\Leftrightarrow \exists \Lambda \in V(T) : \gamma\Lambda = \Lambda$

## BEWEIS

" $\Rightarrow$ "  $\gamma$  habe endliche Ordnung. Dann ist  $\langle \gamma \rangle$  endlich und somit auch beschränkt. Nach Satz 2.19(3) läßt  $\langle \gamma \rangle$  einen Knoten  $\Lambda$  fest. Es gilt insbesondere  $\gamma\Lambda = \Lambda$ .

" $\Leftarrow$ "  $\exists \Lambda \in V(T) : \gamma\Lambda = \Lambda$ . Da  $\gamma$  den Knoten  $\Lambda$  in sich überführt, gehört  $\gamma$  zur Fixgruppe von  $\Lambda$ . Die Fixgruppen von Knoten sind nach Satz 2.24 jedoch endlich. Somit muß auch  $\gamma$  endliche Ordnung haben.  $\square$

**Definition 2.31 (Gr und Ab)**

**Gr** bezeichne die Kategorie der nicht notwendig abelschen Gruppen und ihrer Homomorphismen. Unter **Ab** versteht man die Kategorie der abelschen Gruppen.

**Definition 2.32 (der Funktor  $( )^{ab}$ )**

Seien  $G$  und  $H$  Gruppen und  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus.  $G'$  bzw.  $H'$  seien die Kommutatorgruppen von  $G$  bzw.  $H$  (vgl. Def 1.25).  $\varphi$  induziert auf eindeutige Weise den Homomorphismus

$$\varphi^{ab} : G^{ab} = G/G' \rightarrow H^{ab} = H/H' ; \varphi^{ab}(xG') \mapsto \varphi(x)H'$$

$( )^{ab}$  definiert auf diese Weise einen kovarianten Funktor von der Kategorie **Gr** in die Kategorie **Ab**.

Nach [Se, S. 55, Cor 1] gilt:

$$\Gamma_v / \Gamma_{v,f} \xrightarrow{\cong} \pi_1(v, \Gamma_v \setminus T) \quad \text{mit } \Gamma_{v,f} = \langle \{ \gamma \mid \exists \Lambda \in V(T) : \gamma\Lambda = \Lambda \} \rangle .$$

Nach obigem Lemma ist  $\Gamma_{v,f} = \langle \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma \text{ hat endliche Ordnung} \} \rangle$ . Obige Isomorphieaussage bedeutet also folgendes:  
Dividiert man aus  $\Gamma_v$  die Gruppe, die von den Elementen mit endlicher Ordnung erzeugt wird, heraus, so ist dieser Quotient isomorph zur Fundamentalgruppe des Graphen  $\Gamma_v \setminus T$  bezüglich eines beliebigen Basisknotens  $v$ .

Wendet man auf diesen Isomorphismus den Funktor  $( )^{ab}$  an, so erhält man

1.  $(\Gamma_u / \Gamma_{u,f})^{ab} \cong \pi_1(v, \Gamma_u \setminus \mathcal{T})^{ab}$ . Weiter ist
2.  $\pi_1(v, \Gamma_u \setminus \mathcal{T})^{ab} \cong H_1(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}, \mathbb{Z})$  nach Satz 1.21.

**Lemma 2.33**  $(\overline{\Gamma}_u \cong (\Gamma_u / \Gamma_{u,f})^{ab})$

Der kanonische Homomorphismus  $p$  von  $\overline{\Gamma}_u = \Gamma_u^{ab} / \text{torsion}(\Gamma_u^{ab})$  nach  $(\Gamma_u / \Gamma_{u,f})^{ab}$  ist bijektiv.

**BEWEIS:** Nach 1. und 2. ist  $(\Gamma_u / \Gamma_{u,f})^{ab}$  torsionsfrei, also faktorisiert die kanonische Abbildung  $\Gamma_u^{ab} \rightarrow (\Gamma_u / \Gamma_{u,f})^{ab}$  über  $\overline{\Gamma}_u$ . Damit ist  $p$  wohldefiniert und surjektiv, da die Restklassenabbildung  $\Gamma_u \rightarrow \Gamma_u / \Gamma_{u,f}$  surjektiv ist. Sei  $\alpha \in \Gamma_u$  Repräsentant eines Elements aus  $\text{Kern}(p)$ . Dann liegt  $\alpha$  in der Untergruppe von  $\Gamma_u$ , die von  $\Gamma_{u,f}$  und den Kommutatoren erzeugt wird. Damit hat  $\alpha$  in  $\Gamma_u^{ab}$  endliche Ordnung, verschwindet also in  $\overline{\Gamma}_u$ .  $\square$

Mit 1. und 2. ergibt sich nun folgender Satz.

**Satz 2.34**

Sei  $v$  ein beliebiger Knoten von  $\mathcal{T}$ . Es existiert ein Isomorphismus

$$i : \begin{array}{ccc} \Gamma_u^{ab} / \text{torsion} & \xrightarrow{\cong} & H_1(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}, \mathbb{Z}) \\ \alpha & \mapsto & \psi_{\alpha,v} \end{array}$$

mit  $\psi_{\alpha,v}(\bar{e}) := \#\{e \in (v, \alpha(v)) \mid e \equiv \bar{e} (\Gamma_u)\} - \#\{e \in (v, \alpha(v)) \mid \bar{e} \equiv \bar{e} (\Gamma_u)\}$ .

Wir erläutern die Konstruktion von  $i$ :

1. Erklärung der Definition von  $\psi_{\alpha,v}$ :

Sei  $\alpha \in \Gamma_u$ . Da  $\mathcal{T}$  ein Baum ist, ist der reduzierte Weg von  $v$  nach  $\alpha(v)$  eindeutig bestimmt. Betrachtet man das Bild dieses Weges im Quotientengraphen  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ , so erhält man wegen  $\alpha(v) \equiv v (\Gamma_u)$  einen geschlossenen Weg in  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ . Dieser ist jedoch nicht notwendig reduziert. Ein solcher geschlossener Weg kann eine bestimmte Kante  $\bar{e} \in E(\Gamma_u \setminus \mathcal{T})$  auch mehrmals (evtl. in verschiedener Richtung) durchlaufen.  $\psi_{\alpha,v}$  zählt nun wieviele Kanten  $e$  der Weg  $(v, \alpha(v))$  in  $\mathcal{T}$  enthält, deren Bild die Kante  $\bar{e}$  in  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$  ist. Es ist dabei zu beachten, daß die Kanten  $e \in (v, \alpha(v))$ , deren Bilder in der gleichen Richtung wie  $\bar{e}$  verlaufen positiv, und diejenigen, deren Bilder in entgegengesetzter Richtung zu  $\bar{e}$  verlaufen, negativ gezählt werden.

## 2. Wohldefiniertheit und endlicher Träger:

Der Weg  $(v, \alpha(v))$  in  $\mathcal{T}$  hat endliche Länge. Somit ist  $\psi_{\alpha, v}$  eine wohldefinierte  $\mathbb{Z}$ -wertige Funktion auf den Kanten von  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ . Aus dem gleichen Grund hat  $\psi_{\alpha, v}$  auch endlichen Träger auf  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ .

## 3. Alterniertheit:

Man sieht der Definition von  $\psi_{\alpha, v}$  direkt an, daß die Funktion alternierend ist, d.h. es gilt:

$$\forall \bar{e} \in \Gamma_u \setminus \mathcal{T} : \psi_{\alpha, v}(\bar{e}) = -\psi_{\alpha, v}(\bar{e})$$

## 4. Knotensummenbedingung:

In alle Knoten  $w$  von  $\mathcal{T}$ , außer den Knoten  $v$  und  $\alpha(v)$ , gehen genau-soviele Kanten des Weges  $(v, \alpha(v))$  hinein wie hinaus.

Da  $v$  in  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$  mit  $\alpha(v)$  zusammenfällt, überträgt sich dieser Sachverhalt gemäß obiger Definition zu folgender Knotensummenbedingung auf dem Quotientengraphen  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ :

$$\forall \tilde{w} \in \Gamma_u \setminus \mathcal{T} : \sum_{t(\bar{e})=\tilde{w}} \psi_{\alpha, v}(\bar{e}) = 0.$$

Aus 1.-4. folgt nun, daß  $\psi_{\alpha, v} \in H_1(\Gamma_u \setminus \mathcal{T}, \mathbb{Z})$  ist.

5. Ich zeige nun, daß  $\psi_{\alpha, v}$  nicht von der Wahl des Basisknotens  $v$  abhängt, indem ich zeige, daß  $\psi_{\alpha, v} = \psi_{\alpha, w}$  für alle Nachbarknoten  $w$  von  $v$  ist. Zunächst stellt man fest, daß  $\alpha(w)$  Nachbarknoten von  $\alpha(v)$  in  $\mathcal{T}$  ist und daß  $\alpha(w) = w$  in  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$  ist. Dann unterscheidet man zwei Fälle:

(a) Abgesehen vom Anfangs- und Endpunkt beschreibt das Bild des Weges  $(w, \alpha(w))$  in  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$  den gleichen geschlossenen Weg wie das Bild von  $(v, \alpha(v))$ .

Also gilt  $\psi_{\alpha, v} = \psi_{\alpha, w}$ .

(b) Das Bild von  $(w, \alpha(w))$  unterscheidet sich vom Bild von  $(v, \alpha(v))$  in  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$  nur durch die Sackgasse  $(\tilde{v}\tilde{w}, \tilde{w}\tilde{v})$  ( $\tilde{v}, \tilde{w}$  = Bilder von  $v, w$  in  $\Gamma_u \setminus \mathcal{T}$ ).

Für  $\bar{e} \in \{\tilde{v}\tilde{w}, \tilde{w}\tilde{v}\}$  gilt jedoch:

$$\#\{e \in (w, \alpha(w)) \mid e \equiv \bar{e} (\Gamma_u)\} = \#\{e \in (v, \alpha(v)) \mid e \equiv \bar{e} (\Gamma_u)\} \pm 1$$

und

$$\#\{e \in (w, \alpha(w)) \mid \bar{e} \equiv e (\Gamma_u)\} = \#\{e \in (v, \alpha(v)) \mid \bar{e} \equiv e (\Gamma_u)\} \pm 1,$$

wobei in beiden Fällen das gleiche Vorzeichen auftritt. Der Wert der Funktion  $\psi_{\alpha, w}$  auf der Kante  $vw$  ist also gleich dem Wert von  $\psi_{\alpha, v}$  auf dieser Kante. Es gilt also  $\psi_{\alpha, v} = \psi_{\alpha, w}$ .

6. Sei  $\alpha, \beta \in \Gamma_u$ ,  $v \in V(T)$ . Durch Komposition von Wegen (vgl. Definition 1.8(d)) erhält man folgende "Weggleichung":

$$(v, \alpha\beta(v)) = (v, \beta(v)) * (\beta(v), \alpha(\beta(v))).$$

Dies bedeutet, daß  $\psi_{\alpha\beta, v} = \psi_{\beta, v} + \psi_{\alpha, \beta(v)}$ .

Da der gewählte Basisknoten nach 5. keine Rolle spielt, ist die Abbildung  $\Gamma_u \rightarrow H_1(\Gamma_u \setminus T, \mathbb{Z})$ ;  $\alpha \mapsto \psi_\alpha = \psi_{\alpha, v}$  wegen  $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha + \psi_\beta$  ein Homomorphismus. Weil ihr Bild torsionsfrei und abelsch ist, faktorisiert sie über einen kanonischen Homomorphismus  $i$  von  $\overline{\Gamma_u} = \Gamma_u^{\text{ab}} / \text{torsion}$  nach  $H_1(\Gamma_u \setminus T, \mathbb{Z})$ . Nach [Se, S. 55 f] ist  $i$  surjektiv.

### Definition 2.35 (Raum der harmonischen Coketten)

$\underline{H}_1(T, \mathbb{Z})^{\Gamma_u} :=$  Menge der  $f: E(T) \rightarrow \mathbb{Z}$  mit:

- (1)  $\forall e \in E(T): f(e) = -f(\bar{e})$   $f$  ist alternierend
- (2)  $\forall v \in V(T): \sum_{t(e)=v} f(e) = 0$   $T$  hat keine Quellen und Senken
- (3)  $\forall \gamma \in \Gamma_u \forall e \in E(T): f(\gamma e) = f(e)$   $f$  ist invariant unter  $\Gamma_u$
- (4)  $f$  hat als Funktion auf den Kanten von  $\Gamma_u \setminus T$  endlichen Träger.

Entsprechend definiert man  $\underline{H}_1(T, \mathbb{R})^{\Gamma_u}$ .

Es gilt nun folgender Satz, der  $H_1(\Gamma_u \setminus T, \mathbb{Z})$  und  $\underline{H}_1(T, \mathbb{Z})^{\Gamma_u}$  in Beziehung zueinander setzt:

### Satz 2.36

Es existiert ein injektiver Homomorphismus

$$j: H_1(\Gamma_u \setminus T, \mathbb{Z}) \rightarrow \underline{H}_1(T, \mathbb{Z})^{\Gamma_u}$$

$$\psi \mapsto \varphi$$

mit  $\varphi(e) := w(e)\psi(\bar{e})$ . Dabei ist

$$w(e) := \frac{\#\{\gamma \in \Gamma_u \mid \gamma e = e\}}{\#\{\Gamma_u \cap Z\}} = \frac{\#\{\Gamma_u, e\}}{\#\{\Gamma_u \cap Z\}} \text{ und } \bar{e} \text{ das Bild von } e \text{ in } \Gamma_u \setminus T.$$

BEWEIS:

1. Existiert ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma e = e$ , so gilt für alle  $z \in \Gamma_u \cap Z$   $z\gamma e = e$ . Dann ist  $w(e)$  und somit auch  $\varphi$  eine  $\mathbb{Z}$ -wertige Funktion.
2. Die Abbildungen  $\psi$  sind wohldefiniert, alternierend und haben endlichen Träger auf  $\Gamma_u \setminus T$ . Dies überträgt sich nach Definition direkt auf die Funktionen  $\varphi$ .
3. Sei  $e' \equiv e (\Gamma_u)$ , d.h.  $\exists \gamma_u \in \Gamma_u: \gamma_u e = e'$ .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w(e') &= \frac{\#\{\gamma \in \Gamma_u \mid \gamma e' = e'\}}{\#\{\Gamma_u \cap Z\}} = \frac{\#\{\gamma \in \Gamma_u \mid \gamma \gamma_u e = \gamma_u e\}}{\#\{\Gamma_u \cap Z\}} = \frac{\#\{\gamma \in \Gamma_u \mid \gamma_u^{-1} \gamma \gamma_u e = e\}}{\#\{\Gamma_u \cap Z\}} \\ &= \frac{\#\{\gamma \in \Gamma_u \mid \gamma e = e\}}{\#\{\Gamma_u \cap Z\}} = w(e). \end{aligned}$$

$\varphi$  ist also invariant unter  $\Gamma_u$ .



4. Es bleibt zu zeigen, daß  $\varphi$  auf  $T$  keine Quellen und Senken hat.

Sei  $v \in V(T)$  ein Urbild von  $\bar{v}$  und

$$m(e) := \#\{e' \in E(T) \mid t(e') = v \text{ und } e' \text{ ist } \Gamma_u\text{-äquivalent zu } e\}.$$

Dann ist

$$0 = \sum_{t(\bar{e})=\bar{v}} \psi(\bar{e}) = \sum_{t(e)=v} \psi(e) m(e)^{-1}. \quad (\text{vgl. Def. 1.20(3)})$$

(Dabei haben wir  $\psi$  als  $\Gamma_u$ -invariante Funktion auf  $E(T)$  aufgefaßt.)

5. Die Gruppe  $\Gamma_{u,v} := \{\gamma \in \Gamma_u \mid \gamma(v) = v\}$  operiert auf  $S := \{e \in E(T) \mid t(e) = v\}$ , und  $e \mapsto \bar{e}$  ist eine Bijektion der Menge  $\Gamma_{u,v} \setminus S$  der Äquivalenzklassen von  $S$  unter  $\Gamma_{u,v}$  mit der Menge  $\{\bar{e} \in E(\Gamma_u \setminus T) \mid t(\bar{e}) = \bar{v}\}$ . Deshalb ist

$$m(e)^{-1} = \frac{\#(\Gamma_{u,v} \cdot e)}{\#(\Gamma_{u,v})} = \frac{\#(\Gamma_u \cap Z)}{\#(\Gamma_{u,v})} w(e), \text{ und somit}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t(e)=v} \varphi(e) &= \sum_{t(e)=v} w(e) \psi(\bar{e}) \\ &= \sum_{t(e)=v} m(e)^{-1} \frac{\#(\Gamma_{u,v})}{\#(\Gamma_u \cap Z)} \psi(\bar{e}) \\ &= \frac{\#(\Gamma_{u,v})}{\#(\Gamma_u \cap Z)} \sum_{t(\bar{e})=\bar{v}} \psi(\bar{e}) = 0. \end{aligned}$$

6. Die Zuordnung  $\psi \rightarrow \varphi$  ist offensichtlich ein Homomorphismus und injektiv.  $\square$

### Korollar 2.37

Es gibt einen kanonischen Homomorphismus

$$\begin{aligned} k: \overline{\Gamma}_u &\rightarrow \underline{H}_1(T, \mathbb{Z})^{\Gamma_u} \\ \alpha &\mapsto \varphi_\alpha \end{aligned}$$

mit  $\varphi_\alpha(e) := \varphi_{\alpha,v}(e) = \frac{1}{\#(\Gamma_u \cap Z)} \sum_{\gamma \in \Gamma} i(e, \alpha, \gamma, v)$ , wobei  $v$  ein beliebiger

Basisknoten ist und

$$i(e, \alpha, \gamma, v) = \begin{cases} 1, & \gamma(e) \in (v, \alpha(v)) \\ -1, & \gamma(e) \in (\alpha(v), v) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS: Obiger Homomorphismus ergibt sich direkt durch die Verkettung der Homomorphismen  $i$  und  $j$ ,  $k = j \circ i$ .

$k$  ist somit ein injektiver Homomorphismus.  $\square$

Die Frage, wann  $k$  surjektiv ist, kann durch folgendes Korollar beantwortet werden.

**Korollar 2.38**

Die Abbildung  $k$  ist surjektiv, falls ein maximaler Unterbaum  $Y$  von  $\Gamma_u \setminus T$  existiert, der folgender Bedingung genügt:

Für alle Kanten  $e \in E(T)$  mit  $w(e) > 1$  ist das Bild von  $e$  in  $\Gamma_u \setminus T$  im Unterbaum  $Y$  enthalten.

BEWEIS:

Seien  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_g$  Vertreter modulo Orientierung der Kanten in  $\Gamma_u \setminus T \setminus Y$ ,  $e_1, \dots, e_g$  Vertreter in  $T$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_g$  die zugehörige Zykelbasis von  $\Gamma_u \setminus T$ ,  $\psi_i \in H_1(\Gamma_u \setminus T, \mathbf{Z})$  die entsprechenden Funktionen (vgl. 1.16) auf den Zykeln  $c_i$  und  $\varphi_i = j(\psi_i) \in H_1(T, \mathbf{Z})^{\Gamma_u}$ .

$\varphi \in H_1(T, \mathbf{Z})^{\Gamma_u}$  läßt sich immer darstellen als  $\varphi = \sum_{i=1}^g a_i \varphi_i$ ;  $a_i \in \mathbf{Q}$ .

Es gilt:  $\psi_i(\tilde{e}_j) = \delta_{i,j}$ , deshalb  $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} \cdot w(e_j)$ .

Dann ist  $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^g a_i \cdot \varphi_i(e_j) = \sum_{i=1}^g \delta_{i,j} \cdot a_i \cdot w(e_j) = a_j \cdot w(e_j)$ .

Also gilt:  $a_j = \frac{\varphi(e_j)}{w(e_j)} = \varphi(e_j)$ , da nach Voraussetzung  $w(e_j) = 1$  ist.

Somit läßt sich jedes  $\varphi \in H_1(T, \mathbf{Z})^{\Gamma_u}$  darstellen als  $\varphi = \sum_{i=1}^g a_i \varphi_i$ ;  $a_i \in \mathbf{Z}$ .

Die Abbildung  $j$  ist also surjektiv. Somit ist auch  $k$  surjektiv.  $\square$

Im weiter Verlauf wird der spezielle Fall untersucht, daß  $\Gamma_u$  eine Hecke-Kongruenz-Untergruppe ist. Dann kann man mit Hilfe dieses Korollars zeigen, daß die Abbildung  $k$  bijektiv ist. Also ist in diesem Fall  $\overline{\Gamma_u}$  isomorph zu  $H_1(T, \mathbf{Z})^{\Gamma_u}$ .

### 3 Der Graph $\Gamma_0(n) \setminus \mathbb{T}$ für primäres $n$

In Abschnitt 2.3 wurde ein Algorithmus zur Berechnung von  $\Gamma_u \setminus \mathbb{T}$  angegeben, der für Untergruppen  $\Gamma_u$  mit gewissen Endlichkeitsbedingungen funktioniert. Um einen konkreten Graph zu berechnen, sind diese Aussagen aber eventuell zu unscharf. Erstens müßte man alle  $g \in G$ ; durchprobieren um die entsprechenden Äquivalenzbedingungen überprüfen zu können und zweitens weiß man i.a. nicht, bis zu welcher Stufe  $\Lambda$ ; man gehen muß, bis keine Knoten bzw. Kanten mehr zusammenfallen.

Mehr läßt sich sagen, wenn man sich auf folgende Untergruppen beschränkt:

#### Definition 3.1 (Hecke-Kongruenzuntergruppen)

Es sei  $n = n(T) \in A$  ein nichtkonstantes Polynom. Die Hecke-Kongruenzuntergruppe zu  $n$  ist dann:

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma; \quad n | c \right\} .$$

#### 3.1 Grundlegende Überlegungen

Ich betrachte ab jetzt den speziellen Fall, daß  $n$  primär ist (d.h.  $n = f^r$ ;  $f$  prim;  $r \geq 1$ ).

Später werde wir sehen, daß man den allgemeinen Fall durch komponentenweise Betrachtungen auf den primären Fall zurückführen kann.

Für alle vorkommenden Polynome  $x, y, b, u, v, \dots$  bezeichne ich im folgenden mit  $x^{-1}, y^{-1}, b^{-1}, u^{-1}, v^{-1}, \dots$  das Polynom aus  $A$  (falls existent) mit kleinstem Grad, für das  $xx^{-1} \equiv 1 (n), yy^{-1} \equiv 1 (n), \dots$  gilt.

Sei  $U(n) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  ein Vertretersystem von  $\Gamma_0(n) \setminus \mathbb{T}$ , d.h. für alle  $\gamma \in \Gamma$  existieren eindeutige  $\gamma_0 \in \Gamma_0(n), u_i \in U(n)$  mit  $\gamma = \gamma_0 u_i$  (beachte:  $Z \subset \Gamma_0(n)$ ).

#### Satz 3.2 (Vertretersystem $U(n)$ )

Sei  $n$  primär, d.h.  $n = f^r$  ( $f$  prim;  $r \geq 1$ ). Dann sieht ein Vertretersystem  $U(n)$  von  $\Gamma_0(n) \setminus \mathbb{T}$  (z.B.) folgendermaßen aus:

$$U(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{F}_q[T]; \deg(u) < \deg(n) \right\} \\ \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{F}_q[T]; \deg(u) < \deg(n) \text{ und } f | u \right\} .$$

BEWEIS: Sei  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  mit  $\det(\gamma) = ad - bc \in \mathbb{F}_q^*$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1.  $ggT(d, n) = 1$ .

Dies ist äquivalent dazu, daß  $\exists d^{-1} \in \mathbf{A} : d \cdot d^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ .

Dann ist  $cd^{-1} = e \cdot n + u$  mit  $e, u \in \mathbf{A}$ ;  $\deg(u) < \deg(n)$ .

Es gilt:

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bu & b \\ c - du & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \in U$

und  $\begin{pmatrix} a - bu & b \\ c - du & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ ,

$$\text{da } c - du \equiv c - dcd^{-1} \equiv c - c \equiv 0 \pmod{n}.$$

2.  $ggT(d, n) = f^s$ ;  $s \in \mathbf{N}, s \leq r$ .

Wegen  $\det(\gamma) \in \mathbf{F}_q^*$  gilt  $ggT(c, n) = 1$ . Dies ist äquivalent zu

$$\exists c^{-1} \in \mathbf{A} : c \cdot c^{-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Dann ist  $c^{-1}d = e \cdot n + u$  mit  $e, u \in \mathbf{A}$ ;  $\deg(u) < \deg(n)$ .

Wegen  $f^s | c^{-1}d$  gilt  $f | u$ . Also ist:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - b & a \\ cu - d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix}$$

mit  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix} \in U$

und  $\begin{pmatrix} au - b & a \\ cu - d & c \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ ,

$$\text{da } cu - d \equiv cc^{-1}d - d \equiv d - d \equiv 0 \pmod{n}.$$

Man rechnet leicht nach, daß verschiedene  $u_1, u_2 \in U(n)$  verschiedene Klassen in  $\Gamma_0(n)^T$  haben.  $\square$

### Satz 3.3

Es sei:  $\tilde{u} \in \mathbf{A}$  mit  $\exists \tilde{u}^{-1} \in \mathbf{A} : \tilde{u}\tilde{u}^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$ ,  $s \in \mathbf{N}_0$

und  $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \tilde{u}f^s \end{pmatrix} \in U(n)$  bzw.  $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{u}f^s & 1 \end{pmatrix} \in U(n)$ .

Dann existieren  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0(n)$ :

$$\gamma_1 u_1 = \begin{pmatrix} * & * \\ \tilde{u}^{-1} & f^s \end{pmatrix} \text{ bzw. } \gamma_2 u_2 = \begin{pmatrix} * & * \\ f^s & \tilde{u}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Vor dem Beweis noch eine kurze Anmerkung über den Sinn dieses Satzes:

Wir werden später sehen, daß von einem Vertreter  $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  nur die Komponenten  $c$  und  $d$  wesentlich sind. Obiger Satz bedeutet dann, daß man

- als würde man mit dem Quotienten  $\frac{d}{c}$  rechnen - mit bestimmten Elementen erweitern bzw. kürzen kann.

Es zeigt sich dann, daß  $\Gamma_0(n)^T$  zur projektiven Geraden  $\mathcal{P}^1(\mathbb{A}/(n))$  über dem endlichen Ring  $\mathbb{A}/(n)$  in Bijektion steht.

BEWEIS ZU SATZ 3.3

Es gilt  $ggT(\tilde{u}^{-1}, f^s) = 1$ . Mit dem euklidischen Algorithmus lassen sich dann Polynome  $x, y \in \mathbb{A}$  konstruieren mit:  $x\tilde{u}^{-1} + yf^s = 1$ .

$$\text{Für } \gamma_1 = \begin{pmatrix} x + y\tilde{u}f^s & y \\ f^s(\tilde{u}^{-1}\tilde{u} - 1) & \tilde{u}^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$$

$$\text{und } \gamma_2 = \begin{pmatrix} -x - y\tilde{u}f^s & y \\ f^s(1 - \tilde{u}^{-1}\tilde{u}) & \tilde{u}^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \text{ gilt dann:}$$

$$\gamma_1 u_1 = \begin{pmatrix} y & -x \\ \tilde{u}^{-1} & f^s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2 u_2 = \begin{pmatrix} -x & y \\ f^s & \tilde{u}^{-1} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Nun komme ich zur Diskussion des schon oben erwähnten Prinzips, daß von einem Vertreter  $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  nur die Komponenten  $c$  und  $d$  wesentlich sind.

Die Überprüfung einer Äquivalenzbedingung nach Satz 2.28 sieht im allgemeinen folgendermaßen aus:  $s \sim t \Leftrightarrow \exists g \in G : sgt^{-1} \in \Gamma_0(n)$ .

$G$  ist hierbei eine geeignete Gruppe (beachte:  $\Gamma_0(n)Z = \Gamma_0(n)$ ). Diese Bedingung wollen wir nun genauer unter die Lupe nehmen.

$$\text{Sei dazu: } s = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \text{ und } g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & sgt^{-1} \in \Gamma_0(n) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma_0(n) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \frac{1}{\det(t)} \begin{pmatrix} t_4 & -t_2 \\ -t_3 & t_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} s_1g_1 + s_2g_3 & s_1g_2 + s_2g_4 \\ s_3g_1 + s_4g_3 & s_3g_2 + s_4g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_4 & -t_2 \\ -t_3 & t_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \\ \Leftrightarrow & (s_3g_1 + s_4g_3)t_4 - (s_3g_2 + s_4g_4)t_3 \equiv 0 \pmod{n} \end{aligned}$$

Man erkennt nun an dieser Bedingung zweierlei.

1. Die Koeffizienten  $s_1, s_2$  und  $t_1, t_2$  sind für die Äquivalenz nicht entscheidend. Also genügt es, Vertreter durch Tupel darzustellen. Im folgenden wird ein Vertreter  $s = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}$  nur noch als Tupel  $\begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix}$  angegeben.
2. Da es sich um eine Kongruenzgleichung modulo  $n$  handelt, kann man auch die Koeffizienten  $s_3$  und  $s_4$  modulo  $n$  betrachten.

Wir definieren nun ein Vertretersystem, das nur noch aus Tupeln besteht.

**Satz 3.4 (Vertretersystem  $V(n)$ )**

Sei  $n$  primär ( $n = f^r$ ;  $f$  prim vom Grad  $l \geq 1$ ;  $r \geq 1$ ). Dann sieht ein Vertretersystem  $V(n)$  von  $\Gamma_0(n) \backslash \Gamma$  folgendermaßen aus:

$$V(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{F}_q[T]; \deg(u) < \deg(n) \right\} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{F}_q[T]; \deg(u) < l(r-i); f \nmid u \right\}.$$

BEWEIS:

Seien  $\left\{ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \right\}$  Vertreter gemäß Satz 3.2.

Die Menge der Tupel  $\left\{ \begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix} \right\}$  ist dann

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n); f \mid u \right\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n); f \nmid u \right\} \cup \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n); f \mid u \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n); f \mid u \right\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \deg(u^{-1}) < \deg(n); f \nmid u^{-1} \right\} \cup \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n); f \mid u \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n); f \mid u \right\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n) \right\} \cup \\ & \bigcup_{i=1}^{r-1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ f^i v \end{pmatrix} \mid \deg(v) < \deg(n) - il; f \nmid v \right\} \\ = & \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid \deg(u) < \deg(n) \right\} \cup \\ & \bigcup_{i=1}^{r-1} \left\{ \begin{pmatrix} v^{-1} \\ f^i \end{pmatrix} \mid \deg(v) < l(r-i); f \nmid v \right\}. \end{aligned}$$

Mit folgendem Rechenrick läßt sich zeigen, daß der Grad von  $v^{-1}$  immer kleiner  $l(r-i)$  gewählt werden kann.

Annahme:  $\deg(v^{-1}) \geq l(r-i)$

Dann läßt sich  $v^{-1}$  schreiben als  $v^{-1} = bf^{r-i} - a$ ;  $a, b \in \mathbb{F}_q[T]$ .

Wegen  $\deg(v^{-1}) \geq l(r-1)$  kann man  $b \neq 0$  und  $\deg(a) < l(r-i)$  wählen.

Wegen  $f \nmid v$  gilt  $f \nmid v^{-1}$  und insbesondere  $f \nmid a$ .

Sei nun:

$$k := \min\{l \in \mathbb{N} \mid 2^l > \frac{r}{r-i}\} \quad \text{und} \quad p := (a^{-1})^{2^k - 1} \prod_{j=0}^{k-1} (b^{2^j} f^{2^j(r-i)} + a^{2^j})$$

Dann gilt:

$$v^{-1} \cdot p = (a^{-1})^{2^k-1} b^{2^k} f^{2^k(r-i)} - a^{2^k} \equiv (a^{-1})^{2^k-1} \cdot (-a^{2^k}) \equiv -a \pmod{n}$$

und

$$f^i \cdot p \equiv (a^{-1})^{2^k-1} f^i a^{2^k-1} \equiv f^i \pmod{n}.$$

Erweitert man also den Vertreter  $\begin{pmatrix} v^{-1} \\ f^i \end{pmatrix}$  mit  $p$ , so erhält man den

Vertreter  $\begin{pmatrix} -a \\ f^i \end{pmatrix}$ , mit  $\deg(-a) \leq l(r-i) - 1$ .  $\square$

### Definition 3.5 (Vertretergleichheit)

Zwei Elemente  $s = \begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix}$  und  $t = \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \end{pmatrix}$  aus  $\mathbf{A}^2$  heißen vertretergleich, wenn sie durch den gleichen Vertreter  $u \in V(n)$  dargestellt werden. Wir schreiben hierfür  $s \doteq t$ .

Bemerkungen:

1. Es gilt also  $s \doteq t \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma_0(n)$  mit  $\begin{pmatrix} * & * \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} * & * \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$ .

2. Mit der Notation aus Satz 3.3 gilt  $s \doteq t$ , wenn  $s$  durch Kürzen und Erweitern mod  $n$  aus  $t$  hervorgeht.

3. Sei  $n = f^r$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V(n)$  und  $u \in \mathbf{A}$  mit  $f \nmid u$ .

$$\text{Dann gilt: } \begin{pmatrix} x \\ uy \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} u^{-1}x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. Sei  $t_3 \equiv s_3 \pmod{n}$  und  $t_4 \equiv s_4 \pmod{n}$ . Nach Bemerkung 2 (auf Seite 32 unten) gilt dann  $\begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \end{pmatrix}$ .

5. Ein weiteres praktisches Kriterium für die Vertretergleichheit ergibt sich durch folgende kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma_0(n) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\det(t)} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_4 & -t_2 \\ -t_3 & t_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \Leftrightarrow s_3 t_4 \equiv s_4 t_3 \pmod{n} \end{aligned}$$

**Definition 3.6 (Zähler und Typ eines Vertreters)**

Für einen Vertreter gemäß Satz 3.4 führe ich folgende Bezeichnungen ein:

1. Die Komponente  $u$  eines Vertreters  $\begin{pmatrix} u \\ ? \end{pmatrix}$  heißt Zähler des Vertreters.

2. Der Exponent  $i$  der zweiten Komponente eines Vertreters  $\begin{pmatrix} ? \\ f^i \end{pmatrix}$  heißt Typ des Vertreters.

Die Vertreter  $\begin{pmatrix} ? \\ 1 \end{pmatrix}$  erhalten den Typ 0 und der Vertreter  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  den Typ  $r$ . Letzterer wird auch als  $\infty$ -Vertreter bezeichnet.

In Satz 2.28 haben wir genau formuliert, wann zwei Knoten bzw. Kanten identifiziert werden. Diese Bedingungen möchten wir nun auf unser Vertretersystem  $V(n)$  übertragen.

**Satz 3.7 (angepaßte Äquivalenzbedingungen)**

Seien  $s = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \in U(n)$  und

$\bar{s} = \begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix}, \bar{t} = \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \end{pmatrix}$  die entsprechenden Vertreter aus  $V(n)$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Dann gilt:  $\exists g \in G_k : sgt^{-1} \in \Gamma_0(n) \Leftrightarrow \exists g' \in G_k : g' \cdot \bar{t} \doteq \bar{s}$ .

