

Arithmetisch definierte
Darstellungen von Gruppen vom
Typ $SL(2, \mathbb{F}_q)$

Diplomarbeit
Imke Rust

Saarbrücken, 27. Februar 1995
Fachbereich 9, Mathematik

1995 Rust, Imke

Ich erkläre hiermit an Eides statt, diese Arbeit selbständig geschrieben und keine Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Saarbrücken, 1.3.1995 Imke Rust

Fachbereich 9 MATHEMATIK
Nr. 27397-00
Universität des Saarlandes

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	2
1	Grundlagen aus der Darstellungstheorie	4
1.1	Grundbegriffe	4
1.2	Die Darstellungen der $GL(2, K)$ für $\#(K) \neq 2$	9
1.2.1	Die Gruppe $G = GL(2, K)$	10
1.2.2	Die Darstellungen von Untergruppen von G	12
1.2.3	Die Darstellungen von G	13
1.3	Die Darstellungen der $SL(2, K)$	20
1.3.1	Die Konjugationsklassen der $SL(2, K)$	20
1.3.2	Einschränkung der Darstellungen von G auf S	22
2	Grundlagen aus der Graphentheorie	27
2.1	Graphen	27
2.2	Operationen von Gruppen auf Graphen	30
3	Der Baum \mathcal{T} und der Graph $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$	32
3.1	Der Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T} von $PGL(2, K_\infty)$	32
3.1.1	Die Knotenmenge $V(\mathcal{T})$	33
3.1.2	Die Kantenmenge $E(\mathcal{T})$	33
3.2	Der Quotientengraph $\Gamma \setminus \mathcal{T}$	34
3.3	Der Quotientengraph $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$ und die Gruppe G	34
4	Die Darstellungen von $\Gamma/\Gamma(n)$ für irreduzibles n	41
4.1	Der Fall $\text{char } k = 2$ oder $\text{char } k$ und d ungerade	42
4.1.1	Die Konjugationsklassen im Fall 1	43
4.1.2	Die Darstellungen von G im Fall 1	44
4.2	Der Fall $\text{char } k \neq 2$ und d gerade	46
4.2.1	Die Konjugationsklassen im Fall 2	47
4.2.2	Die Darstellungen von G im Fall 2	48
4.3	Die Darstellungen von $G/Z(k)$	52
5	Die Zerlegung der Darstellung auf $H_1(\Gamma \setminus \mathcal{T}, \mathbb{C})$	55
5.1	Die Zerlegung von ρ anhand der Kantentypen	55
5.2	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$	62
5.2.1	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für d ungerade	63
5.2.2	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für $\text{char } k = 2$ und d gerade	68
5.2.3	Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für $\text{char } k \neq 2$ und d gerade	70
5.3	Zusammenfassung der drei Fälle	74
	Symbolverzeichnis	76

Kapitel 0

Einleitung

In den Jahren 1928 und 1930 veröffentlichte Hecke die Artikel [Hec59b] und [Hec59a], die sich mit der folgenden Situation beschäftigten: Ist m eine Primzahl und $\Gamma(m)$ die Hauptkongruenzuntergruppe der Modulgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ zu m , so operiert die Gruppe $PSL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ auf dem Vektorraum der holomorphen Differentialformen auf der Modulkurve zu $\Gamma(n)$. Hecke ermittelte in den beiden genannten Arbeiten sämtliche irreduziblen Bestandteile der hierdurch gegebenen Darstellung. Dabei stellte er fest, daß bis auf einige Ausnahmen die auftretenden Vielfachheiten um höchstens zwei voneinander abweichen. Ferner entdeckte er einen Zusammenhang zwischen der Vielfachheit der einzigen $\frac{m-1}{2}$ -dimensionalen Darstellung von $PSL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ und der Klassenzahl des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$.

Indem man Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene H als Funktionen auf der Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ interpretiert, die ein vorgeschriebenes Transformationsverhalten unter gewissen Untergruppen besitzen, kann man, wie z.B. Weil in [Wei70] beschreibt, diese Problemstellung auf zugrundeliegende Körper der Charakteristik $p > 0$ übertragen. Wir betrachten daher einen endlichen Körper k , als Analogon zur diskreten Untergruppe \mathbb{Z} von \mathbb{R} den Polynomring $A = k[T]$ in der Unbestimmten T mit der Gradbewertung, und die Vervollständigung K_∞ des Quotientenkörpers von A bezüglich dieser Bewertung. Der komplexen oberen Halbebene entspricht dann der von Serre in [Ser80] eingeführte Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T} zur Gruppe $PGL(2, K_\infty)$, und die holomorphen Differentialformen auf H kann man mit harmonischen Funktionen auf den Kanten von \mathcal{T} vergleichen. Schreiben wir weiter Invarianz dieser Funktionen unter einer Operation der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(n)$ von $\Gamma = GL(2, A)$ zu einem irreduziblen Polynom $n \in A$ vor, so erhalten wir einen Vektorraum, der isomorph zur Homologie $H_1(\Gamma(n) \backslash \mathcal{T}, \mathbb{C})$ des Quotientengraphen $\Gamma(n) \backslash \mathcal{T}$ ist, und auf dem die Gruppe $G(n) = \Gamma/\Gamma(n)$ operiert. Die hierdurch gegebene Darstellung ρ entspricht der von Hecke untersuchten. Das Ziel der vorliegenden Arbeit wird sein, die irreduziblen Bestandteile von ρ zu ermitteln. Wir werden dafür den folgenden Weg beschreiten:

In Kapitel 1 werden wir zunächst der Begriff der Darstellung einer Gruppe einführen und die im weiteren benötigten Sachverhalte aus der Darstellungstheorie zusammenstellen. Anschließend werden wir für einen Körper K mit mehr als zwei Elementen die Darstellungen der Gruppe $GL(2, K)$ beschreiben und aus diesen die Darstellungen der Gruppe $SL(2, K)$ herleiten. Die verwendeten Begriffe aus der Graphentheorie werden in Kapitel 2 dargestellt. Insbesondere werden wir dort erläutern, wie durch einen Dualisierungsprozeß die Operation einer Gruppe auf einem Graphen Anlaß zu einer Darstellung dieser Gruppe auf der Homologie des Graphen gibt. In Kapitel 3 widmen wir unsere Aufmerksamkeit dem Bruhat-Tits-Baum von $PGL(2, K_\infty)$ und beschreiben den Quotientengraphen $\Gamma(n) \backslash \mathcal{T}$ als Überlagerung des Quotientengraphen $\Gamma \backslash \mathcal{T}$. Ferner geben wir für ein irreduzibles Polynom $n \in A$

eine Charakterisierung der Gruppe $G(n)$, die auf dem Graphen operiert. Um die dadurch induzierte Darstellung ρ der Gruppe $G(n)$ auf $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$ untersuchen zu können, benötigen wir die Kenntnis aller irreduziblen Darstellungen von $G(n)$. Diese werden wir im Kapitel 4 aus den im ersten Kapitel bereitgestellten Ergebnissen für die Gruppen $GL(2, A/(n))$ und $SL(2, A/(n))$ entwickeln; auf die Darstellungstheorie einer dieser Gruppen kann man nämlich jene von $G(n)$ in Abhängigkeit von der Charakteristik des zugrunde liegenden Körpers und des Grades d von n zurückführen. In Kapitel 5 werden wir schließlich alle bisher zusammengetragenen und entwickelten Ergebnisse verknüpfen. Ausgehend von der Beschreibung des Graphen $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$ aus Kapitel 3 nehmen wir eine Zerlegung von $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$ in gewisse Unterräume vor, die unter der Operation ρ von G stabil sind. Diese Zerlegung (die kein offensichtliches Analogon in der klassischen Theorie der Modulformen besitzt) führt auf eine ausgezeichnete Unterdarstellung, die bis auf die erwähnten Ausnahmedarstellungen sämtliche Informationen über die Unterschiede in den Vielfachheiten enthält. Alle anderen aus der Zerlegung gewonnenen Unterdarstellungen weisen eine sehr symmetrische Struktur auf.

Setzen wir nunmehr die Ergebnisse aus der Untersuchung der Unterdarstellungen zusammen, so führt dies zu einer vollständigen Zerlegung der Darstellung ρ . Insbesondere werden wir feststellen, daß auch in der hier untersuchten Situation bis auf einige Ausnahmen die Vielfachheiten aller auftretenden Darstellungen höchstens um zwei voneinander abweichen. Interessanterweise bleiben Zusammenhänge von Vielfachheiten gewisser Ausnahmedarstellungen mit Klassenzahlen in unserer Situation verborgen, da die Darstellungen, die im klassischen Fall diese Informationen codieren, in unserer Situation nicht auftreten. Ferner drängt sich die Frage nach einer weiteren Analogien zwischen den beiden Situationen geradezu auf: Hecke konnte die Funktionen, die den Darstellungsraum zu bestimmten isotypischen Komponenten der von ihm untersuchten Darstellung bilden, als Thetareihen identifizieren, und der Versuch, diese Ergebnisse zu übertragen, liegt nahe. Im Rahmen dieser Arbeit müssen wir uns jedoch mit den bisher ermittelten Ergebnissen bescheiden.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich direkt oder indirekt beim Erstellen der vorliegenden Arbeit unterstützt haben. Besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir bei diesem (wie auch schon bei so manch anderem Unterfangen) sehr viel mehr als den nötigen Rückhalt geboten haben. Bei Prof. Dr. E.-U. Gekeler möchte ich mich erstens für den guten Themenvorschlag und zweitens für die großen Mengen an Zeit bedanken, die er immer wieder für die Beantwortung von Fragen im Zusammenhang mit der Arbeit und zur Erhellung angrenzender Fragestellungen zur Verfügung stellte. Weiter sei Herrn Dipl. Inf. O. Scheja mein Dank für das unermüdliche Korrekturlesen ausgesprochen und Herrn Dipl. Math. A. Schweizer für einige nützliche fachliche Tips. Nicht zu vergessen sind all diejenigen, die mir hier in Saarbrücken ein Umfeld schafften, das mich in die Lage versetzte, viel Energie in meine Arbeit zu investieren - stellvertretend für viele seien hier Stefan Müller und Kai Ibach genannt. Ein letzter Dank geht an diejenigen, die mich in Phasen der Frustration dadurch wieder aufgebaut haben, daß sie die dann entstandenen "Frustkuchen" beseitigten.

Kapitel 1

Grundlagen aus der Darstellungstheorie

1.1 Grundbegriffe

Einführungen in dieses Thema sind z.B. bei [Ser67] oder [Lan93] zu finden.

Es sei k ein Körper und G eine endliche Gruppe. $k[G]$ bezeichne die Gruppenalgebra, d.h.

$$k[G] = \left\{ \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma : a_{\sigma} \in k, \sigma \in G \right\},$$

mit dem Produkt

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma \right) \cdot \left(\sum_{\tau \in G} b_{\tau} \tau \right) = \sum_{\sigma, \tau \in G} a_{\sigma} b_{\tau} \sigma \tau.$$

Definition 1.1 Sei G eine endliche Gruppe, V ein k -Vektorraum. Eine Darstellung von G (auf V) ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V).$$

V heißt dann G -Modul oder Darstellungsraum von ρ , und die Dimension von V über k bezeichnet man als Dimension der Darstellung ρ .

Jeder Homomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$ entspricht bei linearer Fortsetzung eindeutig einem (ebenfalls mit ρ bezeichneten) Algebrahomomorphismus

$$\rho : k[G] \longrightarrow \text{End}_k(V).$$

Die *triviale Darstellung* oder *Einsdarstellung* 1 sei gegeben durch die Vorschrift

$$1(\sigma) = \text{id}_k \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

Ist V ein G -Modul vermöge der Darstellung ρ und \tilde{V} ein G -Modul vermöge der Darstellung $\tilde{\rho}$, so heißt ein Vektorraumhomomorphismus φ von V nach \tilde{V} ein G -Homomorphismus, falls er mit der Operation von G verträglich ist, d.h. falls für jedes $\sigma \in G$ und $v \in V$ gilt

$$\varphi(\rho(\sigma)(v)) = \tilde{\rho}(\sigma)(\varphi(v)).$$

Ist aus dem Zusammenhang ersichtlich, welche Darstellung verwendet wird, so schreibt man auch kürzer σv statt $\rho(\sigma)(v)$ für $\sigma \in G$ und $v \in V$.

Definition 1.2 Sind ρ und ρ' Darstellungen von G auf V mit den Darstellungsräumen V und V' , so heißen ρ und ρ' äquivalent, falls ein Isomorphismus $\tau : V \rightarrow V'$ existiert, so daß für $\sigma \in G$ gilt:

$$\tau \circ (\rho(\sigma)) = (\rho'(\sigma)) \circ \tau.$$

Sind die Darstellungen ρ und ρ' in Matrixform gegeben, d.h. in Bezug auf ausgewählte Basen von V und V' , so besagt die obige Bedingung, daß eine Matrix T existiert, die für alle $\sigma \in G$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$T^{-1} \rho'(\sigma) T = \rho(\sigma).$$

Definition 1.3 Ein Untervektorraum U von V heißt G -Untermodul von V , falls er G -stabil ist, d.h. falls für alle $\sigma \in G$ die Inklusion $\rho(\sigma)(U) \subseteq U$ gilt. Eine Darstellung ρ von G auf V heißt irreduzibel, falls V außer (0) und V keine G -Untermoduln besitzt, andernfalls heißt sie reduzibel. Ferner ist ρ eine direkte Summe von Darstellungen $\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_1)$ und $\rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_2)$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $V = V_1 \oplus V_2$ als k -Vektorraum,
- (ii) V_1 und V_2 sind G -stabil,
- (iii) $\forall \sigma \in G : \rho(\sigma)|_{V_1} = \rho_1(\sigma)$ und $\rho(\sigma)|_{V_2} = \rho_2(\sigma)$.

Man schreibt in diesem Fall auch $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ und nennt ρ_1 und ρ_2 Unterdarstellungen von ρ . Das Tensorprodukt $\rho_1 \otimes \rho_2$ der Darstellungen $\rho_1 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_1)$ und $\rho_2 : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_2)$ ist für $\sigma \in G$ gegeben durch den Homomorphismus

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(\sigma) := \rho_1(\sigma) \otimes \rho_2(\sigma) \in \text{Aut}_k(V_1 \otimes V_2),$$

wobei auf der rechten Seite der Zuweisung das Tensorprodukt von Homomorphismen gemeint ist.

Wählt man als Basis von $V_1 \oplus V_2$ die Vereinigung der Basen von V_1 und V_2 , so ergibt sich für Darstellungen ρ_1 und ρ_2 in Matrixform für $\sigma \in G$:

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(\sigma) = \begin{pmatrix} \rho_1(\sigma) & 0 \\ 0 & \rho_2(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Die oben angegebene Definition von Irreduzibilität gilt bei Darstellungen über beliebigen Körpern. Im speziellen Fall der Darstellungen über den komplexen Zahlen \mathbb{C} ist aber der folgende Satz von Maschke anwendbar, der den Zusammenhang von Irreduzibilität und der Zerlegbarkeit einer Darstellung in eine direkte Summe klärt:

Satz 1.1 (Maschke) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und k ein Körper, dessen Charakteristik n nicht teilt. Dann ist die Gruppenalgebra $k[G]$ halbeinfach, d.h. es gibt eine Zerlegung von $k[G]$ in ein endliches direktes Produkt einfacher Ringe:

$$k[G] = \prod_{i=1}^s R_i.$$

Beweis: [Lan93, Theorem 1.2] □

Sind also die Voraussetzungen für den Satz von Maschke erfüllt, so gibt es zu jedem echten G -Untermodul U eines G -Moduls V einen G -Untermodul U' mit

$$V = U \oplus U'.$$

Dies gilt jedoch i.a. nicht. Wir nehmen ab jetzt an, daß $k = \mathbb{C}$, der Körper der komplexen Zahlen, ist.

Definition 1.4 Der Charakter χ_ρ einer Darstellung $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_k(V)$ ist definiert als die Abbildung

$$\chi_\rho : G \rightarrow k, \sigma \mapsto \text{Tr}(\rho(\sigma)),$$

wobei $\text{Tr}(\rho(\sigma))$ die Spur des Endomorphismus $\rho(\sigma)$ bezeichnet.

Da die Spur eine unter Konjugation invariante Abbildung und ρ ein Homomorphismus ist, gilt für $\sigma, \tau \in G$:

$$\chi_\rho(\sigma^\tau) = \chi_\rho(\tau^{-1}\sigma\tau) = \text{Tr}(\rho(\tau^{-1})\rho(\sigma)\rho(\tau)) = \text{Tr}(\rho(\sigma)) = \chi_\rho(\sigma).$$

Allgemein nennt man eine Funktion $f : G \rightarrow k$, die invariant unter der Konjugation ist, eine *Klassenfunktion*. Der Grund für die Bedeutung der Charaktere liegt im folgenden Satz:

Satz 1.2 Seien ρ und ρ' Darstellungen von G . Dann sind äquivalent:

(i) ρ und ρ' sind äquivalent,

(ii) $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

Beweis: [Lan93, Theorem 2.3] □

Betrachtet man die Summe und das Tensorprodukt zweier Darstellungen ρ_1 und ρ_2 in Matrixform, so ist offensichtlich $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$ und $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$. Es gilt ferner

Satz 1.3 Jede Darstellung ist eine endliche direkte Summe irreduzibler Darstellungen. Diese Zerlegung ist bis auf Äquivalenz eindeutig.

Beweis: [Lan93, Theorem 2.3] □

Satz 1.4 Die Anzahl der inäquivalenten Darstellungen von G über \mathbb{C} ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G . Wir bezeichnen diese Anzahl mit h .

Beweis: [Lan93, Proposition 4.2] □

Dieser Satz gilt allgemeiner für Darstellungen über algebraisch abgeschlossenen Körpern; jedoch genügt für die hiesige Anwendung die Aussage für Darstellungen über \mathbb{C} . Bezeichnet man den \mathbb{C} -Vektorraum der Klassenfunktionen von G mit $X_{\mathbb{C}}(G)$, so ist die Zahl h aus dem vorherigen Satz gerade die Dimension von $X_{\mathbb{C}}(G)$. Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen von G bilden eine Basis von $X_{\mathbb{C}}(G)$. Bezüglich der hermiteschen Form

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_G : X_{\mathbb{C}}(G) \times X_{\mathbb{C}}(G) \rightarrow \mathbb{C},$$

die für $f, g \in X_{\mathbb{C}}(G)$ durch die Vorschrift

$$\langle f, g \rangle_G := \frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in G} f(\sigma) \overline{g(\sigma)}$$

definiert ist, bilden die Charaktere χ_1, \dots, χ_h zu h paarweise inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von G eine Orthonormalbasis. Es gilt also

$$\forall i, j \in \{1, \dots, h\} : \langle \chi_i, \chi_j \rangle_G = \delta_{ij}.$$

Ist χ der Charakter einer beliebigen Darstellung von G , so ergibt sich daraus

$$\chi = \sum_{i=1}^h \langle \chi, \chi_i \rangle_G \chi_i.$$

Weil eindimensionale Darstellungen immer irreduzibel sind, erhält man für einen nichttrivialen Charakter μ einer Gruppe G die Gleichung

$$\sum_{\sigma \in G} \mu(\sigma) = \langle \mu, 1_G \rangle_G = 0.$$

Eine spezielle Darstellung von G ist die *reguläre Darstellung* reg_G . Der zugehörige Darstellungsraum ist die Gruppenalgebra $k[G]$ mit der Basis G als k -Vektorraum betrachtet. Jedes Element σ von G operiert auf $k[G]$ vermöge der Multiplikation in $k[G]$. Weil ein Element $1 \neq \sigma \in G$ die Basiselemente fixpunktfrei permutiert, und $1 \in G$ alle $n := \#(G)$ Basiselemente fest läßt, hat der Charakter χ_{reg} die Werte

$$\chi_{reg}(1) = n, \chi_{reg}(\sigma) = 0, \forall \sigma \neq 1.$$

Das Skalarprodukt von χ_{reg} mit dem Charakter jeder irreduziblen Darstellung ρ ergibt sich daher als $\chi_\rho(1) = \dim \rho$. Hieraus folgt

Satz 1.5 Sind $n = \#(G)$ und $\rho_i, i = 1, \dots, h$, die paarweise inäquivalenten irreduziblen Darstellungen mit den Dimensionen d_i , so gilt die Gleichung:

$$n = \sum_{i=1}^h d_i^2.$$

Insbesondere folgt aus Satz 1.4 und Satz 1.5, daß eine kommutative Gruppe nur eindimensionale irreduzible Darstellungen zuläßt.

Ist H eine Untergruppe von G , so definiert jede Darstellung ρ von G durch Einschränkung eine Darstellung von H , die wir mit $\text{Res}_H^G \rho$ bezeichnen. Der Charakter dieser Darstellung ist dann $\text{Res}_H^G \chi$, wenn χ der Charakter von ρ ist. Für normale Untergruppen wollen wir die Zerlegung der so gewonnenen Darstellungen untersuchen.

Definition 1.5 Es sei H eine normale Untergruppe von G und $\tilde{\chi}$ der Charakter einer irreduziblen Darstellung $\tilde{\rho}$ von H . Für $\sigma \in G$ bezeichne weiter $\tilde{\rho}^\sigma$ die durch $\tilde{\rho}^\sigma(\xi) := \tilde{\rho}(\sigma\xi\sigma^{-1})$ gegebene Darstellung von H und $\tilde{\chi}^\sigma$ ihren Charakter. Dann heißt die Gruppe

$$\mathfrak{I}(\tilde{\chi}) := \{\sigma \in G : \tilde{\chi}^\sigma = \tilde{\chi}\}$$

die Trägheitsgruppe von $\tilde{\chi}$ in G .

Satz 1.6 Es sei H eine normale Untergruppe von G , ρ eine irreduzible Darstellung von G mit Charakter χ und $\tilde{\rho}$ eine irreduzible Darstellung von H mit dem Charakter $\tilde{\chi}$, so daß gilt

$$e := \langle \text{Res}_H^G \chi, \tilde{\chi} \rangle_H > 0.$$

Ferner sei $G = \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{I}(\tilde{\chi})\sigma_i$ eine Nebenklassenzerlegung von G bezüglich $\mathfrak{I}(\tilde{\chi})$. Dann gilt:

$$\text{Res}_H^G \chi = e \sum_{i=1}^m \tilde{\chi}^{\sigma_i}.$$

Beweis: [Hup67, Seite 565, Hauptsatz 17.3 g] □

Induzierte Darstellungen

Es sei k ein Körper und H eine Untergruppe der Gruppe G mit einer Darstellung $\rho : H \rightarrow \text{Aut}_k(W)$. Wir wollen aus dieser Darstellung von H eine Darstellung von G konstruieren. Sei dafür V der Raum der Funktionen $f : G \rightarrow W$, für die für $\tau \in H$, $\xi \in G$ gilt

$$f(\tau\xi) = \rho(\tau)(f(\xi)).$$

Die folgende Vorschrift für $\sigma \in G$ definiert eine Darstellung von G auf V :

$$\forall \xi \in G : (\sigma f)(\xi) := f(\xi\sigma).$$

Mit dieser Operation wird V zum G -Modul; die zugehörige Darstellung $\text{Ind}_H^G \rho$ heißt die *von ρ induzierte Darstellung von G* und $V =: \text{Ind}_H^G W$ der *von W induzierte G -Modul*. Man beachte, daß jedes $f \in \text{Ind}_H^G W$ vollständig durch seine Werte auf einem Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von G bezüglich H bestimmt ist.

Satz 1.7 *Vermöge der Einbettung*

$$W \hookrightarrow \text{Ind}_H^G W, \quad w \mapsto f_w,$$

wobei

$$f_w(\sigma) = \begin{cases} \rho(\sigma)(w) & , \text{ falls } \sigma \in H \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

erhalten wir

$$\text{Ind}_H^G W \cong \bigoplus_{\sigma \in R} \sigma W.$$

Dabei ist R ein Repräsentantensystem von G/H .

Beweis: [Lan93, Theorem 7.3] □

Insbesondere ist also $\dim_k(\text{Ind}_H^G W) = [G : H] \cdot \dim_k W$. Im Verlauf der Arbeit werden wir beide Beschreibungen von $\text{Ind}_H^G W$ verwenden.

Satz 1.8 (Transitivität der induzierten Darstellung) *Seien H_1, H_2 und G Gruppen mit $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ und $\rho : H_1 \rightarrow \text{Aut}_k(V)$ eine Darstellung von H_1 . Dann gilt:*

$$\text{Ind}_{H_2}^G(\text{Ind}_{H_1}^{H_2} \rho) = \text{Ind}_{H_1}^G \rho.$$

Für die Charaktere der induzierten Darstellungen gilt:

Satz 1.9 *Sei H eine Untergruppe der Gruppe G und $\rho : H \rightarrow \text{Aut}_k(W)$ eine Darstellung von H mit dem Charakter χ . Dann hat der Charakter $\text{Ind}_H^G \chi$ der von ρ induzierten Darstellung für $\sigma \in G$ den Wert:*

$$(\text{Ind}_H^G \chi)(\sigma) = \frac{1}{\#(H)} \sum_{\substack{\tau \in G \\ \sigma\tau \in H}} \chi(\sigma\tau).$$

Beweis: [Lan93, Proposition 7.4] □

$\text{Ind}_H^G \chi$ wird auch als der von χ induzierte Charakter bezeichnet. Entsprechend bezeichnet $\text{Res}_H^G \varphi$ die Einschränkung eines Charakters φ von G auf H . Die explizite Berechnung der Werte von $\text{Ind}_H^G \chi$ kann man oft unter Benutzung der folgenden Gleichung umgehen.

Satz 1.10 (Frobeniusreziprozität) Sei H eine Untergruppe der Gruppe G . Ist φ ein Charakter von H , ψ ein Charakter von G , so gilt für das Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \text{Res}_H^G \psi \rangle_H = \langle \text{Ind}_H^G \varphi, \psi \rangle_G.$$

Beweis: [Lan93, Theorem 6.1 (i)] □

Ein weiterer Sachverhalt, der unmittelbar aus dem Homomorphiesatz folgt, soll hier nicht unerwähnt bleiben: Ist H eine normale Untergruppe von G , so sind die irreduziblen Darstellungen der Gruppe G/H gerade diejenigen irreduziblen Darstellungen von G , deren Einschränkung auf H die triviale Darstellung liefert.

1.2 Die Darstellungen der $GL(2, K)$ für $\#(K) \neq 2$

In diesem und im nächsten Abschnitt sei K ein endlicher Körper der Ordnung $q = p^f$ mit $q \neq 2$. L sei die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) quadratische Erweiterung von K . Ferner sei $\varepsilon \in K^\times$ ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe K^\times von K und G bezeichne $GL(2, K)$, die Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen über dem Körper K . Dann ist $\#(G) = (q+1)(q-1)^2 q$. Unter einem Charakter einer Untergruppe von G verstehen wir immer einen eindimensionalen Charakter, es sei denn, es ist ausdrücklich die Rede vom Charakter einer Darstellung. Ferner verwenden wir folgende Bezeichnungen für gewisse Untergruppen von G :

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in K^\times, b \in K \right\} && \text{(Borelgruppe von } G), \\ D &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in K^\times \right\} && \text{(Diagonalgruppe von } G), \\ U &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in K \right\} && \text{(unipotente Untergruppe von } G), \\ P &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in K^\times, b \in K \right\} && \text{(affine Gruppe),} \\ A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\}, \\ Z &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\} && \text{(Zentrum von } G), \\ E &= \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in K^\times \right\}. \end{aligned}$$

Außerdem sei ψ ein fest gewählter nichttrivialer Charakter der additiven Gruppe K^+ von K , der bei der Konstruktion der Darstellungen fixiert bleiben wird. w und w' bezeichnen die Elemente

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Klasse ausgezeichneter Untergruppen sind die *Cartan-Untergruppen*. Man unterscheidet die *zerfallenden Cartan-Untergruppen*, die aus allen zu D konjugierten Untergruppen bestehen, und die *nicht-zerfallenden Cartan-Untergruppen*.

Letztere erhält man folgendermaßen: Für ein beliebiges Element $\xi \in L^\times$ ist die Abbildung $m_\xi : L^\times \rightarrow L^\times$, $m_\xi : \alpha \mapsto \xi\alpha$ K -linear. Wählt man eine K -Basis von L , so entspricht jedes m_ξ einem Element von G , so daß man eine Einbettung $L^\times \hookrightarrow G$ erhält. Die nicht-zerfallenden Cartan-Untergruppen von G sind die (paarweise zueinander konjugierten) Bilder von L^\times unter derartigen Einbettungen.

In Anlehnung an [PS83] wird nun eine Beschreibung der komplexen Darstellungen der Gruppe G folgen.

1.2.1 Die Gruppe $G = GL(2, K)$

Bevor wir die irreduziblen Darstellungen im einzelnen untersuchen, wollen wir in diesem Abschnitt einige Eigenschaften von G und Zusammenhänge zwischen den Untergruppen zusammenstellen (vgl. [PS83, Seiten 11-13]).

Satz 1.11 *Für die Untergruppen von G gelten die Beziehungen*

- (i) $B = P \times Z = D \rtimes U$,
- (ii) $D = A \times wAw = A \times E \cong B/U$,
- (iii) $U = B' = P' \cong K^+$,
- (iv) $P = U \rtimes A$,
- (v) $A \cong P/U \cong K^\times$,
- (vi) $Z \cong K^\times$,
- (vii) $E \cong K^\times$.

Hierbei bezeichnen wir den Kommutator einer Gruppe H mit H' , und für zwei Untergruppen H, \tilde{H} von G , von denen H normal in G ist, sei $H \rtimes \tilde{H}$ das semidirekte Produkt.

Eine wichtige Zerlegung von G wird in folgendem Satz genannt:

Satz 1.12 (Bruhat-Zerlegung) *Die Gruppe G ist die disjunkte Vereinigung*

$$G = B \cup BwU = B \cup UwB.$$

Ein Element

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $c \neq 0$ läßt sich gemäß dieser Zerlegungen schreiben als

$$\sigma = \begin{pmatrix} b - \frac{ad}{c} & a \\ 0 & c \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{ad}{c} \end{pmatrix}.$$

Die Konjugationsklassen von G

Die Konjugationsklassen von G lassen sich in vier Typen einteilen. Sei $\sigma \in G$.

Fall 1: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms P_σ von σ liegen in K^\times . Dann gibt es in der Konjugationsklasse σ^G von σ ein Element σ' in Jordanscher Normalform.

- Hat P_σ die doppelte Nullstelle $a \in K^\times$, und ist das Minimalpolynom von σ verschieden von P_σ , so ist $\sigma' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \sigma$. Wir setzen

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^G =: c_1(a).$$

- Besitzt P_σ die doppelte Nullstelle $a \in K^\times$, und stimmt P_σ mit dem Minimalpolynom überein, so ist $\sigma' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Also erhalten wir

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^G =: c_2(a).$$

- Sind die Nullstellen $a, b \in K^\times$ von P_σ voneinander verschieden, so ergibt sich $\sigma' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, und

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^G =: c_3(a, b).$$

Dabei gilt $c_3(a, b) = c_3(b, a)$.

Fall 2: Die Nullstellen $\alpha, \beta \in L$ von P_σ liegen nicht in K .

In diesem Fall ist P_σ irreduzibel über K , und die beiden Nullstellen müssen zueinander konjugiert und verschieden sein, da K als endlicher Körper vollkommen ist. Es ist also $\beta = \bar{\alpha}$, und man erhält

$$\sigma^G = \begin{pmatrix} 0 & -N_K^L \alpha \\ 1 & \text{Tr}_K^L \alpha \end{pmatrix}^G =: c_4(\alpha)$$

und $c_4(\alpha) = c_4(\bar{\alpha})$.

Die Mächtigkeiten der verschiedenen Konjugationsklassen desselben Typs sind gleich. Man kann sie unter Verwendung der Formel

$$\#(\sigma^G) = [G : Z_G(\sigma)]$$

ermitteln, wobei $Z_G(\sigma)$ den Zentralisator von σ in G bezeichnet. Dieser ist nur für die im Fall 2 auftretenden Elemente nicht durch das Lösen einfacher Gleichungen zu ermitteln. Dort benutzt man z.B. das folgende Lemma:

Lemma 1.13 *Jede nicht zerfallende Cartan-Untergruppe C_L von G ist ihr eigener Zentralisator.*

Beweis: Sei $\xi \in L^\times$ ein Element einer Ordnung $> q-1$. Dann ist $\xi \notin K^\times$ und $\{1, \xi\}$ eine K -Basis von L . Sei weiter $\sigma \in Z_G(m_\xi)$, aufgefaßt als K -lineare Abbildung von L nach L . Für alle $\alpha = a + b\xi$ mit $a, b \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \sigma(a + b\xi) \\ &\stackrel{\sigma \text{ K-linear}}{=} a\sigma(1) + b\sigma(m_\xi(1)) \\ &\stackrel{\sigma \in Z_G(m_\xi)}{=} a\sigma(1) + bm_\xi(\sigma(1)) \\ &= (a + b\xi)\sigma(1) = \alpha\sigma(1). \end{aligned}$$

Es ist demnach $\sigma = m_{\sigma(1)}$, und nach Wahl einer K -Basis von L liegen die m_ξ und $m_{\sigma(1)}$ repräsentierenden Matrizen in der Cartan-Untergruppe C_L von G . Also ist $Z_G(C_L) \subseteq C_L$. Die umgekehrte Inklusion gilt aber ebenfalls, da $C_L \cong L^\times$ kommutativ ist. \square

Der folgenden Tabelle kann man sowohl die Mächtigkeiten der Konjugationsklassen als auch die Anzahlen der Konjugationsklassen eines Typs entnehmen:

Klassentyp	Anzahl der Klassen	Elemente in der Klasse
$c_1(a), a \in K^\times$	$q - 1$	1
$c_2(a), a \in K^\times$	$q - 1$	$q^2 - 1$
$c_3(a, b), \begin{matrix} a, b \in K^\times \\ a \neq b \end{matrix}$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$q^2 + q$
$c_4(\alpha), \alpha \in L \setminus K$	$\frac{q^2 - q}{2}$	$q^2 - q$

Nach Abschnitt 1.1 gibt es soviele inäquivalente irreduzible Darstellungen von G , wie es Konjugationsklassen in G gibt. Also besitzt G

$$(q - 1) + (q - 1) + \frac{(q - 1)(q - 2)}{2} + \frac{q^2 - q}{2} = q^2 - 1$$

inäquivalente irreduzible Darstellungen.

1.2.2 Die Darstellungen von Untergruppen von G

Bevor wir die irreduziblen Darstellungen der Gruppe G beschreiben, sollen hier kurz die diejenigen der aufgelisteten Untergruppen von G dargelegt werden, da die Darstellungen von G zum Teil aus denen der Untergruppen entwickelt werden.

Die zu K^\times isomorphen Untergruppen

Nach Satz 1.11 sind unter den ausgezeichneten Untergruppen von G gerade die Gruppen A , Z und E zu K^\times isomorph. Da K^\times kommutativ ist, gibt es von einer zu K^\times isomorphen Untergruppe nur eindimensionale irreduzible Darstellungen; die Menge derselben ist also gerade die Charaktergruppe von K^\times .