BEWEIS: Sei dazu  $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$ .

Die Aussage  $sgt^{-1} \in \Gamma_0(n)$  ist äquivalent zu:  $\exists \gamma \in \Gamma_0(n) : s = \gamma tg^{-1}$ , oder mit der Bezeichnung aus Satz 3.5:  $\bar{s} \doteq \widetilde{tg^{-1}}$ , wobei  $tg^{-1}$  der Vertreter aus  $V(n)$  ist, der  $tg^{-1}$  entspricht.

Es ist aber

$$tg^{-1} = \frac{1}{\det(g)} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_4 & -g_2 \\ -g_3 & g_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(g)} \begin{pmatrix} * & * \\ g_4 t_3 - g_3 t_4 & g_1 t_4 - g_2 t_3 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $f \nmid \det(g)$  gilt

$$\widetilde{tg^{-1}} \doteq \begin{pmatrix} g_1 t_4 - g_2 t_3 \\ -g_3 t_4 + g_4 t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ -g_3 & g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \end{pmatrix} = g' \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \end{pmatrix} = g' \bar{t},$$

mit  $g' = \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ -g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in G_k$ .

Wir haben nun zwar nur die eine Richtung obiger Aussage bewiesen ( $\exists g \in G_k : sgt^{-1} \in \Gamma_0(n) \Rightarrow \exists g' \in G_k : g' \cdot \bar{t} \doteq \bar{s}$ ), aber hierbei nur Äquivalenzumformungen gemacht. Also gilt sogar die Äquivalenz:

$$\exists g \in G_k : sgt^{-1} \in \Gamma_0(n) \Leftrightarrow \exists g' \in G_k : g' \cdot \bar{t} \doteq \bar{s}. \quad \square$$



Wir haben also jetzt die Menge der Bahnen von  $G_k$  auf  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  (rechte Operation von  $G_k$ ) mit der Menge der Bahnen von  $G_k$  auf  $V(n) = \mathcal{P}^1(A/(n))$  (linke Operation von  $G_k$ ) identifiziert.

Durch diese theoretischen Überlegungen hat man jetzt nicht nur "kleinere Vertreter" (zwei Komponenten statt vier), sondern auch eine echte Rechenersparnis. Vorher mußte man die gesamte Bahn  $sgt^{-1}$  ausrechnen (alle  $g \in G_k$  durchprobieren). Nun kann man die Operation einer Gruppe  $G_k$  auf  $V(n) = \mathcal{P}^1(A/(n))$  betrachten und erhält so wesentlich einfachere und griffigere Äquivalenzrelationen. Folgende Aussage ist z.B. sehr einfach abzulesen:

**Satz 3.8**

Sei  $H = G_k (k \geq 1)$  oder  $H = G_0 \cap G_1 = B(\mathbb{F}_q)$ . Für  $u, u' \in V(n)$  gilt: Sind  $u$  und  $u'$   $H$ -äquivalent, so haben sie denselben Typ.

Mit anderen Worten haben also alle Vertreter von Kanten der Stufe  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  ( $k \geq 0$ ), die in einen gemeinsamen Knoten der Stufe  $\Lambda_{k+1}$  münden, den gleichen Typ.

BEWEIS:

$$\text{Sei } g = \begin{pmatrix} a & b(T) \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H.$$

Für den Vertreter  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V(n)$  ist die Aussage trivial, da

$$g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$

$$\text{Sei also } \begin{pmatrix} x \\ f^i \end{pmatrix} \in V(n) \quad , i \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist:

$$\begin{pmatrix} a & b(T) \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b(T)f^i \\ df^i \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} d^{-1}ax + d^{-1}b(T)f^i \\ f^i \end{pmatrix}.$$

Ist der Zählergrad kleiner als  $l(r-i)$ , so handelt es sich um einen Vertreter gemäß Satz 3.4. Ist der Zählergrad größer oder gleich  $l(r-i)$ , so erweitert man mit  $(d^{-1}ax - d^{-1}b(T)f^i)$  und sieht dann:

$$\begin{pmatrix} d^{-1}ax + d^{-1}b(T)f^i \\ f^i \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} d^{-2}a^2x^2 - d^{-2}b(T)^2f^{2i} \\ d^{-1}axf^i - d^{-1}b(T)f^{2i} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} d^{-1}ax \\ f^i \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Definition 3.9** ( $V_k(n), E_{k,k+1}(n), [v]_k, [v]_{k,k+1}$ )

Für  $k \geq 0$  sei  $V_k(n)$  die Menge der Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  und  $E_{k,k+1}(n)$  die Menge der Kanten der Stufe  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  von  $\Gamma_0(N) \setminus^T$ .

Für  $v \in V(n)$  bezeichne  $[v]_k$  die Klasse von  $v$  modulo  $G_k$ .  $[v]_k$  steht also für den durch  $v$  bestimmten Knoten der Stufe  $\Lambda_k$ . Entsprechend bezeichne  $[v]_{k,k+1}$  die Klasse von  $v$  modulo  $G_k \cap G_{k+1}$ .  $[v]_{k,k+1}$  steht also für die durch  $v$  bestimmte Kante der Stufe  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } V_k(n) &\cong G_k \setminus V(n) = G_k \setminus \mathcal{P}^1(A/(n)) \\ \text{und } E_{k,k+1}(n) &\cong G_k \cap G_{k+1} \setminus V(n) = G_k \cap G_{k+1} \setminus \mathcal{P}^1(A/(n)). \end{aligned}$$

Die kanonischen Bijektionen beschreibe ich im Hauptsatz 1 (nächste Seite).

**Definition 3.10** ( $o_k, t_k$ )

Für  $k \geq 0$  seien  $o_k : E_{k,k+1} \rightarrow V_k(n)$  und  $t_k : E_{k,k+1} \rightarrow V_{k+1}(n)$  die Abbildungen die einer Kante  $e \in E_{k,k+1}$  die Knoten  $o(e)$  bzw.  $t(e)$  zuordnen.

Wegen der Anmerkung (1) zu Satz 2.28 ist  $o_k$  für  $k \geq 1$  bijektiv, d.h. jeder Knoten besitzt genau eine nach rechts weglaufende Kante.

**Satz 3.11**

Für  $k \geq 1$  haben wir wegen  $G_k \subset G_{k+1}$  die kanonische Surjektion  $\rho_k : V_k(n) \rightarrow V_{k+1}(n)$ , die jedem Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  seinen (eindeutig bestimmten) rechten Nachbarknoten (der Stufe  $\Lambda_{k+1}$ ) zuordnet.

BEWEIS: (falls noch nicht klar)

$\rho_k(v) = t(o_k(v)^{-1})$  ist offensichtlich eine wohldefinierte surjektive Abbildung von  $V_k(n)$  nach  $V_{k+1}(n)$ .  $\square$

Bei den ganzen Berechnungen fällt auf, daß das Zentrum (vgl. Satz 1.35) auf den Vertretern trivial operiert. Es genügt daher, die Operation der Gruppen

$$\begin{aligned} \tilde{B} &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^\times; b \in \mathbb{F}_q \right\} \\ \tilde{G}_k &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^\times; b \in \mathbb{F}_q[T]; \deg(b) \leq k \right\} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

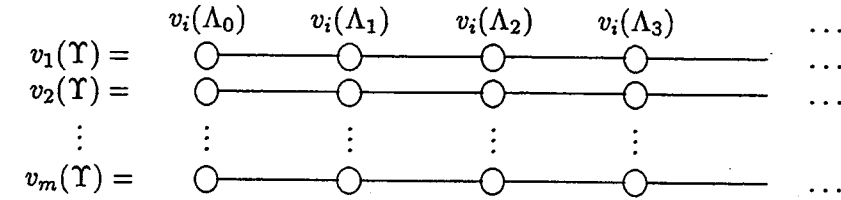
zu betrachten. Auch bei der Untersuchung der Äquivalenzbedingungen bzgl.  $G_0 = B \cup BwU$  werden wir uns auf die Mengen  $\tilde{B}$  und  $\tilde{B}wU$  zurückziehen ( $\tilde{B} \cup \tilde{B}wU$  ist keine Gruppe). Dabei sind  $B = B(\mathbb{F}_q)$  und  $U = U(\mathbb{F}_q)$  die in

1.39 und 1.41 definierten Gruppen und  $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Hauptsatz 1 (Berechnung von  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  falls  $n(T)$  primär)**

Man erhält den Graphen  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  indem man Knoten und Kanten des

graphischen Grundgerüsts



( $v_i \in V(n)$  gemäß Satz 3.4) entsprechend folgender Vorschriften identifiziert:

$$(1) v_i(\Lambda_0) \sim v_j(\Lambda_0) \Leftrightarrow \boxed{\exists g \in \tilde{G}_0 : gv_j \doteq v_i} ;$$

$$(2) v_i(\Lambda_0\Lambda_1) \sim v_j(\Lambda_0\Lambda_1) \Leftrightarrow \boxed{\exists g \in \tilde{B} : gv_j \doteq v_i} ;$$

$$(3) \text{ Für } k \geq 1 : v_i(\Lambda_k) \sim v_j(\Lambda_k)$$

$$\Leftrightarrow v_i(\Lambda_k\Lambda_{k+1}) \sim v_j(\Lambda_k\Lambda_{k+1}) \Leftrightarrow \boxed{\exists g \in \tilde{G}_k : gv_j \doteq v_i} ,$$

mit:

$$\tilde{B} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^\times; b \in \mathbb{F}_q \right\}$$

$$\tilde{G}_k := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^\times; b \in \mathbb{F}_q[T]; \deg(b) \leq k \right\} \quad (k \geq 1)$$

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_q \right\}$$

$$w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{G}_0 := \tilde{B} \cup \tilde{B}wU.$$

BEWEIS: Folgt direkt aus 3.4 bis 3.7.

Mit dem Hauptsatz 1 ist nun der Weg zur Berechnung der Graphen  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  geebnet. Durch weitere Überlegungen kann man nun präzisere Angaben über die Struktur ( Welche Knotentypen können auftreten ? ) der Graphen  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  machen. Für einige Berechnungen ist es am geschicktesten mit den Klassen  $[v]_k$  bzw.  $[v]_{k,k+1}$ , die Knoten bzw. Kanten der entsprechenden Stufe darstellen, zu rechnen. Bei anderen Berechnungen werden wir die Bahnen  $G_kv$  bzw.  $(G_k \cap G_{k+1})v$  untersuchen. Gleichzeitig möchte ich in diesem Kapitel einen Algorithmus entwickeln, der eine effiziente Berechnung der Graphen  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  (mit dem Computer) erlaubt. Dazu ist es sinnvoll, jede Bahn durch einen noch eindeutig zu bestimmenden Vertreter zu repräsentieren und dann mit diesen speziellen Vertretern zu rechnen. Für Kanten der

Stufe  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  ( $k \geq 0$ ) und Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) gilt nach Satz 3.8, daß alle Vertreter, die die Kante bzw. den Knoten repräsentieren, denselben Typ haben. Sie unterscheiden sich also nur in den Zählerpolynomen. Vertreter des gleichen Typs können durch folgende Ordnungsrelation verglichen

werden: 
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ f^i \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} u_2 \\ f^i \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_1(q) \leq u_2(q),$$

wobei auf der rechten Seite  $u_1$  und  $u_2$  als Polynome in  $\mathbb{Z}[T]$  mit Koeffizienten in  $\{0, \dots, q-1\} \subset \mathbb{Z}$  aufgefasst werden.  $u_1(q)$  und  $u_2(q)$  werden dann auf  $\mathbb{Z}$  mit der gewöhnlichen Ordnungsrelation " $\leq$ " verglichen. Als Repräsentant für eine Bahn  $G_k v$  ( $k \geq 1$ ) bzw.  $(G_k \cap G_{k+1})v$  ( $k \geq 0$ ) wählen wir den bezüglich " $\preceq$ " kleinsten Vertreter der Bahn. Dieser ist eindeutig bestimmt, da die Abbildung 
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ u & \mapsto & u(q) \end{array}$$
 wegen der Koeffizientenbeschränkung  $(0, \dots, q-1)$  injektiv ist.

Wenn  $n$  primär ist, kann man sehr genau angeben, wieviele Knoten und Kanten es in den einzelnen Stufen gibt. Wir werden später feststellen, daß es nur vier Arten von Knoten gibt. An folgendem Beispiel werde ich die einzelnen Überlegungen und Sätze erläutern.

**Bsp 1**  $n = f^2$ ;  $f \in \mathbb{F}_3[T]$  ist prim und hat den Grad 2.

Wegen  $B \subset G_k$  ( $k \geq 0$ ) folgen aus der Äquivalenzrelation  $v_i(\Lambda_0 \Lambda_1) \sim v_j(\Lambda_0 \Lambda_1)$  die Relationen  $v_i(\Lambda_k) \sim v_j(\Lambda_k)$  für alle  $k \geq 0$ . Es ist daher sinnvoll, ausgehend von  $V(n)$  zunächst die Menge  $E_{0,1}(n)$  der Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  zu berechnen.

### 3.2 Kanten der Stufe $\Lambda_0 \Lambda_1$

Durch folgende Überlegungen kann man die Menge  $E_{0,1}(n)$  der Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  explizit angeben.

Sei dazu  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{G}_0 \cap \tilde{G}_1$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ f^i \end{pmatrix} \in V(n)$ ,  $d = \deg(n)$ ;  $l = \deg(f)$ .

Es gilt: 
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bf^i \\ f^i \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun das bzgl. " $\preceq$ " kleinste Element dieser Bahnen berechnen. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

- (1) Ist  $\deg(x) > li$ , so kann man mit  $a \in \mathbb{F}_q^*$  den Zähler normieren und dann mit  $b \in \mathbb{F}_q$  den  $li$ -ten Zählerkoeffizienten auf Null setzen.
- (2) Ist  $\deg(x) = li$ , und  $c$  der höchste Koeffizient von  $x$ , so hat  $x - cf^i$  einen Grad kleiner  $li$  ( $f$  als normiert vorausgesetzt). Sei  $x - cf^i \neq 0$  und  $\lambda$  der höchste Koeffizient von  $x - cf^i$ . Mit  $a := \frac{1}{\lambda}$  und  $b := -\frac{c}{\lambda}$  ist  $ax + bf^i$  normiert und vom Grad kleiner  $li$ .

- (3) Ist  $\deg(x) < li$ , so erreicht man durch  $b = 0$ , daß der  $li$ -te Koeffizient gleich Null ist, und durch  $a \in \mathbb{F}_q^*$  geeignet, daß der Zähler normiert ist.

Ist  $u \in V(n)$ , so schreibe ich "u" für die durch  $u(\Lambda_0\Lambda_1)$  repräsentierte Kante der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$ . Ein Repräsentantensystem für die Menge  $E_{0,1}$  dieser Kanten ist dann:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid u \text{ normiert, } \deg(u) < d, T|u \right\} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \deg(u) < l(r-i), u \text{ normiert, } f \nmid u, \\ li\text{-ter Koeffizient von } u \text{ ist Null} \end{array} \right\}.$$

Ich schreibe dafür auch kurz  $E_{0,1}(n) = \{\dots\}$ . Ähnliche Bezeichnungen verwende ich zur Beschreibung der anderen Knoten und Kanten.

Für unser Beispiel **Bsp 1** bedeutet dies:

$$E_{0,1}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^2 + T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^2 + 2T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + 2T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + T^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + T^2 + T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + T^2 + 2T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + 2T^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + 2T^2 + T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + 2T^2 + 2T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+2 \\ f \end{pmatrix} \right\}.$$

Es gibt also 19 Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$ .

### 3.3 Knoten der Stufe $\Lambda_k$ ( $k \geq 1$ )

Durch ähnliche Überlegungen wie in 3.2 kann man auch die Menge  $V_k(n)$  der Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) angeben. Man beachte, daß für  $k \geq 1$  gilt:

$$E_{k,k+1}(n) \xrightarrow{\cong} V_k(n) \quad \begin{array}{l} e \mapsto o(e) \end{array}. \text{ Die Angabe einer Knotenmenge } V_k(n) \text{ ist also gleich-$$

bedeutend mit der Angabe der Kantenmenge  $E_{k,k+1}(n)$ .

Seien  $\begin{pmatrix} a & b(T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{G}_k, \begin{pmatrix} x \\ f^i \end{pmatrix} \in V(n), d = \deg(n), l = \deg(f)$ .

Dann gilt  $\begin{pmatrix} a & b(T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b(T)f^i \\ f^i \end{pmatrix}$ .

Nun suchen wir wieder den bzgl. " $\preceq$ " kleinsten Vertreter der Bahnen. Durch  $b \in \mathbb{F}_q$  kann man jetzt den  $li + k$ -ten Zählkoeffizienten auf Null setzen. Durch  $a \in \mathbb{F}_q^*$  kann man dann das Zählerpolynom normieren, falls

$\deg(x) \leq li + k$  gilt (sonst ist er schon normiert (vgl. 3.2)). Also sieht die Menge  $V_k(n)$  der Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) folgendermaßen aus:

$$V_k(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid u \text{ normiert, } \deg(u) < d, T^{k+1} \mid u \right\} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \mid u = \sum_{j=0}^{l(r-i)-1} \alpha_j T^j, u \text{ normiert, } f \nmid u, \alpha_{li} = \dots = \alpha_{li+k} = 0 \right\}.$$

Wendet man diese Formeln auf unser Beispiel **Bsp 1** an, so erkennt man, daß es 10 Knoten der Stufe  $\Lambda_1$  gibt:

$$V_1(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + T^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 + 2T^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+2 \\ f \end{pmatrix} \right\}.$$

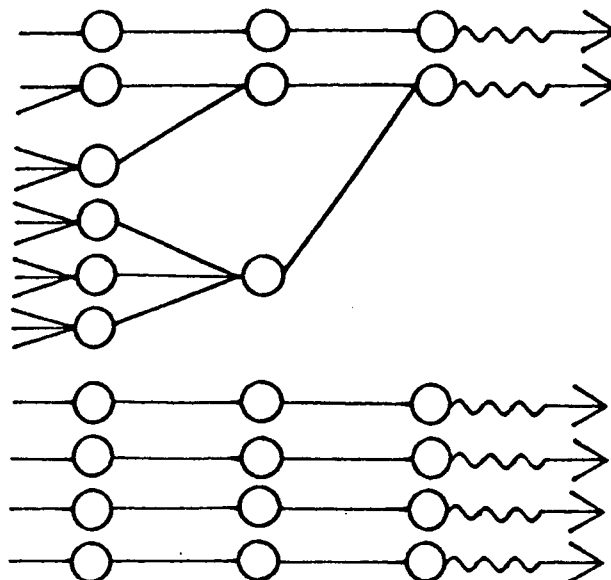
Es gibt insgesamt 7 Knoten der Stufe  $\Lambda_2$ :

$$V_2(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T^3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+2 \\ f \end{pmatrix} \right\},$$

und 6 Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  für ( $k \geq 3$ ):

$$V_k(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+2 \\ f \end{pmatrix} \right\}.$$

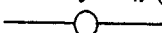
Der Graph  $\Gamma_0(N)^T$  sieht nach den bisherigen Ergebnissen also folgendermaßen aus (wobei noch zu klären ist, welche Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  bzgl.  $\tilde{G}_0$  identifiziert werden):




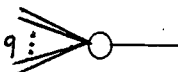
Anhand der Überlegungen von Abschnitt 3.3 kann man nun folgenden Struktursatz beweisen:

**Satz 3.12 (kleiner Struktursatz - Teil 1)**

Es gibt nur drei verschiedene Knotentypen der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ):

(1) Spitzen-Knoten der Form 

(2) Umverteilungsknoten der Form 

(3) stabile Knoten der Form 

BEWEIS: Es sei  $\begin{pmatrix} u \\ f_i \end{pmatrix} \in V(n)$  mit Klasse  $x := [\begin{pmatrix} u \\ f_i \end{pmatrix}]_k \in V_k(n)$ .

Wir bestimmen das Urbild  $t_{k-1}^{-1}(x)$ . Nach 3.8 werden alle Klassen von  $t_{k-1}^{-1}(x)$  durch  $\begin{pmatrix} u' \\ f_i \end{pmatrix} \in V(n)$  repräsentiert. Es gilt eine der folgenden Alternativen:

(1) Alle  $u'$  zu Vertretern dieses Typs haben kleineren Grad als  $li + k$ .

Dann besteht das Urbild nur aus der Klasse  $[\begin{pmatrix} u \\ f_i \end{pmatrix}]_{k-1,k}$ .  $x$  ist somit ein Spitzenknoten der Stufe  $\Lambda_k$ . Da für wachsendes  $k$  obige Bedingung erhalten bleibt, ist  $x$  ein Spitzenknoten aller Stufen  $\Lambda_j$  für  $j \geq k$ .

(2)  $\deg(u) \leq li + k$  und es gibt mindestens ein  $u'$  des Grades  $li + k$  (evtl.  $u$  selbst).

Dann gibt es genau ein  $u'$ , das bis auf den Koeffizienten von  $T^{li+k}$  mit  $u$  übereinstimmt. Somit besteht  $t_{k-1}^{-1}(x)$  nur aus den (verschiedenen!) Klassen von  $[\begin{pmatrix} u \\ f_i \end{pmatrix}]_{k-1,k}$  und  $[\begin{pmatrix} u' \\ f_i \end{pmatrix}]_{k-1,k}$ .  $x$  ist also ein Umverteilungsknoten.

(3)  $\deg(u) > li + k$ .

Dann gibt es außer  $u$  noch  $q-1$  weitere  $u'$ , die bis auf den  $li+k$ -Koeffizienten mit  $u$  übereinstimmen. Diese  $q$  ( $\tilde{G}_{k-1} \cap \tilde{G}_k$ )-inäquivalenten Elemente von  $V(n)$  werden unter  $\tilde{G}_k$  identifiziert.  $x$  ist dann ein stabiler Knoten.  $\square$

Man erkennt sehr leicht, daß für  $k \geq d$  nur noch die Alternative (1) (Spitzen-Knoten) auftreten kann. Hierdurch können wir die Spitzen (= Halbgeraden) des Graphen  $\Gamma_0(N) \setminus \mathbb{T}$  charakterisieren.

## 3.4 Spitzen

Die Knoten-Menge  $V_{d-1}(n)$  entspricht der Menge der Spitzen des Graphen. Nach Abschnitt 3.3 ist ein Repräsentantensystem  $Sp(n)$  für die Menge der Spitzen des Graphen  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  gegeben durch:

$$Sp(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \mid u = \sum_{j=0}^{\min\{li-1, l(r-i)-1\}} \alpha_j T^j; f \nmid u; u \text{ normiert} \right\}.$$

Nun berechne ich noch die Anzahl der Spitzen:

(1) Die zwei Spitzen  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  treten immer auf.

(2) Bei den übrigen Spitzen unterscheidet man zwei Fälle:

(2.1)  $li - 1 \leq l(r - i) - 1$ , d.h.  $i \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ .

Betrachtet man nun die  $f$ -Entwicklung der Polynome  $u$

$$u(T) = \sum_{j=0}^{li-1} \alpha_j T^j = \sum_{j=0}^i \beta_j(T) f^j, \deg(\beta_j(T)) < l,$$

so erkennt man direkt, daß

$$\#\left\{ \bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \mid u = \sum_{j=0}^{li-1} \alpha_j T^j; f \nmid u; u \text{ normiert} \right\} \right\} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{q^l - 1}{q - 1} q^{l(i-1)}.$$

(2.2)  $li - 1 > l(r - i) - 1$ , d.h.  $i > \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ .

Durch analoge Betrachtungen sieht man, daß

$$\#\left\{ \bigcup_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \mid u = \sum_{j=0}^{l(r-i)-1} \alpha_j T^j; f \nmid u; u \text{ normiert} \right\} \right\} \\ = \sum_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} \frac{q^l - 1}{q - 1} q^{l(r-i-1)}.$$

Für die Anzahl der Spitzen ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \#\{Sp\} &= 2 + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{q^l - 1}{q - 1} q^{l(i-1)} + \sum_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1}^{r-1} \frac{q^l - 1}{q - 1} q^{l(r-i-1)} \\ &= 2 + \frac{q^l - 1}{q - 1} \left( \frac{q^{l\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} - 1}{q^l - 1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} q^{li} \right) \\ &= 2 + \frac{1}{q - 1} \left( q^{l\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} - 1 + q^{l\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} - 1 \right). \end{aligned}$$

Somit hat der Graph  $\Gamma_0(n)\backslash^T$   $2 + \frac{q^{l\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} + q^{l\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} - 2}{q - 1}$  Spitzen.



### 3.5 Zwischenergebnis

Ausgehend von den Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  kann man die Kanten und Knoten höherer Stufen sehr einfach berechnen. Es fällt auch auf, daß diese Teilstruktur des Graphen nur vom Zerfallungstyp von  $n = f^r$  (d.h.  $r$  und Grad von  $f$ ) abhängt. Dies gilt jedoch nicht für den gesamten Graphen. Wir werden im folgenden sehen, daß man genau angeben kann, wie viele Knoten von einem bestimmten Typ es in der Stufe  $\Lambda_0$  gibt. Welche Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  bzgl.  $\tilde{G}_0$  identifiziert werden, hängt dann aber doch sehr stark vom Polynom  $f$  ab.

### 3.6 Knoten der Stufe $\Lambda_0$

Es bleibt noch die Frage, welche Vertreter bzgl.  $\tilde{G}_0$  identifiziert werden, d.h. für welche  $s, t \in V(n) \exists g \in \tilde{G}_0 : gs \doteq t$ .

Nach Definition (vgl. Hauptsatz 1) ist:  $\tilde{G}_0 = \tilde{B} \cup \tilde{B}wU$ .

Was uns eigentlich interessiert ist, wie viele Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  in einen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  münden. Wir wollen also wissen, welche  $\tilde{B}$ -inäquivalente Vertreter aus  $V(n)$  bzgl.  $\tilde{B}wU$  identifiziert werden.

#### Satz 3.13 ( $\tilde{B}wU$ -Hilfssatz)

- (a) Ein Vertreter  $v \in V(n)$  vom Typ  $i \geq 1$  kann durch Elemente aus  $\tilde{B}wU$  nicht mit einem Vertreter des Typs  $j \geq 1$  identifiziert werden.
- (b) In der Stufe  $\Lambda_0$  wird ein Vertreter  $v \in V(n)$  vom Typ  $i \geq 1$  bzgl.  $\tilde{B}wU$  mit entweder genau einem oder genau  $q$  paarweise  $\tilde{B}$ -inäquivalenten Vertretern des Typs 0 identifiziert.
- (c) Kann ein Vertreter  $v \in V(n)$  vom Typ 0 bzgl.  $\tilde{B}wU$  mit keinem Vertreter des Typs  $i \geq 1$  identifiziert werden, so existiert entweder kein Vertreter oder genau  $q$  paarweise  $\tilde{B}$ -inäquivalente Vertreter des Typs 0, die durch Elemente aus  $\tilde{B}wU$  mit  $v$  identifiziert werden können.

BEWEIS:

- (1) Beweis von Aussage (a):

Sei  $v = \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \in V(n)$  ein Vertreter von Typ  $i \geq 1$ . Dann rechnet man leicht nach:

$$\tilde{B}wUv = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+bc)f^i + bu \\ cf^i + u \end{pmatrix}.$$

Wegen  $f \nmid u$  gilt  $f \nmid cf^i + u$  und somit:

$$\begin{pmatrix} (a+bc)f^i + bu \\ cf^i + u \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} ((a+bc)f^i + bu) \cdot (cf^i + u)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also haben alle Vertreter  $\tilde{B}wUv$  den Typ 0, womit die Aussage (a) bewiesen wäre.

- (2) Zum Beweis von (b) ist es zweckmäßig, einen Vertreter  $v' \in V(n)$  des Typs 0 anzugeben, der bzgl.  $\tilde{B}wU$  mit  $v$  identifiziert werden kann:

$$\begin{aligned} v' &:= \begin{pmatrix} u^{-1}f^i \\ 1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} f^i \\ u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \in \tilde{B}wUv. \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun, wieviele Vertreter des Typs 0 durch Elemente aus  $\tilde{B}wU$  mit  $v'$  identifiziert werden können. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

- (2.1)  $i > \left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil$ , d.h.  $2i > r-1$ .

Für  $c \in \mathbb{F}_q^*$  gilt dann  $(u^{-1}f^i + c)^{-1} \equiv -\frac{1}{c^2}(u^{-1}f^i - c) \pmod{n}$ ,  
da  $(u^{-1}f^i + c) \cdot (u^{-1}f^i - c)$   
 $= u^{-2}f^{2i} - c^2 \equiv -c^2 \pmod{n}$  mit  $-c^2 \in \mathbb{F}_q^*$ .

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{B}wUv' &= \tilde{B} \begin{pmatrix} 1 \\ u^{-1}f^i + c \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} u^{-1}f^i - c \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\doteq \tilde{B} \begin{pmatrix} u^{-1}f^i \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{B}v' \end{aligned}$$

Alle Vertreter vom Typ 0, die bzgl.  $\tilde{B}wU$  mit  $v'$  identifiziert werden, sind zu  $v'$   $\tilde{B}$ -äquivalent.  $v'$  ist also der einzige zu  $v$   $\tilde{B}$ -inäquivalente Vertreter, der bzgl.  $\tilde{B}wU$  mit  $v$  identifiziert werden kann. In diesem Fall münden in den von  $v$  repräsentierten Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  nur die beiden durch  $v$  und  $v'$  repräsentierten (verschiedenen!) Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$ .

- (2.2)  $i \leq \left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil$ , d.h.  $2i \leq r-1$ .

Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

- (2.2.1) Zunächst untersuchen wir, ob ein Vertreter des Typs 0, der zu  $v'$   $\tilde{B}wU$ -äquivalent ist, zu  $v'$  auch  $\tilde{B}$ -äquivalent sein kann.

$$\begin{aligned} \tilde{B}wUv' &= \tilde{B} \begin{pmatrix} u \\ f^i + cu \end{pmatrix} \stackrel{?}{\doteq} \begin{pmatrix} u^{-1}f^i + b \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{B}v' \\ \Leftrightarrow & u(f^i + cu)^{-1} \equiv u^{-1}f^i + b \pmod{f^r} \\ \Leftrightarrow & u^2 \equiv (f^i + cu)(f^i + bu) \pmod{f^r} \\ \Leftrightarrow & f^{2i} + (b+c)uf^i + (bc-1)u^2 \equiv 0 \pmod{f^r} \\ g(f) &:= f^{2i} + (b+c)uf^i + (bc-1)u^2 \text{ kann nur dann kongruent} \\ &\text{zu Null modulo } f^r \text{ sein, wenn } (bc-1)u^2 \equiv 0 \pmod{f^i} \text{ ist,} \\ &\text{was jedoch wegen } f \nmid u \text{ zu } bc-1 = 0 \text{ äquivalent ist.} \\ &\text{In diesem Fall gilt: } g(f) = f^{2i} + (b+c)uf^i \equiv 0 \pmod{f^r}. \\ &\text{Dies ist äquivalent zu } f^i + (b+c)u \equiv 0 \pmod{f^{r-i}}. \\ &\text{Wegen } i < r-i \text{ folgt nun } (b+c)u \equiv 0 \pmod{f^i}. \\ &\text{Dann ist } b+c = 0, \text{ da } f \nmid u \text{ und für } g \text{ gilt:} \\ &g(f) = f^{2i} \equiv 0 \pmod{f^r}. \end{aligned}$$

Dies ist jedoch nicht möglich, da  $2i < r$ .

Kein Vertreter des Typs 0, der bzgl.  $\tilde{B}wU$  mit  $v'$  identifiziert wird, kann auch (schon) bzgl.  $\tilde{B}$  mit  $v'$  identifiziert werden.

(2.2.2) Es bleibt die Frage, ob zwei Vertreter  $v_1$  und  $v_2$ , die bezüglich  $\tilde{B}wU$  mit  $v'$  identifiziert werden, untereinander bezüglich  $\tilde{B}$  identifiziert werden können. Wir wollen also wissen, ob die  $q$  Vertreter  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix}$ ,  $c \in \mathbb{F}_q$  zueinander  $\tilde{B}$ -inäquivalent sind.

Ann.:  $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{F}_q$ ,  $c_1 \neq c_2$  mit

$$\tilde{B}w \begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \tilde{B}w \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Dann existieren  $a \in \mathbb{F}_q^*$ ,  $b \in \mathbb{F}_q$  mit

$$\begin{pmatrix} f^i \\ c_1 f^i + u \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a f^i + b c_2 f^i + b u \\ c_2 f^i + u \end{pmatrix}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Kongruenzgleichung

$$(c_2 - a c_1 - b c_1 c_2) f^{2i} + (u - a u - b c_2 u - b c_1) f^i - b u^2 \equiv 0 \pmod{f^r}.$$

Aus  $f \nmid u$  folgt  $b = 0$ . Daraus folgt dann  $f \mid u(1-a)$  und somit  $a = 1$ . Dadurch schrumpft obige Kongruenzgleichung auf die Form

$$(c_2 - c_1) f^{2i} \equiv 0 \pmod{f^r}.$$

Wegen  $i \leq \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$  folgt nun  $c_1 = c_2$ , was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist.

Somit sind alle  $q$  Vertreter

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{F}_q$$

zueinander  $\tilde{B}$ -inäquivalent, repräsentieren also  $q$  verschiedene Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$ .

(3) Beweis von Aussage (c):

$v$  und alle Vertreter  $wUv$  sind vom Typ 0. Wir möchten nun zeigen, daß diese  $q+1$  Vertreter entweder alle zueinander  $\tilde{B}$ -äquivalent oder alle paarweise  $\tilde{B}$ -inäquivalent zueinander sind. Wir zeigen also: "Wenn zwei dieser Vertreter zueinander  $\tilde{B}$ -äquivalent sind, dann sind alle  $q+1$  Vertreter zueinander  $\tilde{B}$ -äquivalent".

Sei  $v = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \in V(n)$  ein Vertreter vom Typ 0. Für alle  $c \in \mathbb{F}_q$

sollen die Vertreter  $w \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$  vom Typ 0 sein, d.h. es muß gelten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u + c \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten gilt folgende bedeutsame Bedingung:

$$f \nmid u + c \quad \forall c \in \mathbb{F}_q \quad (\text{insbesondere } u \notin \mathbb{F}_q). \quad (3.14)$$

Zum Beweis unterscheide ich wieder zwei Fälle:

$$(3.1) \text{ Ann.: } \exists \bar{c} \in \mathbb{F}_q : w \begin{pmatrix} 1 & \bar{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \in \tilde{B}v.$$

Dies ist gleichbedeutend mit:  $\exists \bar{a} \in \mathbb{F}_q^*, \bar{b} \in \mathbb{F}_q :$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u + \bar{c} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \bar{a}u + \bar{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}(u + \bar{c}) + (\bar{b} - \bar{a}\bar{c}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit  $\tilde{u} := u + \bar{c}, a := \bar{a}, b := \bar{b} - \bar{a}\bar{c}$  schreibt sich obige Gleichung auch einfacher als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a\tilde{u} + b \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } a\tilde{u}^2 + b\tilde{u} - 1 \equiv 0 \pmod{f^r}.$$

Für  $c \in \mathbb{F}_q$  beliebig gilt dann

$$a(\tilde{u} + c)^2 + (b - 2ac)(\tilde{u} + c) + ac^2 - bc - 1 \equiv 0 \pmod{f^r}, \quad (*)$$

was man durch Ausmultiplizieren direkt verifizieren kann.

Es ist nun  $k := ac^2 - bc - 1 \neq 0$ , sonst wäre

$$(\tilde{u} + c)(a(\tilde{u} + c) + b - 2a) \equiv 0 \pmod{f^r},$$

also  $f \mid \tilde{u} + c$  oder  $f \mid a(\tilde{u} + c) + b - 2a$ , was jedoch ein Widerspruch zu (3.14) wäre.

Wir können also die Kongruenzgleichung (\*) durch  $-k$  dividieren und erhalten:

$$-\frac{a}{k}(\tilde{u} + c)^2 + \frac{2ac-b}{k}(\tilde{u} + c) - 1 \equiv 0 \pmod{f^r}.$$

Dies ist äquivalent zu  $\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + c \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -\frac{a}{k}(\tilde{u} + c) + \frac{2ac-b}{k} \\ 1 \end{pmatrix}$ , was

bedeutet, daß  $w \begin{pmatrix} 1 & \bar{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \in \tilde{B}v$  für alle  $c \in \mathbb{F}_q$ .

Wenn es also ein  $c \in \mathbb{F}_q$  gibt, mit  $w \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \in \tilde{B}e$ , dann gilt dies für alle  $c \in \mathbb{F}_q$ .

In den durch  $v$  repräsentierten Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  mündet entweder genau eine oder genau  $q+1$  (durch die  $\tilde{B}$ -inäquivalenten Vertreter  $wUv$  repräsentierte) Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$ .

$$(3.2) \text{ Ann.: } \exists c_1, c_2 \in \mathbb{F}_q, c_1 \neq c_2 \text{ mit } w \begin{pmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \in \tilde{B}w \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Dies ist gleichbedeutend mit:  $\exists a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q$  mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u + c_1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a + b(u + c_2) \\ u + c_2 \end{pmatrix}.$$

Durch  $\tilde{u} := u + c_2$ ,  $c := c_1 - c_2$  läßt sich diese Gleichung auch einfacher als  $\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + c \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a + b\tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$  schreiben. Dies ist äquivalent zu  $b\tilde{u}^2 + (a + bc - 1)\tilde{u} + ac \equiv 0 \pmod{f^r}$ .

Wegen  $c \neq 0$  (beachte Voraussetzungen  $c_1 \neq c_2$ ) und  $a \in \mathbb{F}_q^*$  ist  $ac \neq 0$ . Also läßt sich die Kongruenzgleichung umformen zu

$$-\frac{b}{ac}\tilde{u}^2 + \frac{1-a-bc}{ac}\tilde{u} - 1 \equiv 0 \pmod{f^r}, \text{ was äquivalent zu}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -\frac{b}{ac}\tilde{u} + \frac{1-a-bc}{ac} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$


Es gilt also  $\begin{pmatrix} 1 \\ u + c_2 \end{pmatrix} \in \tilde{B} \begin{pmatrix} u + c_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .


Für den Vertreter  $\tilde{v} = \begin{pmatrix} u + c_2 \\ 1 \end{pmatrix}$  gilt  $w\tilde{v} \in \tilde{B}\tilde{v}$ . Dann können wir wieder mit Fall (3.1) argumentieren, wodurch auch die Aussage (c) bewiesen wäre.  $\square$


Wir fassen das Ergebnis im folgenden Struktursatz zusammen:

**Satz 3.15 (kleiner Struktursatz - Teil 2)**

Es gibt nur drei verschiedene Knotentypen der Stufe  $\Lambda_0$ :

(1) *Isolani-Knoten* der Form 

(2) *Spitzen-Knoten* der Form 

(3) *stabile Knoten* der Form   $q+1$

BEWEIS: Dieser Satz folgt direkt aus dem  $\tilde{B}wU$ -Hilfssatz, denn für einen Vertreter  $v \in V(n)$  gilt eine der folgenden Alternativen:

(1)  $\tilde{B}wUv = \tilde{B}v$ . Dann hat  $v$  den Typ 0 und repräsentiert einen Isolani-Knoten (vgl.  $\tilde{B}wU$ -Hilfssatz Aussage (c)).

(Im Anschluß an diesen Beweis gehe ich noch gesondert auf die Isolani-Knoten ein.)

(2) Der Vertreter  $v$  hat den Typ  $i \geq 1$  und es gibt genau einen Vertreter vom Typ 0, der bzgl.  $\tilde{B}wU$  mit  $v$  identifiziert werden kann (vgl.  $\tilde{B}wU$ -Hilfssatz Aussage (a) und (b)). Dann repräsentiert  $v$  einen Spitzen-Knoten.

Aus dem Beweis des  $\tilde{B}wU$ -Hilfssatzes (vgl. (2.1)) kann man ablesen, daß  $v$  folgende Gestalt hat:  $v = \begin{pmatrix} u \\ f^i \end{pmatrix} \in V(n)$ ,  $i > \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$ .

Wegen  $\deg(u) \leq l(r-i) - 1 \leq \deg(f^i)$  repräsentiert (vgl. Abschnitt 3.4)  $v$  auch in den Stufen  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) einen Spitzen-Knoten.

- (3) Es gibt  $q$  paarweise  $\tilde{B}$ -inäquivalente Vertreter, die zu  $v$  (vom Typ  $\neq 0$  oder  $=0$ )  $\tilde{B}wU$ -äquivalent sind.  $v$  repräsentiert dann einen stabilen Knoten.  $\square$

Ich möchte nun noch einige Anmerkungen zu dem Knotentyp Isolani machen:

### 3.7 Isolani

Wir brauchen folgende schwache Version des Lemmas von Hensel.

#### Satz 3.16 (Lemma von Hensel)

Es sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $A$  ein Hauptidealring,  $f \in A$  prim,  $P \in A[X]$ ,  $u_r \in A$  mit  $P(u_r) \equiv 0 \pmod{f^r}$  und  $P'(u_r) \not\equiv 0 \pmod{f}$ . Dann existiert ein  $u_{r+1} \in A$  mit  $P(u_{r+1}) \equiv 0 \pmod{f^{r+1}}$ ,  $P'(u_{r+1}) \not\equiv 0 \pmod{f}$  und  $u_{r+1} \equiv u_r \pmod{f^r}$ . Dieses  $u_{r+1}$  ist eindeutig bestimmt modulo  $f^{r+1}$ .

BEWEIS: Behauptung: Das gesuchte Element ist  $u_{r+1} := u_r - \frac{P(u_r)}{P'(u_r)}$ .

- (0) Wegen  $P(u_r) \equiv 0 \pmod{f^r}$  und  $P'(u_r) \not\equiv 0 \pmod{f}$  gilt:

$$\frac{P(u_r)}{P'(u_r)} \equiv 0 \pmod{f^r}.$$

- (1)  $u_{r+1} \equiv u_r \pmod{f^r}$ , da  $\frac{P(u_r)}{P'(u_r)} \equiv 0 \pmod{f^r}$ .

- (2) Durch Taylor-Entwicklung von  $P(X)$  um den Punkt  $u_r$  erhält man:

$$\begin{aligned} P(u_{r+1}) &= P\left(u_r - \frac{P(u_r)}{P'(u_r)}\right) \\ &= P(u_r) - \frac{P(u_r)}{P'(u_r)}P'(u_r) + \frac{P(u_r)^2}{P'(u_r)^2}R_1(u_r), \quad R_1(x) \in A[X] \\ &= \frac{P(u_r)^2}{P'(u_r)^2}R(u_r) \equiv 0 \pmod{f^{r+1}}, \quad \text{da } \frac{P(u_r)}{P'(u_r)} \equiv 0 \pmod{f^r}. \end{aligned}$$

- (3) Durch Taylor-Entwicklung von  $P'(X)$  um den Punkt  $u_r$  erhält man:

$$\begin{aligned} P'(u_{r+1}) &= P'\left(u_r - \frac{P(u_r)}{P'(u_r)}\right) \\ &= P'(u_r) - \frac{P(u_r)}{P'(u_r)}P''(u_r) + \frac{P(u_r)^2}{P'(u_r)^2}R_2(u_r), \quad R_2(x) \in A[X] \\ &\equiv P'(u_r) \pmod{f^r}, \quad \text{da } \frac{P(u_r)}{P'(u_r)} \equiv 0 \pmod{f^r}. \end{aligned}$$

Wegen  $P'(u_r) \not\equiv 0 \pmod{f}$  gilt dann auch  $P'(u_{r+1}) \not\equiv 0 \pmod{f}$ .

- (4) Für ein  $u_{r+1}$  mit den behaupteten Bedingungen gilt:

$\frac{u_{r+1} - u_r}{f^r}$  ist eindeutig bestimmt modulo  $f$ , also ist  $u_{r+1}$  eindeutig bestimmt modulo  $f^{r+1}$ .  $\square$

Im Beweis des  $\tilde{B}wU$ -Hilfssatzes haben wir gesehen, daß die Existenz eines Isolani folgende Bedingung impliziert:

$$\exists a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q, u \in \mathbb{F}_q[T] : au^2 + bu - 1 \equiv 0 \pmod{f^r},$$

wobei für  $u$  die Bedingung 3.14:  $\forall c \in \mathbb{F}_q : f \nmid u + c$  gilt.

Die Existenz einer solchen Gleichung bedeutet insbesondere, daß die Körpererweiterung  $\mathbb{F}_q[T]/(f)$  eine quadratische Körpererweiterung enthält und somit der Grad von  $f$  gerade ist.

Wenn andererseits der Grad von  $f$  gerade ist, so gibt es ein  $u_1 \in \mathbb{F}_q[T]$  mit  $1 \leq \deg(u_1) < l$ , das einer Kongruenz

$$au_1^2 + bu_1 - 1 \equiv 0 \pmod{f} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{F}_q$$

genügt. Da  $aX^2 + bX - 1$  über  $\mathbb{F}_q$  irreduzibel ist, ist jede Nullstelle einfach, also die Ableitungen an  $u_1 \not\equiv 0 \pmod{f}$ . Damit ist die Voraussetzung des Lemmas von Hensel erfüllt. Aus der Existenz von  $u_1$  können wir also auf die Existenz eines Elementes  $u \in \mathbb{F}_q[T]$  mit  $au^2 + bu - 1 \equiv 0 \pmod{f^r}$  schließen.

Es ist somit klar, daß  $\deg(f) \equiv 0 \pmod{2}$  eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Isolani darstellt. Es bleibt noch die Frage, wieviele Isolani auftreten können.

Ebenfalls aus dem Lemma von Hensel folgt, daß jede Lösung der Kongruenz modulo  $f^r$  bereits durch eine Lösung der Kongruenz modulo  $f$  bestimmt ist. Also hat jede irreduzible quadratische Gleichung mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_q$  über dem Ring  $\mathbb{F}_q[T]/(f^r)$  genau zwei Lösungen.

Die beiden Lösungen einer irreduziblen quadratischen Gleichung entsprechen nach dem  $\tilde{B}wU$ -Hilfssatz zwei Vertretern aus der Bahn eines Isolani-Knotens. Die volle Bahn eines Isolani hat (wegen  $|\tilde{B}| = q(q-1)$ ) genau  $q(q-1)$  Vertreter. Pro Isolani-Knoten muß es also  $\frac{q(q-1)}{2}$  irreduzible quadratische Gleichungen geben. Da es über  $\mathbb{F}_q$  genau  $\frac{q(q-1)}{2}$  irreduzible quadratische Polynome gibt, gibt es genau einen Isolani-Knoten.

Wir fassen das Ergebnis obiger Überlegungen in einem Korollar zusammen.

### Korollar 3.17 (Isolani-Satz)

Sei  $n$  primär. Der Graph  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  hat genau dann einen Isolani-Knoten, wenn der Grad von  $n$  gerade ist. Jeder Repräsentant des Isolani-Knotens hat den Typ 0.

Kommen wir nun nocheinmal zu unserem Beispiel Bsp 1 zurück:

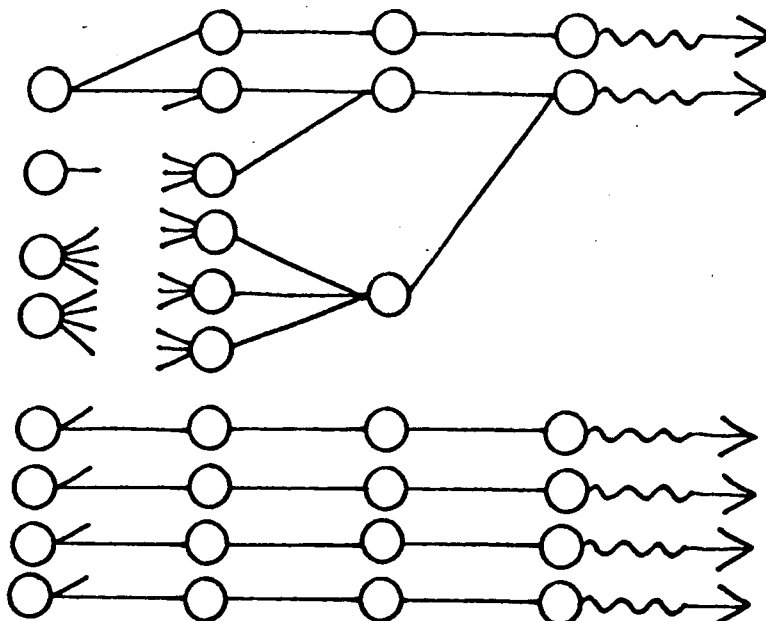
Nach obigem Satz gibt es einen Isolani-Knoten vom Typ 0. Man kann diesen aber nur dann explizit angeben, wenn  $f \in \mathbb{F}_3[T]$  bekannt ist.

Außerdem gibt es in unserem Beispiel fünf Spitzen-Knoten der Stufe  $\Lambda_0$ :

- (1) Der  $\infty$ -Vertreter wird mit dem 0-Vertreter identifiziert.
- (2) Die vier Vertreter  $\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+2 \\ f \end{pmatrix}$ , werden jeweils mit genau einem Vertreter vom Typ 0 bzgl.  $\tilde{G}_0$  identifiziert (Auch diese Vertreter von Typ 0 kann man nur dann angeben, wenn  $f$  bekannt ist).

Die verbleibenden acht Kanten bilden dann zwei stabile Knoten.

Demnach sieht der Graph  $\Gamma_0(n)^T$  von **Bsp 1** folgendermaßen aus:



Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen in folgendem Hauptsatz zusammen.

**Hauptsatz 2 (kleiner Struktursatz)**

In einem Graphen  $\Gamma_0(n)^T$  mit  $n$  primär können nur vier Knotentypen auftreten:

Knoten-Typ	Stufe $\Lambda_0$	Stufe $\Lambda_k (k \geq 1)$
Isolani-Knoten		
Spitzen-Knoten		
Umverteilungs-Knoten		
stabile Knoten		



## 4 Der Graph $\Gamma_0(n) \backslash^T$ für zusammengesetztes $n$

Ich betrachte nun den Fall, daß  $n$  zusammengesetzt ist, also

$$n = \prod_{j=1}^s f_{l_j}^{r_j}; \quad f_{l_j} \text{ prim vom Grad } l_j; \quad \text{die } f_{l_j} \text{ sind paarweise verschieden.}$$

Des weiteren sei  $n_j = f_{l_j}^{r_j}$ ,  $d_j = \deg(n_j)$  und  $d = \deg(n)$ .

### 4.1 Grundlegende Überlegungen

Wir definieren uns ein Vertretersystem von  $\prod_{j=1}^s \Gamma_0(n_j) \backslash^\Gamma$ :

**Definition 4.1 (Vertretersystem  $U(n)$ )**

$$U(n) := \prod_{j=1}^s U(n_j) = \{(u_1, u_2, \dots, u_s) \mid u_i \in U(n_i)\}.$$

$u_i$  heißt die  $i$ -te Komponente eines Vertreters  $(u_1, u_2, \dots, u_s)$ .

Nach dem chinesischen Restsatz läßt sich zu jedem  $u = (u_1, \dots, u_s) \in U(n)$  eine Matrix  $\tilde{u}$  über  $\mathbf{A}$  konstruieren mit  $\tilde{u} \equiv u_i \pmod{n_i}$  für  $i = 1, \dots, s$ . Insbesondere gilt  $\det(\tilde{u}) \equiv 1 \pmod{n}$ , da für  $i = 1, \dots, s$   $\det(u_i) = 1$  ist.

### Satz 4.2

Sei  $n \in \mathbf{F}_q[T]$  beliebig und  $\tilde{u} \in \text{Mat}(2, \mathbf{F}_q[T])$  mit  $\det(\tilde{u}) \equiv 1 \pmod{n}$ . Dann existiert ein  $u' \in \text{Sl}_2(\mathbf{F}_q[T])$  (d.h.  $\det(u') = 1$ ) mit  $u' \equiv \tilde{u} \pmod{n}$ .

BEWEIS:

Nach dem Elementarteilersatz existieren Matrizen  $U, V \in \text{Sl}_2(\mathbf{F}_q[T])$  mit:

$$U\tilde{u}V = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad a, d \in \mathbf{F}_q[T], \quad ad \equiv 1 \pmod{n}.$$

Setze nun:  $W := \begin{pmatrix} d & 1 \\ d-1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $X := \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dann sind  $W$  und  $X$  Elemente aus  $\text{Sl}_2(\mathbf{F}_q)$  und es gilt:

$$WU\tilde{u}VX = \begin{pmatrix} ad & d-ad^2 \\ ad-a & d+ad-ad^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}.$$

Somit hat  $u' := U^{-1}W^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} X^{-1}V^{-1}$  die gewünschte Eigenschaft. □

Satz 4.2 bedeutet insbesondere, daß die kanonische Abbildung

$$\pi : \Gamma_0(n) \backslash^\Gamma \rightarrow \prod_{j=1}^s \Gamma_0(n_j) \backslash^\Gamma \text{ surjektiv ist.}$$

$\pi$  ist auch injektiv, denn aus  $\pi(\gamma) = \pi(\delta)$  für  $\gamma, \delta \in \Gamma$  folgt

$$\delta\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n_i) \quad \forall i, \text{ also } c \equiv 0 \pmod{n_i} \quad \forall i.$$

Dies bedeutet  $c \equiv 0 \pmod{n}$ , also  $\delta\gamma^{-1} \in \Gamma_0(n)$ .

Betrachtet man  $\pi$  als Identifikation(sabbildung), so können wir  $U(n)$  als Vertretersystem für  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  auffassen.

Es ist leicht einzusehen, daß  $g \in G_k$  komponentenweise (von rechts !) auf  $\Gamma_0(n)\backslash^T = \prod_{j=1}^s \Gamma_0(n_j)\backslash^T$  operiert. Für  $u \in U(n)$  gilt also:

$$ug = (u_1, \dots, u_s)g = (u_1g, \dots, u_sg).$$

Man kann sich daher mit den gleichen Argumenten wie in Kapitel 3 auf ein reduziertes Vertretersystem  $V(n)$  zurückziehen:

#### Satz 4.3 (Vertretersystem $V(n)$ )

Sei  $n$  zusammengesetzt, also  $n = \prod_{j=1}^s f_{l_j}^{r_j} = \prod_{j=1}^s n_j$ . Dann sieht ein Vertretersystem  $V(n)$  von  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  folgendermaßen aus:

$$V(n) = \{(v_1, v_2, \dots, v_s) \mid v_j \in V(n_j)\} \cong \mathcal{P}^1(n_1) \times \dots \times \mathcal{P}^1(n_s).$$

Auch die Sätze 3.5, 3.7 und 3.8 lassen sich direkt (durch komponentenweise Betrachtung) auf den zusammengesetzten Fall übertragen.

#### Definition 4.4 (Vertretergleichheit).

Zwei Vektoren  $s = \begin{pmatrix} s_4 \\ s_3 \end{pmatrix}$  und  $t = \begin{pmatrix} t_4 \\ t_3 \end{pmatrix}$  aus  $A^2$  heißen vertretergleich, wenn sie durch den gleichen Vertreter  $u \in V(n)$  dargestellt werden. Wir schreiben hierfür  $s \doteq t$ .

Es gilt also  $s \doteq t \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma_0(n)$  mit  $\begin{pmatrix} * & * \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} * & * \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$ .

#### Satz 4.5 (angepaßte Äquivalenzbedingungen)

Seien  $v = \left( \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{1,3} & v_{1,4} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_{s,1} & v_{s,2} \\ v_{s,3} & v_{s,4} \end{pmatrix} \right) \in U(n)$  und

$$w = \left( \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} \\ w_{1,3} & w_{1,4} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} w_{s,1} & w_{s,2} \\ w_{s,3} & w_{s,4} \end{pmatrix} \right) \in U(n).$$

$\tilde{v} = \left( \begin{pmatrix} v_{1,4} \\ v_{1,3} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_{s,4} \\ v_{s,3} \end{pmatrix} \right)$  und  $\tilde{w} = \left( \begin{pmatrix} w_{1,4} \\ w_{1,3} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} w_{s,4} \\ w_{s,3} \end{pmatrix} \right)$  seien die entsprechenden Vertreter aus  $V(n)$ . Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ :

$$\exists g \in G_k : vgw^{-1} \in \Gamma_0(n) \Leftrightarrow \exists g' \in G_k : g' \cdot \tilde{w} \doteq \tilde{v}.$$

#### Satz 4.6

Sei  $H = G_k$  ( $k \geq 1$ ) oder  $H = G_0 \cap G_1 = B(\mathbb{F}_q)$ . Für  $u, u' \in V(n)$  gilt: Sind  $u$  und  $u'$   $H$ -äquivalent, so haben sie komponentenweise denselben Typ.

Wie im Paragraph 3 möchte ich auch hier alle Sätze an einem Beispiel erklären. Hierzu bietet sich folgender Fall an:

$$\boxed{\text{Bsp 2}} \quad n = T^2(T^2 + T + 2) \in \mathbf{F}_3[T].$$

Für  $\boxed{\text{Bsp 2}}$  sieht ein Vertretersystem  $V(n)$  dann folgendermaßen aus:

$V(n) = \{(v_1, v_2)\}$  mit

$$v_1 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} T+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2T+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2T+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ T \end{pmatrix} \right\},$$

$$v_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} T+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2T \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2T+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2T+2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Einfachheit halber vereinbaren wir:

Die Komponente  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  heißt  $\infty$  und die Komponenten  $\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$  vom Typ 0

werden nur mit dem Zähler  $u$  bezeichnet. Die Komponente  $\begin{pmatrix} 1 \\ T \end{pmatrix}$  heißt  $\frac{1}{T}$

und die Komponente  $\begin{pmatrix} 2 \\ T \end{pmatrix}$  entsprechend  $\frac{2}{T}$ .

Wie im primären Fall gilt auch hier (nach Satz 4.6), daß alle Vertreter, die eine Kante der Stufe  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  ( $k \geq 0$ ) oder einen Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) repräsentieren, komponentenweise denselben Typ haben. Mit der Ordnungsrelation " $\preceq$ " (vgl. S.39) können wir die  $i$ -ten Komponenten solcher Vertreter vergleichen. Als Repräsentanten einer Bahn wählen wir immer den lexikographisch kleinsten (bzgl. " $\preceq$ ") Vertreter dieser Bahn. Also ist das Zählerpolynom der ersten Komponenten des Repräsentanten kleiner oder gleich den Zählerpolynomen der ersten Komponenten aller anderen Vertreter der Bahn (Bei Gleichheit gilt entsprechendes für die zweiten Komponenten usw.). Wenn ich einen Vertreter "in Normalform bringe", bedeutet dies, daß ich den lexikographisch kleinsten Vertreter der (gerade betrachteten) Bahn auswähle.

4.2 Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$ 

Im zusammengesetzten Fall ist es schwierig, die Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  explizit anzugeben. Man kann nur folgende Überlegungen anstellen:

Zunächst wird  $\tilde{B}$  auf die erste Komponente eines Vertreters angewandt. Dieser kann dadurch in die Normalform gebracht werden. Das Element  $b \in \tilde{B}$ , das man benutzt um die erste Komponente zu verändern, wird nun auf alle Folgekomponenten angewandt. Die Normalform der ersten Komponente hat eine Fixgruppe, die dann auf die zweite Komponente angewendet wird, ...

Als Fixgruppen treten - neben der trivialen Gruppe - die Untergruppen

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^* \right\} \text{ und } T := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F}_q \right\} \text{ auf.}$$

I. Anwendung von  $\tilde{B}$  auf eine Komponente  $v_j$ :

Die Gruppe  $\tilde{B}$  kann bei einem Vertreter nur die zwei Operationen:

- Normieren des Zählers und
- Auslöschen eines best. Zählerkoeffizienten bewirken.

(1) Ist die Komponente  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , so wird  $\tilde{B}$  auf die nächste Komponente angewendet ( $\tilde{B}$  kann bei der Komponente nichts "bewirken").

(2) Ist die Komponente  $\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{F}_q$ , so wird diese durch  $\tilde{B}$  zu  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  transformiert. Das entsprechende Element von  $\tilde{B}$  wird auf alle Folgekomponenten angewandt, worauf diese nur noch durch die Gruppe  $W$  abgeändert werden können.

(3) Ist die Komponente vom Typ

$$\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid u = \sum_{m=0}^{d-1} \alpha_m T^m \text{ mit } \deg(u) > 0, \text{ so kann diese durch } \tilde{B} \text{ zu}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \mid u = \sum_{m=0}^{d-1} \alpha_m T^m \text{ mit } \deg(u) > 0; \alpha_0 = 0; u \text{ normiert}$$

transformiert werden. Das Element  $b \in \tilde{B}$ , das diese Änderung bewirkt, wird auf alle Folgekomponenten angewandt.

(4) Hat die Komponente die Gestalt

$$\begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} \mid u = \sum_{m=0}^{l_j(\tau_j-i)-1} \alpha_m T^m; f_{l_j} \nmid u \text{ mit } i > \left\lceil \frac{\tau_j-1}{2} \right\rceil, \text{ so kann sie}$$

durch  $\tilde{B}$  zu

$$\begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} \mid u = \sum_{m=0}^{l_j(\tau_j-i)-1} \alpha_m T^m; f_{l_j} \nmid u, u \text{ normiert}$$

transformiert werden. Auch hier wird das Element  $b \in \tilde{B}$ , das diese Transformation bewirkt, auf alle Folgekomponenten angewandt.

- (5) Es bleibt als Komponententyp nur noch die Möglichkeit:

$$\begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} | u = \sum_{m=0}^{l_j(r_j-i)-1} \alpha_m T^m; f_{l_j} \not\propto u \text{ mit } i \leq \left\lfloor \frac{r_j-1}{2} \right\rfloor.$$

Komponenten diesen Typs können durch ein Element  $b \in \tilde{B}$  zu

$$\begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} | u = \sum_{m=0}^{l_j(r_j-i)-1} \alpha_m T^m; f_{l_j} \not\propto u, \alpha_{l_j i} = 0 \text{ und } u \text{ normiert}$$

transformiert werden. Dieses Element  $b$  wird dann wieder auf alle Folgekomponenten angewandt. Anschließend können die Folgekomponenten noch durch die Gruppe  $T$  vereinfacht werden.

## II. Anwendung von $W$ auf eine Komponente $v_j$ :

Durch die Gruppe  $W$  kann in bestimmten Fällen der Zähler eines Vertreters normiert werden.

- (1) Ist die Komponente  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , so bleibt diese Komponente unverändert, da  $W$  gerade die Fixgruppe dieser Elemente ist.  $W$  wird also auf die nächste Komponente angewendet.

- (2) Hat die Komponente einen anderen Typ als in (1), also

$$\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} | u = \sum_{m=0}^{l_j r_j - 1} \alpha_m T^m \text{ mit } u \neq 0 \text{ oder}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} | u = \sum_{m=0}^{l_j(r_j-i)-1} \alpha_m T^m; f_{l_j} \not\propto u, \text{ so kann man}$$

$u$  durch  $W$  normieren. Das entsprechende Element wird auf alle Folgekomponenten angewandt.

## III. Anwendung von $T$ auf eine Komponente $v_j$ :

Mit Hilfe der Gruppe  $T$  läßt sich in bestimmten Fällen ein Koeffizient des Zählers auslöschen.

- (1) Ist die Komponente  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  oder

$$\begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} | u = \sum_{m=0}^{l_j(r_j-i)-1} \alpha_m T^m; f_{l_j} \not\propto u \text{ mit } i > \left\lfloor \frac{r_j-1}{2} \right\rfloor, \text{ so bleibt diese}$$

Komponente unverändert und  $T$  wird auf die nächste Komponente angewendet.

- (2) Hat die Komponente einen anderen Typ als in (1), also

$$\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} | u = \sum_{m=0}^{l_j r_j - 1} \alpha_m T^m \text{ oder}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} | u = \sum_{m=0}^{l_j(r_j-i)-1} \alpha_m T^m; f_{l_j} \not\propto u \text{ mit } i \leq \left\lfloor \frac{r_j-1}{2} \right\rfloor,$$

so kann man den Koeffizienten  $\alpha_0$  bzw.  $\alpha_{l_j}$  auf Null setzen. Wiederum wird das entsprechende Element auf alle Folgekomponenten angewandt.

Diese Überlegungen liefern zweierlei. Erstens einen rekursiven Algorithmus zur Berechnung der Menge der Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  und zweitens kann man jetzt die Anzahl dieser Kanten ausrechnen:

#### Berechnung der Anzahl der Kanten der Stufe $\Lambda_0\Lambda_1$

(1) Die Anzahl der Elemente des Vertretersystems  $V(n)$  berechnet man leicht als 
$$\epsilon(n) = \epsilon\left(\prod_{j=1}^s f_{l_j}^{r_j}\right) = \prod_{j=1}^s q^{l_j(r_j-1)}(q^{l_j} + 1).$$

(2) Für alle Vertreter  $v \in V(n)$  wollen wir nun die Längen der Bahnen  $\tilde{B}v$  berechnen. Wir unterscheiden vier Fälle:

(2.1) Die Bahn des Vertreters  $v_\infty := (\infty, \dots, \infty)$  hat wegen  $\tilde{B}v_\infty = v_\infty$  die Länge 1.

Es gibt also eine Bahn der Länge 1.

(2.2) Für  $c \in \mathbb{F}_q$  sei  $M_c := \{(u_1, \dots, u_s) \mid u_j = \infty \text{ oder } u_j = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}\}$

und  $M := \bigcup_{c=0}^{q-1} (M_c \setminus \{v_\infty\})$ . Dann hat  $M$   $q(2^s - 1)$  Elemente und die Bahnen aller Elemente  $v \in M$  haben die Länge  $q$ , denn aus  $v \in M_c \setminus \{v_\infty\}$  folgt  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \in M_{b+c} \setminus \{v_\infty\}$ .

Es gibt also  $2^s - 1$  disjunkte Bahnen der Länge  $q$ .

(2.3) Für  $j = 1, \dots, s$  sei

$$N_j := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} \mid \deg(u) < l_j(r_j - i); f_{l_j} \nmid u \text{ mit } i > \left\lfloor \frac{r_j-1}{2} \right\rfloor \right\}$$

und  $N := \{(u_1, \dots, u_s) \mid u_j = \infty \text{ oder } u_j \in N_j\} \setminus \{v_\infty\}$ .

$N_j$  hat dann  $(q^{l_j} - 1) \sum_{i=\lfloor \frac{r_j+1}{2} \rfloor}^{r_j-1} q^{l_j(r_j-i-1)} = q^{l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor} - 1$  Elemente

und  $N$  somit  $\prod_{j=1}^s q^{l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor} - 1 = q^{\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor} - 1$  Elemente. Die Bahnen

der  $v \in N$  haben wegen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \dots, \begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix}, \dots \right) = \left( \dots, \begin{pmatrix} au + bf_{l_j}^i \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix}, \dots \right) = \left( \dots, \begin{pmatrix} au \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix}, \dots \right)$$

die Länge  $q - 1$ .

Somit gibt es  $\frac{q^{\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor} - 1}{q-1}$  disjunkte Bahnen der Länge  $q - 1$ .

(2.4) Die Bahnen der verbleibenden Vertreter haben die volle Länge  $q(q-1)$ , da mindestens eine Komponente vom Typus

$$\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}, \deg(u) \geq 1 \text{ oder } \begin{pmatrix} u \\ f_{l_i}^i \end{pmatrix}, i \leq \lfloor \frac{r_i-1}{2} \rfloor \text{ ist.}$$

$$\text{Ihre Anzahl ist: } \epsilon(n) - 1 - q(2^s - 1) - \left( \sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor - 1 \right).$$

Somit gibt es  $\frac{\epsilon(n)-1-q(2^s-1)-(\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor - 1)}{q(q-1)}$  disjunkte Bahnen der Länge  $q(q-1)$ .

(3) Die Anzahl der Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  berechnet sich also als:

$$Z_{01}(n) = 1 + (2^s - 1) + \frac{\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor - 1}{q-1} + \frac{\epsilon(n)-1-q(2^s-1)-(\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor - 1)}{q(q-1)},$$

$$\text{zusammengefasst: } Z_{01}(n) = \frac{\epsilon(n)+q(q-2)2^s}{q-1} + \frac{\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor}{q}. \quad [4.1]$$

In unserem Beispiel **Bsp 2** gibt es somit 23 Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$ . Man kann auch die Menge  $E_{01}$  der Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  direkt hinschreiben:

$$E_{01}(n) = \{ (\infty, \infty), (\infty, 0), (\infty, T), (0, \infty), (0, 0), (0, 1), (0, T), (0, T+1), (0, T+2), (T, \infty), (T, 0), (T, 1), (T, 2), (T, T), (T, T+1), (T, T+2), (T, 2T), (T, 2T+1), (T, 2T+2), (\frac{1}{T}, \infty), (\frac{1}{T}, 0), (\frac{1}{T}, T), (\frac{1}{T}, 2T) \}.$$

### 4.3 Knoten der Stufe $\Lambda_k$ ( $k \geq 1$ )

Wir wollen nun klären, welche Knotentypen in der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) auftreten können, d.h. wieviele Kanten der Stufe  $\Lambda_{k-1}\Lambda_k$  in einen Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  münden. Für  $v \in V(n)$  gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k v &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b(T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q[T], \deg(b) \leq k \right\} \\ &= \bigcup_{c=0}^{q-1} \left\{ \begin{pmatrix} a & cT^k + b(T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q[T], \deg(b) \leq k-1 \right\} \\ &= \bigcup_{c=0}^{q-1} \left\{ \begin{pmatrix} a & b(T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & cT^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q[T], \deg(b) \leq k-1 \right\} \\ &= \bigcup_{c=0}^{q-1} (\tilde{G}_{k-1} \cap \tilde{G}_k) v_c \text{ mit } v_c := \begin{pmatrix} 1 & cT^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v. \end{aligned}$$

$\tilde{G}_k v$  besteht also aus (maximal)  $q$  Bahnen  $(\tilde{G}_{k-1} \cap \tilde{G}_k) v_c$ . Es bleibt die Frage, in welchen Fällen diese Bahnen verschieden bzw. gleich sind.