Die Darstellungen von U

Auch $U \cong K^+$ ist eine kommutative Gruppe, die folglich nur eindimensionale irreduzible Darstellungen zuläßt. Eine davon ist der fest gewählte Charakter ψ von K^+ . Identifiziert man U mit K^+ und definiert man zu jedem $a \in K$ den Charakter ψ_a durch

$$\forall x \in K : \psi_a(x) := \psi(ax),$$

so sind für $a \neq a'$ die Charaktere ψ_a und $\psi_{a'}$ voneinander verschieden, und die Menge $\{\psi_a : a \in K\}$ enthält sämtliche Charaktere von U .

Die Darstellungen von P

Nach Satz 1.11 ist die Kommutatorgruppe P' von P gerade U . Dank der Zerlegung von P als semidirektes Produkt von U und A entsprechen die Charaktere, also die

eindimensionalen Darstellungen von P , gerade den Charakteren von A . Ferner ist die induzierte Darstellung $\pi := \text{Ind}_U^P \psi$ eine irreduzible Darstellung der Dimension $[P : U] = q - 1$. π zerfällt bei Einschränkung auf U in die Summe aller nichttrivialen Charaktere von U , d.h.

$$\text{Res}_U^P \pi = \bigoplus_{a \in K^\times} \psi_a,$$

wie man unter Benutzung der Frobeniusreziprozität zeigen kann. Die übrigen irreduziblen Darstellungen von P ergeben sich als Skalarprodukte der eindimensionalen Charaktere mit π .

Die Darstellungen von D

Wie bei den zu K^\times isomorphen Untergruppen müssen auch alle irreduziblen Darstellungen von D eindimensional sein. Es handelt sich also um die Charaktere von D . Weil $D = A \times E$ und $A \cong K^\times \cong E$ ist, entspricht ein Charakter μ von D gerade einem Paar (μ_1, μ_2) von Charakteren von K^\times mit der Vorschrift

$$\mu \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \mu \left(\begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \mu_1(ad)\mu_2(d)$$

für alle $a, d \in K^\times$. Zu μ definieren wir den Charakter $\mu_w : D \rightarrow \mathbb{C}^\times$ durch

$$\mu_w \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := \mu \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^w \right) = \mu \left(\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right).$$

Man kann leicht nachprüfen, daß für einen Charakter μ , der dem Paar (μ_1, μ_2) von Charakteren von K^\times entspricht, der Charakter μ_w zu dem Paar $(\mu_1\mu_2, \mu_2^{-1})$ gehört. Es gilt also die Äquivalenz

$$\mu = \mu_w \iff \mu_2 = 1.$$

Bemerkung: Die hier definierte Korrespondenz zwischen Charakteren von D und Paaren von Charakteren von K^\times weicht ab von der in [PS83] angegebenen:

$$\mu \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \mu'_1(a)\mu'_2(d).$$

Die hier angeführte ist aber für die spätere Verwendung günstiger.

Die Darstellungen von B

Wie aus Satz 1.11 bekannt, ist $B = P \times Z$. Die irreduziblen Darstellungen von B ergeben sich daher aus den irreduziblen Darstellungen von P und Z , indem man diese auf der jeweils anderen Untergruppe trivial fortsetzt und dann das Tensorprodukt bildet. Man beachte ferner die Isomorphie $B/B' = B/U \cong D$. Daher ist jeder Charakter von B eindeutig durch seine Einschränkung auf D bestimmt. Im weiteren wird daher nicht immer unterschieden, wann es sich um einen Charakter von D und wann um seine Fortsetzung auf B handelt.

1.2.3 Die Darstellungen von G

Nach [PS83] teilen sich die inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von G in zwei Klassen:

- die *Darstellungen der Hauptserie*, d.h. diejenigen, die als Komponenten von Darstellungen der Form $\text{Ind}_B^G \mu$ auftreten, wobei μ ein Charakter der Borelgruppe B ist, und
- die übrigen irreduziblen Darstellungen, die als *cuspidale Darstellungen* bezeichnet werden.

Die Darstellungen der Hauptserie

Es sei μ ein Charakter von B . Nach der Einschränkung auf D entspricht μ einem Paar von Charakteren von K^\times . Der folgende Satz beschreibt, wie die Darstellung $\text{Ind}_B^G \mu$ in Abhängigkeit von der Beschaffenheit dieses Paares von Charakteren zerfällt.

Satz 1.14 *Sei μ ein Charakter von B , der einem Paar (μ_1, μ_2) von Charakteren von K^\times entspricht.*

- (i) *Ist $\mu_2 \neq 1$, so ist $\text{Ind}_B^G \mu =: \rho_\mu$ eine irreduzible $(q+1)$ -dimensionale Darstellung von G . Ihr Charakter wird mit χ_μ oder mit $\chi_{(\mu_1, \mu_2)}$ bezeichnet. ρ_μ ist genau dann äquivalent zu $\rho_{\mu'}$, wenn $\mu' = \mu$ oder $\mu' = \mu_w$ erfüllt ist.*
- (ii) *Ist $\mu_2 = 1$, so gilt*

$$\text{Ind}_B^G \mu = (\mu_1 \circ \det) \oplus \rho_{(\mu_1, 1)},$$

wobei $\rho_{(\mu_1, 1)}$ eine irreduzible q -dimensionale Darstellung von G ist. Ihr Charakter sei $\chi_{(\mu_1, 1)}$ oder χ_μ . Zwei Darstellungen $\rho_{(\mu_1, 1)}$ und $\rho_{(\mu'_1, 1)}$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn $\mu_1 = \mu'_1$ ist.

- (iii) *Alle irreduziblen Darstellungen von G , die als Komponenten von Darstellungen der Form $\text{Ind}_B^G \mu$ auftreten, sind zu einer der folgenden äquivalent:*

- $q - 1$ verschiedene eindimensionale Darstellungen der Form $\mu_1 \circ \det$,
- $q - 1$ inäquivalente q -dimensionale Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, 1)}$,
- $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ inäquivalente $(q + 1)$ -dimensionale Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ mit $\mu_2 \neq 1$.

Beweis: [PS83, Theorem 8.12, Theorem 8.13] □

Die Werte der Charaktere dieser Darstellungen auf den einzelnen Konjugationsklassen werden mittels der Formel für den induzierten Charakter ermittelt und sind aus der Tabelle am Ende dieses Kapitels ersichtlich. Bevor wir nun zur Beschreibung der cuspidalen Darstellungen fortschreiten, soll an dieser Stelle eine konkrete Basis für $\text{Ind}_B^G \mu$ angegeben und die Operation von G auf dieser Basis beschrieben werden. μ entspreche wieder dem Paar von Charakteren (μ_1, μ_2) von K^\times . Wie aus Abschnitt 1.1 hervorgeht, ist der Darstellungsraum V von $\text{Ind}_B^G \mu$ gegeben durch den Raum der Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, für die für $\tau \in B$, $\xi \in G$ gilt

$$f(\tau\xi) = \mu(\tau)f(\xi).$$

Wir wählen das System von Rechtsnebenklassenrepräsentanten von G bezüglich B :

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} : a \in K \right\}.$$

Jedes Element $\sigma \in G \setminus B$ läßt sich zerlegen in

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{ad}{c} - b & a \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{\in B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix}}_{\in R}.$$

Nun definieren wir ein System von Funktionen $\{f_i \in V\}_{i \in I}$ mit $I = \mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ durch

$$\forall a, b \in K : \begin{cases} f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, & f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = 0 \\ f_b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, & f_b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \psi(ab). \end{cases}$$

Behauptung: Die Familie $(f_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

Beweis: Daß f_∞ linear unabhängig von $(f_i)_{i \in I \setminus \{\infty\}}$ ist, ist klar, da

$$f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad f_b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

gilt für alle $b \in K$. Sei also $\sum_{a \in K} \lambda_a f_a = 0$, $\lambda_a \in \mathbb{C}$. Nach Definition der f_a ist dann $\sum_{a \in K} \lambda_a \psi_a = 0$. Weil aber die Charaktere ψ_a voneinander linear unabhängig sind, muß für alle $a \in K$ gelten: $\lambda_a = 0$. Somit ist die Familie $(f_i)_{i \in K}$ linear unabhängig. \square

Die Funktionen f_i , $i \in I$, bilden daher eine Basis von V . Für jedes $\sigma \in G$ existiert also eine Matrix $(k(i, j; \sigma))_{i, j \in I}$ mit

$$\sigma f_j = \sum_{i \in I} k(i, j; \sigma) f_i.$$

Diese Koeffizienten wollen wir nun bestimmen. Wir können uns dabei auf Elemente $\sigma \in B$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ beschränken, weil diese gemeinsam die Gruppe G erzeugen. Unter Verwendung der Vorschriften $(\sigma f)(\xi) = f(\xi\sigma)$ für $\sigma, \xi \in G$ und $f(\tau\xi) = \mu(\tau)f(\xi)$ für $\tau \in B, \xi \in G$ für die Wirkung der von μ induzierten Darstellung ergibt sich:

(i) Elemente der Form $k(i, \infty; \sigma)$:

• $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$: Es gilt

$$\sigma f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f_\infty(\sigma) = \mu(\sigma) f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mu(\sigma)$$

und

$$\sigma f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a' \end{pmatrix} = f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b + a'd \end{pmatrix} = 0 \quad \forall a' \in K.$$

Also ist $\sigma f_\infty = \mu(\sigma) f_\infty$, d.h.

$$k(\infty, \infty; \sigma) = \mu(\sigma),$$

$$k(a', \infty; \sigma) = 0 \quad \forall a' \in K.$$

• $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: Sei $a \in K$. Dann ist

$$\sigma f_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f_\infty \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} f_\infty \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\sigma f_{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = f_{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a \neq 0 \\ 1 & , \text{ falls } a = 0. \end{cases}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in I} k(i, \infty; \sigma) f_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = k(\infty, \infty; \sigma) \\ 0 &= \sum_{i \in I} k(i, \infty; \sigma) f_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \sum_{a' \in K} k(a', \infty; \sigma) \psi(aa') \quad \forall a \in K^{\times} \\ 1 &= \sum_{i \in I} k(i, \infty; \sigma) f_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{a' \in K} k(a', \infty; \sigma). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von $\sum_{a' \in K} \psi(a') = 0$

$$k(\infty, \infty; \sigma) = 0 \quad \text{und}$$

$$k(a, \infty; \sigma) = \frac{1}{q} \quad \forall a \in K.$$

(ii) Elemente der Form $k(i, b'; \sigma), b' \in K$:

• $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$:

Mittels derselben Methode wie in (i) erhält man für die Koeffizienten die folgenden Werte:

$$\forall a', b' \in K, a' \neq \frac{b'd}{a} : \begin{cases} k(\infty, b'; \sigma) = 0 \\ k(\frac{b'd}{a}, b'; \sigma) = \mu \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \psi(\frac{b'b}{a}) \\ k(a', b'; \sigma) = 0. \end{cases}$$

• $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: In diesem Fall liefert die Methode von (i) das Gleichungssystem

$$(*) := \forall b \in K, a' \in K^{\times} \begin{cases} k(\infty, b; \sigma) = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) \psi(aa') = \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{a'} & 1 \\ 0 & -a' \end{pmatrix} \psi(-\frac{b}{a'}) \\ \sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) = 0. \end{cases}$$

Behauptung: Eine Lösung des Gleichungssystems (*) ist für $a, b \in K$ durch

$$\begin{aligned} k(\infty, b; \sigma) &= \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ k(a, b; \sigma) &= \frac{1}{q} \sum_{c \in K^{\times}} \psi(ac + \frac{b}{c}) \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis: (a) Es ist $k(\infty, b; \sigma) = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nach Definition.

(b) Sei $a' \in K^\times, b \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) \psi(aa') &= \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \sum_{c \in K^\times} \psi \left(ac + \frac{b}{c} \right) \underbrace{\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{=\mu_2(c)} \psi(aa') \\
&= \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \left(\psi \left(-\frac{b}{a'} \right) \mu_2(-a') + \sum_{\substack{c \in K^\times \\ c \neq -a'}} \psi \left(a(a' + c) + \frac{b}{c} \right) \mu_2(c) \right) \\
&= \psi \left(-\frac{b}{a'} \right) \mu_2(-a') + \frac{1}{q} \sum_{\substack{c \in K^\times \\ c \neq -a'}} \left(\psi \left(\frac{b}{c} \right) \mu_2(c) \underbrace{\sum_{a \in K} \psi(a(a' + c))}_{=0} \right) \\
&= \psi \left(-\frac{b}{a'} \right) \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{a'} & 0 \\ 0 & -a' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Sei $b \in K$. Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in K} k(a, b; \sigma) &= \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \sum_{c \in K^\times} \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \psi \left(ac + \frac{b}{c} \right) \\
&= \frac{1}{q} \sum_{c \in K^\times} \left(\psi \left(\frac{b}{c} \right) \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \underbrace{\sum_{a \in K} \psi(ac)}_{=0} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist somit gezeigt und die Koeffizienten $k(i, j; \sigma)$ für die nötigen Fälle bestimmt. \square

Wir werden auf diese Basis später zurückkommen, um bestimmte Darstellungen der $SL(2, K)$ zu konstruieren.

Die cuspidalen Darstellungen

Die cuspidalen Darstellungen, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden, besitzen alle die Dimension $q - 1$. Sie stimmen auf der Untergruppe P von G mit der Darstellung π überein. In ähnlicher Weise, wie die Darstellungen der Hauptserie mit Charakteren der Diagonalgruppe D zusammenhängen, kann man die cuspidalen Darstellungen mit Hilfe von Charakteren konstruieren, und zwar mit Charakteren von L^\times . Man beachte, daß man für jeden Charakter χ von K^\times durch die Verknüpfung mit der Normfunktion einen Charakter $\tilde{\chi} = \chi \circ N$ von L^\times bilden kann. Umgekehrt kann man jedoch zu einem Charakter $\tilde{\chi}$ von L^\times nach dem Homomorphiesatz genau dann einen Charakter χ von K^\times finden, so daß $\tilde{\chi} = \chi \circ N$, wenn der Kern von $\tilde{\chi}$ den Kern der Normabbildung umfaßt. Diese Überlegung gibt Anlaß zu der folgenden Definition:

Definition 1.6 Ein Charakter $\tilde{\chi}$ von L^\times heißt zerlegbar, falls ein Charakter χ von K^\times existiert, so daß $\tilde{\chi} = \chi \circ N$. Andernfalls heißt $\tilde{\chi}$ unzerlegbar. Für einen beliebigen Charakter ν von L^\times bezeichne ferner $\bar{\nu}$ den zu ν konjugierten Charakter, definiert durch:

$$\bar{\nu}(\alpha) := \nu(\bar{\alpha})$$

für alle $\alpha \in L^\times$.

Unter Verwendung von *Hilberts Satz 90*, der für eine quadratische Körpererweiterung besagt, daß jedes Element $\alpha \in L^\times$ mit $N(\alpha) = 1$ eine Darstellung der Form $\alpha = \frac{\beta}{\bar{\beta}}$ mit $\beta \in L^\times$ besitzt, kann man leicht zeigen, daß ein Charakter ν von L^\times genau dann zerlegbar ist, wenn gilt: $\nu = \bar{\nu}$. Sei nun ν ein unzerlegbarer Charakter von L^\times . Zu ν definieren wir eine Funktion

$$j : K^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

durch die Vorschrift ¹

$$j(a) = -\frac{1}{q} \sum_{\substack{\alpha \in L^\times \\ N\alpha = a}} \psi(\alpha + \bar{\alpha})\nu(\alpha).$$

Mit Hilfe dieser Funktion konstruieren wir eine Darstellung ρ_ν von G auf dem Raum

$$V := \{f : K^\times \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Wir setzen dazu für $f \in V, x \in K^\times, \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$:

$$\text{(def1)} \quad \left(\rho_\nu \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} f \right) (x) := \nu(d)\psi\left(\frac{b}{d}x\right) f\left(\frac{a}{d}x\right).$$

Diese Definition ergibt sich aus der Gleichung $\rho_\nu|_P = \text{Ind}_U^P \psi = \pi$, und dadurch daß man die Nebenklassen von U in P mit K^\times identifizieren kann. Ferner setzt man $\rho_\nu|_Z = \nu|_{K^\times}$, indem man Z mit K^\times identifiziert, und bildet dann das Skalarprodukt der beiden Darstellungen.

Weiter definieren wir für $f \in V, x \in K^\times$:

$$\text{(def2)} \quad (\rho_n u(w')f)(x) = \sum_{y \in K^\times} \nu(y^{-1})j(xy)f(y).$$

Die gegebenen Vorschriften sind mit den in G bestehenden Relationen verträglich. Da G von B und w' erzeugt wird, liefern (def1) und (def2) tatsächlich eine Darstellung von G . Anhand der Charaktertafel am Ende dieses Kapitels wird deutlich, daß zu ν und ν' genau dann äquivalente Darstellungen gehören, wenn $\nu' = \nu$ oder $\nu' = \bar{\nu}$ gilt. Aus dieser Tatsache, und weil es genau $\frac{\#(L^\times)}{\#(K \text{ or } N)} = \frac{q^2-1}{q+1} = q-1$ zerlegbare Charaktere von L^\times gibt, erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 1.15 Die Anzahl der inäquivalenten cuspidalen Darstellungen von G ist $\frac{q(q-1)}{2}$.

Auch für eine cuspidale Darstellung sollen hier eine Basis des Darstellungsraums gegeben und die zugehörigen Matrizen ermittelt werden.

Wir fixieren als Basis die Menge der Funktionen $\{h_a : a \in K\}$, wobei die Funktion $h_a : K^\times \rightarrow \mathbb{C}$ definiert ist durch

$$\forall a, x \in K^\times : h_a(x) = \begin{cases} 1 & , x = a \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Es bezeichnen nun $k(i, j; \sigma), i, j \in K^\times, \sigma \in G$, die Elemente aus \mathbb{C} , so daß gilt

$$\sigma h_j = \sum_{i \in K^\times} k(i, j; \sigma) h_i.$$

¹In [PS83, Seite 35] ist die Funktion j ohne das hier auftretende Minuszeichen definiert. Dabei handelt es sich jedoch um einen Druckfehler, wie sich aus den folgenden Rechnungen ergibt.

Wir ermitteln ihre Werte wie schon bei den Darstellungen der Hauptserie nur für $\sigma \in B$ oder $\sigma = w'$.

- $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$: Wir haben

$$\begin{aligned} \sigma h_{b'}(x) &= \nu(d)\psi\left(\frac{b}{d}x\right) h_{b'}\left(\frac{a}{d}x\right) \\ &= \nu(d)\psi\left(\frac{b}{d}x\right) h_{b'\frac{d}{a}}(x) \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \neq b'\frac{d}{a} \\ \nu(d)\psi\left(b'\frac{b}{a}\right) & , \text{ falls } x = b'\frac{d}{a}. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist

$$k(a', b'; \sigma) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a' \neq b'\frac{d}{a} \\ \nu(d)\psi\left(b'\frac{b}{a}\right) & , \text{ falls } a' = b'\frac{d}{a}. \end{cases}$$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: Es ist

$$(\sigma h_{b'})(x) = \sum_{a' \in K^\times} \nu(a'^{-1})j(xa')h_{b'}(a') = \nu(b'^{-1})j(xb'),$$

somit gilt

$$\sigma h_{b'} = \sum_{a' \in K^\times} \nu(b'^{-1})j(a'b')h_{a'}.$$

Für die Koeffizienten bedeutet dies:

$$\forall a', b' \in K^\times : k(a', b'; \sigma) = \nu(b'^{-1})j(a'b').$$

Die Charaktertafel von G

(vgl. [PS83, Seite 70])

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(ad)$	$\mu_1(N\alpha)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$q\mu_1(a)^2$	0	$\mu_1(ad)$	$-\mu_1(N\alpha)$
$\chi_\mu = \chi_{(\mu_1, \mu_2)}$, $\mu_2 \neq 1$	$(q+1)\mu\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$	$\mu\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$	$\mu\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + \mu\left(\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$	0
$\chi_\nu, \nu \neq \bar{\nu}$	$(q-1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$

1.3 Die Darstellungen der $SL(2, K)$

Die $SL(2, K)$ ist die Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen über K , deren Determinante 1 ist. Basierend auf der Darstellungstheorie der $GL(2, K)$ sollen in diesem Abschnitt die irreduziblen Darstellungen der $SL(2, K)$ für Körper der Charakteristik $\text{char}(K) \neq 2$ ermittelt werden. Ein großer Teil derselben ergibt sich als Einschränkung von irreduziblen Darstellungen der $GL(2, K)$, jedoch liefern einige inäquivalente Darstellungen der $GL(2, K)$ durch Einschränkung äquivalente Darstellungen der $SL(2, K)$, und gewisse irreduzible Darstellungen der $GL(2, K)$ zerfallen bei Einschränkung in mehrere irreduzible Bestandteile. Diese Phänomene werden im folgenden beschrieben werden. Wir übernehmen die Bezeichnungen des vorherigen Abschnitts und setzen ferner $S := SL(2, K)$. Eine Zerlegung von G in ein semidirektes Produkt, die immer wieder Verwendung finden wird, ist die folgende:

$$G = A \rtimes S = S \ltimes A.$$

Bemerkung: Ist $\text{char}(K) = 2$, so ist

$$G = Z \times S,$$

da in diesem Fall (und nur im diesem Fall) K^\times eine ungerade Ordnung hat, und daher jedes Element von K^\times ein Quadrat in K^\times ist. Aus dieser Zerlegung folgt aber, daß jede irreduzible Darstellung von S die Einschränkung einer irreduziblen Darstellung von G ist. Es bleibt also nichts weiter zu untersuchen.

Im Verlaufe dieses Abschnitts werden wir auf Ausdrücke der Form

$$\tau(\mu_1, \psi) := \sum_{a \in K^\times} \psi(a)\mu(a)$$

stoßen, wobei μ_1 ein Charakter von K^\times ist. Es handelt sich hierbei um *Gauß'sche Summen*. Für eine Gauß'sche Summe $\tau(\mu_1, \psi)$ gilt die Gleichung

$$|\tau(\mu_1, \psi)|^2 = q. \quad (1.1)$$

Wir werden im weiteren $\tau(\mu_1) := \tau(\mu_1, \psi)$ setzen, wobei ψ der fest gewählte Charakter von K^+ ist. Ist μ_1 speziell der quadratische Charakter von K^\times , so verwenden wir auch die Bezeichnung $\tau := \tau(\mu_1)$. In dieser Situation kann man die Gleichung 1.1 noch präzisieren; es gilt nämlich

$$\tau^2 = \mu_1(-1)q. \quad (1.2)$$

Beweise für diese Aussagen über Gauß'sche Summen endlicher Körper sowie weitere Eigenschaften sind z.B. bei [Sma91, Seiten 120ff] zu finden.

1.3.1 Die Konjugationsklassen der $SL(2, K)$

Bei der Bestimmung der Konjugationsklassen von S können wir von denen von G ausgehen. Weil $S \subseteq G$ ist, gilt auch $\sigma^S \subseteq \sigma^G$ für $\sigma \in G$. Außerdem ist $\sigma^G \subseteq S$, falls $\sigma \in S$, weil die Determinante invariant unter der Konjugation ist. Es genügt also, für die ausgewählten Repräsentanten σ der Konjugationsklassen von G mit $\sigma \in S$ eine Zerlegung $\sigma^G = \bigcup_{i=1}^k \sigma_i^S$ mit $k \geq 1$, $\sigma_i \in S$, $i = 1, \dots, k$ zu finden. Erinnern wir uns dafür daran, daß ε einen Erzeuger von K^\times bezeichnet.

- $c_1(a), a^2 = 1$: Es gilt

$$c_1(a) = \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^G = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right) \right\} = \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a \end{array} \right)^S.$$

- $c_2(a), a^2 = 1$:

Sei $\sigma \in c_2(a)$. Dann existiert $\xi \in G$, so daß $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \xi^{-1}\sigma\xi$. Weil $G = S \rtimes A$ gilt, gibt es $\eta \in S$ und $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$ mit $\xi = \eta \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta^{-1}\sigma\eta \in \sigma^S.$$

Es bleibt zu untersuchen, für welche $b, c \in K^\times$ die Gleichheit $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^S = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}^S$ erfüllt ist. Durch den Ansatz $\theta^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit $\theta \in S$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \exists \theta \in S : \theta^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \theta &= \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ \iff \exists d' \in K^\times : d'^2 b &= c \\ \iff bc &\in (K^\times)^2. \end{aligned}$$

Somit ist σ konjugiert zu $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, falls $b \in (K^\times)^2$, und zu $\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$, falls $b \in \varepsilon(K^\times)^2$. Wir setzen nun für $a \in K^\times, a^2 = 1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^S &=: c_2(a, 1) \quad \text{und} \\ \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}^S &=: c_2(a, \varepsilon). \end{aligned}$$

- $c_3(a, a^{-1}), a \in K^\times$:

Ist $\sigma \in c_3(a, a^{-1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^G$, so existiert wie eben ein $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$, so daß

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \sigma^S.$$

Daher ist $c_3(a, a^{-1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^S$.

- $c_4(\alpha), \alpha \in L \setminus K, N\alpha = 1$:

Nach Lemma 1.13 besteht der Zentralisator von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$ in S aus denjenigen Elementen der enthaltenden Cartan-Untergruppe, deren Determinante 1 ist. Diese entsprechen aber genau den Elementen von L , deren Norm 1 beträgt. Folglich gilt

$$\# \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}^S \right) = [S : Z_S \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix} \right)] = \frac{(q^2 - 1)q}{q + 1} = q^2 - q = \#(c_4(\alpha)),$$

und es folgt $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}^S = c_4(\alpha)$.

Fassen wir die hieraus resultierenden Ergebnisse wieder in einer Tabelle zusammen:

Klassentyp	Anzahl der Klassen	Elemente in der Klasse
$c_1(a), a \in K^\times, a^2 = 1$	2	1
$c_2(a, 1), a \in K^\times, a^2 = 1$	2	$\frac{q^2-1}{2}$
$c_2(a, \varepsilon), a \in K^\times, a^2 = 1$	2	$\frac{q^2-1}{2}$
$c_3(a, a^{-1}), a \in K^\times, a \neq a^{-1}$	$\frac{(q-3)}{2}$	$q^2 + q$
$c_4(\alpha), \alpha \in L \setminus K, N\alpha = 1$	$\frac{q-1}{2}$	$q^2 - q$

1.3.2 Einschränkung der Darstellungen von G auf S

Die irreduziblen Darstellungen von G ließen sich in vier Typen gliedern, die sich jeweils in der Dimension unterscheiden. Wir werden das Verhalten der Darstellungen der vier Typen bei Einschränkung auf S nacheinander beschreiben.

- Darstellungen der Form $\mu_1 \circ \det$:

Bei Einschränkung auf S liefern nach Definition von S alle Darstellungen dieses Typs die triviale Darstellung.

- Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, 1)}$:

Für das Skalarprodukt des zugehörigen Charakters $\chi := \chi_{(\mu_1, 1)}$ gilt

$$\langle \text{Res}_S^G \chi, \text{Res}_S^G \chi \rangle_S = 1,$$

wie man leicht nachrechnen kann. Also ist die Einschränkung $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, 1)}$ irreduzibel. Anhand der Charaktertafel von G sieht man, daß wieder alle Einschränkungen von Darstellungen dieses Typs zueinander äquivalent, also insbesondere äquivalent zu $\text{Res}_S^G \rho_{(1, 1)}$ sind. Wir bezeichnen $\text{Res}_S^G \rho_{(1, 1)}$ mit $\rho_{(1)}$.

- $(q+1)$ -dimensionale Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}, \mu_2 \neq 1$:

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: Ist $\mu_2^2 \neq 1$, so ist $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ irreduzibel. Da die Werte des zugehörigen Charakters auf S nur von μ_2 abhängen und sich für μ_2 und μ_2^{-1} äquivalente Darstellungen ergeben, erhalten wir $\frac{q-3}{2}$ Darstellungen dieses Typs. Wir bezeichnen sie mit ρ_{μ_2} .

Gilt jedoch $\mu_2^2 = 1$, dann ist μ_2 der quadratische Charakter auf K^\times , und folglich ist $\mu_2(a) = \mu_2(a^{-1})$. Die Charaktertafel von G liefert

$$\langle \text{Res}_S^G \chi_{(\mu_1, \mu_2)}, \text{Res}_S^G \chi_{(\mu_1, \mu_2)} \rangle_S = 2,$$

d.h. $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ zerfällt in zwei irreduzible Komponenten. Um diese zu beschreiben, verwenden wir die Basis $\{f_i\}_{i \in \mathbb{F}^1(K)}$ von Seite 15. Nach den dort ermittelten

Ergebnissen operiert $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B \cap S$ auf dieser Basis durch

$$\begin{aligned} \sigma f_\infty &= \mu_2(a) f_\infty \\ \sigma f_{a'} &= \mu_2(a) \psi \left(\frac{a'b}{a} \right) f_{\frac{a'}{a^2}} \quad \forall a' \in K, \end{aligned}$$

und $w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ operiert durch

$$w' f_\infty = \frac{1}{q} \sum_{a \in K} f_a$$

$$w' f_{a'} = \mu_2(-1) f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{a \in K} \sum_{b \in K^\times} \psi(ab + \frac{a'}{b}) \mu_2(b) f_a \quad \forall a' \in K.$$

Der folgende Satz beschreibt nun die Zerlegung in S -irreduzible Unterräume.

Satz 1.16 *Es sei V der Darstellungsraum von $\text{Res}_S^G \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$, wobei μ_1 ein beliebiger Charakter von K^\times und μ_2 der quadratische Charakter auf K^\times ist. Dann gilt*

$$V = V^+ \oplus V^-,$$

wobei V^+ die Basis $\{f_a\}_{a \in (K^\times)^2} \cup \{\mu_2(-1) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0\}$
und V^- die Basis $\{f_a\}_{a \in \varepsilon(K^\times)^2} \cup \{\mu_2(-1) f_\infty - \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0\}$
besitzt, und V^+ und V^- S -stabil sind.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 1.17 *Es seien $a, b \in K^\times$ mit $ab \notin (K^\times)^2$. Dann gilt*

$$A := \sum_{c \in K^\times} \psi(ac + \frac{b}{c}) \mu_2(c) = 0.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} A &= \sum_{c \in K^\times} \psi(ac + \frac{b}{c}) \mu_2(c) \stackrel{c' = \frac{b}{ac}}{=} \sum_{c' \in K^\times} \psi(\frac{b}{c'} + ac') \mu_2(\frac{b}{ac'}) \\ &= \underbrace{\mu_2(\frac{b}{a})}_{=-1} \sum_{c' \in K^\times} \psi(ac' + \frac{b}{c'}) \mu_2(c') = -A. \end{aligned}$$

Also ist $A = 0$. □

Beweis des Satzes: Nach Konstruktion von V^+ und V^- ist $V = V^+ \oplus V^-$ als Vektorraum. Es bleibt zu zeigen, daß V^+ und V^- S -stabil sind. Es genügt dafür zu prüfen, ob $\sigma f \in V^+$ (bzw. V^-) für jeden Basisvektor f von V^+ (bzw. V^-) und $\sigma \in B \cap S$ oder $\sigma = w'$.

(i) Sei $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B \cap S$.

Ist $f = f_{a'}$, $a' \in (K^\times)^2$, so ist

$$\sigma f = \mu_2(a) \psi(\frac{a'b}{a}) f_{\frac{a'}{a^2}} \in V^+,$$

da $\frac{a'}{a^2} \in (K^\times)^2$.

Ist $f = \mu_2(-1) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0$, so ist

$$\sigma f = \mu_2(-1) \mu_2(a) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} \mu_2(a) f_0 = \mu_2(a) f \in V^+.$$

(ii) Sei $\sigma = w'$.

Ist $f = f_a, a \in (K^\times)^2$, so ist

$$\begin{aligned}
\sigma f &= \mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{a' \in K} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b + \frac{a}{b}) \mu_2(b) f_{a'} \\
&= \mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{b \in K^\times} \psi(\frac{a}{b}) \mu_2(b) f_0 \\
&\quad + \frac{1}{q} \sum_{a' \in K^\times} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b + \frac{a}{b}) \mu_2(b) f_{a'} \\
&\stackrel{\text{Lemma 1.17}}{=} \underbrace{\mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \overbrace{\mu_2(a)}^{=1} \tau(\mu_2) f_0}_{\in V^+} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{q} \sum_{a' \in (K^\times)^2} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b + \frac{a}{b}) \mu_2(b) f_{a'}}_{\in V^+} \\
&\in V^+.
\end{aligned}$$

Ist schließlich $f = \mu_2(-1)f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sigma f &= \frac{\mu_2(-1)}{q} \sum_{a \in K} f_a \\
&\quad + \frac{\tau(\mu_2)}{q} \left(\mu_2(-1)f_\infty + \frac{1}{q} \sum_{a' \in K} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b) \mu_2(b) f_{a'} \right) \\
&= \frac{\tau(\mu_2)}{q} \mu_2(-1) f_\infty + \left(\frac{\mu_2(-1)}{q} + \frac{\tau(\mu_2)}{q^2} \underbrace{\sum_{b \in K^\times} \mu_2(b)}_{=0} \right) f_0 \\
&\quad + \sum_{a' \in K^\times} \left(\frac{\mu_2(-1)}{q} + \frac{\tau(\mu_2)}{q^2} \sum_{b \in K^\times} \psi(a'b) \mu_2(b) \right) f_{a'} \\
&\stackrel{(1,2)}{=} \frac{\tau(\mu_2)}{q} (\mu_2(-1) f_\infty + \frac{\tau(\mu_2)}{q} f_0) \\
&\quad + \sum_{a' \in K^\times} \left(\frac{\mu_2(-1)}{q} + \mu_2(a') \frac{\tau(\mu_2)^2}{q^2} \right) f_{a'} \\
&\stackrel{(1,2)}{=} \frac{\tau(\mu_2)}{q} f + \sum_{a' \in K^\times} \frac{\mu_2(-1)}{q} \underbrace{(1 + \mu_2(a'))}_{=0, \text{ falls } a' \in \varepsilon(K^\times)^2} f_{a'} \\
&\in V^+.
\end{aligned}$$

Also ist V^+ S -stabil. Ganz analog zeigt man die Aussage für V^- . \square

Wir bezeichnen die Darstellungen mit den Darstellungsräumen V^+ und V^- als $\rho_{\mu_2}^+$ bzw. $\rho_{\mu_2}^-$. Die Werte der zugehörigen Charaktere $\chi_{\mu_2}^+$ und $\chi_{\mu_2}^-$ kann man der Charaktertafel entnehmen.