Wir wollen nun zeigen: "Sind zwei Bahnen  $(\tilde{G}_{k-1} \cap \tilde{G}_k)v_c$  gleich, so sind sogar  $q - 1$  Bahnen gleich".

Annahme:  $\exists c \neq c' : (\tilde{G}_{k-1} \cap \tilde{G}_k)v_c = (\tilde{G}_{k-1} \cap \tilde{G}_k)v_{c'}$ .

Wir können  $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  so wählen, daß o.B.d.A.  $c' = 0$  ist. Dann folgt:

$\exists a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q[T], \deg(b) \leq k - 1 :$

$$\begin{pmatrix} 1 & cT^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Ausrechnen ergibt:  $X + cT^kY = aX + b(T)Y$ .

Wegen  $\deg(b) \leq k - 1$  gilt nun:

$$\deg(X) = \deg(T^kY) \text{ und } cT^kY = (a - 1)X + b(T)Y, \text{ mit } a \neq 1.$$

Für  $\alpha \neq \frac{1}{1-a}$  gilt dann jedoch:

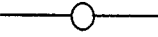
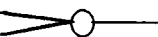
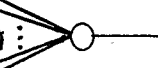
$$\begin{aligned} \alpha cT^kY &= \alpha(a - 1)X + \alpha b(T)Y \\ \Leftrightarrow X + \alpha cT^kY &= (\alpha a - \alpha + 1)X + \alpha b(T)Y \\ \Leftrightarrow (\tilde{G}_{k-1,k} \cap \tilde{G}_k)v_{\alpha c} &= (\tilde{G}_{k-1,k} \cap \tilde{G}_k)v. \end{aligned}$$

Die Einschränkung  $\alpha \neq \frac{1}{1-a}$  muß gemacht werden, damit der Term  $\alpha a - \alpha + 1 \in \mathbb{F}_q^*$  ist.

Diese Rechnung zeigt, daß sich eine Bahn  $\tilde{G}_k v$  entweder aus genau  $q$ , genau zwei oder genau einer Bahn  $(\tilde{G}_{k-1} \cap \tilde{G}_k)v_c$  zusammensetzt. Aus Kapitel 3 wissen wir, daß alle drei Möglichkeiten auftreten. Deshalb gilt:

**Satz 4.7 (großer Struktursatz - Teil 1)**

Im Graphen  $\Gamma_0(n)^T$  ( $n$  beliebig) gibt es nur drei verschiedene Knotentypen der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ):

- (1) Spitzen-Knoten      der Form 
- (2) Umverteilungsknoten      der Form 
- (3) stabile Knoten      der Form 

Im unserem Beispiel **Bsp 2** ergeben sich folgende Knotenmengen  $V_k$ :  
In der Stufe  $\Lambda_1$  gibt es 3 Umverteilungsknoten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, T) &= (0, 0), & \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\infty, T) &= (\infty, 0), \\ \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, \infty) &= (0, \infty), \end{aligned}$$

5 stabile Knoten:

$$\begin{pmatrix} 2 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, T + 2) = (0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, T + 1),$$



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, 0) &= (0, T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, 2T), \\ \begin{pmatrix} 2 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, 2) &= (0, T+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, 2T+1), \\ \begin{pmatrix} 2 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, 1) &= (0, T+2) = \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T, 2T+2), \\ \begin{pmatrix} 1 & 2T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\frac{1}{T}, T) &= (\frac{1}{T}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\frac{1}{T}, 2T), \end{aligned}$$

und die beiden Spitzen  $(\frac{1}{T}, \infty)$  und  $(\infty, \infty)$ .

Es gibt also 10 Knoten der Stufe  $\Lambda_1$ :

$$V_1(n) = \{(T, T), (\infty, 0), (0, \infty), (0, 1), (0, T), (0, T+1), (0, T+2), (\frac{1}{T}, 0), (\frac{1}{T}, \infty), (\infty, \infty)\}.$$

In der Stufe  $\Lambda_2$  gibt es nur einen Umverteilungsknoten

$$\begin{pmatrix} 1 & T^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0, T+2) = (0, 0), \text{ und einen stabilen Knoten}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2T^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0, T+1) = (0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & T^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0, T),$$

aber 5 Spitzen  $(\infty, 0), (0, \infty), (\infty, \infty), (\frac{1}{T}, 0), (\frac{1}{T}, \infty)$ .

Somit gibt es in der Stufe  $\Lambda_2$  7 Knoten:

$$V_2(n) = \{(0, 0), (0, 1), (\infty, 0), (0, \infty), (\infty, \infty), (\frac{1}{T}, 0), (\frac{1}{T}, \infty)\}.$$

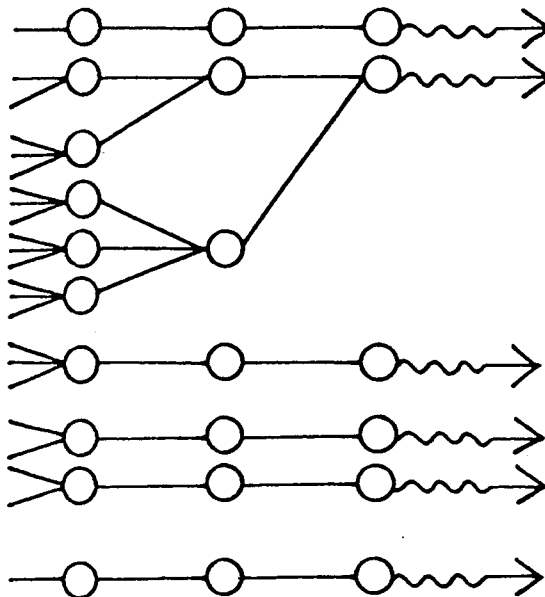
In der Stufe  $\Lambda_3$  gibt es außer den 5 Spitzen von oben noch einen Umver-

teilungsknoten  $\begin{pmatrix} 2 & T^3 + 2T^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0, 1) = (0, 0)$ . Dieser wird ab der Stufe

$\Lambda_4$  ebenfalls zu einer Spitze. Für  $k \geq 4$  ist die Knotenmenge also

$$V_k(n) = \{(0, 0), (\infty, 0), (0, \infty), (\infty, \infty), (\frac{1}{T}, 0), (\frac{1}{T}, \infty)\}.$$

Nach den bisherigen Erkenntnissen hat der Graph  $\Gamma_0(n)\backslash^T$  folgende Gestalt:



#### 4.4 Spitzen

Analog zum primären Fall, erkennt man auch hier, daß für  $k \geq d-1$  die Abbildung  $t_k$  (und somit auch die Abbildung  $\rho_k$ ) bijektiv ist. Ab dieser Stufe laufen also nur noch Spitzen vom Graphen weg. Ein Spitzen-Knoten der Stufe  $\Lambda_k$ ,  $k \geq d-1$  wird durch einen Vertreter dargestellt, der aus folgender Menge  $M$  stammt:

$$M = \{(v_1, v_2, \dots, v_s)\}$$

mit  $v_j \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\cup \bigcup_{i=1}^{r_j-1} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} \mid u = \sum_{m=0}^{\min\{l_j i - 1, l_j(r_j - i) - 1\}} \alpha_m T^m; f_{l_j} \nmid u \right\}.$$

##### Definition 4.8 (reguläre Spitzenvertreter)

Die Menge  $Sp_R(n) := \{(u_1, \dots, u_s) \mid u_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } u_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$  heißt die Menge der regulären Spitzenvertreter.

$Sp_R(n)$  hat  $2^s$  Elemente, die verschiedene Spitzen darstellen.

Es gilt:  $\kappa(n) := \#\{M\} = \prod_{j=1}^s \left( q^{l_j \lfloor \frac{r_j-1}{2} \rfloor} + q^{l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor} \right)$ .

Die Spitzen entsprechen den normierten Elementen von  $M$ . Dies sind die  $2^s$  Elemente der Menge  $Sp_R(n)$  und  $\frac{\kappa(n)-2^s}{q-1}$  weitere Vertreter.

##### Definition 4.9 (nichtreguläre Spitzenvertreter)

Die Menge  $Sp_{NR}(n)$  der  $\frac{\kappa(n)-2^s}{q-1}$  normierten Vertreter von  $M \setminus Sp_R(n)$  heißt die Menge der nichtregulären Spitzenvertreter.

Die Spitzenzahl ist somit:

$$Z_{Sp}(n) = 2^s + \frac{\kappa(n) - 2^s}{q-1}. \quad [4.2]$$

#### 4.5 Knoten der Stufe $\Lambda_0$

Als letztes bleibt noch zu klären, welche Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  denselben Startknoten haben. Auch hierbei kann man sich weitgehend auf den primären Fall zurückziehen.

$\tilde{B}wU$  operiert komponentenweise auf einem Vertreter  $v = (v_1, \dots, v_s)$  durch  $\tilde{B}wUv = \tilde{B}(wUv_1, \dots, wUv_s)$ . In Kapitel 3 wurde genau untersucht, welche  $\tilde{B}$ -inäquivalente Vertreter  $wUv_i$  in Abhängigkeit von  $v_i \in V(n_i)$  durchläuft. Dabei gibt es nur einen einzigen Fall in dem die "Kraft" von  $\tilde{B}wU$  nicht ausgenutzt wird:

$$wU\infty = w \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle (!) } u \in \mathbb{F}_q.$$

Wenn ein Vertreter  $v \in V(n)$  im zusammengesetzten Fall keine  $\infty$ -Komponenten besitzt, können in der Stufe  $\Lambda_0$  nur die vom primären Fall bekannten Knotentypen (Isolani-Knoten, Spitzen-Knoten, stabiler Knoten) auftreten. Was passiert jedoch wenn  $v$   $\infty$ -Komponenten hat? o.B.d.A. seien die ersten  $m < n$  Komponenten von  $v$   $\infty$ -Komponenten, also:

$$v = (\infty, \infty, \dots, \infty, v_{m+1}, \dots, v_s).$$

Dann gilt:

$$wUv = (wU\infty, \dots, wU\infty, wUv_{m+1}, \dots, wUv_s) = (0, \dots, 0, wUv_{m+1}, \dots, wUv_s).$$

Wir wissen aus Kapitel 3, daß die Menge  $\{(0, \dots, 0, wuv_{m+1}, \dots, wuv_s) \mid u \in U\}$  nur 1, 2 oder  $q$   $\tilde{B}$ -inäquivalente Elemente hat. Somit können von dem durch  $v$  repräsentierten Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  nur 2, 3 oder  $q + 1$  Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  ausgehen.

Im zusammengesetzten Fall kann es also in der Stufe  $\Lambda_0$  außer den aus Kapitel 3 bekannten Knotentypen noch einen Knotentyp mit drei Kanten geben. Daß dies tatsächlich eintritt, sieht man an folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} & \tilde{B}wU(\dots, \infty, \dots, 0, \dots) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots) \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q \right\} \\ &= \left\{ (\dots, \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \dots) \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q \right\} \\ &= \tilde{B}(\dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots) \cup \tilde{B}(\dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots) \\ &= \tilde{B}(\dots, 0, \dots, \infty, \dots) \cup \tilde{B}(\dots, 0, \dots, 1, \dots). \end{aligned}$$

Wir fassen das Ergebnis in folgendem Hauptsatz zusammen.

**Hauptsatz 3 (großer Struktursatz)**

In einem Graphen  $\Gamma_0(n)\setminus^T$  können nur vier Knotentypen auftreten.

Knoten-Typ	Stufe $\Lambda_0$	Stufe $\Lambda_k (k \geq 1)$
Isolani-Knoten		
Spitzen-Knoten		
Umverteilungs-Knoten		
stabile Knoten		

#### 4.6 Anzahl der Knoten je Knotentyp

Im folgenden werde ich die vier Knotentypen noch einzeln besprechen und Formeln für ihre Anzahlen berechnen. Ich beginne mit den Umverteilungsknoten:

##### Bestimmung der Anzahl $Z_U$ von Umverteilungsknoten

Wie oben besprochen, fallen in einem Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$  zwei Kanten, deren Vertreter nur aus 0- und  $\infty$ -Komponenten bestehen, und eine weitere Kante zusammen. Die Anzahl dieser Vertreter ist offensichtlich  $2^s$ . Ein Umverteilungsknoten tritt nur auf, wenn beide Komponenten (0 und  $\infty$ ) auftreten. Dadurch reduziert sich die Anzahl auf  $2^s - 2$  Stück. Weil von diesen Vertretern jeweils zwei zusammenfallen, ist die Anzahl der Umverteilungsknoten:

$$Z_U(n) = 2^{s-1} - 1 \quad [4.3]$$

##### Anzahl $Z_I$ der Isolani-Knoten

Im Abschnitt 3.7 bin ich schon einmal auf den Knotentyp Isolani zu sprechen gekommen. Dort wurden folgende drei Aussagen bewiesen::

- (1) Der Graph  $\Gamma_0(fr)\backslash^T$  hat genau dann einen Isolani, wenn die  $\frac{q(q-1)}{2}$  primen quadratischen Gleichungen über  $F_q$  Lösungen im Ring  $F_q[T]/(fr)$  haben.
- (2) Diese quadratischen Gleichungen haben genau dann Lösungen in dem Ring  $F_q[T]/(fr)$ , wenn  $f$  geraden Grad hat.
- (3) Wenn  $f$  geraden Grad hat, gibt es genau einen Isolani-Knoten.

Die Aussage (1) wurde vom  $\tilde{B}wU$ -Hilfssatz abgeleitet und hat daher auch im allgemeinen Fall sinngemäß Gültigkeit.

- (1') Der Graph  $\Gamma_0\left(\prod_{j=1}^s f_{l_j}^{r_j}\right)\backslash^T$  hat genau dann einen Isolani, wenn die  $\frac{q(q-1)}{2}$  primen quadratischen Gleichungen über  $F_q$  in den Ringen  $F_q[T]/(f_{l_j}^{r_j})$  Lösungen haben,  $1 \leq j \leq s$ .

Auch die Aussage (2) läßt sich verallgemeinern. In Kapitel 3.7 haben wir (mit Hilfe des Lemmas von Hensel) gezeigt, daß prime quadratische Gleichungen genau dann Lösungen im Ring  $F_q[T]/(fr)$  haben, wenn sie Lösungen im Körper  $F_q[T]/(f)$  haben. Dieser Sachverhalt läßt sich mit dem chinesischen Restesatz direkt auf Ringe  $F_q[T]/\left(\prod_{j=1}^s f_{l_j}^{r_j}\right)$  übertragen.

- (2') Die irreduziblen quadratischen Gleichungen haben genau dann Lösungen in den Ringen  $\mathbb{F}_q[T]/(f_{l_j}^{r_j})$ , wenn die Grade der Polynome  $f_{l_j}$  gerade sind.

Nur die Aussage (3) muß man etwas modifizieren. Es gibt über  $\mathbb{F}_q$  genau  $\frac{q(q-1)}{2}$  irreduzible quadratische Gleichungen. In 3.7 haben wir gezeigt, daß jede dieser Gleichungen in jedem Ring  $\mathbb{F}_q[T]/(f_{l_j}^{r_j})$  (falls der Grad von  $f_{l_j}$  gerade ist) genau zwei Lösungen hat. Somit gibt es insgesamt  $q(q-1)2^{s-1}$  Lösungstupel. Ihre Bahnen unter  $\bar{B}$  entsprechen den Isolani-Knoten. Die volle Bahn eines Isolani umfaßt jedoch genau  $q(q-1)$  Vertreter. Wir haben also folgende modifizierte Aussage:

- (3') Wenn alle  $s$  Polynome  $f_{l_j}$  geraden Grad haben, gibt es genau  $2^{s-1}$  Isolani-Knoten.

Die Anzahl der Isolani-Knoten ist somit:

$$Z_I(n) = r(n)2^{s-1} \quad [4.4]$$

$$\text{mit } r(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n \text{ nur Teiler geraden Grades hat} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

#### Anzahl $Z_{Sp_0}$ der Spitzen-Knoten der Stufe $\Lambda_0$

Im Beweis des  $\bar{B}wU$ -Hilfssatzes wurde beschrieben, wann genau zwei Kanten in einen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  münden. Die eine der beiden Kanten wird immer durch ein Element folgender Menge repräsentiert:

$$N = \{(v_1, v_2, \dots, v_s)\}$$

$$\text{mit } v_j \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \bigcup_{i=\lfloor \frac{r_j-1}{2} \rfloor + 1}^{r_j-1} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ f_{l_j}^i \end{pmatrix} \mid \deg(u) < l_j(r_j - i); f_{l_j} \nmid u \right\}.$$

Dann gilt

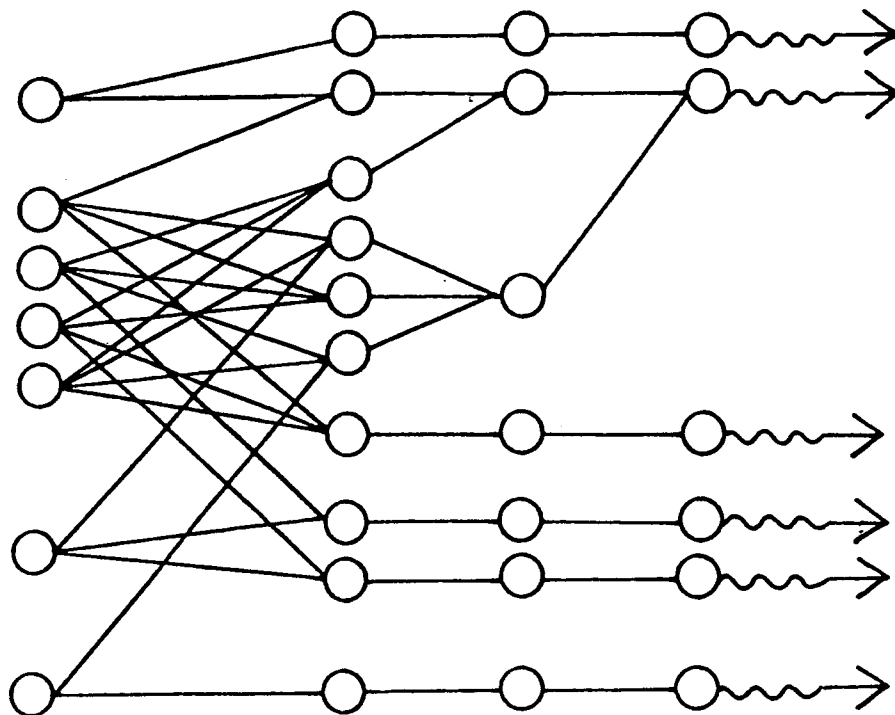
$$\begin{aligned} \#\{N\} &= \prod_{j=1}^s \left( 1 + \sum_{i=\lfloor \frac{r_j-1}{2} \rfloor + 1}^{r_j-1} (q^{l_j} - 1) q^{l_j(r_j - i - 1)} \right) \\ &= \prod_{j=1}^s \left( 1 + (q^{l_j} - 1) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor - 1} q^{l_j i} \right) \\ &= \prod_{j=1}^s q^{l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor} \\ &= q^{\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

Die normierten Vertreter der Menge  $N$  entsprechen den Spitzen-Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  (und auch Spitzen aller Stufen  $\Lambda_k$ ,  $k \geq 1$ ). Mit Ausnahme des Vertreters, der nur aus  $\infty$ -Komponenten besteht, lassen sich alle Vertreter normieren. Somit ergibt sich für die Anzahl der Spitzen-Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  folgende Formel:

$$Z_{Sp0}(n) = \frac{\sum_{j=1}^s l_j \lfloor \frac{r_j}{2} \rfloor - 1}{q - 1} + 1 \quad [4.5]$$

Zurück zu unserem Beispiel **Bsp 2**.

Wir wissen, daß es 23 Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  gibt (folgt auch aus [4.1]). Nach [4.3] gibt es einen Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$ . Es gibt keinen Isolani-Knoten (nach [4.4]), aber 2 Spitzen der Stufe  $\Lambda_0$  (nach [4.5]). 16 Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  gehören also zu stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$ . Somit muß es vier stabile Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  geben. Ich möchte hier nicht explizit vorrechnen, welche Kante der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  in welchen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  mündet, sondern gebe nur den Graphen an:



## 5 Homologie der Graphen $\Gamma_0(n) \setminus \mathbb{T}$

### 5.1 Dimension $g(n)$ der Homologie der Graphen $\Gamma_0(n) \setminus \mathbb{T}$

Die Berechnung dieser Dimension entspricht der Berechnung der Anzahl unabhängiger Zyklen des Quotientengraphen. Aus Paragraph 4 weiß man, daß beim Graphen  $\Gamma_0(n) \setminus \mathbb{T}$  ab der Stufe  $\Lambda_k$  für  $k \geq \deg(n) - 1$  keine Knoten mehr identifiziert werden. Die Knoten dieser Stufen stellen also Spitzen dar. Die Zykkelzahl ändert sich sicherlich nicht, wenn man diese Spitzen abschneidet. Für den verbleibenden endlichen Graphen kann man mit der Euler-Formel (Korollar 1.23) die Zykkelzahl  $g$  berechnen:

$$g = \#\{\text{Kanten}\} - \#\{\text{Knoten}\} + 1$$

Da für  $k \geq 1$  zu jedem Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  genau eine Kante der Stufe  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  gehört, kann man die Formel noch etwas vereinfachen:

$$g = \#\{\text{Kanten } \Lambda_0 \Lambda_1\} - \#\{\text{Knoten } \Lambda_0\} - \#\{\text{Spitzen}\} + 1$$

Für die Anzahl der Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  wurde in 4.2 folgende Formel hergeleitet:

$$Z_{01}(n) = \frac{\frac{\epsilon(n) + q(q-2)2^s}{q-1} + \sum_{j=1}^s l_i \binom{r_i}{2}}{q}$$

Für die Anzahl der Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  habe ich bisher noch keine explizite Formel angegeben. Eine solche läßt sich jedoch leicht konstruieren, da es nach dem großen Struktursatz nur vier Knotentypen gibt, für deren Anzahl uns bereits drei Formeln (aus Kapitel 4.6) bekannt sind:

$$(1) \text{ Isolani-Knoten: } Z_I(n) = r(n)2^{s-1} \quad \text{vgl. [4.4]}$$

$$(2) \text{ Umverteilungsknoten: } Z_U(n) = 2^{s-1} - 1 \quad \text{vgl. [4.3]}$$

$$(3) \text{ Spitzen der Stufe } \Lambda_0: Z_{Sp0}(n) = \frac{\sum_{j=1}^s l_i \binom{r_i}{2}}{q^{j-1}} - 1 + 1 \quad \text{vgl. [4.5]}$$

Die fehlende Formel für die Anzahl der stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  läßt sich nun aus der Anzahl der Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  herleiten:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{Z_{01} - Z_I - 2Z_{Sp0} - 3Z_U}{q+1} + Z_I + Z_U + Z_{Sp0} \\ &= \frac{Z_{01} + qZ_I + (q-1)Z_{Sp0} + (q-2)Z_U}{q+1} \\ (q+1)Z_0 &= \frac{\frac{\epsilon(n) + q(q-2)2^s}{q-1} + \sum_{j=1}^s l_i \binom{r_i}{2}}{q} + qr(n)2^{s-1} \\ &\quad + (q-1)\left(\frac{\sum_{j=1}^s l_i \binom{r_i}{2}}{q-1} - 1\right) + (q-2)(2^{s-1} - 1) \\ &= \frac{\epsilon(n) - q2^s}{q(q-1)} + (q+1)q^{\sum_{j=1}^s l_i \binom{r_i}{2} - 1} + q2^{s-1}(r(n) + 1) \end{aligned}$$

Die Anzahl der Spitzen wurde ebenfalls in Kapitel 4.3 schon berechnet:

$$Z_{Sp}(n) = 2^s + \frac{\kappa(n) - 2^s}{q-1} \quad \text{vgl. [4.2].}$$

Damit läßt sich nun die Zykelzahl  $g$  berechnen:

$$\begin{aligned} g &= 1 + Z_{O1} - Z_{Sp} - Z_0 \\ &= 1 + \frac{\frac{\epsilon(n) + q(q-2)2^s}{q-1} + q^{\sum_{j=1}^s l_i \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor}}{q} - 2^s - \frac{\kappa(n) - 2^s}{q-1} \\ &\quad - \frac{1}{q+1} \left( \frac{\epsilon(n) - q2^s}{q(q-1)} + (q+1)q^{\sum_{j=1}^s l_i \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor - 1} + q2^{s-1}(r(n) + 1) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{q+1} \left( (q+1) \frac{\epsilon(n) - q2^s}{q(q-1)} + (q+1)2^s + (q+1)q^{\sum_{j=1}^s l_i \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor - 1} \right. \\ &\quad \left. - (q+1)2^s - (q+1) \frac{\kappa(n) - 2^s}{q-1} - \frac{\epsilon(n) - q2^s}{q(q-1)} \right. \\ &\quad \left. - (q+1)q^{\sum_{j=1}^s l_i \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor - 1} - q2^{s-1}(r(n) + 1) \right) \\ &= 1 + \frac{\epsilon(n) - q2^s}{q^2 - 1} - \frac{(q+1)\kappa(n)}{q^2 - 1} - \frac{2^{s-1}q(q-1)(r(n) + 1) - 2(q+1)}{q^2 - 1} \\ &= 1 + \frac{\epsilon(n) - (q+1)\kappa(n) - 2^{s-1}(q(q-1)r(n) + (q+1)(q-2))}{q^2 - 1} \end{aligned}$$

**Hauptsatz 4** (  $\dim (H_1(\Gamma_0(n))^T, \mathbf{Z})$  )

Für  $n(T) = \prod_{i=1}^s f_i^{r_i}$  (, wobei die Polynome  $f_i$  prim vom Grad  $l_i$  und paarweise verschieden sind, ) berechnet man  $g(n) := \dim (H_1(\Gamma_0(n))^T, \mathbf{Z})$  durch

$$g(n) = 1 + \frac{\epsilon(n) - (q+1)\kappa(n) - 2^{s-1}(q(q-1)r(n) + (q+1)(q-2))}{q^2 - 1}$$

Hierbei gilt:  $\epsilon(n) = \epsilon(\prod_{i=1}^s f_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s q^{l_i(r_i-1)}(q^{l_i} + 1)$ ,

$$\kappa(n) = \kappa(\prod_{i=1}^s f_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s (q^{l_i \lfloor \frac{r_i-1}{2} \rfloor} + q^{l_i \lfloor \frac{r_i}{2} \rfloor}),$$

$$r(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n \text{ nur Teiler geraden Grades hat} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die gleiche Formel wurde in [Ge2], Seite 79 für das gleichgroße Geschlecht der Drinfeld'schen Modulkurve  $X_0(n)$  hergeleitet, jedoch ohne Verwendung von Graphen, sondern durch Überlagerung von Kurven.



5.2 Basisbestimmungsalgorithmus für  $H_1(\Gamma_0(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbf{Z})$ **Definition 5.1 (stabile Kanten)**

Eine stabile Kante der Stufe  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  verbindet einen stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  mit einem (beliebigen) Knoten der Stufe  $\Lambda_{k+1}$ .

**Satz 5.2 (Erzeugendensystem für  $H_1(\Gamma_0(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbf{Z})$ )**

Eine Funktion  $\varphi \in H_1(\Gamma_0(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbf{Z})$  ist vollständig durch ihre Werte auf den stabilen Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  bestimmt.

BEWEIS:

Ich zeige nun nacheinander:

- (1)  $\varphi \in H_1(\Gamma_0(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbf{Z})$  lebt nur auf Kanten zu stabilen Knoten und Umverteilungsknoten.
- (2) Ich betrachte zuerst alle Umverteilungsknoten außer einer ganz speziellen Menge, den sogenannten 0-Umverteilungsknoten (genaue Definition später).
  - (2.0) Die Kanten, die einen Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$  mit einem stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_1$  verbinden, werden durch Vertreter  $v \in V(n)$  ohne  $\infty$ -Komponenten repräsentiert.
  - (2.1) In einen Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) läuft genau eine stabile Kante der Stufe  $\Lambda_{k-1} \Lambda_k$  hinein. Der Wert von  $\varphi$  auf dieser stabilen Kante ist durch die Werte auf den stabilen Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  festgelegt.
  - (2.2) Die Werte von  $\varphi$  auf den beiden nicht-stabilen Kanten zu einem Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) sind durch die Werte auf den stabilen Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  und durch den Wert der stabilen Kante festgelegt (daher der Name "Umverteilungsknoten").
  - (2.3) Die Werte auf den Kanten zu Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$  sind durch (2.1) und (2.2) festgelegt.
- (3) Die Werte auf den 0-Umverteilungsknoten sind durch die Werte auf den anderen Kanten eindeutig bestimmt.

Zu (1):

Nach Definition von  $H_1(\Gamma_0(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbf{Z})$  muß  $\varphi$  auf den Kanten, die zu Spitzen und Isolani-Knoten gehören, den Wert Null haben (endlicher Träger + Knotenbedingung).

Zu (2):

Ein Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ), der durch einen Vertreter mit lauter 0-Komponenten gegeben ist, heißt ein 0-Umverteilungsknoten. Diese Knoten betrachte ich in (3) gesondert.

Zu (2.0)

Nach Abschnitt 4.5 und 4.6 wissen wir, daß die  $2^{s-1} - 1$  Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$  durch Vertreter  $v \in V(n)$  repräsentiert werden, die nur aus 0 und  $\infty$ -Komponenten bestehen, wobei mindestens eine Komponente 0 und eine  $\infty$  sein muß. In Abschnitt 4.5 haben wir auch ausgerechnet, daß mit einem solchen Vertreter  $v = (\dots, \infty, \dots, 0, \dots)$  bzgl.  $\tilde{G}_0$  nur die  $\tilde{B}$ -inäquivalenten Vertreter  $(\dots, 0, \dots, \infty, \dots)$  und  $(\dots, 0, \dots, 1, \dots)$  identifiziert werden. Die ersten beiden Vertreter münden in Spitzen-Knoten oder wieder in Umverteilungsknoten, wohingegen letzterer keine  $\infty$ -Komponenten hat und in einen stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_1$  mündet.

Zu (2.1)

Sei  $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$  der Vertreter eines Umverteilungsknotens der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ). Alle Komponenten von  $u$  können so gewählt werden, daß sie entweder 0 oder  $\infty$  sind, wobei nach Voraussetzung (kein 0-Umverteilungsknoten) mindestens eine Komponente  $\infty$  ist. Nach Satz 4.6 haben alle Vertreter  $v \in V(n)$ , die bzgl.  $\tilde{G}_k$  äquivalent zu  $u$  sind, komponentenweise denselben Typ, also insbesondere auch an den gleichen Stellen wie  $u$   $\infty$ -Komponenten. Nach Beweisteil (2.0) wissen wir, daß die Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$ , die von einem Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$  zu einem stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_1$  gehen, keine  $\infty$ -Komponenten haben. Die Werte von  $\varphi$  auf den Kanten der Stufe  $\Lambda_{k-1}\Lambda_k$ , die in der Stufe  $\Lambda_k$  in einen Umverteilungsknoten münden, sind somit durch die Werte von  $\varphi$  auf den stabilen Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  eindeutig festgelegt.

Zu (2.2)

Die Kante der Stufe  $\Lambda_k\Lambda_{k+1}$ , die zu einem Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_k$  gehört, mündet entweder in eine Spitze oder wieder in einen Umverteilungsknoten. Da der Wert auf einer Spitze (wegen (1)) Null sein muß und nicht unendlich viele Umverteilungsknoten nacheinander folgen können, ist der Wert auf dieser Kante durch die Werte von  $\varphi$  auf den stabilen Kanten der Stufe  $\Lambda_0\Lambda_1$  bestimmt. Durch die Summenbedingung für den Umverteilungsknoten ist der Wert auf der dritten Kante ebenfalls eindeutig bestimmt.

Zu (2.3)

Es bleiben noch die Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$ :  
Zwei der drei Kanten, die in den Umverteilungsknoten hineinlaufen, gehören entweder zu Spitzen oder zu Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_1$ . Der Wert auf diesen Kanten ist also vorgegeben. Wegen der Summenbedingung für den Umverteilungsknoten ist der Wert auf der dritten nicht-stabilen Kante ebenfalls festgelegt.

Zu (3)

Nach (2) ist klar, daß die Werte auf allen stabilen Kanten (beliebiger Stufe) eindeutig bestimmt sind. Der Wert auf der nicht-stabilen Kante zum 0-Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$  ergibt sich aus dem Wert der stabilen Kante mit demselben Endpunkt. So ergeben sich (sukzessive) die Werte auf allen 0-Umverteilungsknoten. Der letzte 0-Umverteilungsknoten mündet in eine Spitze.  $\square$

### Bemerkung 5.3

Die nichtregulären Spitzenvertreter  $v \in Sp_{NR}(n)$  repräsentieren in allen Stufen verschiedene Knoten und Kanten.

BEWEIS:

Die Elemente von  $Sp_{NR}(n)$  repräsentieren nach Abschnitt 4.4 verschiedene Spitzen, sind also modulo  $\tilde{G}_{d-1}$  inäquivalent. Wegen  $\tilde{G}_k \subset \tilde{G}_{d-1}$  für  $1 \leq k \leq d-1$  repräsentieren die nichtregulären Spitzenvertreter verschiedene Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) und wegen  $(\tilde{G}_k \cap \tilde{G}_{k+1}) \subset \tilde{G}_{d-1}$  für  $0 \leq k \leq d-1$  auch verschiedene Kanten der Stufen  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  ( $k \geq 0$ ). Es bleibt also noch die Frage, ob verschiedene Elemente von  $Sp_{NR}(n)$  denselben Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  darstellen können. Nach Abschnitt 4.4 hat jeder nicht-reguläre Spitzenvertreter mindestens eine Komponente, deren Typ  $\geq 1$  ist. Nach dem *BwU*-Hilfssatz ist jedoch klar, daß es pro Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  höchstens eine Kante der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  gibt, die durch einen Vertreter  $v \in V(n)$  repräsentiert wird, der eine Komponente vom Typ  $\geq 1$  hat.  $\square$

### Satz 5.4 (Basis für $H_1(\Gamma_0(n)\backslash^T, \mathbb{Z})$ )

Durch folgenden Algorithmus erhält man einen maximalen Unterbaum  $Y$  von  $\Gamma_0(n)\backslash^T$ , der nach Definition 1.16 eine Basis  $B$  von  $H_1(\Gamma_0(n)\backslash^T, \mathbb{Z})$  beschreibt:

Setze $Y = \Gamma_0(n)\backslash^T$ .	
Für alle stabilen Knoten $[v]_0$ der Stufe $\Lambda_0$ tue:	
<p>Es gibt keinen Vertreter <math>e_{nr} \in Sp_{NR}(n)</math>, der zu <math>v</math> <math>\tilde{G}_0</math>-äquivalent ist.</p> <p>Streiche alle Kanten <math>[e]_{0,1}</math>, die vom Knoten <math>[v]_0</math> ausgehen, außer einer beliebigen Kante <math>[e]_{0,1}</math> vom Typ 0.</p>	<p>Es gibt genau einen Vertreter <math>e_{nr} \in Sp_{NR}(n)</math>, der zu <math>v</math> <math>\tilde{G}_0</math>-äquivalent ist.</p> <p>Streiche alle Kanten <math>[e]_{0,1}</math>, die vom Knoten <math>[v]_0</math> ausgehen, außer einer beliebigen Kante <math>[e]_{0,1}</math> vom Typ 0 und der Kante <math>[e_{nr}]_{0,1}</math>.</p>

Die weggelassenen Kanten heißen Basiskanten.