• Es bleiben noch die $(q-1)$ -dimensionalen Darstellungen der Form $\rho_\nu, \nu \neq \bar{\nu}$ auf ihr Verhalten unter der Einschränkung zu untersuchen. Auch bei den Darstellungen

dieses Typs sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wir setzen zunächst

$$[N = 1] := \{\alpha \in L : N\alpha = 1\}.$$

Gilt $\nu^2|_{[N=1]} \neq 1$, so stellt man fest, daß $\text{Res}_S^G \rho_\nu$ irreduzibel ist. Da je zwei Darstellungen zu Charakteren von $[N = 1]$ mit $\nu^2 \neq 1$ zueinander äquivalent sind, gibt es $\frac{\#([N=1]) - 2}{2} = \frac{q-1}{2}$ irreduzible Darstellungen der Dimension $q - 1$ von S . Ist dagegen $\nu^2|_{[N=1]} = 1$, so erhält man $\langle \text{Res}_S^G \chi_\nu, \text{Res}_S^G \chi_\nu \rangle_S = 2$, so daß die Darstellung $\text{Res}_S^G \rho_\nu$ in zwei irreduzible Bestandteile zerfallen muß. Wir beschreiben diese mit Hilfe der auf Seite 18 gegebenen Basis. Man beachte, daß $\nu|_{[N=1]}$ im zweiten Fall der quadratische Charakter auf $[N = 1]$ sein muß, denn wäre schon $\nu|_{[N=1]}$ trivial, so wäre ν zerlegbar.

Satz 1.18 *Es sei W der Darstellungsraum von $\text{Res}_S^G \rho_\nu$ mit der Basis $\{h_a\}_{a \in K^\times}$, $\nu|_{[N=1]}$ der quadratische Charakter auf C . Dann ist die Zerlegung*

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

wobei W^+ die Basis $\{h_a\}_{a \in (K^\times)^2}$ und W^- die Basis $\{h_a\}_{a \in \varepsilon(K^\times)}$ besitzt, eine Zerlegung in S -stabile Unterräume.

Wir benötigen zwei Lemmata für den Beweis:

Lemma 1.19 *Es sei $\alpha \in [N = 1] \setminus [N = 1]^2$. Dann existiert ein $\beta \in L$, so daß*

$$\alpha = \frac{\bar{\beta}}{\beta} \text{ und } N\beta = \varepsilon.$$

Insbesondere gibt es für ein erzeugendes Element ξ von $[N = 1]$ ein $\eta \in L^\times$ mit $\xi = \frac{\bar{\eta}}{\eta}$ und $N\eta = \varepsilon$.

Beweis: [Tan67, Lemma 2] □

Lemma 1.20 *Es sei $a \in K^\times$, ν ein Charakter auf L^\times , dessen Einschränkung auf $[N = 1]$ gerade den quadratischen Charakter auf $[N = 1]$ liefert, und ξ ein erzeugendes Element von $[N = 1]$. Weiter sei η das gemäß Lemma 1.19 zu ξ gewählte Element von L^\times . Dann gilt*

$$B := \sum_{t \in [N=1]} \psi(a(\eta t + \bar{\eta} t)) \nu(t) = 0.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} B &= \sum_{t \in [N=1]} \psi(a(\eta t + \bar{\eta} t)) \nu(t) \\ &\stackrel{t = \xi s}{=} \sum_{s \in [N=1]} \psi(a(\bar{\eta} s + \eta s)) \underbrace{\nu(\xi)}_{=-1} \underbrace{\nu(s^{-1})}_{=\nu(s)} = -B, \end{aligned}$$

also $B = 0$. □

Beweis des Satzes: Es sei $a \in K^\times$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B \cap S$. Es ist

$$\sigma h_{a'} = \nu(a^{-1}) \psi\left(\frac{a'b}{a}\right) h_{\frac{a'}{a^2}}.$$

Weil $\frac{a'}{a^2} \in (K^\times)^2$ genau dann, wenn $a' \in (K^\times)^2$, ist auch $\sigma h_{a'} \in W^+$ (bzw. $\sigma h_{a'} \in W^-$) genau dann, wenn $h_{a'} \in W^+$ (bzw. $h_{a'} \in W^-$).

Sei nun $\sigma = w'$. Wir wissen, daß

$$\sigma h_{a'} = \sum_{b' \in K^\times} \nu(a'^{-1}) j(a'b') h_{b'}$$

gilt. Es ist zu zeigen, daß $j(a'b') = 0$ erfüllt ist, falls $a'b' \in \varepsilon(K^\times)^2$.

Sei also $a'b' = c'^2 \varepsilon$, $c' \in K^\times$. Dann folgt

$$\begin{aligned} j(a'b') &= -\frac{1}{q} \sum_{\substack{\alpha \in L^\times \\ N\alpha = a'b'}} \psi(\alpha + \bar{\alpha}) \nu(\alpha) \\ &\stackrel{Nc' = c'^2}{=} -\frac{1}{q} \sum_{t \in [N=1]} \psi(c'(\eta t + \bar{\eta} t)) \nu(c' \eta t) \\ &= -\frac{\nu(c' \eta)}{q} \sum_{t \in [N=1]} \psi(c'(\eta t + \bar{\eta} t)) \nu(t) \end{aligned}$$

Lemma 1.20 $\underline{=}$ 0.

Somit ist $w' h_{a'} \in W^+$ (bzw. $\in W^-$), schon wenn $h_{a'} \in W^+$ (bzw. $\in W^-$). Insgesamt ergibt sich, daß W^+ und W^- S -invariant sind. \square

Die zugehörigen Darstellungen werden mit ρ_ν^+ und ρ_ν^- bezeichnet.

Die Charaktertafel von S für ungerades q

(vgl. [Tan67, Seite 83, Tabelle 2] oder [Dor71, Seite 228])

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$
1_S	1	1	1	1	1
$\chi(1)$	q	0	0	1	-1
$\chi_{\mu_2}, \mu_2^2 \neq 1$	$(q+1)\mu_2(a)$	$\mu_2(a)$	$\mu_2(a)$	$\mu_2(a) + \mu_2(a^{-1})$	0
$\chi_{\mu_2}^\pm, \mu_2 \neq 1$ $\mu_2^2 = 1$	$\frac{q+1}{2}\mu_2(a)$	$\frac{\mu_2(a) \pm \tau}{2}$	$\frac{\mu_2(a) \mp \tau}{2}$	$\mu_2(a)$	0
$\chi_\nu, \nu^2 _{[N=1]} \neq 1$	$(q-1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	$-\nu(a)$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$
$\chi_\nu^\pm, \nu _{[N=1]} \neq 1$ $\nu^2 _{[N=1]} = 1$	$\frac{q-1}{2}\nu(a)$	$-\nu(a) \frac{1 \mp \tau}{2}$	$-\nu(a) \frac{1 \pm \tau}{2}$	0	$-\nu(\alpha)$

Kapitel 2

Grundlagen aus der Graphentheorie

In diesem Kapitel werden die notwendigen graphentheoretischen Begriffe eingeführt sowie einige später benötigte Sachverhalte zitiert. Die zugehörigen Beweise sind bei [Ser80] zu finden.

2.1 Graphen

Definition 2.1 Ein Graph X besteht aus zwei disjunkten Mengen $V(X)$ und $E(X)$ zusammen mit einer Inzidenzabbildung

$$E(X) \rightarrow V(X) \times V(X) \quad , \quad e \mapsto (o(e), t(e))$$

und einer Inversionsabbildung

$$E(X) \rightarrow E(X) \quad , \quad e \mapsto \bar{e},$$

die für alle $e \in E(X)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) $\bar{\bar{e}} = e$,
- (ii) $\bar{e} \neq e$,
- (iii) $t(e) = o(\bar{e})$.

Wir nennen ein Element $v \in V(X)$ einen *Knoten* von X , $e \in E(X)$ eine (*orientierte*) *Kante* und \bar{e} die zu e *inverse Kante*. Der Knoten $o(e)$ wird als *Startknoten* von e , $t(e)$ als *Zielknoten* von e bezeichnet. $o(e)$ und $t(e)$ heißen auch *Endknoten* von e . Zwei Knoten v_1 und v_2 sind *benachbart* oder *adjazent*, falls sie Endknoten derselben Kante e sind.

Definition 2.2 Ein Morphismus $m : X \rightarrow Y$ von Graphen X und Y besteht aus einem Paar von Abbildungen

$$m_V : V(X) \rightarrow V(Y), \quad m_E : E(X) \rightarrow E(Y),$$

für die gilt:

- (i) $\forall e \in E(X) : m_V(o(e)) = o(m_V(e))$,
- (ii) $\forall e \in E(X) : \overline{m_E(e)} = m_E(\bar{e})$.

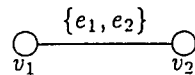
Ein Morphismus heißt *injektiv* (*surjektiv*, ...) falls m_V und m_E injektiv (surjektiv, ...) sind, und er heißt *Automorphismus*, falls er ein bijektiver Morphismus eines Graphen auf sich selbst ist. Mit $\text{Aut}(X)$ bezeichnen wir die Automorphismengruppe des Graphen X .

Definition 2.3 Eine Orientierung eines Graphen X ist eine Teilmenge $E_+(X)$, so daß $E(X) = E_+(X) \cup \overline{E_+(X)}$ und $E_+(X) \cap \overline{E_+(X)} = \emptyset$ ist.

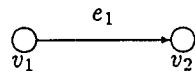
Eine solche Orientierung existiert immer. Will man einen orientierten Graphen beschreiben, so genügt es, $V(X)$, $E_+(X)$ und eine Abbildung $E_+(X) \rightarrow V(X) \times V(X)$ anzugeben.

Um einen Graphen in Form eines Diagramms darzustellen, werden Knoten durch Kreise und Paare von Kanten $\{e, \bar{e}\} \subset E(X)$ durch Verbindungslinien zwischen ihren Endknoten repräsentiert. Ist eine Orientierung des Graphen gegeben, so deutet ein Pfeil an, welches Element der Menge $\{e, \bar{e}\}$ zu $E_+(X)$ gehört.

Beispiel: Der Graph X mit der Knotenmenge $V(X) = \{v_1, v_2\}$ und der Kantenmenge $E(X) = \{e_1, e_2\}$ mit $o(e_1) \neq t(e_1)$ wird repräsentiert durch das Bild:



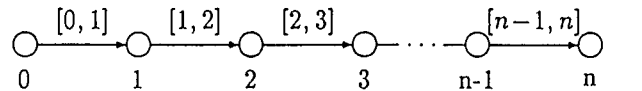
Wählt man $E_+(X) = \{e_1\}$, so repräsentiert



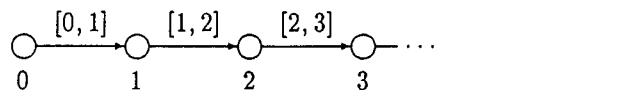
den Graphen mit derselben Knoten- und Kantenmenge.

Auf naheliegende Weise ist ein *Untergraph* eines Graphen definiert. Einige spezielle Graphen, die besonders als Untergraphen anderer Graphen Bedeutung haben, sind die folgenden:

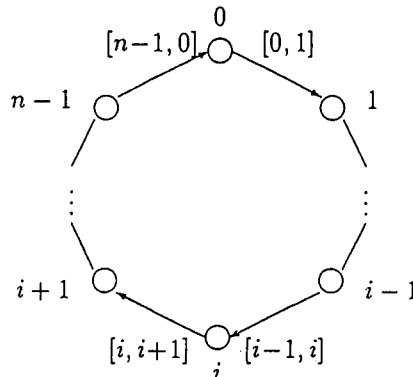
- Pfad_n ist der orientierte Graph



- Pfad_∞ ist der orientierte Graph



- Kreis_n ist der orientierte Graph



Ein *Weg* (der Länge n) in einem Graphen X ist ein Morphismus $m : \text{Pfad}_n \rightarrow X$. Er kann durch eine Folge von Kanten (e_1, \dots, e_n) mit $t(e_i) = o(e_{i+1})$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ beschrieben werden; der zugehörige Morphismus m ist dann gerade gegeben durch $m_E([i-1, i]) = e_i$. Ist $m_V(i) = v_i$, so sagt man auch, m ist ein Weg von v_0 nach v_n . Analog ist ein *unendlicher Weg* ein Morphismus $m : \text{Pfad}_\infty \rightarrow X$. Ein *Kreis* (oder *Zykel*) der Länge n in X ist ein zu Kreis_n isomorpher Untergraph von X . Ein Kreis der Länge 1 heißt auch *Schlinge*.

Bemerkung: Gemäß der hier gegebenen Definition eines Weges kann dieser Zykel enthalten.

Speziell werden wir es im weiteren mit Graphen zu tun haben, die keine Zykel der Länge ≤ 2 enthalten. Solche Graphen bezeichnet man als *schlichte* oder *kombinatorische* Graphen. In einem schlichten Graphen ist eine ungerichtete Kante eindeutig durch die Menge ihrer Endknoten bestimmt.

Ein Graph ist *zusammenhängend*, wenn er für jedes Paar von Knoten (v_1, v_2) , $v_1, v_2 \in V(X)$, mindestens einen Weg von v_1 nach v_2 enthält. Ein bzgl. der Inklusion maximaler zusammenhängender Untergraph von X heißt *Zusammenhangskomponente*. In einem zusammenhängenden Graphen ist der *Abstand* $d(v_1, v_2)$ zweier Knoten $v_1, v_2 \in V(X)$ definiert als die Länge des kürzesten Weges von v_1 nach v_2 .

Eine spezielle Klasse von Graphen ist die folgende:

Definition 2.4 *Ein zusammenhängender Graph ohne Zykel heißt Baum. Ist X ein beliebiger zusammenhängender Graph, so enthält die Menge der Untergraphen, die Bäume sind, mindestens ein maximales Element. Ein solcher Untergraph heißt aufspannender Unterbaum von X .*

Man kann sich leicht überlegen, daß die Knotenmenge eines aufspannenden Unterbaums von X mit der Knotenmenge von X übereinstimmt.

Definition 2.5 *Sei X ein Graph. Ein (\mathbb{C} -wertiger) Fluß von X ist eine Funktion $f : E(X) \rightarrow \mathbb{C}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (i) $\forall e \in E(X) : f(e) = -f(\bar{e}).$ (f ist alternierend.)
- (ii) $\forall v \in V(X) : \sum_{\substack{e \in E(X) \\ t(e)=v}} f(e) = 0.$ (f hat keine Quellen und Senken.)
- (iii) $f(e) = 0$ für fast alle $e \in E(X).$ (f hat endlichen Träger.)

Die Menge der Flüsse bildet einen \mathbb{C} -Vektorraum $H_1(X, \mathbb{C})$, der als \mathbb{C} -wertige *Homologie* von X bezeichnet wird. Analog kann man auch \mathbb{Z} -wertige oder \mathbb{R} -wertige Flüsse definieren. Die \mathbb{Z} -Homologie ist dann natürlich kein Vektorraum, sondern ein \mathbb{Z} -Modul. Die Dimension der Homologie eines endlichen Graphen ist aus dem folgenden Satz ersichtlich:

Satz 2.1 (Euler-Formel) *Es sei X ein endlicher Graph, n die Anzahl seiner Zusammenhangskomponenten, c_0 die Anzahl der Knoten, c_1 die Hälfte der Anzahl seiner Kanten. Dann gilt*

$$\dim H_1(X, \mathbb{C}) = c_1 - c_0 + n.$$

Dem Beweis liegt der folgende Sachverhalt zugrunde: Ist T ein aufspannender Unterbaum von X , so kann man jede Funktion auf $E(X) \setminus E(T)$ auf genau eine Weise zu einem Fluß von X fortsetzen.

2.2 Operationen von Gruppen auf Graphen

In diesem Abschnitt sei G eine Gruppe, X ein Graph, und G operiere von links auf X , d.h. es gebe einen Homomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}(X)$. Die Bahn eines Elementes $v \in V(X)$ (bzw. $e \in E(X)$) sei mit Gv (bzw. Ge) bezeichnet, die Fixgruppe mit G_v (bzw. G_e). Liegen zwei Elemente in derselben Bahn von G , so sagen wir auch, sie sind unter G äquivalent. Man erinnere sich in diesem Zusammenhang, daß für $\sigma \in G$ gilt

$$G_{\sigma^{-1}v} = (G_v)^\sigma, \quad G_{\sigma^{-1}e} = (G_e)^\sigma.$$

Dies ist ein Sachverhalt, der allgemein für auf Mengen operierende Gruppen gilt.

Definition 2.6 *Man sagt, die Gruppe G operiere inversionsfrei auf X , wenn kein Paar $(\sigma, e) \in G \times E(X)$ mit der Eigenschaft $\sigma e = \bar{e}$ existiert.*

Operiert G auf X inversionsfrei, und ist H eine Untergruppe von G , so kann man den Quotientengraphen $H \backslash X$ definieren, indem man setzt:

- $V(H \backslash X) := \{Hv : v \in V(X)\}$, die Menge der Bahnen von H auf $V(X)$,
- $E(H \backslash X) := \{He : e \in E(X)\}$, die Menge der Bahnen von H auf $E(X)$.

Die Inzidenzabbildung wird gegeben durch die Vorschrift

$$He \mapsto (Ho(e), Ht(e)),$$

und die Inversion durch

$$He \mapsto \overline{He} = H\bar{e}.$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Vorschriften für Inzidenz- und Inversionsabbildung unabhängig von der Auswahl eines Vertreters einer Bahn sind. Die Voraussetzung, daß G (und damit auch H) inversionsfrei auf X operiert, gewährleistet ferner, daß $\overline{He} \neq He$ für alle $e \in E(X)$. Auf offensichtliche Weise operiert die Gruppe G dann auch auf dem Quotientengraphen $H \backslash X$; die Untergruppe H operiert dabei trivial.

Definition 2.7 *Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf dem Graphen X operiert. Ein Fundamentalbereich von X modulo G ist ein Untergraph Y von X , so daß die Einschränkung der Quotientenabbildung $Y \rightarrow G \backslash X$ ein Isomorphismus ist.*

Ist die Operation einer Gruppe G auf X und eine Untergruppe H von G gegeben, so können wir den Vektorraum $H_1(H \backslash X, \mathbb{C})$ betrachten. Definiert man für eine beliebige Funktion $f : E(H \backslash X) \rightarrow \mathbb{C}$ und $\sigma \in G$ die Funktion $\sigma f : E(H \backslash X) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(\sigma f)(e) = f(\sigma^{-1}e),$$

so erhalten wir aus der Operation von G auf $H \backslash X$ eine Operation von G auf dem Vektorraum der komplexwertigen Funktionen auf $E(H \backslash X)$. Der Raum $H_1(H \backslash X, \mathbb{C})$ ist unter dieser Operation stabil. Ist H zusätzlich normal in G , so induziert die Operation von G auf $H_1(H \backslash X, \mathbb{C})$ eine Operation der Gruppe G/H auf demselben Vektorraum. Gemäß der Terminologie von Kapitel 1 erhalten wir also eine Darstellung der Gruppe G/H mit Darstellungsraum $H_1(H \backslash X, \mathbb{C})$.

In der gegebenen Situation ist es ferner naheliegend, neben $H_1(H \backslash X, \mathbb{C})$ einen Raum von Funktionen auf $E(X)$ einzuführen, deren Eigenschaften mit der Operation von H zusammenhängen.

Definition 2.8 *Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf X operiert, und H eine Untergruppe von G . Der Raum $\underline{H}_1(X, \mathbb{C})^H$ der harmonischen Coketten zu H ist definiert als die Gesamtheit der Funktionen $f : E(X) \rightarrow \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\forall e \in E(X) : f(e) = f(\bar{e}),$ *(f ist alternierend.)*
- (ii) $\forall v \in V(X) : \sum_{\substack{e \in E(X) \\ t(e)=v}} f(e) = 0,$ *(f hat keine Quellen und Senken.)*
- (iii) $\forall e \in E(X), \sigma \in H : f(\sigma e) = f(e),$ *(f ist invariant unter H.)*
- (iv) *Faßt man f (nach (iii)) als Funktion auf den Bahnen von H auf, so hat sie einen endlichen Träger.*

Ebenso, wie wir den Raum $H_1(H \backslash X, \mathbb{C})$ zu einem G -Modul gemacht haben, können wir eine G -Modulstruktur auf $\underline{H}_1(X, \mathbb{C})^H$ einführen, welche, falls H normal in G ist, eine Darstellung der Gruppe G/H mit Darstellungsraum $\underline{H}_1(X, \mathbb{C})^H$ liefert.

Den Zusammenhang zwischen den Vektorräumen $\underline{H}_1(X, \mathbb{C})^H$ und $H_1(H \backslash X, \mathbb{C})$ für die im weiteren untersuchte Situation werden wir im folgenden Kapitel klären.

Kapitel 3

Der Baum \mathcal{T} und der Graph $\Gamma(n) \backslash \mathcal{T}$

Von diesem Kapitel an wird die Grundsituation durch die folgenden Daten und Bezeichnungen gegeben sein:

- $k = \mathbb{F}_q$, der endliche Körper mit $q = p^f$ Elementen,
- $A = k[T]$, der Polynomring über k in der Unbestimmten T , versehen mit der Gradfunktion $\deg : A \rightarrow \mathbb{N}_0$,
- n ein Polynom aus A vom Grad d ,
- $K = k(T)$, der rationale Funktionenkörper über k in T mit der Gradbewertung $v : K \rightarrow \mathbb{Z}$, $v(\frac{f}{g}) = \deg g - \deg f$,
- $\pi = T^{-1}$, eine Uniformisierende bzgl. der Gradbewertung,
- $K_\infty = k((\pi))$, die Vervollständigung von K bzgl. v ,
- $\mathcal{O}_\infty = k[[\pi]]$, der Ganzheitsring von K_∞ ,
- $\mathcal{K} = GL(2, \mathcal{O}_\infty)$, eine maximale kompakte Untergruppe von $GL(2, K_\infty)$ bzgl. der von der Gradbewertung induzierten Topologie auf $GL(2, K_\infty)$,
- $\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{K} : c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$, eine Iwahori-Untergruppe,
- $\Gamma = GL(2, A)$, eine diskrete Untergruppe von $GL(2, K_\infty)$,
- $Z(K_\infty) = Z(GL(2, K_\infty))$, das Zentrum von $GL(2, K_\infty)$,
- V ein zweidimensionaler Vektorraum über K_∞ und
- (e_1, e_2) eine ausgewählte Basis von V .

Als weiterführende Literatur zum Verhältnis von Adeligen zu Bäumen sei der geneigten Leserin wie dem geneigten Leser die Lektüre von [Cal86] wärmstens empfohlen.

3.1 Der Bruhat-Tits-Baum \mathcal{T} von $PGL(2, K_\infty)$

Wir werden nun zur Gruppe $PGL(2, K_\infty) = GL(2, K_\infty)/Z(K_\infty)$ einen Graphen \mathcal{T} konstruieren, indem wir mit Hilfe der oben gegebenen Daten die Knoten- und

3.1.1 Die Knotenmenge $V(\mathcal{T})$

Ein Gitter L von V ist ein endlich erzeugter \mathcal{O}_∞ -Untermodul von V , für den $K_\infty \otimes_{\mathcal{O}_\infty} L = V$ gilt. Weil \mathcal{O}_∞ ein Hauptidealring und V als \mathcal{O}_∞ -Modul torsionsfrei ist, ist L frei vom Rang 2. Für ein Gitter L und ein Element $x \in K_\infty^\times$ ist auch $xL = Lx$ ein Gitter; die Gruppe K_∞^\times operiert also auf der Menge der Gitter. Die Bahn $[L]$ eines Gitters unter der Operation von K_∞^\times bezeichnen wir als *Gitterklasse*, und wir nennen zwei Gitter *äquivalent*, wenn sie zu derselben Gitterklasse gehören.

Die Knotenmenge $V(\mathcal{T})$ von \mathcal{T} ist definiert als die Menge der Gitterklassen von V . Nach Auswahl einer Basis (e_1, e_2) von V operiert die Gruppe $GL(2, K_\infty)$ in natürlicher Weise auf der Menge der Gitterklassen. Diese Operation ist transitiv, weil $GL(2, K_\infty)$ auf der Menge der K_∞ -Basen von V transitiv operiert. Ferner ist das Gitter $L := \mathcal{O}_\infty e_1 \oplus \mathcal{O}_\infty e_2$ genau unter der Operation von $\mathcal{K} = GL(2, \mathcal{O}_\infty)$ invariant, die Fixgruppe der Gitterklasse von L ist daher das Produkt der Gruppen \mathcal{K} und $Z(K_\infty)$. Man erhält also für $V(\mathcal{T})$ die Beschreibung

$$V(\mathcal{T}) = GL(2, K_\infty) / \mathcal{K}Z(K_\infty).$$

3.1.2 Die Kantenmenge $E(\mathcal{T})$

Seien L und L' zwei Gitter in V . Nach dem Elementarteilersatz existiert eine Basis $\{\alpha, \beta\}$ von L und $a, b \in \mathbb{Z}$, so daß $\{\pi^a \alpha, \pi^b \beta\}$ eine Basis von L' ist. Dabei sind a und b bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Geht man zu Gittern xL, yL' über, $x, y \in K_\infty^\times$, so können wir die Basis $\{\pi^{v(x)} \alpha, \pi^{v(x)} \beta\}$ von xL wählen, so daß für $c = v(y/x)$ eine Basis von yL' durch $\{\pi^{a+c}(\pi^{v(x)} \alpha), \pi^{b+c}(\pi^{v(x)} \beta)\}$ gegeben ist. Die Zahl $|a - b| =: d(\Lambda, \Lambda')$ hängt daher nur von den Gitterklassen $[L]$ und $[L']$ ab und wird als der *Abstand* zwischen $[L]$ und $[L']$ bezeichnet. Zwei Gitterklassen Λ, Λ' heißen *benachbart*, wenn $d(\Lambda, \Lambda') = 1$.

Die Menge $E(\mathcal{T})$ der Kanten von \mathcal{T} ist gegeben als Menge der Paare (Λ, Λ') benachbarter Gitterklassen.

Nach Definition ist der Graph kombinatorisch. Ebenso wie die Knoten kann man auch die Kanten mit einer Faktorgruppe von $GL(2, K_\infty)$ identifizieren, nämlich mit der Gruppe

$$GL(2, K_\infty) / \mathcal{I}Z(K_\infty).$$

Dabei liefert die kanonische Abbildung

$$GL(2, K_\infty) / \mathcal{I}Z(K_\infty) \rightarrow GL(2, K_\infty) / \mathcal{K}Z(K_\infty)$$

die Abbildung $e \mapsto o(e)$. Die Inversion ist durch die Vorschrift

$$\sigma \mapsto \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Es gilt

Satz 3.1 *Der Graph \mathcal{T} ist ein Baum.*

Beweis: [Ser80, chapter II, Theorem 1] □

Ist L ein festes Gitter und Λ' eine Gitterklasse mit $d([L], \Lambda') = 1$, so existiert ein eindeutig bestimmtes Gitter $L' \in \Lambda'$, so daß $L' \subset L$, und L' maximal mit dieser Eigenschaft ist. Für dieses L' gilt dann

$$L/L' \cong \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}.$$

Insbesondere gibt es eine Basis (w_1, w_2) von L , so daß $(w_1, \pi w_2)$ eine Basis von L' ist, und es gilt

$$L'/\pi L \cong (\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})w_1.$$

Man erhält so eine Bijektion zwischen den zu $[L]$ benachbarten Knoten von \mathcal{T} und den direkten Summanden des $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ -Moduls $L/\pi L$ vom Rang eins. Letztere entsprechen wiederum den Punkten der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})$, indem man dem Element $(a : b) \in \mathbb{P}^1(\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})$ den $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ -Untermodul $(aw_2 + bw_1)\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ von $L/\pi L$ zuordnet.

3.2 Der Quotientengraph $\Gamma \backslash \mathcal{T}$

Als Untergruppe von $GL(2, K_\infty)$ operiert die Gruppe Γ auf \mathcal{T} . Diese Operation ist inversionsfrei, so daß der Quotientengraph gebildet werden kann. Γ ist eine diskrete Untergruppe von $GL(2, K_\infty)$, und die Stabilisatoren von Knoten sind Schnittmengen von Γ mit zu \mathcal{K} konjugierten Untergruppen von $GL(2, K_\infty)$. Der Stabilisator Γ_v eines Knotens v in Γ ist daher diskret und kompakt, also endlich. Setzt man

$$v_i := [\langle \pi^i e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}}],$$

repräsentiert durch die Matrix $\begin{pmatrix} \pi^i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und

$$e_i := (v_i, v_{i+1}),$$

durch dieselbe Matrix repräsentiert, so gilt $o(e_i) = v_i, t(e_i) = v_{i+1}$. Definiert man ferner

$$\Gamma_0 := GL(2, k)$$

$$\Gamma_i := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \deg b \leq i \right\} \text{ für } i \geq 1,$$

wobei $\deg b$ den minimalen Grad eines Urbildes von b in A bezeichnet, so ist die Gruppe Γ_i gerade die Fixgruppe des Knotens v_i , also ist die Gruppe $\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}$ die Fixgruppe der Kante e_i . Man beachte, daß für $i \geq 1$ die Gleichheit $\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ besteht. Es gilt sogar:

Satz 3.2 *Der unendliche Pfad*

$$T = \begin{array}{ccccccc} & & e_1 & & e_2 & & e_3 & & \dots \\ & & \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ & \xrightarrow{\quad} & \dots \\ v_0 & & v_1 & & v_2 & & v_3 & & \dots \end{array}$$

ist ein Fundamentalbereich von T modulo Γ .

Beweis: [Ser80, chapter II, Proposition 3 und Corollary] □

3.3 Der Quotientengraph $\Gamma(n) \backslash \mathcal{T}$ und die Gruppe G

Die *Hauptkongruenzuntergruppe* $\Gamma(n)$ der Stufe $n \in A$ ist der Kern der komponentenweisen Reduktionsabbildung

$$GL(2, A) \rightarrow GL(2, A/(n)).$$

Offensichtlich operiert $\Gamma(n)$ auf \mathcal{T} , und man hat einen surjektiven Morphismus von Graphen

$$\kappa : \Gamma(n) \backslash \mathcal{T} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{T}.$$

Die Abbildung κ ermöglicht die

Definition 3.1 Für einen Knoten $v \in V(T)$ (bzw. eine Kante $e \in E(T)$) sei

$$\text{Typ}(v) := i, \text{ falls } \kappa(v) = v_i, \text{ bzw.}$$

$$\text{Typ}(e) := i, \text{ falls } \kappa(e) = e_i.$$

Man sagt dann auch, v sei vom Typ i .

Für $i \geq 0$ sei $V_i := \kappa^{-1}(v_i)$ die Menge der Knoten vom Typ i und $E_i := \kappa^{-1}(e_i)$ die Menge der Kanten vom Typ i . Man beachte an dieser Stelle, daß die Vereinigung $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} E_i$ nicht alle Kanten von $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$ umfaßt, sondern eine Orientierung dieses

Graphen angibt; entsprechend setzen wir $E^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} E_i$.

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen ergeben sich für $i \geq 0$ die Bijektionen

$$\Gamma(n) \setminus \Gamma / \Gamma_i \rightarrow V_i, \bar{\gamma} \mapsto \Gamma(n)\gamma(v_i)$$

und

$$\Gamma(n) \setminus \Gamma / (\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}) \rightarrow E_i, \bar{\gamma} \mapsto \Gamma(n)\gamma(e_i).$$

Es ist aber $\Gamma(n)$ normal in Γ , also $G(n) := \Gamma / \Gamma(n)$ eine Gruppe, und $\Gamma(n) \setminus \Gamma / \Gamma_i$ steht vermöge der Abbildung $\bar{\gamma} \mapsto \gamma^{-1}$ in Bijektion zur Menge $\Gamma_i \setminus G(n)$. Insgesamt erhalten wir:

Die Knoten (bzw. Kanten) vom Typ i entsprechen den Bahnen von Γ_i (bzw. von $\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}$) bei der Operation von links auf $G(n)$, d.h. den Rechtsnebenklassen von $\bar{\Gamma}_i$ (bzw. von $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$), wobei $\bar{\Gamma}_i$ das Bild von Γ_i bei der Reduktion nach $\Gamma(n)$ bezeichnet. Es ist $\bar{\Gamma}_i \cong \Gamma_i$ für $0 \leq i \leq d-1$ und $\bar{\Gamma}_i \cong \Gamma_{d-1}$ für $i \geq d-1$.

Sei $\sigma \in G(n)$, $i \geq 0$. Wir setzen

$$[\sigma]_i := \bar{\Gamma}_i \sigma, \quad \text{die zu einem Knoten vom Typ } i \text{ gehörende Rechtsnebenklasse von } \sigma \text{ bezüglich } \bar{\Gamma}_i,$$

$$[\sigma]_{i,i+1} := \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}} \sigma, \quad \text{die zu einer Kante vom Typ } i \text{ gehörende Rechtsnebenklasse von } \sigma \text{ bezüglich } \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}.$$

Ferner seien für $i \geq 0$ die Abbildungen $o_i : E_i \rightarrow V_i$ und $t_i : E_i \rightarrow V_{i+1}$ die Einschränkungen der Inzidenzabbildungen o und t auf E_i . Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich

$$o_i([\sigma]_{i,i+1}) = [\sigma]_i,$$

$$t_i([\sigma]_{i,i+1}) = [\sigma]_{i+1}.$$

Weil für $i \geq 1$ die Inklusion $\bar{\Gamma}_i \subseteq \bar{\Gamma}_{i+1}$ gilt, ist in diesem Fall o_i bijektiv, und man kann eine Abbildung $\rho_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ durch die Vorschrift

$$\rho_i : [\sigma]_i \mapsto [\sigma]_{i+1}$$

definieren. ρ_i liefert zu jedem Knoten $v_i \in V_i$ den Knoten $v_{i+1} \in V_{i+1}$, der Zielknoten der Kante e_i mit Startknoten v_i ist. Insbesondere gilt für $i \geq 1$

$$t_i = \rho_i \circ o_i.$$

In der gerade eingeführten Notation schreibt sich die Operation von $\tau \in G(n)$ auf $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$ als

$$\tau[\sigma]_i = [\sigma\tau^{-1}]_i \text{ für } [\sigma]_i \in V_i,$$

und

$$\tau[\sigma]_{i,i+1} = [\sigma\tau^{-1}]_{i,i+1} \text{ für } [\sigma]_{i,i+1} \in E_i.$$

Mit Hilfe dieser Informationen und der Kenntnis der Gruppe $G(n)$ kann der Graph $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$ konstruiert werden. Für ein irreduzibles Polynom n werden wir nun die Gruppe $G := G(n)$ beschreiben.