Aus der Bemerkung 5.3 folgt, daß es unter den Kanten  $[e]_{0,1}$ , die in einen stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  münden, höchstens eine Kante gibt, die durch einen nichtregulären Spitzenvertreter repräsentiert wird. Dies rechtfertigt die beiden Alternativen des Algorithmus.

Vor dem Beweis von Satz 5.4 noch eine graphentheoretische Bemerkung:

### Bemerkung 5.5

*Y ist genau dann ein maximaler Unterbaum eines zusammenhängenden Graphen X, wenn Y ein minimaler (bzgl. Inklusion) zusammenhängender Untergraph von X ist, der alle Knoten von X enthält. Die Minimalität kann man mit der Euler-Formel durch folgende Bedingung ausdrücken:*

$$\#\{E_+(X)\} - \#\{E_+(Y)\} = \dim(H_1(X, \mathbb{Z})).$$

### BEWEIS VON SATZ 5.4:

(1) Zunächst zeigen wir, daß Y ein zusammenhängender Untergraph von  $\Gamma_0(n)^T$  ist:

Alle Kanten der Stufen  $\Lambda_k \Lambda_{k+1}$  ( $k \geq 1$ ) des Graphen  $\Gamma_0(n)^T$  sind auch in dem Teilgraphen Y enthalten. Also ist jeder Knoten der Stufe  $\Lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) (durch die Abbildung  $\rho_k$  aus Satz 3.11) in Y mit seinem rechten Nachbar-knoten verbunden. Alle Knoten von Y der Stufe  $\Lambda_0$  sind nach Konstruktion (vgl. Algorithmus: "... Kante  $[e]_{0,1}$ , mit Typ von e ist 0.") mit der durch  $(0, \dots, 0)$  repräsentierten Spitze verbunden. Somit sind alle Knoten von  $\Gamma_0(n)^T$  in Y enthalten und mit Spitzen verbunden. Um zu zeigen, daß Y zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, daß alle Spitzen mit der durch  $(0, \dots, 0)$  repräsentierten Spitze verbunden sind. Nach dem Beweis von Satz 5.2 (Unterpunkt (2.0)) sind alle Spitzen, die durch reguläre Spitzenvertreter repräsentiert werden können, mit der durch  $(0, \dots, 0)$  repräsentierten Spitze (über einen Umverteilungsknoten der Stufe  $\Lambda_0$ ) verbunden. Die übrigen Spitzen können durch nichtreguläre Spitzenvertreter repräsentiert werden. Diese sind dann aber nach Konstruktion (vgl. Algorithmus: "... Kante  $[e]_{0,1}$ , mit Typ von e ist 0, und der Kante  $[e_{nr}]_{0,1}$ .")) ebenfalls mit der durch  $(0, \dots, 0)$  repräsentierten Spitze verbunden.

Damit ist Y ein zusammenhängender Untergraph von  $\Gamma_0(n)^T$ , der alle Knoten von  $\Gamma_0(n)^T$  enthält.

(2) Die Minimalität von Y zeigen wir nun mit Hilfe der Bemerkung 5.5:

Wir zählen also die Anzahl, der im Algorithmus gestrichenen Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$ .

Für jeden stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  werden zunächst  $q$  Kanten gezählt:

$$\begin{aligned} qZ_{S0} &= q \frac{Z_{01} - Z_I - 2Z_{SP0} - 3Z_U}{q+1} \\ &= \frac{\frac{\epsilon(n) + q(q-2)2^s}{q-1} + \sum_{j=1}^s l_i \binom{r_i}{\frac{r_i}{2}}}{q+1} - q \frac{r 2^{s-1}}{q+1} - 2q \frac{\sum_{i=1}^s l_i \binom{r_i}{\frac{r_i}{2}}}{q^2-1} + q-2 - 3q \frac{2^{s-1}-1}{q+1} \\ &= \frac{\epsilon(n) + q(q-2)2^s + (q-1) \sum_{i=1}^s l_i \binom{r_i}{\frac{r_i}{2}}}{q+1} - \frac{q(q-1)r 2^{s-1} - 2q \sum_{i=1}^s l_i \binom{r_i}{\frac{r_i}{2}} + q-2 - 3q(q-1)(2^{s-1}-1)}{q^2-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\epsilon(n) - 2^{s-1}(q(q-1)r + (q+1)(q-2)) + q^2 - 1 - (q+1)(q^{i=1} + 2^s + 1)}{q^2 - 1} \sum_{i=1}^s i_i \binom{r_i}{2}$$

Nun müssen wir die Zahl der nichtregulären Spitzenvertreter, die stabile Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  darstellen, subtrahieren.

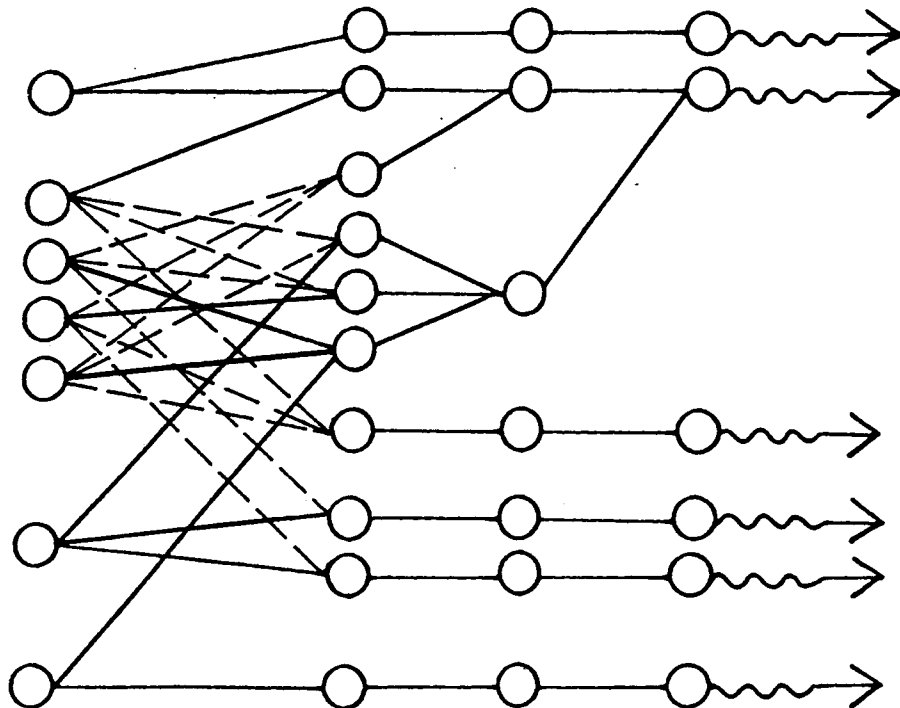
Es gibt  $\frac{\kappa(n) - 2^s}{q-1}$  nichtreguläre Spitzenvertreter.  $\frac{\sum_{i=1}^s i_i \binom{r_i}{2}}{q-1} - 1$  davon gehören nach Abschnitt 4.6 nicht zu stabilen Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  (, sondern zu Spitzen-Knoten der Stufe  $\Lambda_0$ ).

Es gibt also  $Z_{NR \cap S_0} = \frac{\kappa(n) - 2^s - (\sum_{i=1}^s i_i \binom{r_i}{2} - 1)}{q-1}$  nichtreguläre Spitzenvertreter, die nach Bemerkung 5.3 verschiedene stabile Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  darstellen. Es ist:

$$\begin{aligned} qZ_{S_0} - Z_{NR \cap S_0} &= \frac{\epsilon(n) - 2^{s-1}(q(q-1)r + (q+1)(q-2)) + q^2 - 1 - (q+1)(q^{i=1} + 2^s + 1)}{q^2 - 1} \sum_{i=1}^s i_i \binom{r_i}{2} - \frac{\kappa(n) - 2^s - (\sum_{i=1}^s i_i \binom{r_i}{2} - 1)}{q-1} \\ &= 1 + \frac{\epsilon(n) - (q+1)\kappa(n) - 2^{s-1}(q(q-1)r + (q+1)(q-2))}{q^2 - 1} \\ &= g(n) . \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß  $Y$  ein maximaler Unterbaum von  $\Gamma_0(n)^T$  ist. □

Hier möchte ich für das **Bsp 2** angeben, wie ein durch Algorithmus 5.4 bestimmter maximaler Unterbaum aussieht. Die weggelassenen Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$  sind als Strichlinien eingezeichnet.



**Satz 5.6 (Wertigkeit der Basiskanten)**

Wähle entsprechend Satz 5.4 einen maximalen Unterbaum  $Y$  von  $\Gamma_0(n)^T$ .  
Für alle Kanten  $e \in T$ , deren Bild in  $\Gamma_0(n)^T$  eine Basiskante ist, gilt:

$$w(e) = \frac{\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma e = e\}}{\#\{\Gamma_0(n) \cap Z\}} = 1$$

BEWEIS:

Es gilt:  $\#\{\Gamma_0(n) \cap Z\} = \#\{Z\} = q - 1$ .

Eine Basiskante  $e$  entspricht der Bahn unter  $B$  von

$$u = \left( \begin{pmatrix} u_1 \\ f_{l_1}^{i_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_s \\ f_{l_s}^{i_s} \end{pmatrix} \right) \in V(n).$$

Wir suchen:  $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma e = e\} = \#\{\gamma \in B \mid \gamma u \doteq u\}$ .

Wir betrachten uns die Gleichung  $\gamma u \doteq u$ ,  $\gamma \in B$  für die  $j$ -te Komponente von  $u$  genauer:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ f_{l_j}^{i_j} \end{pmatrix} &\doteq \begin{pmatrix} u_j \\ f_{l_j}^{i_j} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (au_j + bf_{l_j}^{i_j})f_{l_j}^{i_j} &\equiv du_j f_{l_j}^{i_j} \pmod{f_{l_j}^{r_j}} \\ \Leftrightarrow ((a-d)u_j + bf_{l_j}^{i_j})f_{l_j}^{i_j} &\equiv 0 \pmod{f_{l_j}^{r_j}}. \end{aligned}$$

Betrachten wir uns zunächst den Fall  $a \neq d$ .

Es gilt:  $u_j \equiv \frac{b}{d-a} f_{l_j}^{i_j} \pmod{f_{l_j}^{r_j - i_j}}$ .

$u$  repräsentiert dann wegen  $u = \left( \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d-a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ f_{l_1}^{i_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ f_{l_s}^{i_s} \end{pmatrix} \right) \right)$  keine

Basiskante, sondern gehört zu einem Spitzen-Knoten der Stufe  $\Lambda_0$  (vgl S.65).

Sei also  $a = d$ . Dann gilt:  $bf_{l_j}^{2i_j} \equiv 0 \pmod{f_{l_j}^{r_j}}$ .

Dies ist genau dann lösbar, wenn  $b = 0$  oder  $i_j \geq \lceil \frac{r_j+1}{2} \rceil$  ist. Die zweite Bedingung führt wieder dazu, daß  $u$  keine Basiskante repräsentiert (, sondern wieder zu einem Spitzenknoten der Stufe  $\Lambda_0$  gehört).

Somit folgt:

$$\#\{\gamma \in B \mid \gamma u \doteq u\} = \#\{a, d \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q \mid a = d \text{ und } b = 0\} = q - 1. \quad \square$$

**Korollar 5.7**

Der kanonische Homomorphismus  $k$  von Korollar 2.37 ist ein Isomorphismus

$$k : \overline{\Gamma_0(n)} \longrightarrow \underline{H}_1(T, Z)^{\Gamma_0(n)}$$

BEWEIS:

Sei  $Y = \Gamma_0(n)^T \setminus \{e_1, \bar{e}_1, \dots, e_m, \bar{e}_m\}$  der maximale Unterbaum aus Satz 5.4.  
Aus Satz 5.6 folgt nun:

Für alle Kanten  $e \in E(T)$  mit  $w(e) > 1$  ist das Bild von  $e$  in  $\Gamma_0(n)^T$  auch in  $Y$  enthalten. Dann folgt die Behauptung aus Korollar 2.38.  $\square$

### 5.3 Dimension $g_{neu}(n)$ des Raumes der NeufORMEN

In diesem Abschnitt wollen wir den Raum  $\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$  (vgl. Definition 2.35) in ein direktes Produkt von geeigneten Unterräumen zerlegen und dies dann zur Berechnung der Dimension der Unterräume ausnutzen.

Dazu müssen wir auf dem Raum  $\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$  ein Skalarprodukt definieren:

$$(f, g)_n := [\Gamma : \Gamma_0(n)]^{-1} \sum_{e \in E^+(\Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T})} f(e)g(e) \frac{1}{\#\{\gamma \in \Gamma_0(n) \mid \gamma e = e\}}$$

Dabei läuft  $e \in E^+(\mathcal{T})$  durch ein Repräsentantensystem modulo  $\Gamma_0(n)$ , wofür wir kurz  $e \in E^+(\Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T})$  schreiben.  $E^+(\mathcal{T})$  ist eine beliebige Orientierung von  $\mathcal{T}$ , auf deren Wahl es wegen  $f(e)g(e) = f(\bar{e})g(\bar{e})$  nicht ankommt. Ebenso hängt  $\#\{\gamma \in \Gamma_0(n) \mid \gamma e = e\}$  nur vom Bild von  $e$  in  $\Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T}$  ab. Da  $f$  (und  $g$ ) endlichen Träger modulo  $\Gamma_0(n)$  haben, ist die Summe endlich, also obiger Ausdruck wohldefiniert. Die Linearität und positive Definitheit ist offensichtlich erfüllt, womit nun klar ist, daß  $(f, g)_n$  ein (von  $n$  abhängiges) Skalarprodukt bezeichnet.

Die Definition dieses Skalarproduktes überträgt sich aus der Definition eines Haar-Maßes auf  $GL_2(K_\infty)$  (vgl. S.12f).

Der Gewichtungsfaktor  $[\Gamma : \Gamma_0(n)]^{-1}$  wurde auf diese Weise gewählt, damit für alle Teiler  $m$  von  $n$  und  $f, g \in \underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned} (f, g)_m &= [\Gamma : \Gamma_0(m)]^{-1} \sum_{e \in E^+(\Gamma_0(m) \backslash \mathcal{T})} f(e)g(e) \frac{1}{\#\{\gamma \in \Gamma_0(m) \mid \gamma e = e\}} \\ &= [\Gamma : \Gamma_0(n)]^{-1} \sum_{e \in E^+(\Gamma_0(m) \backslash \mathcal{T})} f(e)g(e) \frac{[\Gamma_0(m) : \Gamma_0(n)]}{\#\{\gamma \in \Gamma_0(m) \mid \gamma e = e\}} \\ &= [\Gamma : \Gamma_0(n)]^{-1} \sum_{e \in E^+(\Gamma_0(m) \backslash \mathcal{T})} \left( \sum_{\tilde{e} \rightarrow e} f(\tilde{e})g(\tilde{e}) \frac{1}{\#\{\gamma \in \Gamma_0(n) \mid \gamma \tilde{e} = \tilde{e}\}} \right) \\ &= [\Gamma : \Gamma_0(n)]^{-1} \sum_{\tilde{e} \in E^+(\Gamma_0(n) \backslash \mathcal{T})} f(\tilde{e})g(\tilde{e}) \frac{1}{\#\{\gamma \in \Gamma_0(n) \mid \gamma \tilde{e} = \tilde{e}\}} \\ &= (f, g)_n. \end{aligned}$$

Hierbei läuft  $\tilde{e} \in E^+(\mathcal{T})$  durch ein Repräsentantensystem von  $\Gamma_0(m)e$  modulo  $\Gamma_0(n)$ , was die oben verwendete Bahngleichung

$$\sum_{\tilde{e} \rightarrow e} \frac{1}{\#\{\gamma \in \Gamma_0(n) \mid \gamma \tilde{e} = \tilde{e}\}} = \frac{[\Gamma_0(m) : \Gamma_0(n)]}{\#\{\gamma \in \Gamma_0(m) \mid \gamma e = e\}}$$

zur Folge hat.

Für jeden Teiler  $a$  von  $\frac{n}{m}$  bildet die Abbildung:

$$\begin{aligned} i_{a,m} : \underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(m)} &\rightarrow \underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)} \\ \varphi &\mapsto i_{a,m}(\varphi), \quad i_{a,m}(\varphi)(e) = \varphi \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \right) \end{aligned}$$

eine Funktion von  $\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(m)}$  nach  $\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$  ab.

Nun definieren wir den Raum der Neuformen:

**Definition 5.8 (Raum der Neuformen)**

$$\underline{H}_1^{neu}(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)} := \left( \sum_{\substack{m|n \\ m \neq n}} \sum_{a|\frac{n}{m}} \text{Bild}(i_{a,m}) \right)^\perp$$

(orthogonales Komplement in  $\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$  bzgl.  $(\cdot, \cdot)_n$ )

Hier und im folgenden seien mit "Teilern" immer nur normierte Polynome gemeint.

Aus der Theorie der automorphen Formen ist bekannt, daß die Summe der Räume  $i_{a,m}(\underline{H}_1^{neu}(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(m)})$  orthogonal ist. Ein ähnlicher Sachverhalt wird in [La2], Chapter 8 bewiesen.

Man kann daher  $\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$  als direkte Summe darstellen:

$$\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)} = \underline{H}_1^{neu}(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)} \oplus \bigoplus_{\substack{m|n, m \neq n \\ a|\frac{n}{m}}} i_{a,m}(\underline{H}_1^{neu}(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(m)})$$

Setze weiter:

$$\sigma_0\left(\prod_{i=1}^s p_i^{r_i}\right) = \prod_{i=1}^s (r_i + 1) = \text{Anzahl der normierten Teiler von } \prod_{i=1}^s p_i^{r_i}.$$

**Definition 5.9 ( $g_{neu}(n)$ )**

Mit  $g_{neu}(n)$  bezeichne ich die  $\mathbf{R}$ -Dimension des Raumes  $\underline{H}_1^{neu}(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$ .

Für  $\deg(n) \leq 2$  gilt  $g(n) = 0 = g_{neu}(n)$ .

Für  $\deg(n) = 3$  gilt  $g(n) = g_{neu}(n)$ .

Für  $\deg(n) \geq 4$  kann man  $g_{neu}(n)$  über folgende Rekursionsformel berechnen:

**Satz 5.10 (Rekursionsformel für  $g_{neu}(n)$ )**

$$g_{neu}(n) = g(n) - \sum_{\substack{m|n \\ m \neq n}} \sigma_0\left(\frac{n}{m}\right) g_{neu}(m)$$

**BEWEIS:** Der Satz folgt aus der direkten Summendarstellung von  $\underline{H}_1(\mathcal{T}, \mathbf{R})^{\Gamma_0(n)}$ .



5.4  $g_{gew}(n)$  im quadratfreien Fall

In diesem Abschnitt verwende ich mehrfach die Möbius-Umkehrformel:

**Satz 5.11 (Möbius-Umkehrformel)**

Sei  $N \subset \mathbb{F}_q[T]$  die Menge der normierten Polynome, und seien  $f$  und  $g$  zwei Abbildungen von  $N$  nach  $\mathbb{Z}$ . Sei  $\mu : N \rightarrow \mathbb{Z}$  definiert durch

$$\mu(n) := \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ nicht quadratfrei} \\ (-1)^t & , \quad n \text{ quadratfrei mit } t \text{ verschiedenen Primteilern.} \end{cases}$$

Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

- (1)  $\forall n \in N$  gilt:  $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ ,
- (2)  $\forall n \in N$  gilt:  $f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$ .

Einen Beweis dieser Aussage findet man z.B. bei [B-S] S.452f, wobei dort die Aussage für Abbildungen von  $N$  nach  $\mathbb{R}$  gezeigt wurde. Bei dem Beweis wird jedoch nur die eindeutige Primfaktorzerlegung von  $N$  verwendet, die auch in unserem Fall ( $N$  statt  $\mathbb{N}$ ) gegeben ist.

Bei meinen Berechnungen ist mir aufgefallen, daß man eine gewichtete Dimensionsformel angeben kann, die zumindest im quadratfreien Fall eine vom Zerfallungsverhalten von  $n$  unabhängige Berechnung zuläßt.

**Definition 5.12 (gewichtete Dimension  $g_{gew}$ )**

Unter der gewichteten Dimension verstehe ich

$$g_{gew}(n) := \sum_{m|n} g_{neu}(m) .$$

Nach Satz 5.10 gilt:

$$g(n) = \sum_{m|n} \sigma_0\left(\frac{n}{m}\right)g_{neu}(m) = \sum_{m|n} \left( \sum_{d|m} g_{neu}(d) \right) = \sum_{m|n} g_{gew}(m)$$

und somit mit der Möbius-Umkehrformel:

$$g_{gew}(n) := \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \cdot g(m) .$$

Sie läßt sich als Rekursionsformel umschreiben. Sei  $f$  prim, dann gilt:

$$g_{gew}(fn) = \sum_{m|fn} \mu\left(\frac{fn}{m}\right)g(m) = \sum_{fm|fn} \mu\left(\frac{fn}{fm}\right)g(fm) + \sum_{m|n} \mu\left(\frac{fn}{m}\right)g(m) ,$$

$$\text{also: } g_{gew}(fn) = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right)g(fm) - g_{gew}(n) . \quad [5.2]$$

Betrachten wir nun die Rekursionsformel [5.2] etwas genauer:

Seien:  $n(T) = \prod_{i=1}^s f_i(T)$  quadratfrei,  $d := \deg(n)$ ,  $l := \deg(f)$ ,

$$\mu\left(\prod_{i=1}^t f_i\right) = (-1)^t, \quad z\left(\prod_{i=1}^t f_i\right) = t.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} & \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) g(f \cdot m) \\ &= \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \left(1 + \frac{(q^l+1)\epsilon(m) - 2(q+1)\kappa(m) - 2 \cdot 2^{s-1}((q+1)(q-2) + r(fm)q(q-1))}{q^2-1}\right). \end{aligned}$$

Für die einzelnen Terme gilt dann:

$$(1) \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{s}{i} = 0, \quad \text{für } s \neq 0,$$

$$(2) \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \frac{q^l+1}{q^2-1} \epsilon(m) = \frac{(q^l+1)q^d}{q^2-1}$$

(folgt aus  $\sum_{m|n} q^{\deg(m)} = \epsilon(n)$  mit Möbius-Umkehrformel),

$$(3) \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \frac{2(q+1)}{q^2-1} \kappa(m) = \frac{2(q+1)}{q^2-1} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} 2^i (-1)^{s-i} = \frac{2(q+1)}{q^2-1},$$

$$(4) \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \frac{(q-2)(q+1)}{q^2-1} 2^z(m) = \frac{(q-2)(q+1)}{q^2-1} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} 2^i (-1)^{s-i} = \frac{(q-2)(q+1)}{q^2-1}.$$

$$(5) \text{ Sei nun: } \prod_{i=1}^s f_i = \prod_{i=1}^t u_i \cdot \prod_{i=1}^{s-t} g_i, \text{ mit } \deg(u_i) \text{ ungerade und } \deg(g_i) \text{ gerade,}$$

$$\text{und } g = \prod_{i=1}^{s-t} g_i.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} & \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \frac{q(q-1)}{q^2-1} 2^z(m) r(fm) = \frac{q(q-1)}{q^2-1} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) 2^z(m) r(fm) \\ &= \frac{q(q-1)}{q^2-1} \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \deg(f) \text{ ungerade} \\ \sum_{i=0}^{s-t} 2^i (-1)^{s-i} \binom{s}{i} & , \text{ sonst} \end{cases} \\ &= \frac{q(q-1)}{q^2-1} \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \deg(f) \text{ ungerade} \\ (-1)^t & , \text{ sonst} \end{cases} \\ &=: \tilde{r}(f, n). \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich [5.2] zu:

$$g_{gew}(fn) = \frac{(q^l+1)q^d}{q^2-1} - \frac{q(q+1)}{q^2-1} - \tilde{r}(f, n) \frac{q(q-1)}{q^2-1} - g_{gew}(n) \quad [5.3]$$

Es gilt folgender Satz:

**Satz 5.13** Die gewichtete Dimension hängt im quadratfreien Fall nicht vom Zerlegungstyp, sondern nur vom Grad von  $n$  ab:

$$g_{gew}(n) = \frac{q^d - q^h}{q^2 - 1}, \quad d = \deg(n), \quad h = \begin{cases} 1 & , d \text{ ungerade} \\ 2 & , d \text{ gerade} \end{cases}.$$

BEWEIS: (durch vollständige Induktion über die Anzahl der Primfaktoren)

Induktionsanfang: Sei  $f$  prim.

a)  $\deg(f)$  ungerade

$$g_{\text{alt}}(f) = 1 + \frac{(q^{\deg(f)+1}-2(q+1)-(q+1)(q-2))}{q^2-1} = \frac{(q^{\deg(f)}-q)}{q^2-1} = g_{\text{gew}}(f)$$

b)  $\deg(f)$  gerade

$$g(f) = 1 + \frac{(q^{\deg(f)+1}-2(q+1)-(q+1)(q-2)-q(q-1))}{q^2-1} = \frac{(q^{\deg(f)}-q^2)}{q^2-1} = g_{\text{gew}}(f)$$

Induktionsschritt:

Weiterhin sei:  $n(T) = \prod_{i=1}^s f_i$ ,  $d := \deg(n)$  und  $l := \deg(f)$ .

a)  $\deg(f)$  und die Anzahl ungerader Primteiler von  $n$  ist gerade.

Dann ist auch der Grad von  $n$  gerade.

Aus [5.3] folgt dann:

$$g_{\text{gew}}(fn) = \frac{(q^l+1)q^d}{q^2-1} - \frac{q(q+1)}{q^2-1} - \frac{q(q-1)}{q^2-1} - \frac{q^d-q^2}{q^2-1} = \frac{q^{l+d}-q^2}{q^2-1}.$$

b)  $\deg(f)$  gerade und die Anzahl ungerader Primteiler von  $n$  ist ungerade. Dann ist der Grad von  $n$  ungerade.

Aus [5.3] folgt dann:

$$g_{\text{gew}}(fn) = \frac{(q^l+1)q^d}{q^2-1} - \frac{q(q+1)}{q^2-1} + \frac{q(q-1)}{q^2-1} - \frac{q^d-q}{q^2-1} = \frac{q^{l+d}-q}{q^2-1}.$$

c)  $\deg(f)$  ungerade und die Anzahl ungerader Primteiler von  $n$  ist gerade. Der Grad von  $n$  ist dann gerade.

Aus [5.3] folgt dann:

$$g_{\text{gew}}(fn) = \frac{(q^l+1)q^d}{q^2-1} - \frac{q(q+1)}{q^2-1} - \frac{q^d-q^2}{q^2-1} = \frac{q^{l+d}-q^2}{q^2-1}.$$

d)  $\deg(f)$  und die Anzahl ungerader Primteiler von  $n$  ist ungerade.

Dann hat  $n$  ungeraden Grad.

Aus [5.3] folgt dann:

$$g_{\text{gew}}(fn) = \frac{(q^l+1)q^d}{q^2-1} - \frac{q(q+1)}{q^2-1} - \frac{q^d-q}{q^2-1} = \frac{q^{l+d}-q^2}{q^2-1}. \quad \square$$

Es bleibt die Frage, was die Aussagekraft dieser zufällig gefundenen Formel ist und warum sie im allgemeinen Fall ( $n$  nicht quadratfrei) nicht gilt. Die zweite Frage könnte damit zusammenhängen, daß man  $\infty$  wohl als genau 1-fachen Teiler des Führers  $n$  betrachten muß. Wenn  $n$  nicht quadratfrei ist, kommen so Unsymmetrien ins Spiel, die die Formel aus Satz 5.10 stören. Zur Beantwortung der ersten Frage muß ich auf kompetentere Mathematiker verweisen, die dieser Formel vielleicht eine Bedeutung zumessen können.

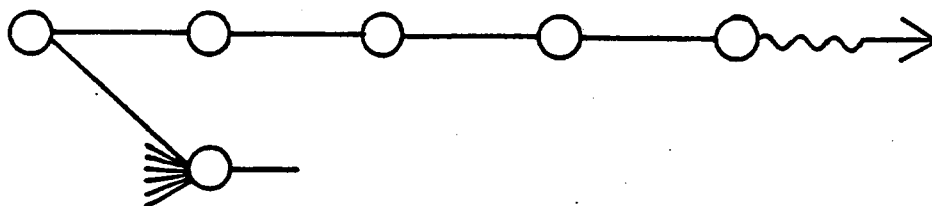
## 6 Liste der Graphen $\Gamma_0(n) \setminus \mathcal{T}$

Hier gebe ich eine Liste der Graphen  $\Gamma_0(n) \setminus \mathcal{T}$  für  $\text{Grad}(n) \leq 5$  an. Bei höheren Graden werden die Graphen so unübersichtlich, daß sie nur schwer auf einer Din A4-Seite dargestellt werden können. Aus Paragraph 4 wissen wir, daß die Struktur der Graphen, abgesehen von der genauen Lage der Kanten der Stufe  $\Lambda_0 \Lambda_1$ , nur vom Zerfallungstyp abhängt. Ich gebe hier für jeden Zerfallungstyp ( $\text{Grad}(n) \leq 5$ ) einen Graphen an.

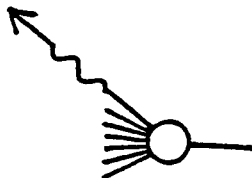
Notation:

$f_i(T), g_i(T), h_i(T), r_i(T), s_i(T) \in \mathbb{F}_q[T]$  bezeichnen prime paarweise verschiedene Polynome von Grad  $i$ .

Den Teilgraphen



zeichne ich der Einfachheit halber folgendermaßen:

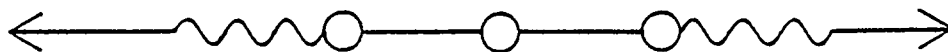


### 6.1 $\text{Grad}(n) < 3$

Die Graphen für  $\text{Grad}(n) = 1$  und  $\text{Grad}(n) = 2$  sind eigentlich uninteressant, da sie keine Zyklen haben. Ich habe sie der Vollständigkeit halber trotzdem angegeben.

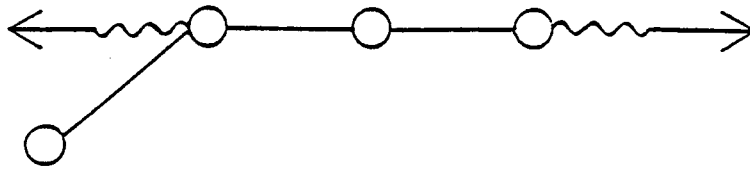
$$n(T) = f_1(T)$$

Zykelzahl : 0



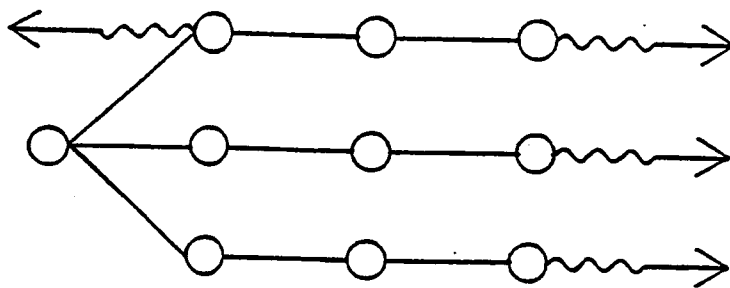
$n(T) = f_2(T)$

Zykelzahl : 0



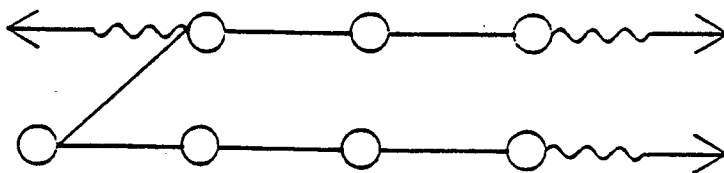
$n(T) = f_1(T)g_1(T)$

Zykelzahl : 0



$n(T) = f_1(T)^2$

Zykelzahl : 0

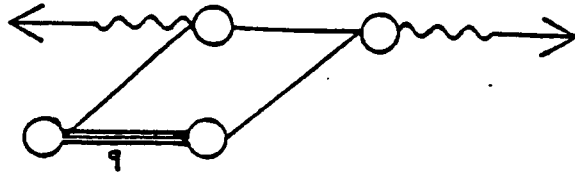


6.2 Grad(n)=3

Diese Graphen wurden schon 1986 von E.U.Gekeler berechnet (vgl. [Gel], S.123-126; Dort wurden beim Setzen offensichtlich die Abbildungen 3 und 5 vertauscht.).