Satz 3.3 Sei $n \in A$ irreduzibel und $G = \Gamma/\Gamma(n)$. Dann gilt

$$G \cong \{\sigma \in GL(2, A/(n)) : \det \sigma \in k^\times\}.$$

Beweis: Setzen wir in Anlehnung an Kapitel 1, Abschnitt 1.2

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in k^\times \right\} =: A(k),$$

so gilt offensichtlich

$$\{\sigma \in GL(2, A/(n)) : \det \sigma \in k^\times\} = A(k) \rtimes SL(2, A/(n)),$$

und

$$\Gamma = GL(2, A) = A(k) \rtimes SL(2, A).$$

Wir werden die Exaktheit der Folge

$$1 \rightarrow \Gamma(n) \hookrightarrow \Gamma \rightarrow A(k) \rtimes SL(2, A/(n)) \rightarrow 1$$

nachweisen. Weil $\Gamma(n) \cap A(k)$ lediglich die Einheitsmatrix enthält, ist die Exaktheit der obigen Folge äquivalent zur Exaktheit von

$$1 \rightarrow \Gamma(n) \hookrightarrow SL(2, A) \xrightarrow{\varphi} SL(2, A/(n)) \rightarrow 1.$$

Einzig die Surjektivität der Abbildung φ ist dabei nichttrivial.

Sei also $\sigma = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in SL(2, A/(n))$, und $a, b, c, d \in A$ seien Urbilder von $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ und \bar{d} . Dann ist $ad - bc = 1 + mn$ mit einem $m \in A$. Der größte gemeinsame Teiler (c, d) von c und d muß also teilerfremd zu n sein. Somit existiert ein $p \in A$ mit $(c, d + pn) = 1$, und wir können oBdA. annehmen, daß $(c, d) = 1$. Dann sind aber $q, r \in A$ wählbar, so daß

$$cq - dr = m.$$

Wir setzen nun

$$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} a + rn & b + qn \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\tilde{\sigma} \in SL(2, A)$, denn

$$\det \tilde{\sigma} = \underbrace{ad - bc}_{=mn+1} + \underbrace{(rd - qc)}_{=-m} n = 1.$$

Ferner ist $\varphi(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Also ist φ surjektiv. □

Insbesondere folgt aus der Zerlegung $G = A(k) \rtimes SL(2, A/(n))$

$$\#(G) = \#(A(k)) \cdot \#(SL(2, A/(n))) = (q-1)(q^{2d}-1)q^d.$$

Wir betrachten zunächst den Untergraphen von $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$, der aus den Knoten und Kanten vom Typ $i \geq \max\{1, d-1\}$ besteht.

Sei also $i \geq \max\{1, d-1\}$. Dann ist $\bar{\Gamma}_i = \bar{\Gamma}_{i+1}$, und die Abbildung ρ_i ist bijektiv. Da aber $t_i = \rho_i \circ o_i$ gilt, und o_i für $i \geq 1$ bijektiv ist, ist auch t_i bijektiv. Der Untergraph besteht also aus sovielen Halbgeraden, wie es Knoten vom Typ $\max\{1, d-1\}$ gibt.

Wir haben somit gezeigt:

Satz 3.4 Der Untergraph von $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$, der aus den Knoten und Kanten vom Typ i , $i \geq \max\{1, d-1\}$ besteht, ist eine disjunkte Vereinigung von Halbgeraden. Ihre Anzahl beträgt

$$[G : \overline{\Gamma}_{d-1}] = \frac{(q^{2d} - 1)q^d(q-1)}{(q-1)^2q^d} = \frac{q^{2d} - 1}{q-1}, \text{ falls } d > 1 \text{ und}$$

$$[G : \overline{\Gamma}_1] = \frac{(q^2 - 1)q(q-1)}{(q-1)^2q} = q + 1, \text{ falls } d = 1.$$

Ist dagegen $v \in V_{i+1}$, $1 \leq i \leq d-1$, so ist

$$\#\{e \in E_i : t_i(e) = v\} = \#(\rho_i^{-1}(v)) = [\overline{\Gamma}_{i+1} : \overline{\Gamma}_i] = q.$$

Ebenso gilt für $v \in V_1$, falls $d \geq 2$,

$$\#\{e \in E_0 : t_0(e) = v\} = \#\{(\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1)\sigma : \overline{\Gamma}_1\sigma = v\} = [\Gamma_1 : \Gamma_0 \cap \Gamma_1] = q.$$

Wir erhalten daher den

Satz 3.5 Jeder Knoten vom Typ i mit $1 \leq i \leq d-1$ ist Zielknoten von q Kanten vom Typ $i-1$ und Startknoten einer Kante vom Typ i . Es gibt

$$[G : \overline{\Gamma}_i] = \frac{(q^{2d} - 1)q^{d-i-1}}{q-1}$$

Knoten und Kanten vom Typ i .

Es bleiben noch die Knoten vom Typ 0 zu untersuchen. Für ein $v \in V_0$ gilt:

$$\#\{e \in E_0 : o(e) = v\} = \#\{(\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1)\sigma : \overline{\Gamma}_0\sigma = v\} = [\Gamma_0 : \Gamma_0 \cap \Gamma_1] = q + 1.$$

Satz 3.6 Jeder Knoten vom Typ 0 ist Startknoten von $q+1$ Kanten vom Typ 0. Es gibt

$$[G : \overline{\Gamma}_0] = \frac{(q^{2d} - 1)q^{d-1}}{q^2 - 1}$$

Knoten und

$$(q+1) \cdot \frac{(q^{2d} - 1)q^{d-1}}{q^2 - 1} = \frac{(q^{2d} - 1)q^{d-1}}{q-1}$$

Kanten vom Typ 0.

Den Inhalt der letzten drei Sätze spiegelt das Bild des Graphen $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$ auf Seite 40 wider.

Das *Geschlecht* dieses Graphen, d.h. die Dimension seiner Homologie, können wir nun mit Hilfe von Satz 2.1 ermitteln, denn sie ist gleich der Dimension der Homologie des Graphen, den man aus $\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}$ erhält, indem man die Spitzen abschneidet. Dieser Graph ist aber endlich und zusammenhängend, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \dim H_1(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}, \mathbb{C}) &= \sum_{i=0}^{d-1} \#(E_i) - \sum_{i=0}^d \#(V_i) + 1 \\ &= \#(E_0) - \#(V_0) - \#(V_d) + 1, \quad \text{weil } o_i \text{ bijektiv für } i \geq 1, \\ &= \frac{(q^{2d} - 1)q^{d-1}}{q-1} - \frac{(q^{2d} - 1)q^{d-1}}{q^2 - 1} - \frac{q^{2d} - 1}{q-1} + 1 \\ &= \frac{(q^{2d} - 1)(q^d - q - 1)}{q^2 - 1} + 1. \end{aligned}$$

Insbesondere beträgt die Dimension der Homologie gerade 0, falls n ein lineares Polynom ist.

Wie bereits in Kapitel 2 angekündigt, wollen wir den Zusammenhang zwischen den Vektorräumen $H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$ und $\underline{H}_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$ klären, die dem Graphen T mit der Operation von $\Gamma(n)$ zugeordnet sind. Dies leistet der folgende

Satz 3.7 Die Räume $H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$ und $\underline{H}_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$ sind vermöge des Vektorraumhomomorphismus

$$j : H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C}) \rightarrow \underline{H}_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}, \quad f \mapsto f^*$$

mit $f^*(e) = \#(\Gamma(n)_e)f(\Gamma(n)e)$ isomorph.

Beweis: Der Beweis ist bei [Non94] für beliebige Untergruppen Γ_u von Γ mit endlichem Index zu finden. Der dort auftretende Gewichtsfaktor

$$w(e) = [(\Gamma_u)_e : Z(K_\infty) \cap (\Gamma_u)_e]$$

stimmt in unserer Situation mit dem Faktor $\#(\Gamma(n)_e)$ überein, da $\Gamma(n) \cap Z(K_\infty)$ nur die Einheitsmatrix enthält. \square

Bemerkung: Dieser Isomorphismus gilt in der gegebenen Situation sogar bei Übergang zu $H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{Z})$ und $\underline{H}_1(T, \mathbb{Z})^{\Gamma(n)}$ (vgl. [GR, 3.4.5]). Diese Tatsache hängt aber mit der speziellen Struktur von $\Gamma(n)$ zusammen, während der Isomorphismus zwischen den \mathbb{C} -Vektorräumen problemlos von $\Gamma(n)$ auf beliebige Untergruppen von endlichem Index in Γ zu verallgemeinern ist.

Da, wie in Kapitel 2, Seite 30 beschrieben, die betrachteten Vektorräume mit einer G -Struktur versehen sind, ist die Verträglichkeit von j mit dieser Struktur von Interesse. In der Tat gilt der

Satz 3.8 Mit den Bezeichnungen von Satz 3.7 ist die Funktion j ein G -Isomorphismus.

Beweis: Es sei $\sigma \in G$ und $e \in E(T)$. Weil $\Gamma(n)$ eine normale Untergruppe von Γ ist, gilt

$$\begin{aligned} \#(\Gamma(n)_e) &= \#(\Gamma_e \cap \Gamma(n)) = \#(\Gamma_e^\sigma \cap \Gamma(n)^\sigma) \\ &= \#(\Gamma_{\sigma^{-1}e} \cap \Gamma(n)) = \#(\Gamma(n)_{\sigma^{-1}e}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Daraus folgt für $f \in H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \sigma f^*(e) &= f^*(\sigma^{-1}e) = \#(\Gamma(n)_{\sigma^{-1}e})f(\Gamma(n)\sigma^{-1}e) \\ &= \#(\Gamma(n)_e)f(\underbrace{\sigma^{-1}\Gamma(n)\sigma}_{=\sigma^{-1}\Gamma(n)}\sigma^{-1}e) = (\sigma f)^*(e). \end{aligned}$$

Der Vektorraumisomorphismus j ist also mit der G -Struktur von $H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$ und $\underline{H}_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$ verträglich. \square

Wir führen nun auf dem Raum $\underline{H}_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$ ein Skalarprodukt ein, indem wir für $f, g \in \underline{H}_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$ definieren

$$(f, g) = \frac{1}{\#([\Gamma : \Gamma(n)])} \sum_{e \in R} \frac{f(e)\overline{g(e)}}{\#(\Gamma(n)_e)},$$

wobei R ein Repräsentantensystem von $\Gamma(n)\backslash E^+(T)$ und $E^+(T)$ eine beliebige Orientierung des Graphen T ist.

Wegen (3.1), und weil nach Definition von $H_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$ für $\tau \in \Gamma(n)$ und $e \in E(T)$ die Identitäten $f(\tau e) = f(e)$ und $g(\tau e) = g(e)$ gelten, ist der definierende Ausdruck unabhängig von der Wahl des Repräsentantensystems R . Die Unabhängigkeit von der Wahl der Orientierung von T wird durch die Gleichungen

$$f(\bar{e})\overline{g(\bar{e})} = f(e)\overline{g(e)}$$

und

$$\Gamma(n)_e = \Gamma(n)_{\bar{e}}$$

gewährleistet. Die Eigenschaften einer hermiteschen Bilinearform sind alle erfüllt (vgl. [Non94]).

Der nächste Satz beschreibt, wie sich dieses Skalarprodukt unter der Operation von G verhält.

Satz 3.9 *Das Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ist unter der Operation von Γ invariant, d.h. für $\sigma \in \Gamma$ und $f, g \in H_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$ gilt*

$$(\sigma f, \sigma g) = (f, g).$$

Beweis: Nach Definition ist

$$(\sigma f, \sigma g) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{e \in R} \frac{\sigma f(e)\overline{\sigma g(e)}}{\#(\Gamma(n)_e)} = \frac{1}{\#(G)} \sum_{e \in R} \frac{f(\sigma^{-1}e)\overline{g(\sigma^{-1}e)}}{\#(\Gamma(n)_e)}.$$

Aber jedes Repräsentantensystem R von $E^+(T)$ bzgl. $\Gamma(n)$ liefert durch Übergang zu $\sigma^{-1}R := \{\sigma^{-1}e : e \in R\}$ ein weiteres Repräsentantensystem von $E^+(T)$, denn für je zwei Kanten $e, \bar{e} \in E^+(T)$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \Gamma(n)\sigma^{-1}e = \Gamma(n)\sigma^{-1}\bar{e} &\iff \exists \tau \in \Gamma(n) : \tau\sigma^{-1}e = \sigma^{-1}\bar{e} \\ &\stackrel{\Gamma(n) \text{ normal in } \Gamma}{\iff} \exists \tau \in \Gamma(n) : \tau e = \bar{e} \\ &\iff \Gamma(n)e = \Gamma(n)\bar{e}. \end{aligned}$$

Daher und wegen (3.1) ist

$$(\sigma f, \sigma g) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{e \in \sigma^{-1}R} \frac{f(e)\overline{g(e)}}{\#(\Gamma(n)_e)} = (f, g).$$

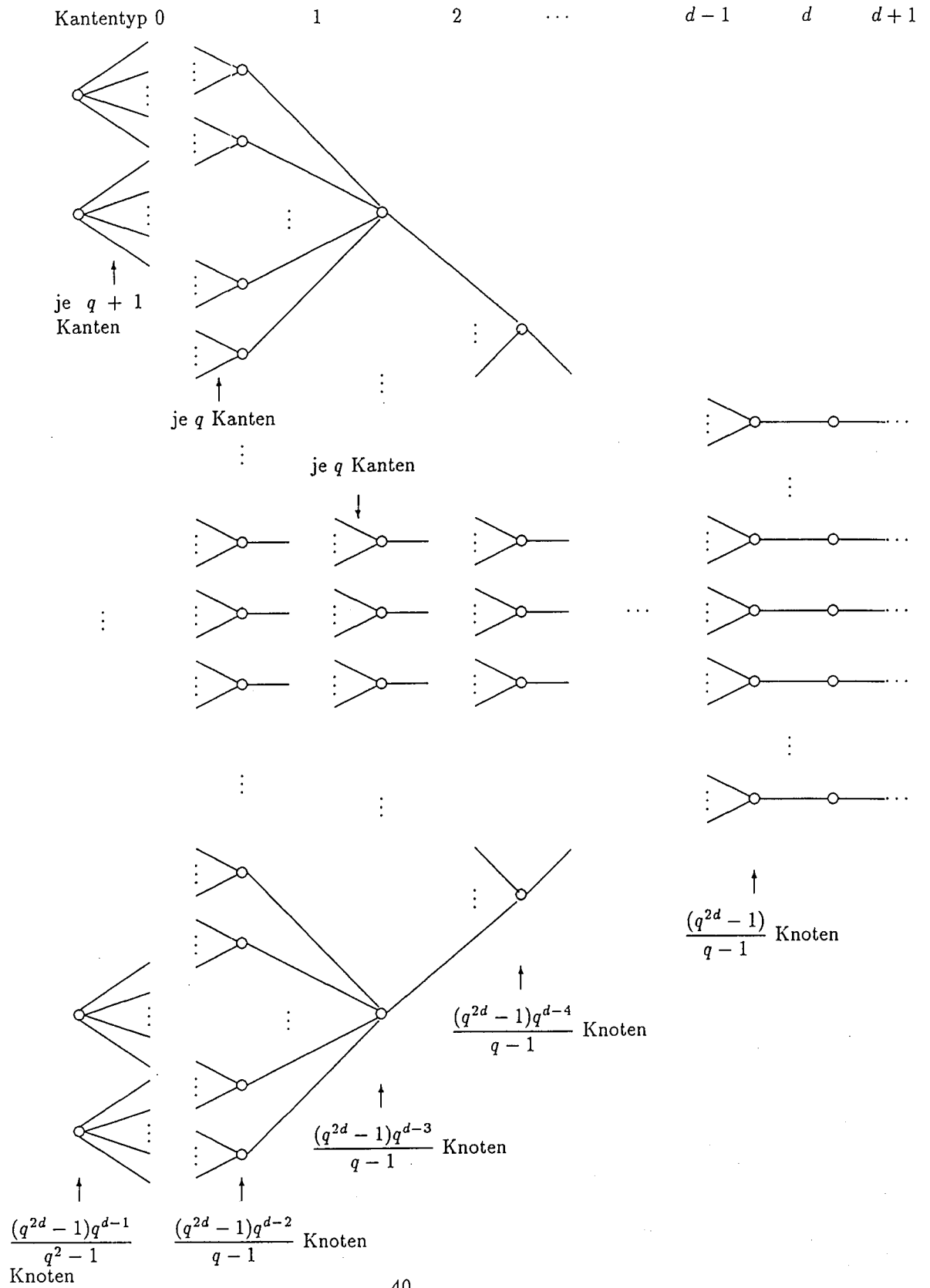
□

Mit Hilfe des Isomorphismus j können wir dieses Skalarprodukt auf $H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$ übertragen: Sind $f, g \in H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$, so definieren wir

$$(f, g)_{H_1} := (f^*, g^*) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{e \in R} \#(\Gamma(n)_e) f(\Gamma(n)e)\overline{g(\Gamma(n)e)}.$$

Auch dieses Skalarprodukt ist natürlich unter der Operation von Γ , und somit auch unter der Operation von G , invariant. Ist nun V ein G -stabiler Unterraum von $H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$ und V^\perp das orthogonale Komplement von V in $H_1(\Gamma(n)\backslash T, \mathbb{C})$, so ist V^\perp wegen der Invarianz des Skalarproduktes unter der Operation von G selbst G -stabil.

Der Graph $\Gamma(n)\setminus T$:



Kapitel 4

Die Darstellungen von $\Gamma/\Gamma(n)$ für irreduzibles n

Es sei $n \in A$ ein irreduzibles Polynom, $d = \deg n$ der Grad von n , $M = A/(n)$ der Körper mit q^d Elementen und $G = \Gamma/\Gamma(n)$. Dabei gelte ferner $q^d \neq 2$. Im Verlauf dieses Kapitels werden wir die irreduziblen Darstellungen der Gruppe G ermitteln. Nach Satz 3.3 gilt

$$SL(2, M) \subset G \subset GL(2, M).$$

Wir können daher die Darstellungstheorie von G weitgehend aus der von $SL(2, M)$ und $GL(2, M)$ erschließen.