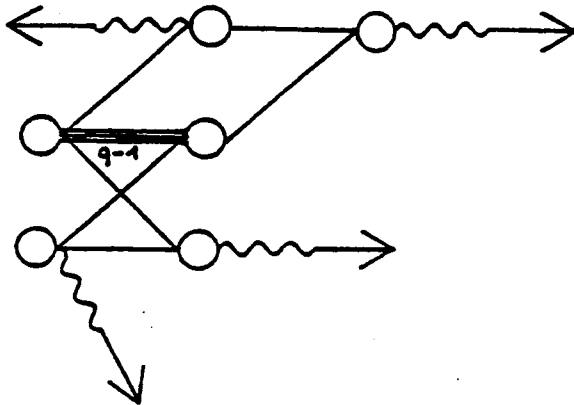
$$n(T) = f_3(T)$$

Zykelzahl :  $q$



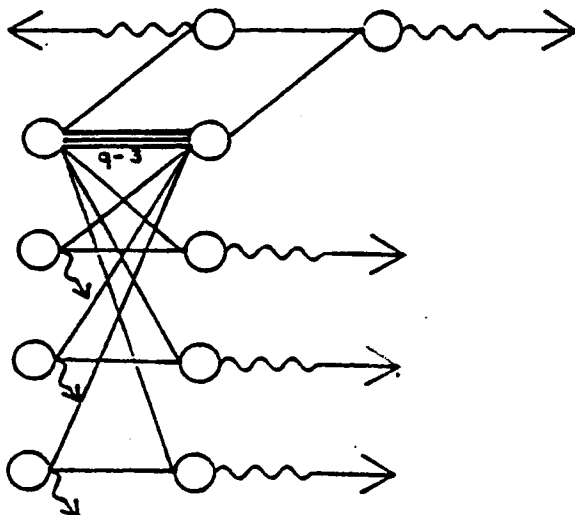
$$n(T) = f_2(T)g_1(T)$$

Zykelzahl :  $q$



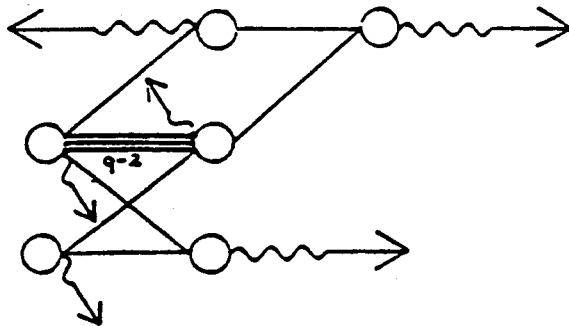
$$n(T) = f_1(T)g_1(T)h_1(T)$$

Zykelzahl :  $q$



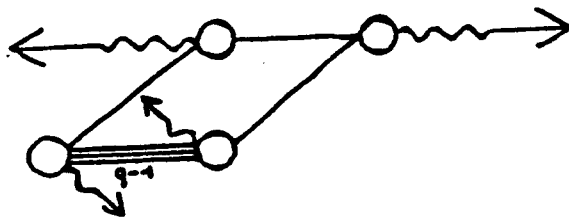
$$n(T) = f_1(T)^2 g_1(T)$$

Zykelzahl :  $q - 1$



$$n(T) = f_1(T)^3$$

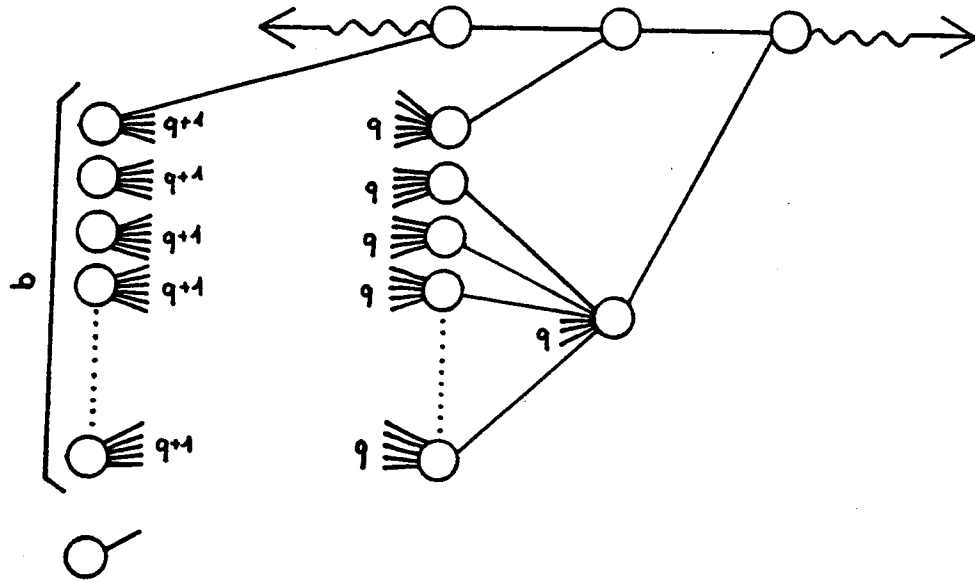
Zykelzahl :  $q - 1$



6.3 Grad(n)=4

$n(T) = f_4(T)$

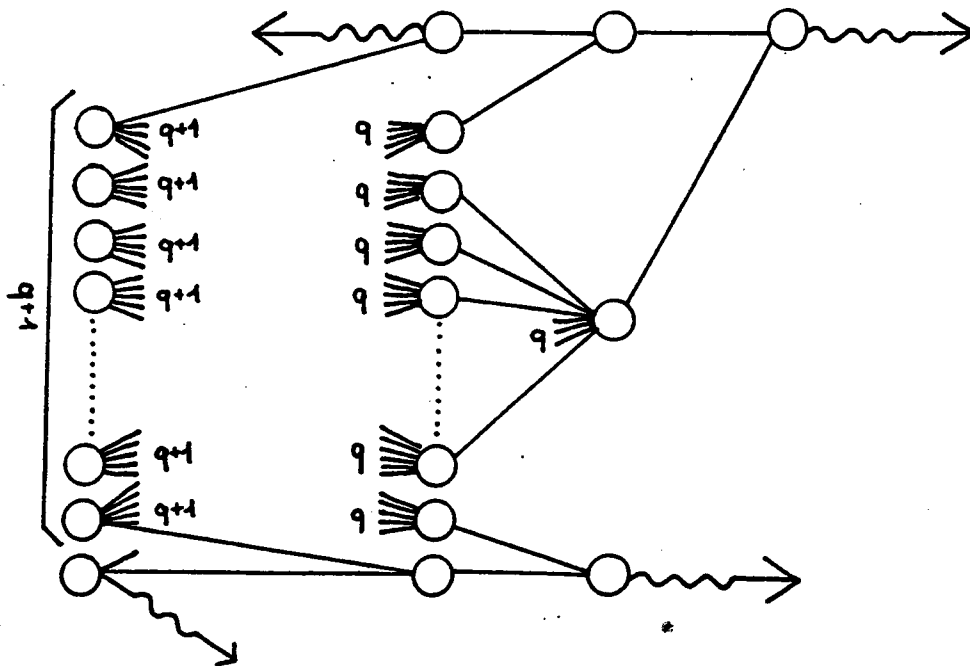
Zykelzahl :  $q^2$





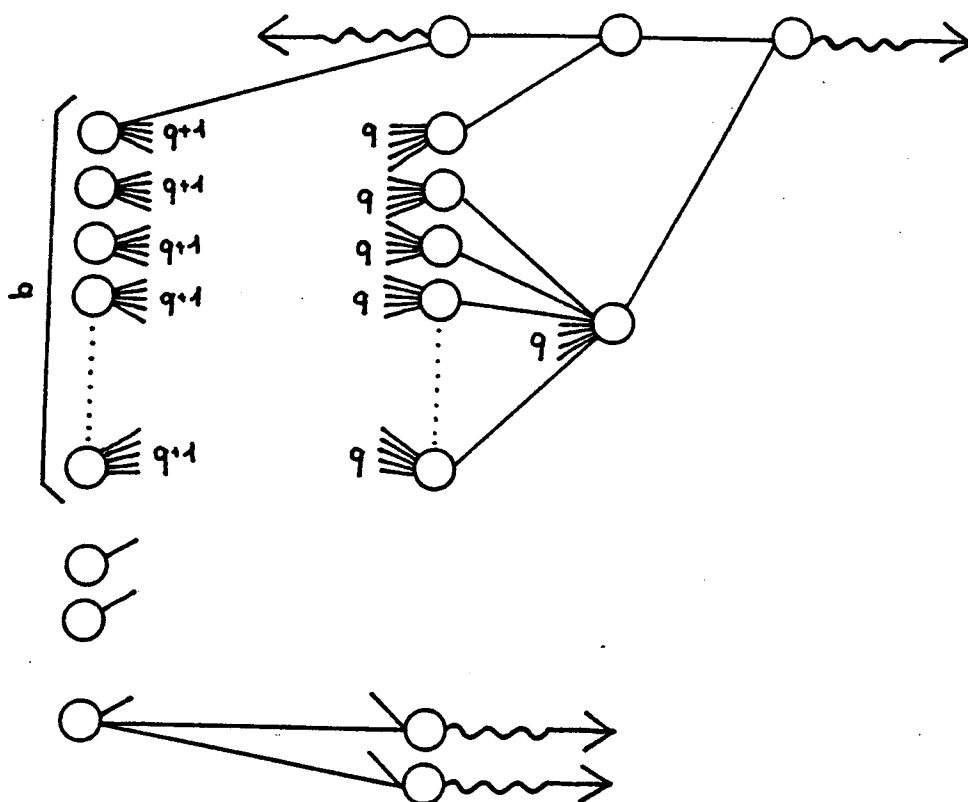
$$n(T) = f_3(T)g_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^2 + q$



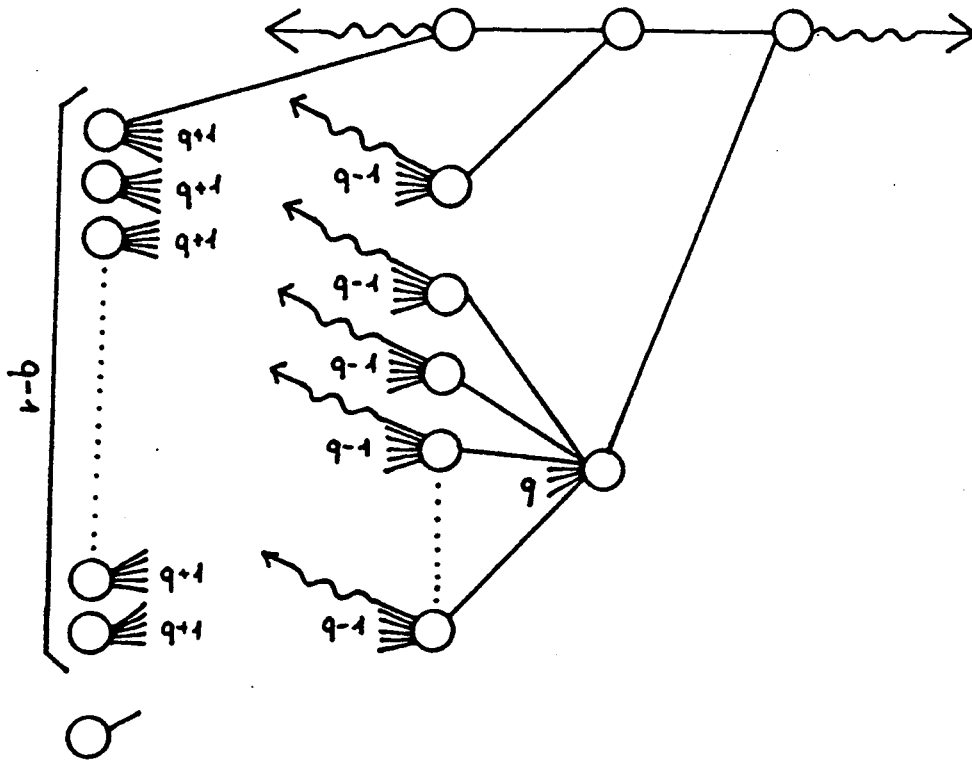
$n(T) = f_2(T)g_2(T)$

Zykelzahl :  $q^2$



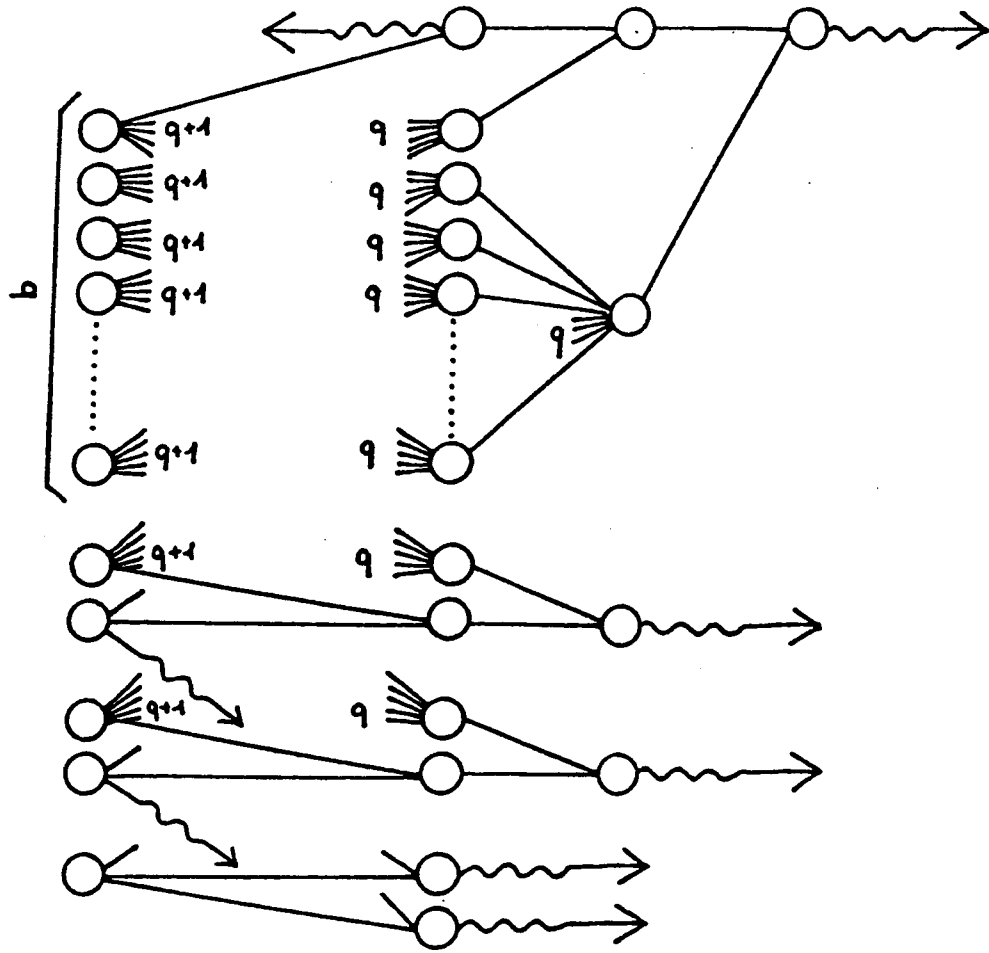
$n(T) = f_2(T)^2$

Zykelzahl :  $q^2 - q$



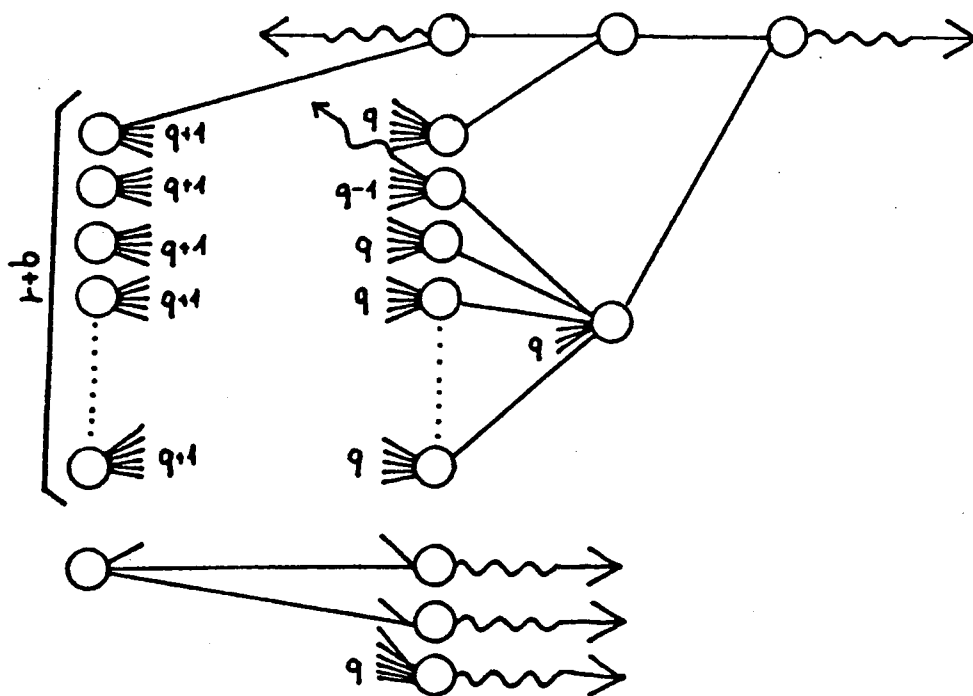
$$n(T) = f_2(T)g_1(T)h_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^2 + 2q$



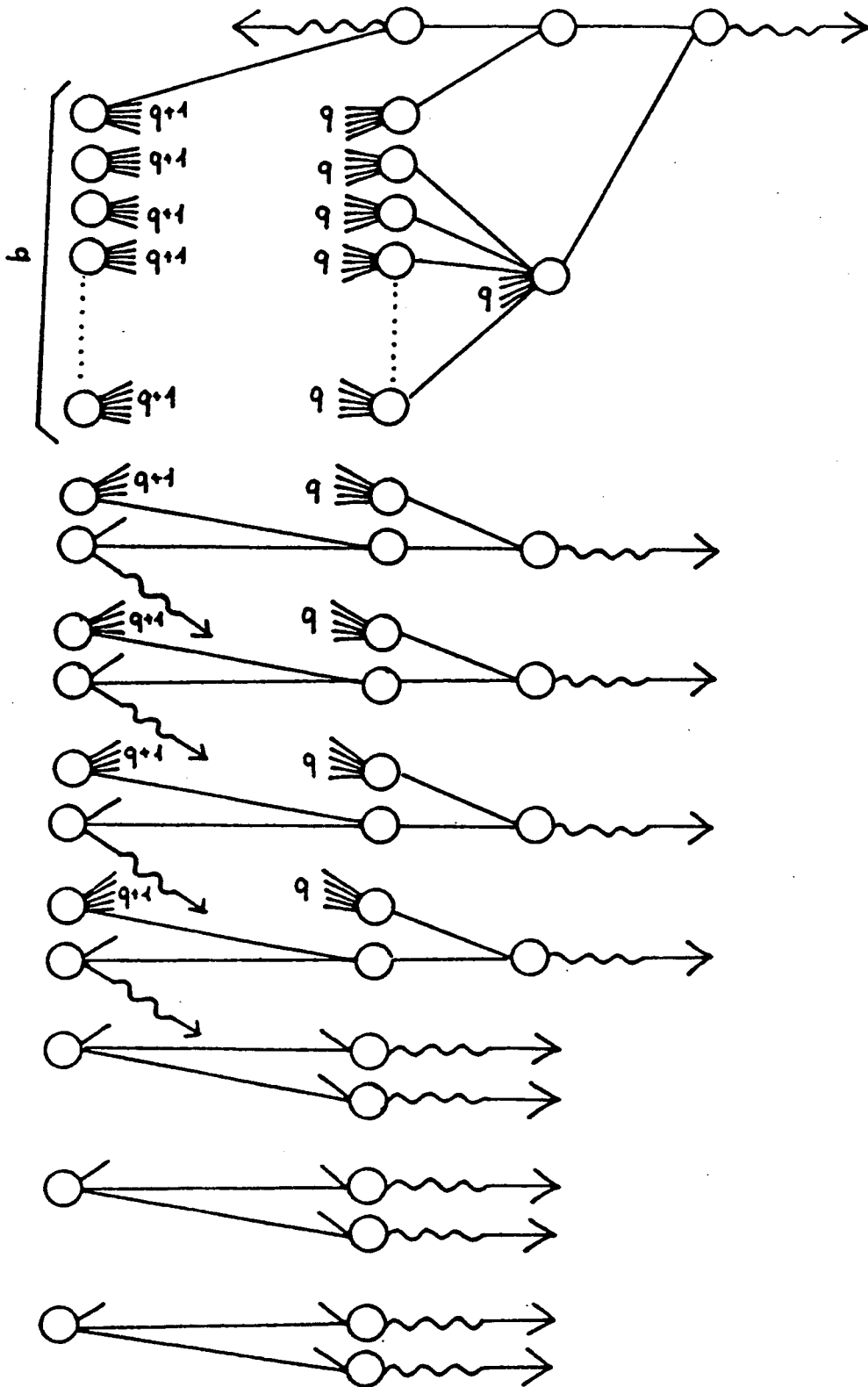
$$n(T) = f_2(T)g_1(T)^2$$

Zykelzahl:  $q^2 + q - 1$



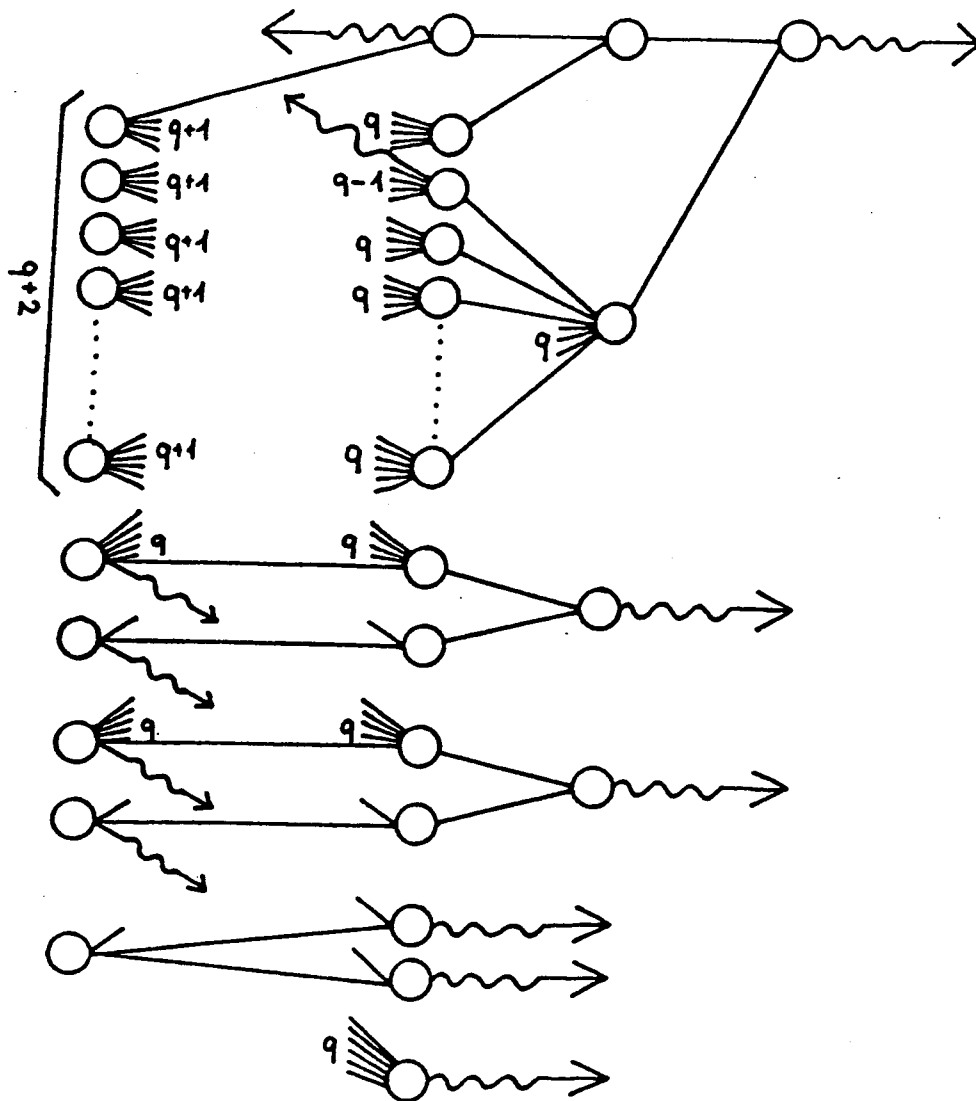
$$n(T) = f_1(T)g_1(T)h_1(T)r_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^2 + 4q$



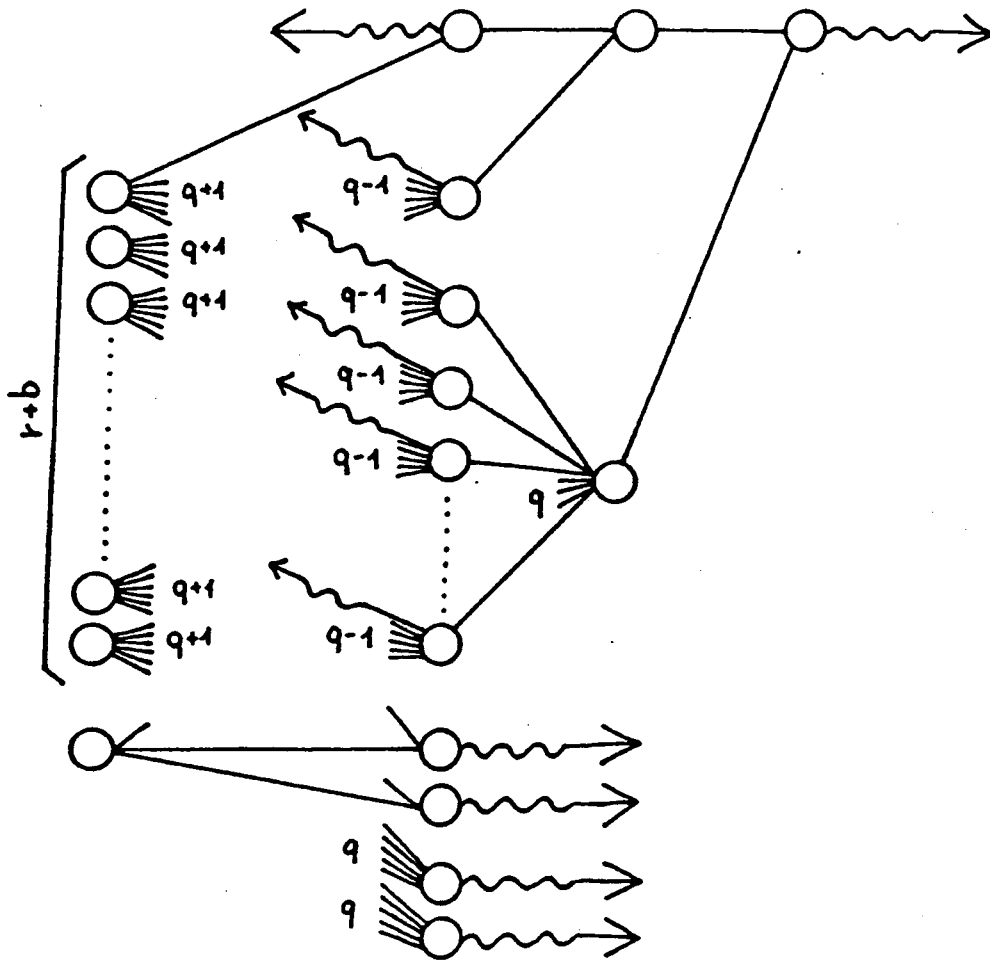
$$n(T) = f_1(T)^2 g_1(T) h_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^2 + 3q - 3$



$$n(T) = f_1(T)^2 g_1(T)^2$$

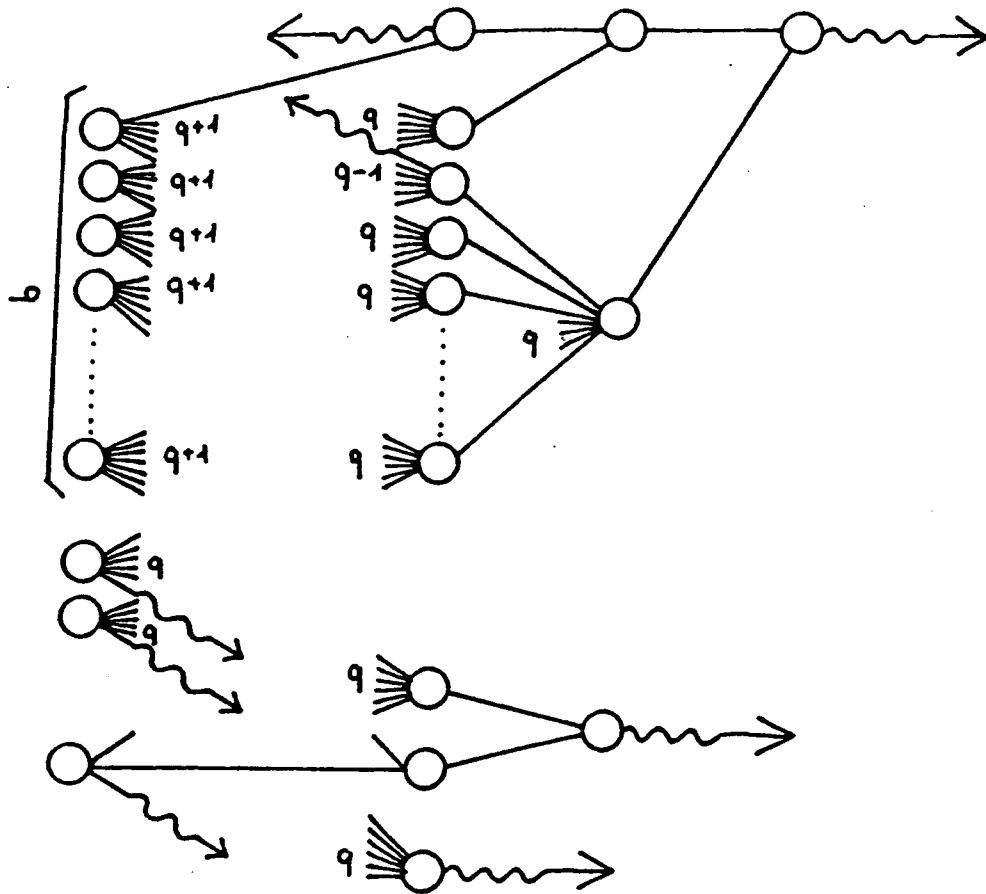
Zykelzahl:  $q^2 + q - 2$





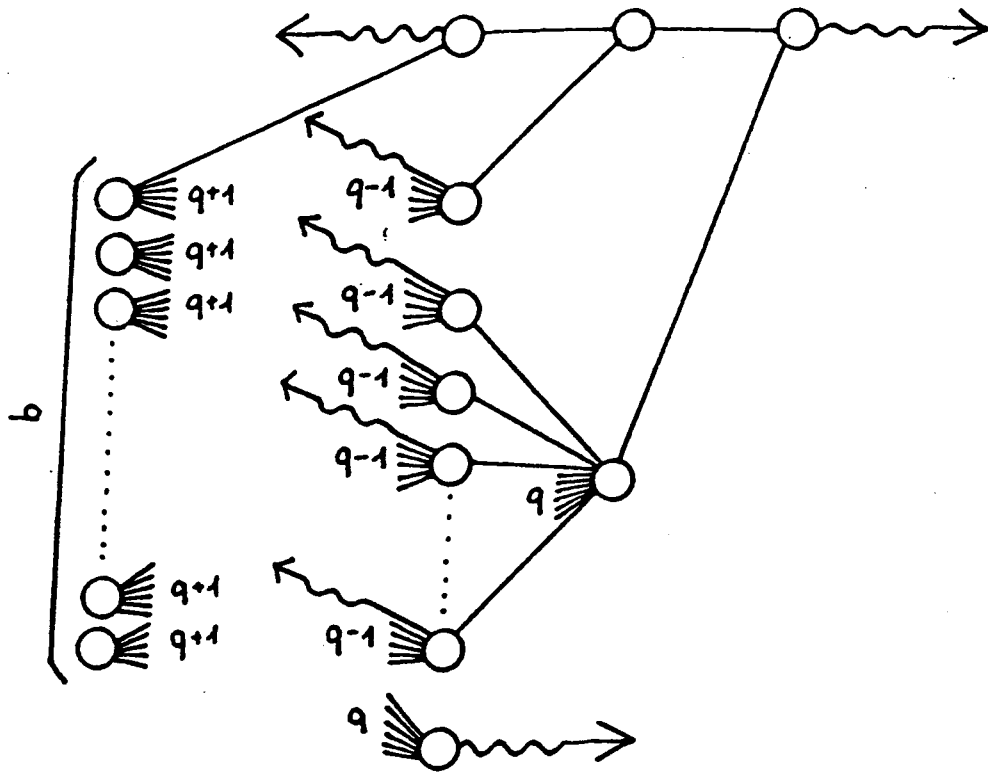
$$n(T) = f_1(T)^3 g_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^2 + 2q - 3$



$$n(T) = f_1(T)^4$$

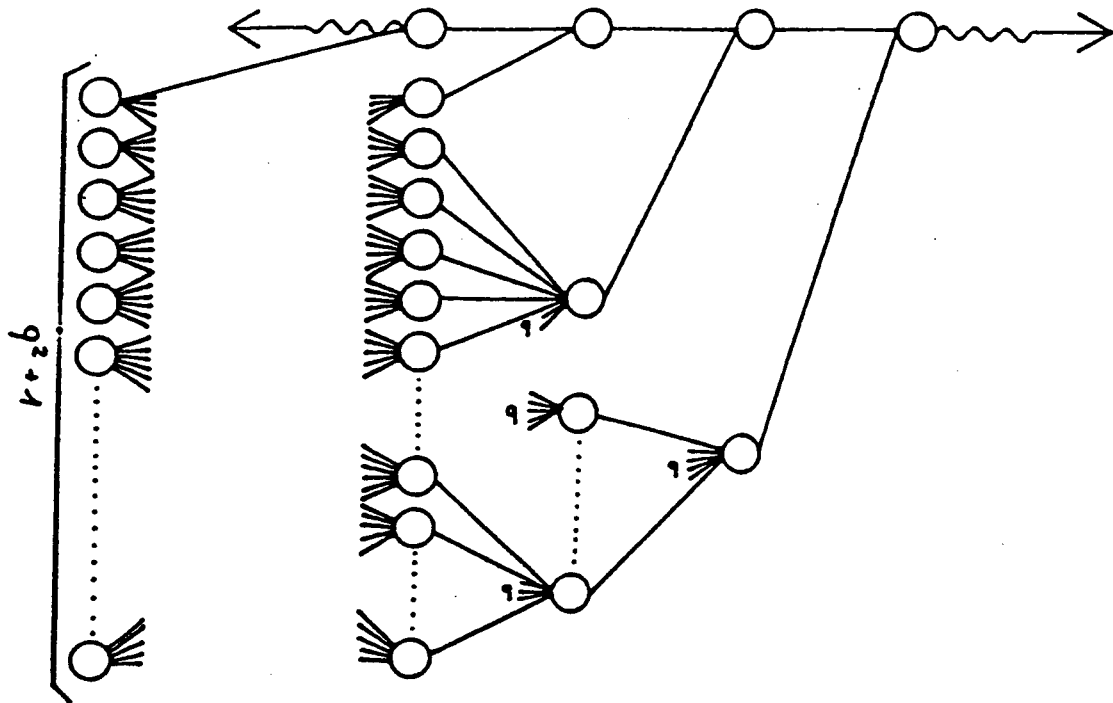
Zykelzahl :  $q^2 - 1$



6.4 Grad(n)=5

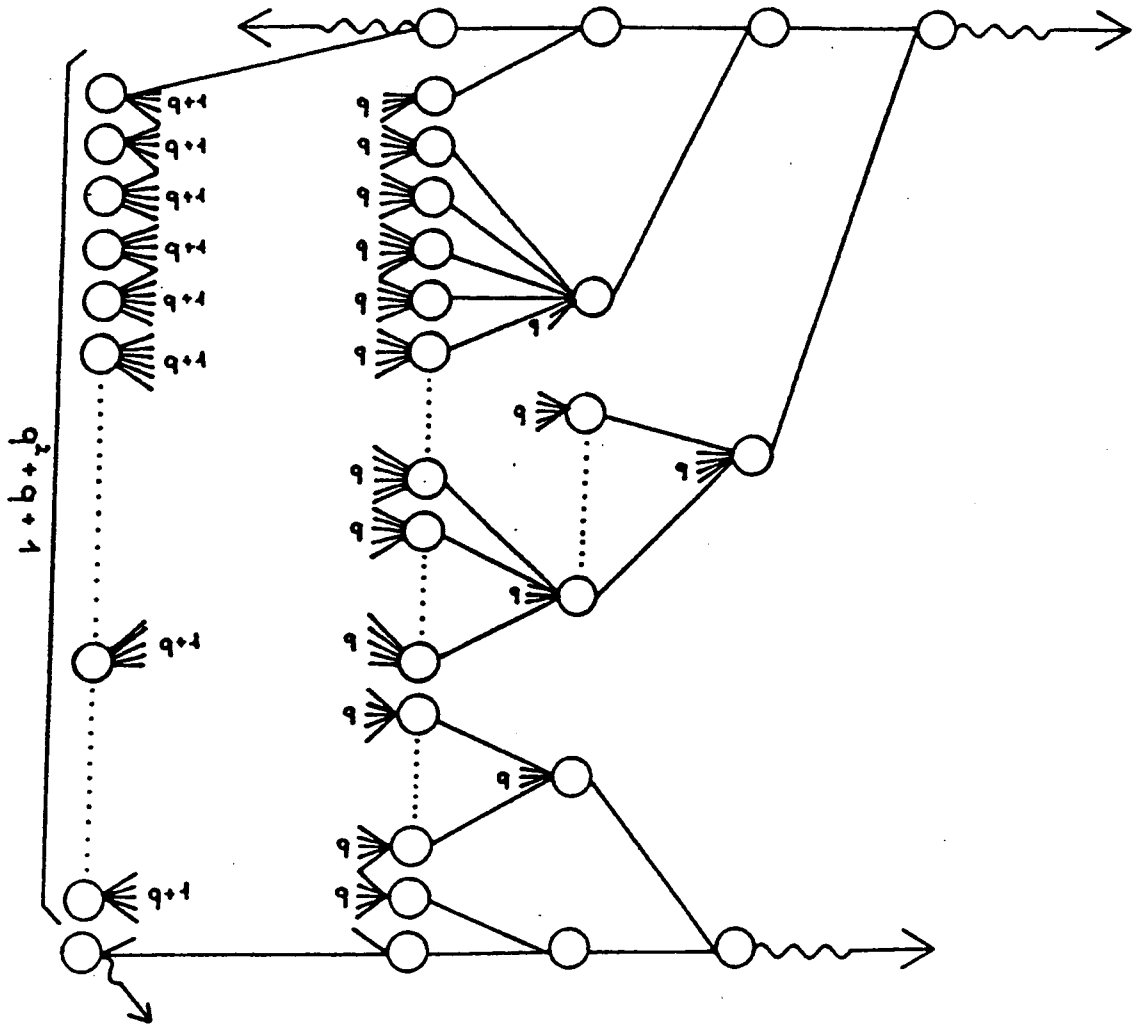
$n(T) = f_5(T)$

Zykelzahl:  $q^3 + q$



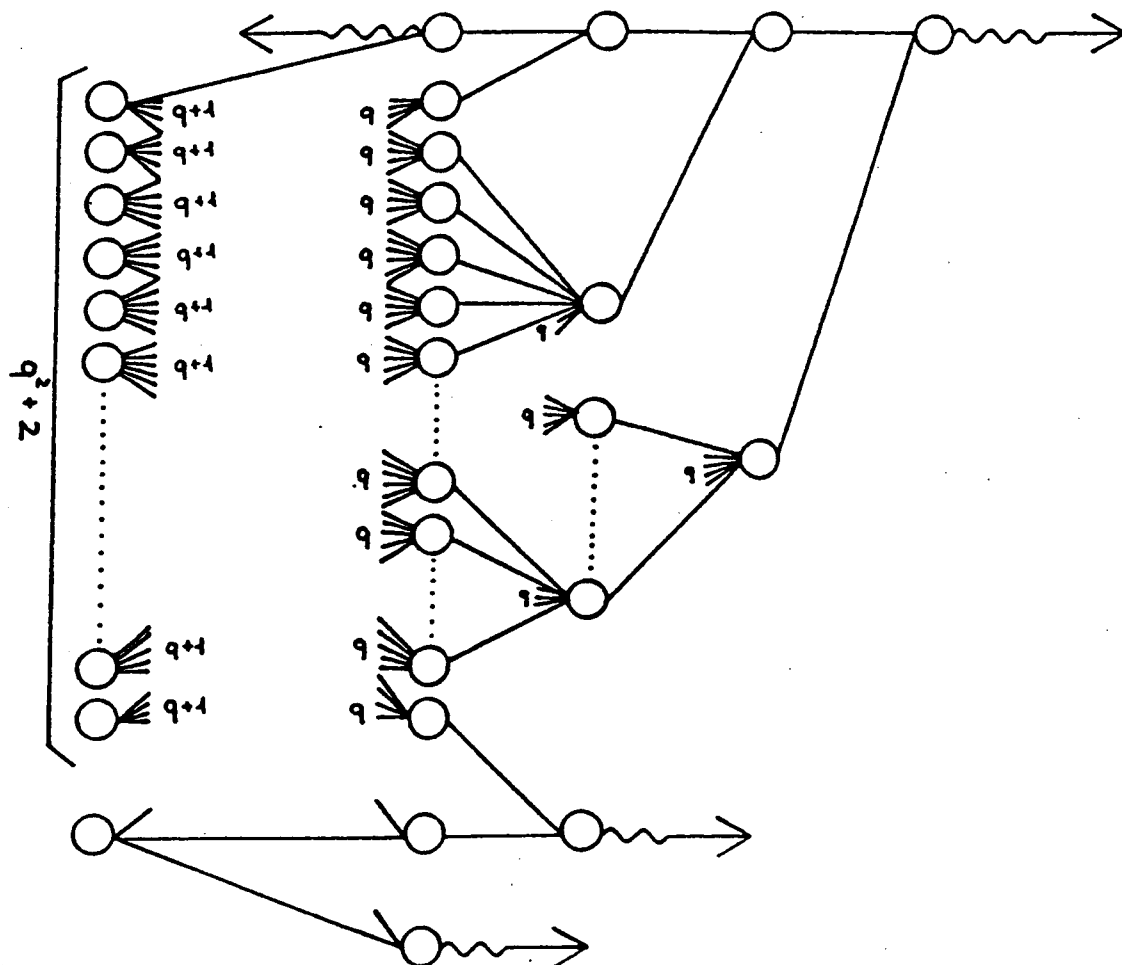
$n(T) = f_4(T)g_1(T)$

Zykelzahl :  $q^3 + q^2 + q$



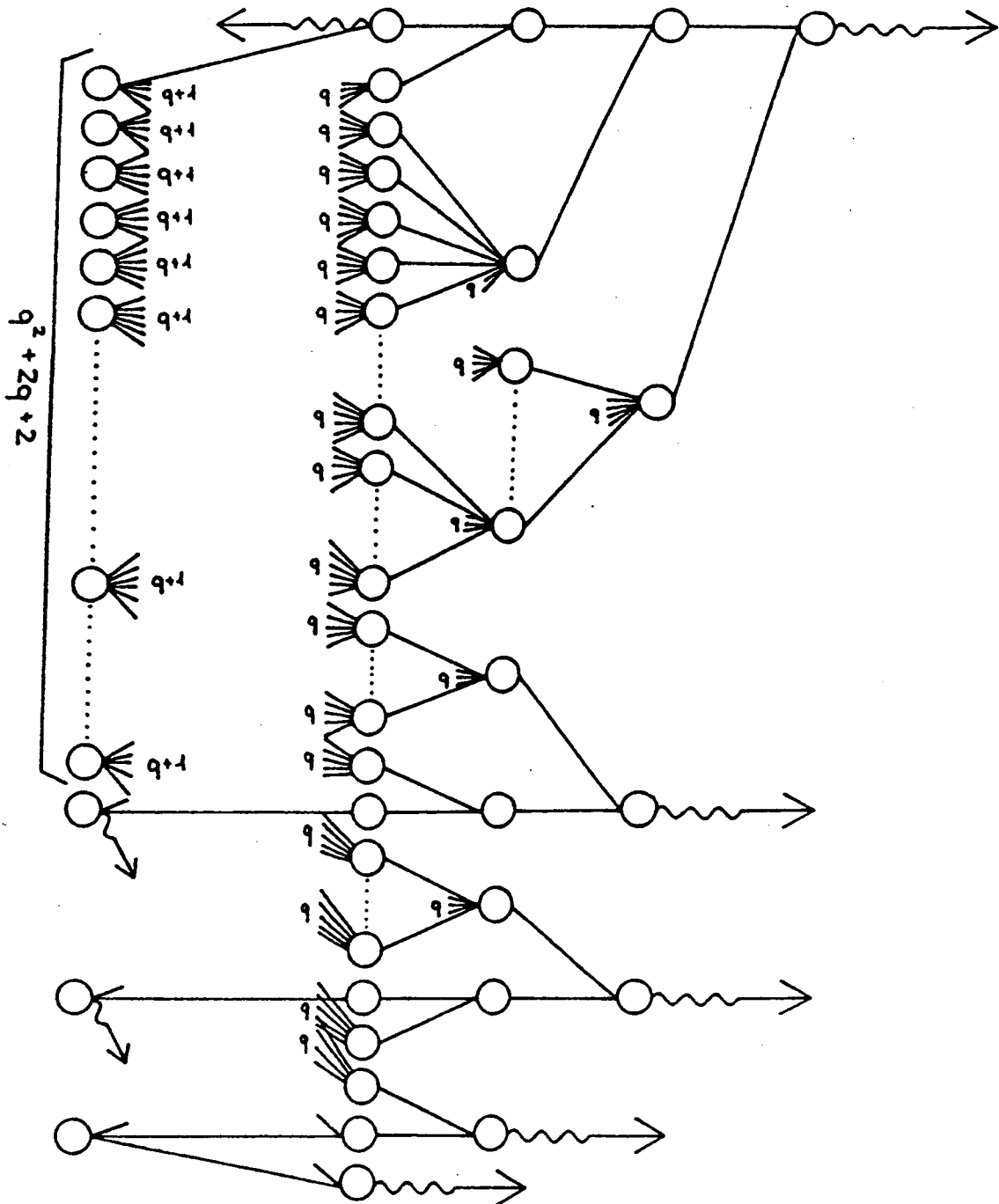
$n(T) = f_3(T)g_2(T)$

Zykelzahl :  $q^3 + 2q$



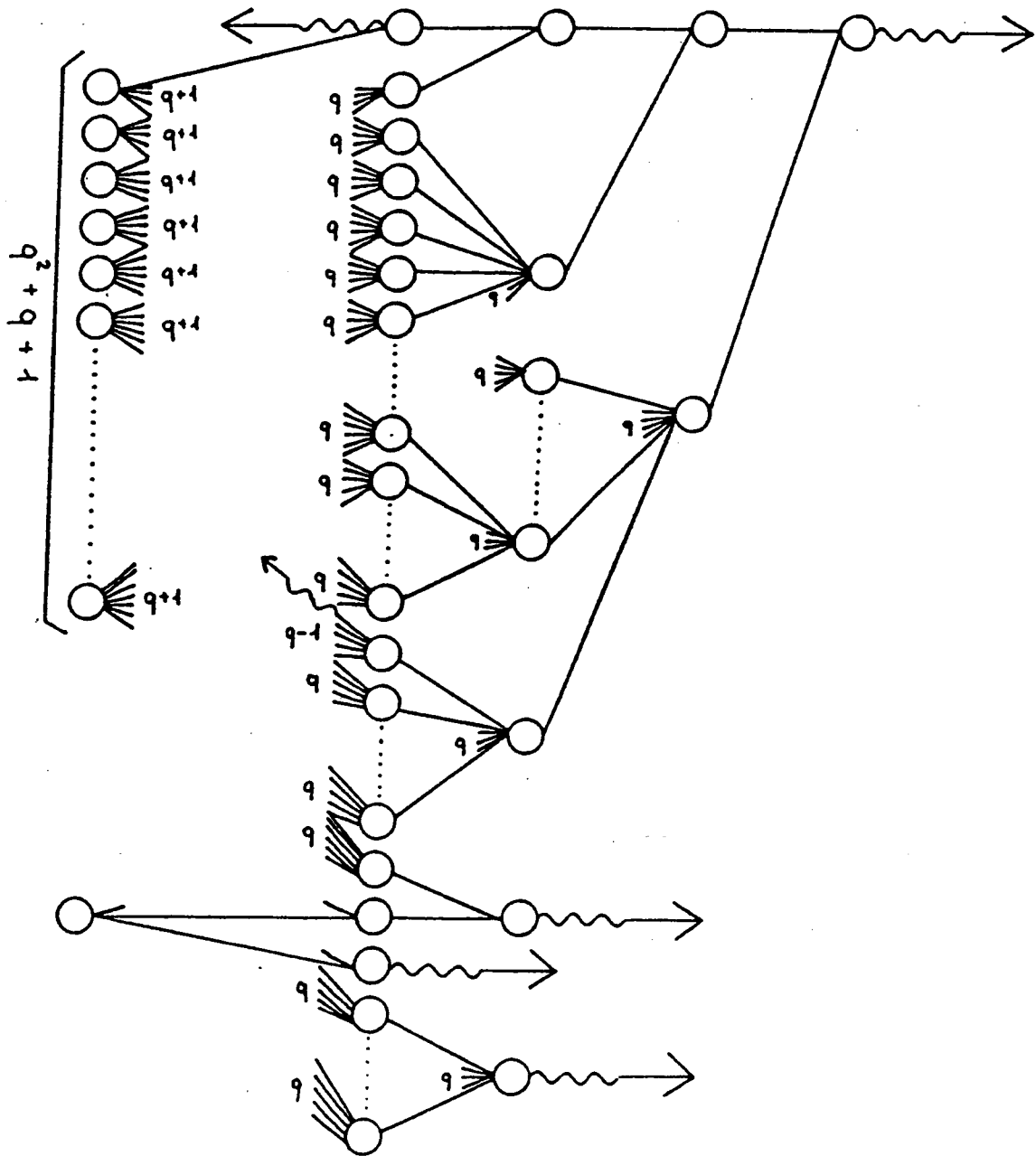
$n(T) = f_3(T)g_1(T)h_1(T)$

Zykelzahl :  $q^3 + 2q^2 + 2q$



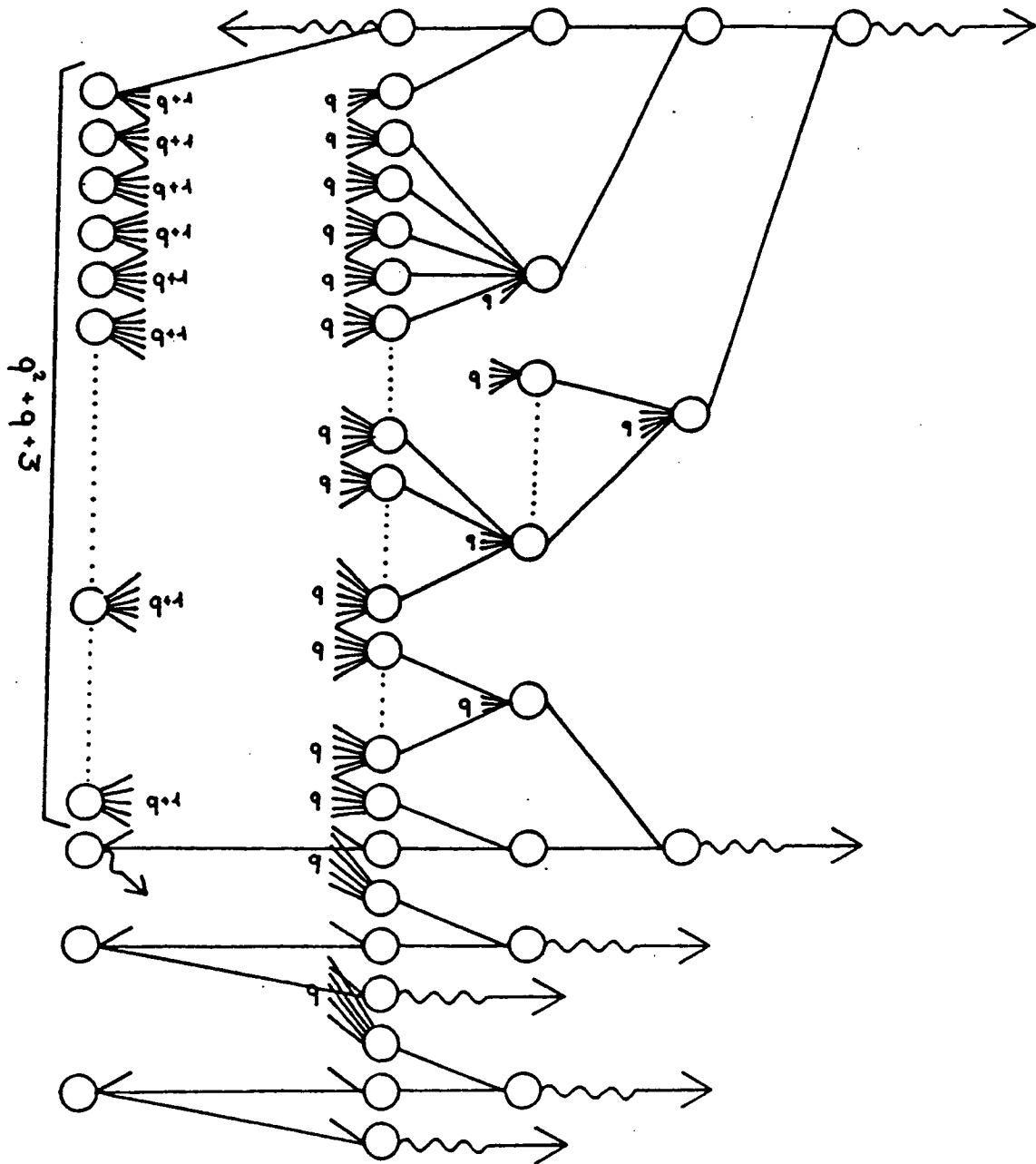
$$n(T) = f_3(T)g_1(T)^2$$

Zykelzahl :  $q^3 + q^2 + q - 1$



$n(T) = f_2(T)g_2(T)h_1(T)$

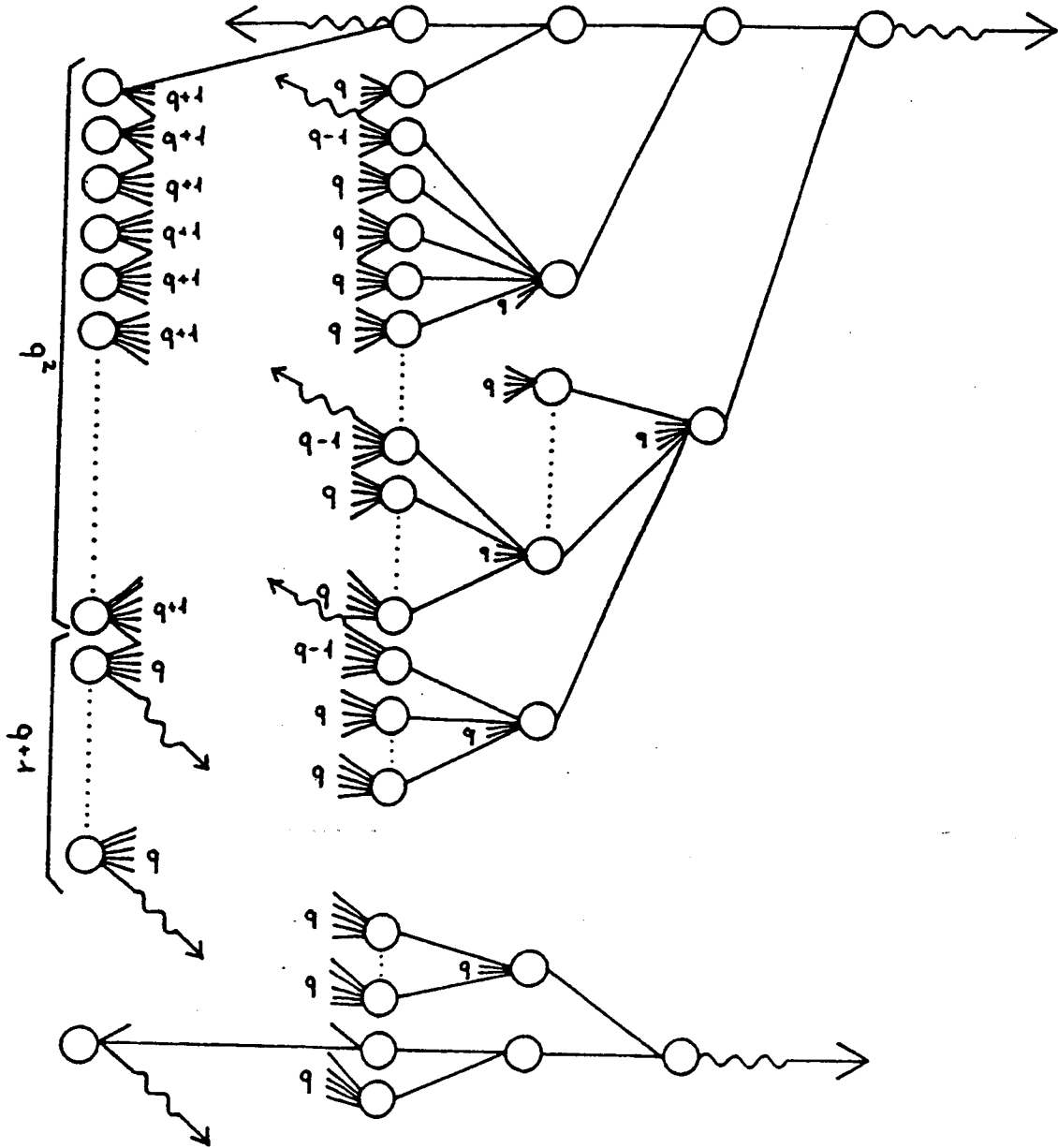
Zykelzahl :  $q^3 + q^2 + 3q$





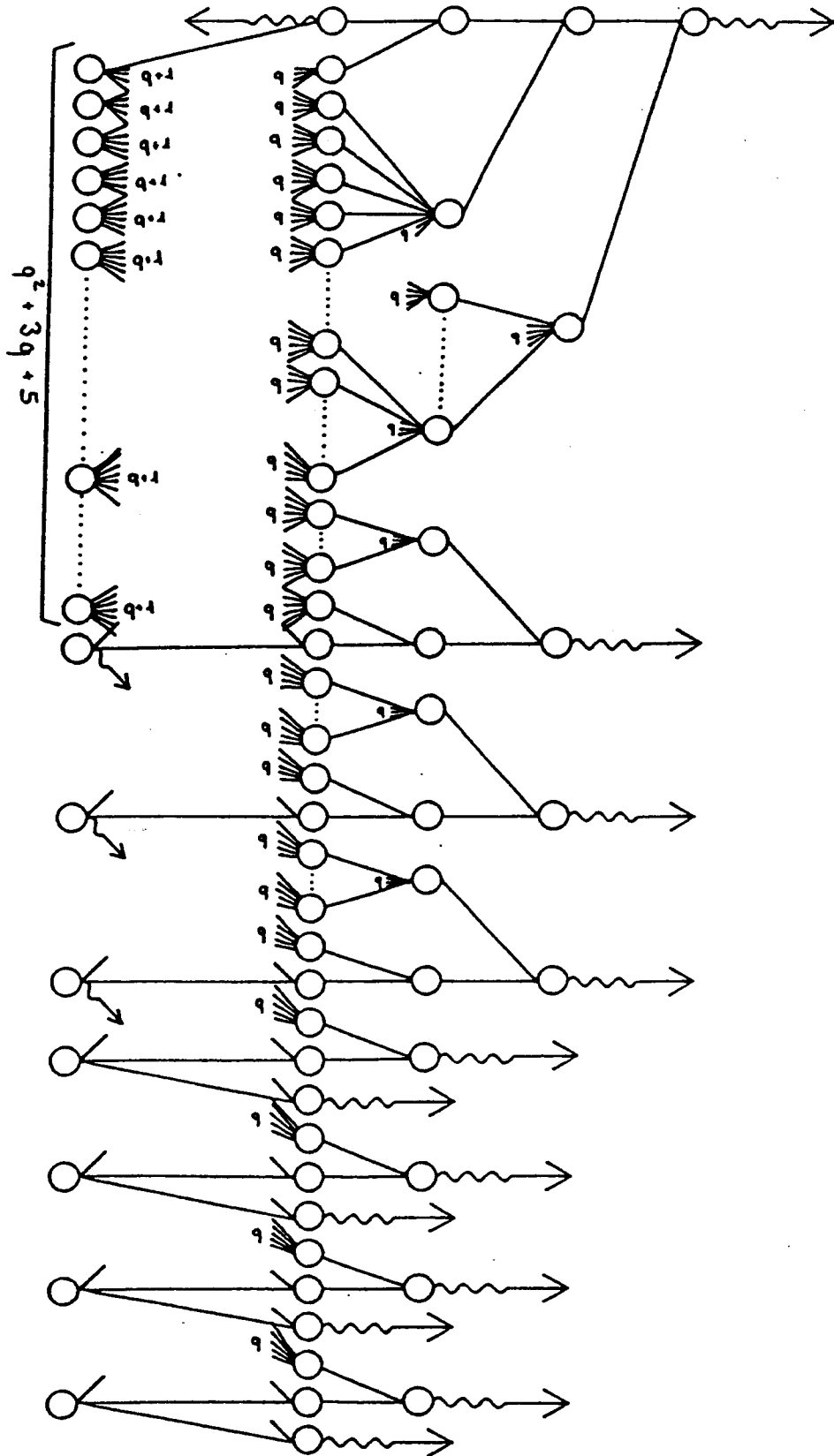
$$n(T) = f_2(T)^2 g_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^3 + q^2 - 1$



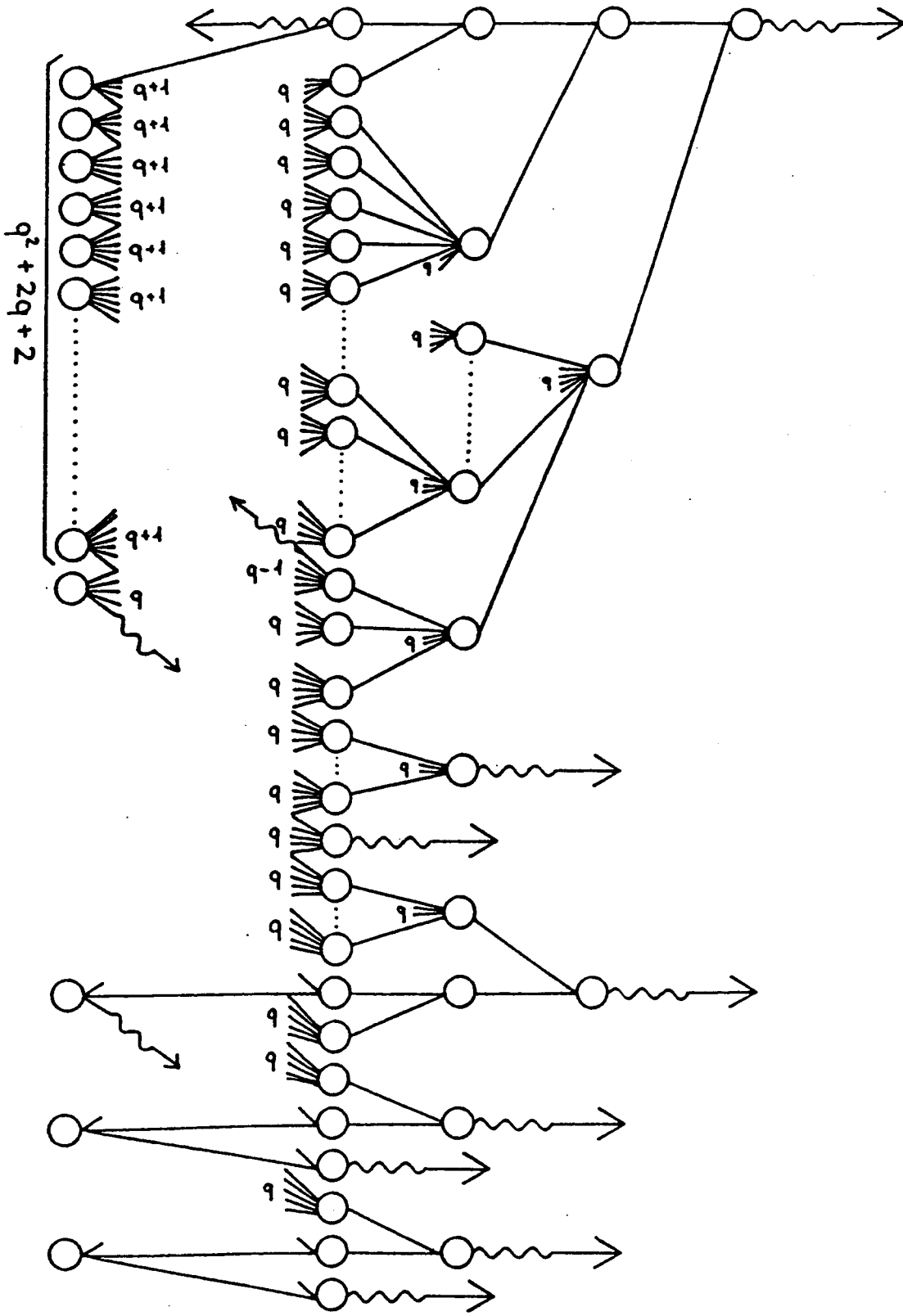
$$n(T) = f_2(T)g_1(T)h_1(T)r_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^3 + 3q^2 + 5q$



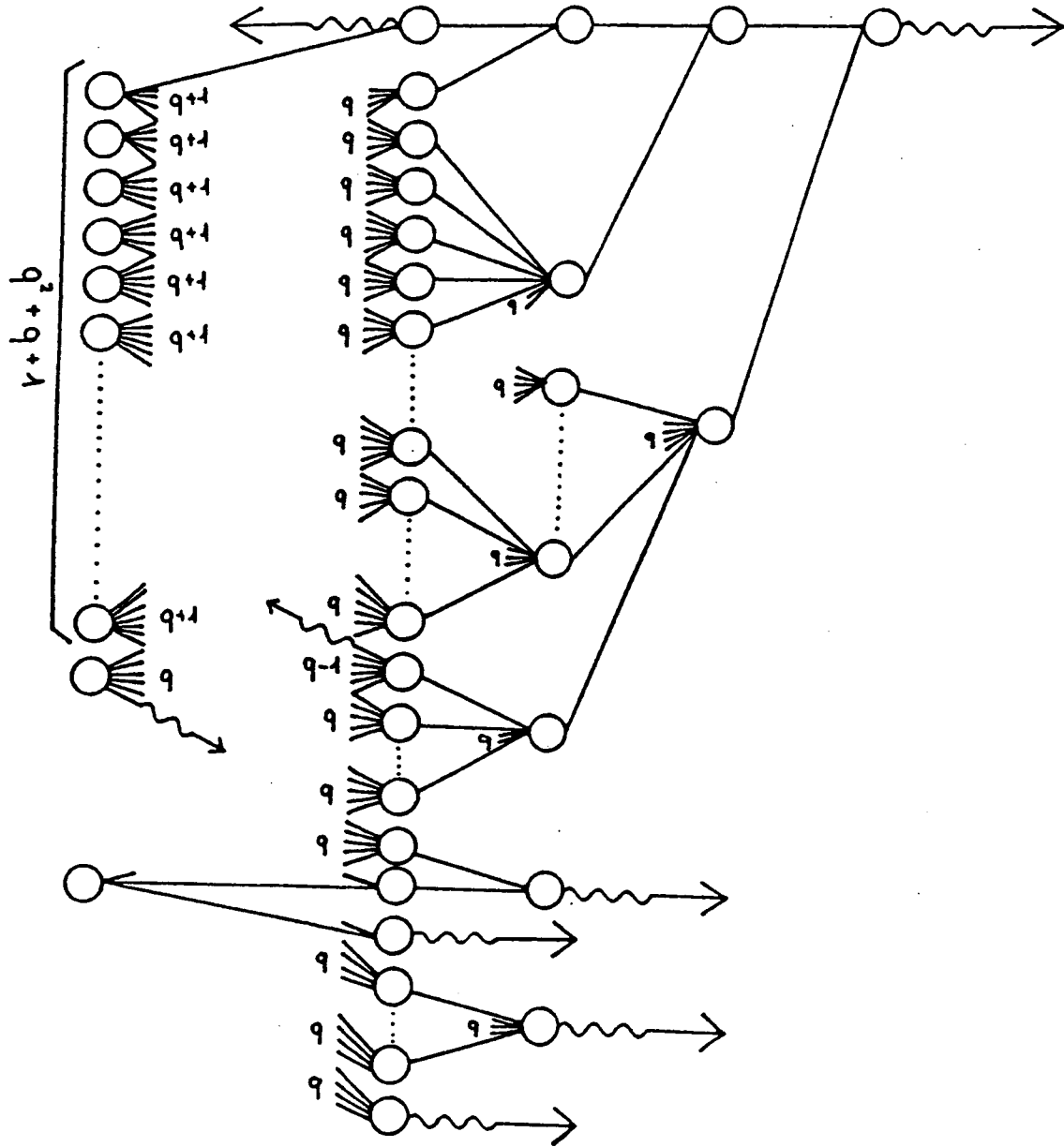
$n(T) = f_2(T)g_1(T)^2h_1(T)$

Zykelzahl:  $q^3 + 2q^2 + 3q - 3$



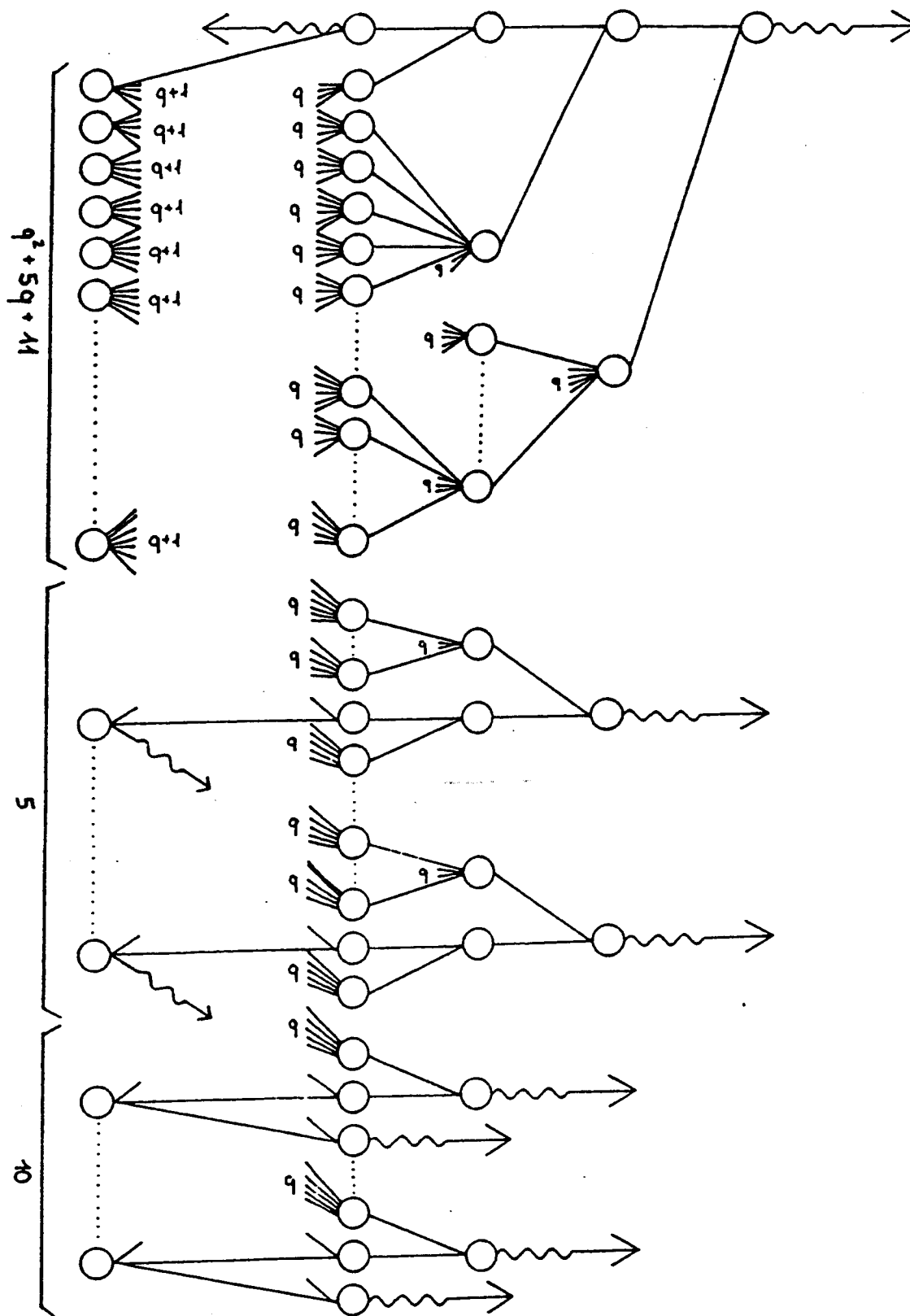
$$n(T) = f_2(T)g_1(T)^3$$

Zykelzahl :  $q^3 + q^2 + 2q - 3$



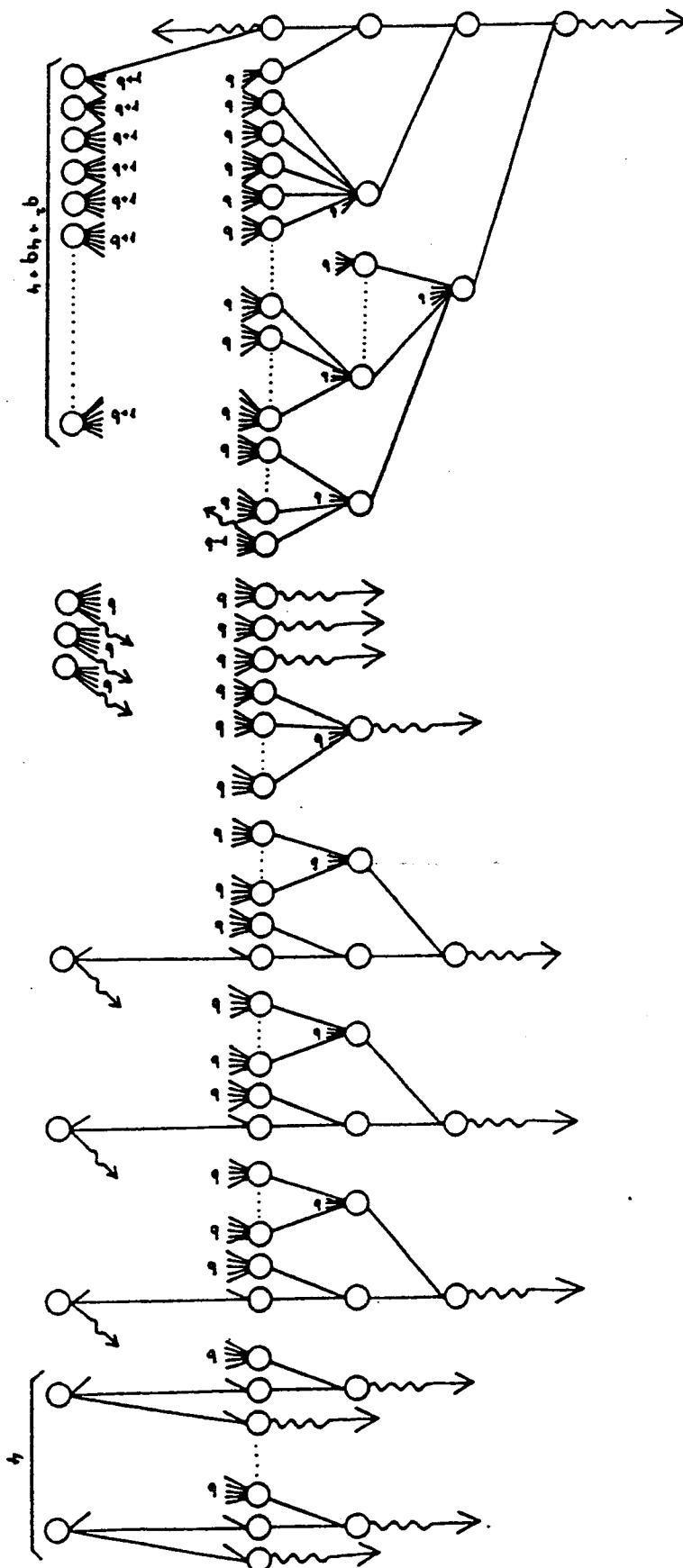
$$n(T) = f_1(T)g_1(T)h_1(T)r_1(T)s_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^3 + 5q^2 + 11q$



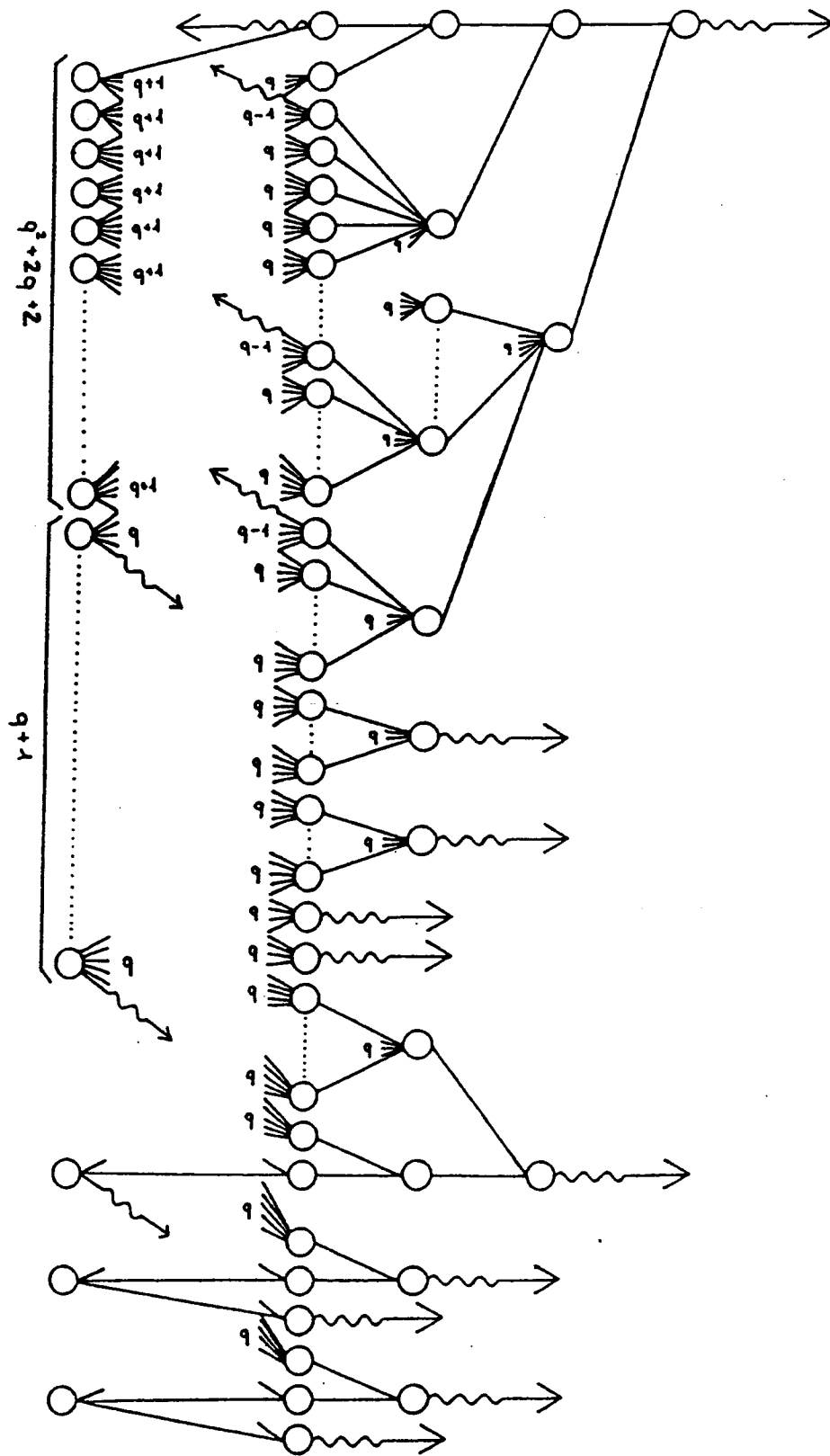
$$n(T) = f_1(T)^2 g_1(T) h_1(T) r_1(T)$$

$$\text{Zykelzahl} : q^3 + 4q^2 + 7q - 7$$



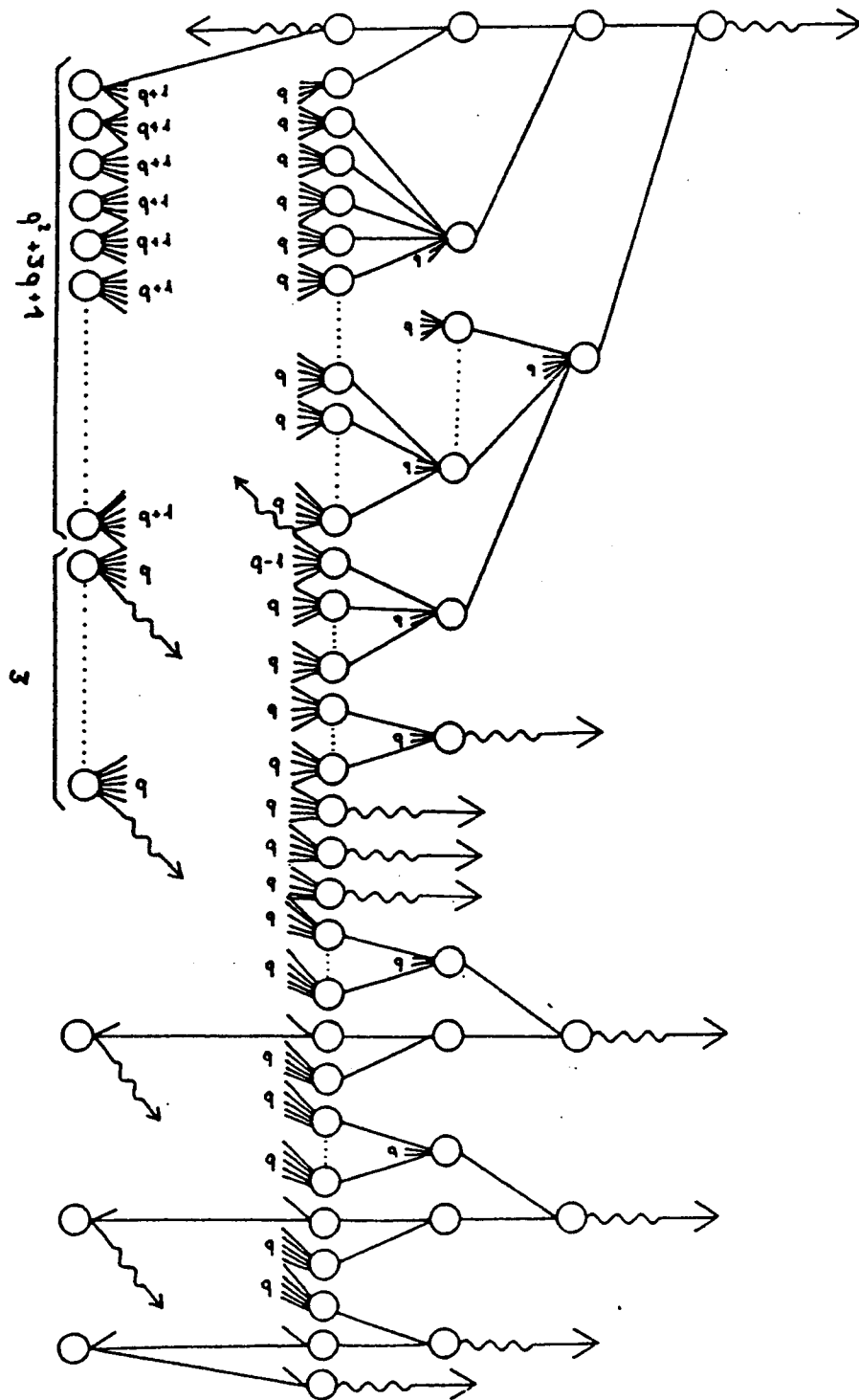
$$n(T) = f_1(T)^2 g_1(T)^2 h_1(T)$$

Zykelzahl :  $q^3 + 3q^2 + 2q - 5$



$$n(T) = f_1(T)^3 g_1(T) h_1(T)$$

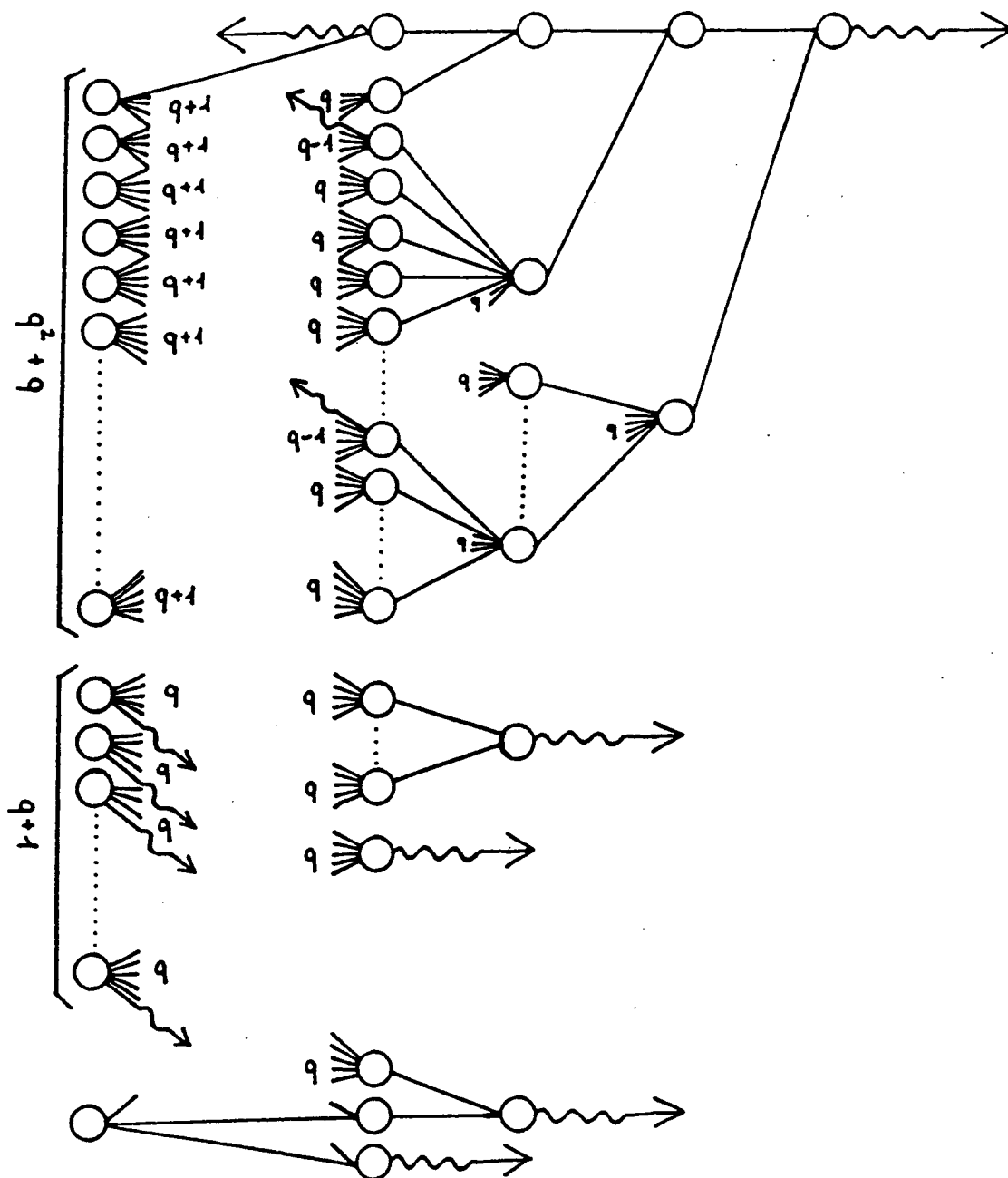
Zykelzahl :  $q^3 + 3q^2 + 4q - 7$





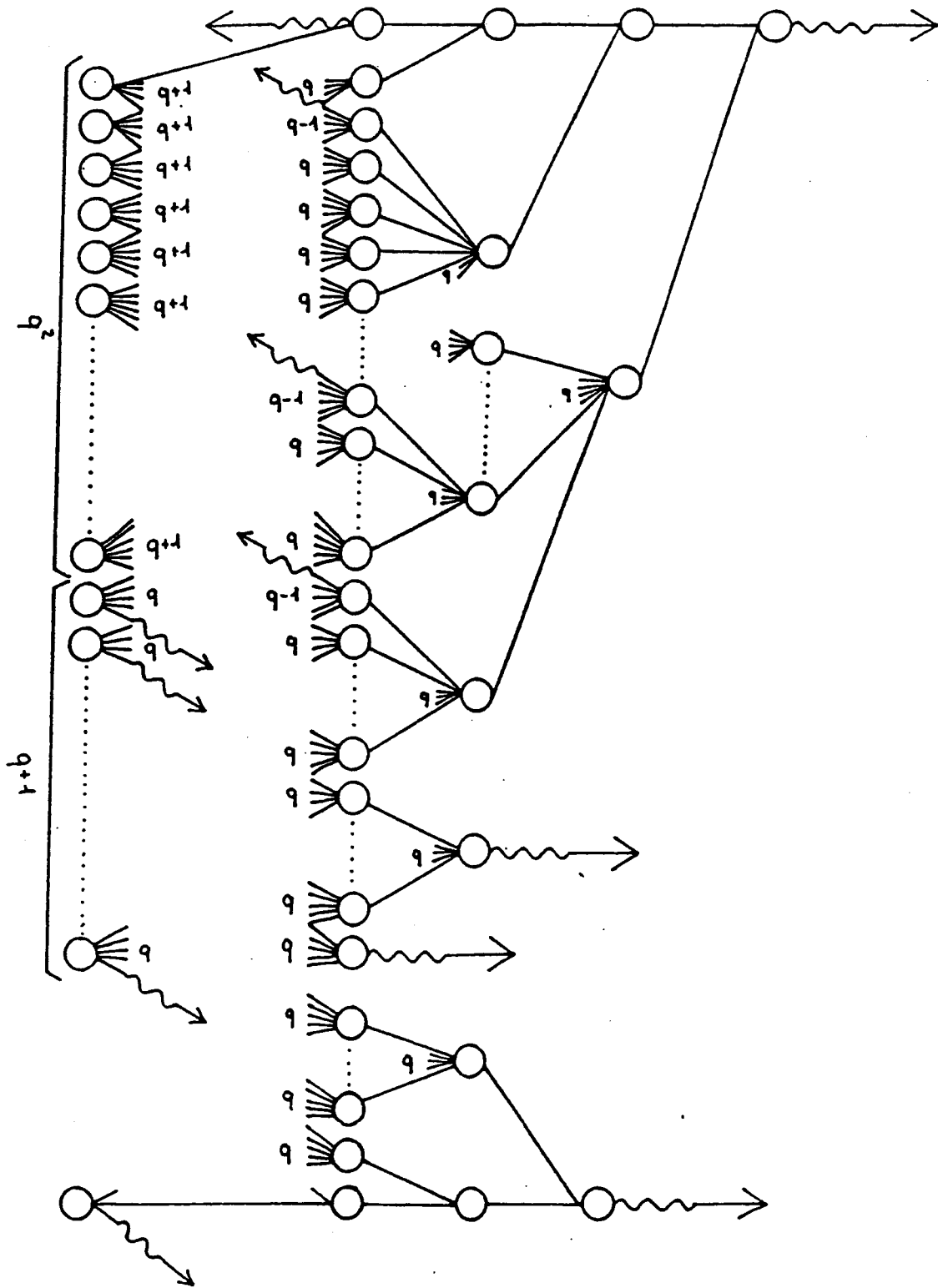
$$n(T) = f_1(T)^3 g_1(T)^2$$

Zykelzahl :  $q^3 + 2q^2 - 3$



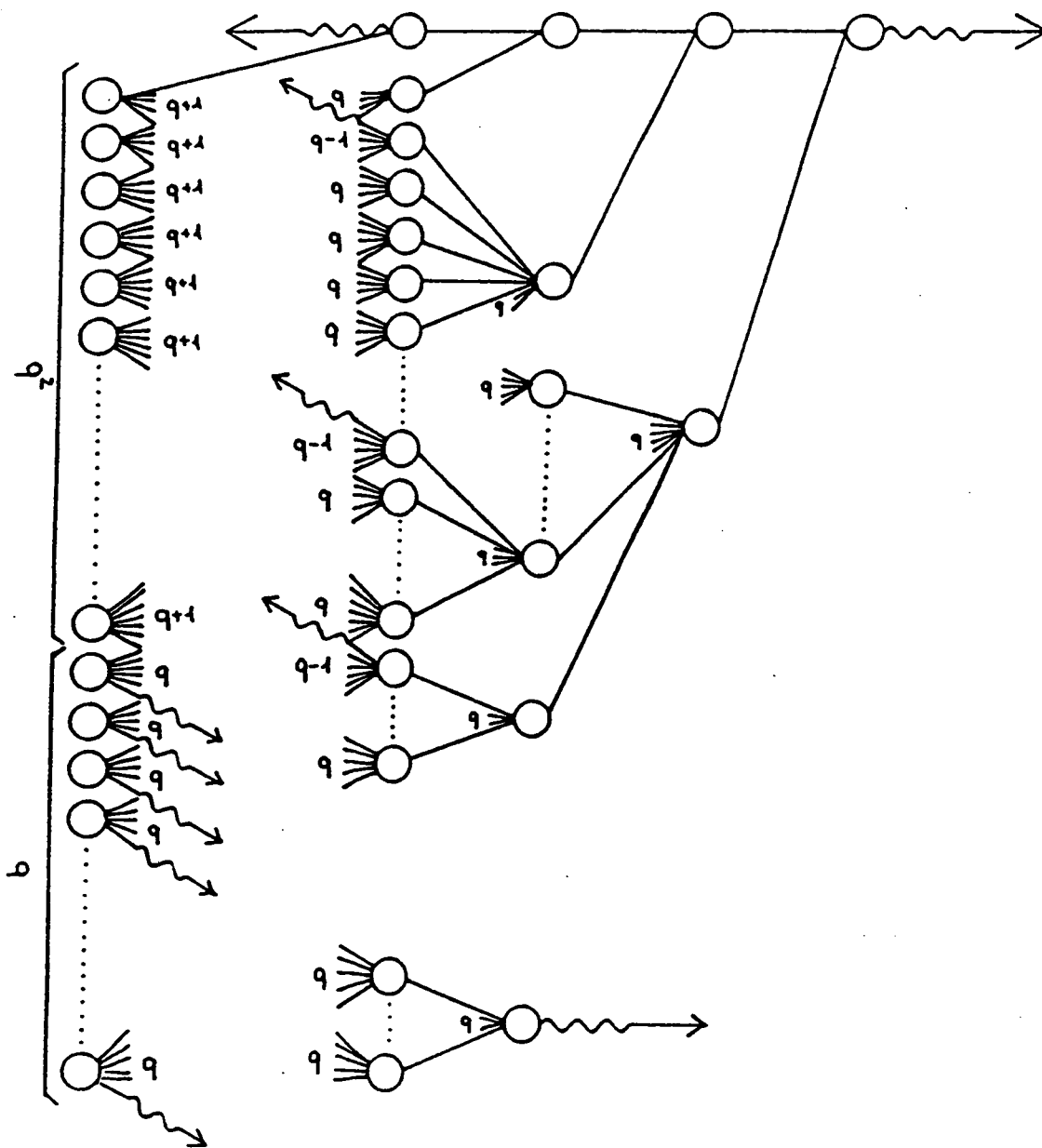
$n(T) = f_1(T)^4 g_1(T)$

Zykelzahl :  $q^3 + 2q^2 - 3$



$n(T) = f_1(T)^5$

Zykelzahl :  $q^3 + q^2 - q - 1$



## 7 Anhang

### 7.1 Programm und einige explizite Beispiele

In den Kapiteln 3 und 4 wurde ein Algorithmus zur Berechnung der Graphen  $\Gamma_0(n)^T$  und in Kapitel 5 ein Algorithmus zur Berechnung einer Basis der Homologie dieser Graphen erstellt. Diese Algorithmen (und noch ein wenig mehr) sind von mir auf einer SUN-Workstation in C programmiert worden. Compiliert belegt das Programm etwa 160 KByte Speicher.

Was leistet das Programm ?

Als erstes möchte man sicherlich den Graphen betrachten können. Dieser wird als Postscript Datei abgespeichert und kann dann ausgedruckt werden. In einer zweiten Datei wird die Adjazenzmatrix (mit jeweils einem Vertreter pro Knoten) und die Inzidenzmatrix (mit einem Vertreter pro Kante) gespeichert. Diese ist vor allem dann interessant, wenn man die Struktur der Graphen weiter studieren will (Symmetrien, ...). In einer dritten Datei werden die Basiskanten (nach Satz 5.4) angegeben.

Das Programm soll jedoch noch in Zukunft weiterentwickelt werden. In einer vierten Datei soll zu jedem Graphen die Komplexität (=Anzahl verschiedener maximaler Unterbäume) und die Zeta-Funktion (vgl. [Ha]) ausgegeben werden. In (etwas fernerer Zukunft) soll auch die Heckematrix inklusive der einfachen Eigenwerte und der dazugehörigen Eigenvektoren (vgl. dazu ([Ge1]) berechnet werden.

Wer sich für dieses Programm interessiert, kann den Quellcode, oder die compilierte Version inklusive einer genauen Beschreibung der Bedienung und der Ergebnisdateien gern kostenlos bekommen.

Ich bin erreichbar über:

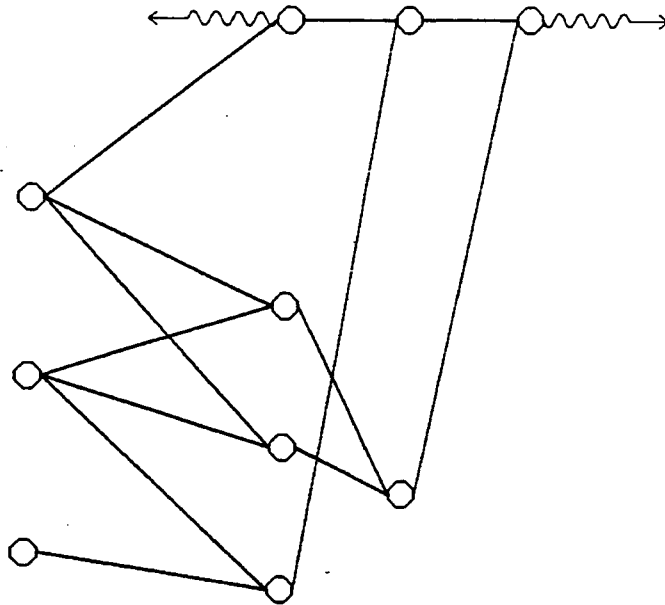
Prof.Dr. E.-U. Gekeler / Udo Nonnengardt  
 FB 9 Mathematik  
 Universität des Saarlandes  
 Postfach 1150  
 66041 Saarbrücken  
 (Germany)

oder noch einfacher:

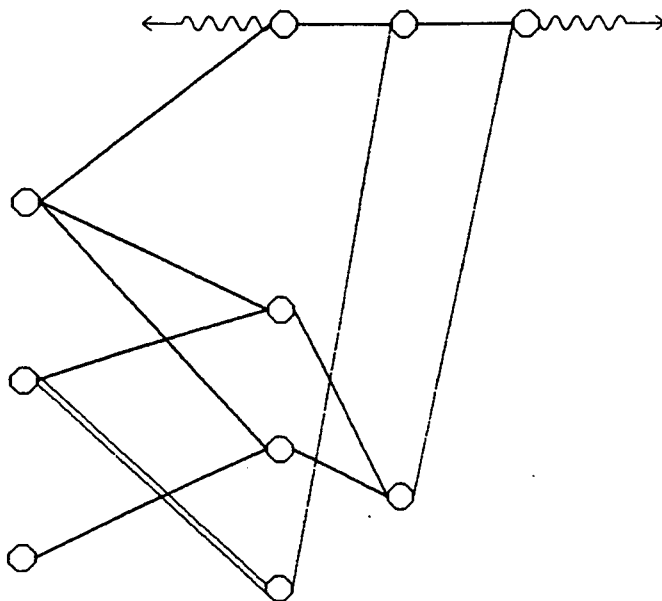
e-mail: udo@math.uni-sb.de

In Kapitel 6 wurde zu jedem Zerfallungstyp mit  $\text{Grad}(n) \leq 5$  die Struktur des entsprechenden Graphen  $\Gamma_0(n)^T$  angegeben. Für  $\text{Grad}(n) \geq 4$  hängt die genaue Gestalt der Graphen nicht nur vom Zerfallungstyp von  $n$ , sondern von  $n$  selbst ab. Im folgenden habe ich ein paar Beispiele zusammengetragen, an denen erkennbar wird, wie stark die Graphen  $\Gamma_0(n)^T$  von der Wahl von  $n$  abhängen. Die Berechnungen wurden mit dem oben besprochenen Programm durchgeführt.

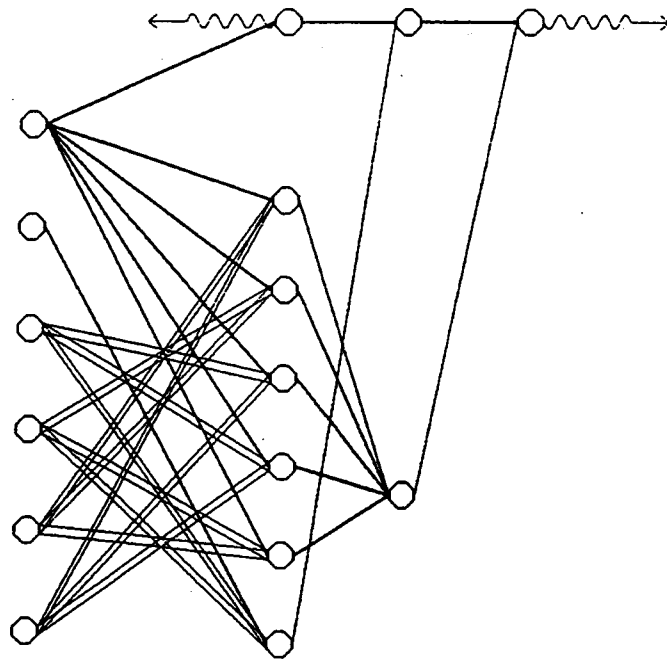
Koerper: F2 Polynom:  $n(t) = (t^4 + t + 1)$  Zykel-Anzahl: 4 Rechenzeit: 00:00:00



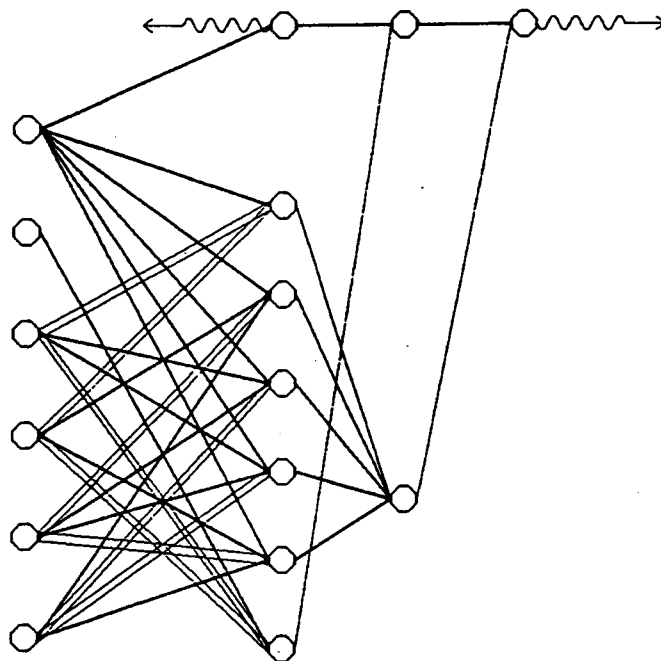
Koerper: F2 Polynom:  $n(t) = (t^4 + t^3 + 1)$  Zykel-Anzahl: 4 Rechenzeit: 00:00:00



Koerper: F5 Polynom:  $n(t) = (t^4 + 2)$  Zykel-Anzahl: 25 Rechenzeit: 00:06:35



Koerper: F5 Polynom:  $n(t) = (t^4 + 3)$  Zykel-Anzahl: 25 Rechenzeit: 00:07:23



## Literaturverzeichnis

- [B-S] BOREWICZ-SAFAREVIC: Zahlentheorie, *Birkhäuser*, 1966
- [Ge1] E.-U. GEKELER: Automorphe Formen über  $\mathbb{F}_q(T)$  mit kleinem Führer, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 55 (1986), 111-146
- [Ge2] E.-U. GEKELER: Drinfeld-Moduln und modulare Formen über rationalen Funktionenkörpern, *Bonner Math. Schriften*
- [Ha] K. HASHIMOTO: Zeta Functions of Finite Graphs and Representations of p-Adic Groups, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 15, 1989
- [La] S. LANG: Analysis II, *Addison-Wesley*, 1969
- [La2] S. LANG: Introduction to modular forms, *Springer Verlag*, 1976
- [Se] J.-P. SERRE: Trees, *Springer Verlag*, 1980