Es bezeichnen im weiteren für einen Körper F

- $G(F)$ die Gruppe $GL(2, F)$,
- $S(F)$ die Gruppe $SL(2, F)$,
- $B(F), D(F), U(F), \dots$ die in Kapitel 1, Abschnitt 1.2.1 beschriebenen Untergruppen von $G(F)$.

Weiter seien $B(G), D(G), U(G)$ usw. gerade die entsprechenden Untergruppen von $G(M)$ geschnitten mit G . ε sei ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe M^\times , L bezeichne die quadratische Erweiterung von M , mit der Norm $N : L \rightarrow M$ und ψ einen fixierten additiven Charakter von M^+ . Schließlich sei $l \subseteq L$ die quadratische Erweiterung von k und

$$C(k) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^q \end{pmatrix} \mid a \in l^\times \right\}$$

eine Cartanuntergruppe von $G(l) \subseteq G(L)$.

Die folgenden Lemmata werden sich im Verlauf der Überlegungen als nützlich erweisen:

Lemma 4.1 *Es sei*

$$[N \in k^\times] := \{\alpha \in L : N_M^L(\alpha) \in k^\times\},$$

und

$$[N = 1] := \{\alpha \in L : N_M^L(\alpha) = 1\}.$$

Dann ist $\#[N = 1] = q^d + 1$ und $\#[N \in k^\times] = (q - 1)(q^d + 1)$.

Beweis: Die Gruppe der Automorphismen der Körpererweiterung L/M wird vom Frobeniusautomorphismus $x \mapsto x^{q^d}$ erzeugt und enthält außer diesem nur die identische Abbildung. Die Normabbildung $N_M^L = N : L \rightarrow M$ hat deshalb die Form $N : x \mapsto x^{q^d} \cdot x = x^{q^d+1}$. Die Menge (und multiplikative Gruppe) $[N = 1]$ ist gerade der Kern der Normabbildung eingeschränkt auf L^\times , also gerade die Menge der Nullstellen des Polynoms $X^{q^d+1} - 1$. Es ist deshalb $\#[N = 1] \leq q^d + 1$. Andererseits ist $\text{Im } N|_{L^\times} \subset M^\times$, und daher

$$\#[N = 1] = \#(\text{Ker } N|_{L^\times}) = \frac{\#(L^\times)}{\text{Im } N|_{L^\times}} \geq \frac{\#(L^\times)}{\#(M^\times)} = q^d + 1.$$

Also ist $\#[N = 1] = q^d + 1$. Insbesondere folgt daraus die Surjektivität der Normabbildung. Dann besteht aber das Urbild jedes Elementes von L^\times aus $q^d + 1$ Elementen, und deshalb gilt $\#[N \in k^\times] = (q - 1)(q^d + 1)$. \square

Lemma 4.2 *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.1 ist die Abbildung*

$$\theta : [N \in k^\times] \rightarrow [N = 1], \alpha \mapsto \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

ein Homomorphismus, und es gilt

$$\text{Ker } \theta = \{\alpha \in M : \alpha^2 \in k^\times\} \supseteq k^\times.$$

Ist $\text{Ker } \theta = k^\times$, so ist θ surjektiv, sonst gilt $\#[N = 1] : \text{Im } \theta = 2$.

Beweis: Die Homomorphieeigenschaft ist klar. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{Ker } \theta &= \{\alpha \in [N \in k^\times] : \bar{\alpha} = \alpha\} \\ &= \{\alpha \in [N \in k^\times] \cap M\} \\ &= \{\alpha \in M : N\alpha = \alpha^2 \in k^\times\}. \end{aligned}$$

Sei nun $\text{Ker } \theta = k^\times$. Es ist $\text{Im } \theta \subseteq [N = 1]$ und

$$\#(\text{Im } \theta) = \frac{\#[N \in k^\times]}{\#(\text{Ker } \theta)} = \frac{\#[N = 1](q - 1)}{q - 1} = \#[N = 1],$$

also ist θ surjektiv.

Ist dagegen $\text{Ker } \theta \neq k^\times$, so muß $[\text{Ker } \theta : k^\times] = 2$ gelten, weil $\text{Ker } \theta$ gerade aus den in M enthaltenen Quadratwurzeln der Elemente von k^\times besteht. Daraus folgt

$$\#[N = 1] : \text{Im } \theta = \frac{\#[N = 1]\#(\text{Ker } \theta)}{\#[N \in k^\times]} = 2.$$

\square

Bei der Ermittlung der irreduziblen Darstellungen von G müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1 Entweder $\text{char } k = 2$, oder $\text{char } k$ und $d = \deg n$ sind ungerade.

Fall 2 $\text{char } k \neq 2$, und d ist gerade.

4.1 Der Fall $\text{char } k = 2$ oder $\text{char } k$ und d ungerade

Vorbemerkung: Man beachte, daß in diesem Fall gilt: Ist $x \in M$ und $x^2 \in k$, so liegt schon $x \in k$. Die Abbildung θ aus Lemma 4.2 ist also surjektiv.

4.1.1 Die Konjugationsklassen im Fall 1

Die Konjugationsklassen der Typen c_1 , c_3 und c_4 ermitteln sich wie für $S(M)$ aus denen von $G(M)$ (vgl. Abschnitt 1.3.1, Seite 20ff.). Insbesondere ist $\sigma^G = \sigma^{G(M)}$ für jedes $\sigma \in G$, das in einer Konjugationsklasse eines dieser Typen liegt. Es bleibt zu untersuchen, ob für ein $\sigma = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G$ gilt, daß $\sigma^G = \sigma^{G(M)}$. Durch elementares Rechnen prüft man nach, daß die Gleichung

$$Z_G \left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b, d \in M, d^2 \in k^\times \right\}$$

erfüllt ist. Gemäß der Vorbemerkung ist diese Menge gleich

$$\left\{ \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b \in M, d \in k^\times \right\}.$$

Also ist

$$\#(\sigma^G) = [G : Z_G \left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right)] = \frac{(q^{2d} - 1)q^d(q - 1)}{q^d(q - 1)} = q^{2d} - 1 = \#(\sigma^{G(M)}).$$

Es stimmen also alle Konjugationsklassen in G mit denen in $G(M)$ überein.

Es sind noch die Anzahlen der Konjugationsklassen zu bestimmen. Die Konjugationsklassen vom Typ c_1 oder c_2 entsprechen gerade den Elementen von M , deren Quadrat in k^\times liegt. Nach der Vorbemerkung sind dies gerade die Elemente von k^\times , d.h. es gibt davon $q - 1$. Die Konjugationsklassen des Typs c_3 stehen in Bijektion zu den Paaren (a, b) mit $a, b \in M^\times$, $ab \in k^\times$, $a \neq b$, modulo der Vertauschung von a und b . Ihre Anzahl beträgt daher

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \#(\{(a, b) \in M^\times \times M^\times : ab \in k^\times, a \neq b\}) \\ &= \frac{1}{2} \#(\{(a, a^{-1}d) : a \in M^\times, d \in k^\times, a^2 \neq d\}) \\ &= \frac{1}{2} (\#(\{(a, a^{-1}d) : a \in M^\times, d \in k^\times\}) - (q - 1)) \\ &= \frac{(q^d - 1)(q - 1) - (q - 1)}{2} = \frac{(q^d - 2)(q - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Um schließlich die Anzahl der Konjugationsklassen vom Typ c_4 zu bestimmen, verwenden wir die Gleichheit

$$\{a \in M : Na \in k^\times\} = \{a \in M : a^2 \in k^\times\} = k^\times.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} & \#(\{\alpha \in L \setminus M : N\alpha \in k^\times\}) \\ &= \#(\{\alpha \in L : N\alpha \in k^\times\}) - \#(\{\alpha \in M : N\alpha \in k^\times\}) \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.1}}{=} (q - 1)(q^d + 1) - (q - 1) = q^d(q - 1). \end{aligned}$$

Weil zueinander konjugierte α dieselbe Konjugationsklasse liefern, gibt es also $\frac{q^d(q-1)}{2}$ verschiedene Konjugationsklassen vom Typ c_4 .

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Daten zusammengefaßt:

Klassentyp	Anzahl der Klassen	Elemente in der Klasse
$c_1(a), a \in k^\times$	$q - 1$	1
$c_2(a), a \in k^\times$	$q - 1$	$q^{2d} - 1$
$c_3(a, b), \begin{matrix} a, b \in M^\times \\ a \neq b, ab \in k^\times \end{matrix}$	$\frac{(q-1)(q^d-2)}{2}$	$q^{2d} + q^d$
$c_4(\alpha), \begin{matrix} \alpha \in L \setminus M \\ N\alpha \in k^\times \end{matrix}$	$\frac{q^d(q-1)}{2}$	$q^{2d} - q^d$

4.1.2 Die Darstellungen von G im Fall 1

Ebenso wie die Konjugationsklassen in G mit denen in $G(M)$ übereinstimmen, erhält man die irreduziblen Darstellungen von G auf die einfachste mögliche Weise aus denen der $G(M)$.

Satz 4.3 *Gilt $\text{char } k = 2$, oder sind $\text{char } k$ und d ungerade, so ist für jede irreduzible Darstellung ρ von $G(M)$ die Einschränkung $\text{Res}_G^{G(M)} \rho$ irreduzibel.*

Beweis: Bei Einschränkung auf G können höchstens diejenigen irreduziblen Darstellungen von $G(M)$ zerfallen, deren Einschränkung auf $S(M)$ reduzibel ist. Gilt $\text{char } k = 2$, so bleiben alle Darstellungen von $G(M)$ bei der Einschränkung auf $S(M)$ irreduzibel, und die Aussage des Satzes gilt.

Seien nun $\text{char } k$ und d ungerade. Aus Abschnitt 1.2 folgt, daß höchstens Darstellungen von $G(M)$ von der Form $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ mit μ_2 dem quadratischen Charakter auf M^\times , oder ρ_ν , mit $\nu|_{[N=1]}$ dem quadratischen Charakter auf $[N=1]$ zerfallen können, und zwar in maximal zwei irreduzible Bestandteile.

Bemerkung: An dieser Stelle erhalten wir einen echten Unterschied zur klassischen Situation, in der man mit der Gruppe $S(M)$ arbeiten würde: Weil die Darstellungen der Dimension $q^d - 1$ bei der Einschränkung nach G nicht zerfallen, erhalten wir keine Informationen über die Klassenzahl eines Körpers, wie Hecke sie in [Hec59a] aus den Vielfachheiten der $\frac{q^d-1}{2}$ -dimensionalen Darstellungen in der untersuchten Darstellung bekam.

Sei also ρ eine solche Darstellung von $G(M)$ und $\text{Res}_{S(M)}^{G(M)} \rho = \rho^+ \oplus \rho^-$.

Annahme: $\text{Res}_G^{G(M)} \rho = \tilde{\rho}_1 \oplus \tilde{\rho}_2$.

Dann ist oBdA. $\text{Res}_{S(M)}^G \tilde{\rho}_1 = \rho^+$, d.h. für die zugehörigen Charaktere $\tilde{\chi}_1$ und χ^+ gilt

$$\text{Res}_{S(M)}^G \tilde{\chi}_1 = \chi^+.$$

Insbesondere folgt

$$\tilde{\chi}_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \chi^+ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \chi^+ \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\chi}_1 \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie man der Charaktertafel von $S(M)$ entnehmen kann. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, daß $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^G = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^G = c_2(1)$ und $\tilde{\chi}_1$ auf Konjugationsklassen von G konstant ist.

Somit muß $\text{Res}_G^{G(M)} \rho$ irreduzibel sein. \square

Als nächstes werden wir die Anzahlen der inäquivalenten Darstellungen verschiedener Dimensionen bestimmen.

• $\text{Res}_G^{G(M)} \mu_1 \circ \det$: Da die Darstellungen $\text{Res}_G^{G(M)} \mu_1 \circ \det$ eindeutig durch $\mu_1|_{k^\times}$ charakterisiert sind, gibt es davon $(q-1)$, die mit $\tilde{\mu}_1 \circ \det$, $\tilde{\mu}_1$ Charakter von k^\times , bezeichnet werden.

• $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_{(\mu_1, 1)}$: Auch hier ist der zugehörige Charakter durch $\mu_1|_{k^\times}$ bestimmt. Es gibt also $(q-1)$ inäquivalente irreduzible Darstellungen der Dimension q^d von G . Wählt man zu jedem Charakter $\tilde{\mu}_1$ von k^\times eine Fortsetzung μ_1 auf M^\times , so liefern die

$$\rho_{(\tilde{\mu}_1, 1)} := \text{Res}_G^{G(M)} \rho_{(\mu_1, 1)}$$

diese paarweise inäquivalenten Darstellungen der Dimension q^d . Ihre Charaktere seien mit $\chi_{(\tilde{\mu}_1, 1)}$ bezeichnet.

• $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$, $\mu_2 \neq 1$: In diesem Fall gilt die Äquivalenz:

$$\text{Res}_G^{G(M)} \chi_{(\mu_1, \mu_2)} = \text{Res}_G^{G(M)} \chi_{(\mu'_1, \mu'_2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{entweder } \mu_1|_{k^\times} = \mu'_1|_{k^\times} \text{ und } \mu_2 = \mu'_2 \\ \text{oder } \mu_1|_{k^\times} = (\mu'_1 \mu'_2)|_{k^\times} \text{ und } \mu_2 = \mu'_2^{-1}. \end{cases}$$

Wählt man wie eben zu jedem Charakter $\tilde{\mu}_1$ von k^\times eine Fortsetzung μ_1 auf M^\times , so erhält man $(q-1)(q^d-2)$ Darstellungen

$$\rho_{(\tilde{\mu}_1, \mu_2)} := \text{Res}_G^{G(M)} \rho_{(\mu_1, \mu_2)},$$

von denen jeweils $\rho_{(\tilde{\mu}_1, \mu_2)}$ nur zur Darstellung $\rho_{(\tilde{\mu}_1 \cdot (\mu_2|_{k^\times}), \mu_2^{-1})}$ äquivalent ist. Nun bleibt noch zu prüfen, ob der Fall $(\tilde{\mu}_1, \mu_2) = (\tilde{\mu}_1 \cdot (\mu_2|_{k^\times}), \mu_2^{-1})$ auftreten kann. Es gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{\mu}_1, \mu_2) &= (\tilde{\mu}_1 \cdot (\mu_2|_{k^\times}), \mu_2^{-1}) \\ \Leftrightarrow \mu_2^2 &= 1 \text{ und } \mu_2|_{k^\times} = 1. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist aber $\mu_2 \neq 1$. Für $\text{char } k = 2$ kann kein Charakter von M^\times der Ordnung zwei existieren, und es gilt immer $(\tilde{\mu}_1, \mu_2) \neq (\tilde{\mu}_1 \cdot (\mu_2|_{k^\times}), \mu_2^{-1})$. Sind dagegen $\text{char } k$ und d ungerade, so ist der quadratische Charakter auf M^\times der einzige Charakter der Ordnung zwei. Dieser ist aber auf k^\times nichttrivial, da $(M^\times)^2 \cap k^\times = (k^\times)^2$ gilt. Somit ist in jedem Fall $(\tilde{\mu}_1, \mu_2) \neq (\tilde{\mu}_1 \cdot (\mu_2|_{k^\times}), \mu_2^{-1})$, und wir erhalten $\frac{(q-1)(q^d-2)}{2}$ inäquivalente irreduzible Darstellungen der Dimension (q^d+1) von G .

• $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_\nu$, $\nu|_{[N=1]} \neq 1$: Der Charaktertafel von $G(M)$ ist zu entnehmen, daß $\text{Res}_G^{G(M)} \chi_\nu = \text{Res}_G^{G(M)} \chi_{\nu'}$ für zwei unzerlegbare Charaktere ν, ν' von L^\times genau dann gilt, wenn

$$\nu|_{[N \in k^\times]} = \nu'|_{[N \in k^\times]}$$

oder

$$\nu|_{[N \in k^\times]} = \overline{\nu'}|_{[N \in k^\times]}.$$

Die inäquivalenten Darstellungen der Form $\rho_{\tilde{\nu}} := \text{Res}_G^{G(M)} \rho_\nu$ mit $\tilde{\nu} = \nu|_{[N \in k^\times]}$ entsprechen also gerade den Charakteren von $[N \in k^\times]$, die nicht über $[N=1]$ faktorisieren, modulo dem Übergang zum konjugierten Charakter. Wir müssen deshalb prüfen, ob die Situation

$$\nu|_{[N \in k^\times]} = \overline{\tilde{\nu}}|_{[N \in k^\times]}$$

auftritt.

Angenommen, ein solcher Charakter ν von M^\times existiert. Dann ist für $\alpha \in [N \in k^\times]$

$$\frac{\bar{\nu}(\alpha)}{\nu(\alpha)} = \nu\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right) = 1.$$

Nach Lemma 4.2 ist dann $\nu|_{[N=1]} = 1$, weil die dort definierte Abbildung θ surjektiv ist. Also ist ν zerlegbar, was im Widerspruch zur Wahl von ν steht.

Es gibt

$$\frac{\#[N \in k^\times] - \#[N \in k^\times]}{\#[N = 1]} = (q^d + 1)(q - 1) - (q - 1) = q^d(q - 1)$$

Charaktere von $[N \in k^\times]$, die nicht über die Norm faktorisieren, also $\frac{q^d(q-1)}{2}$ inäquivalente irreduzible Darstellungen der Dimension $(q^d - 1)$ von G .

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 4.4 *Ist char k gerade, oder sind char k und d ungerade, so ist jede irreduzible Darstellung von G zu einer der folgenden äquivalent:*

- (i) $(q - 1)$ 1-dimensionale Darstellungen vom Typ $\mu_1 \circ \det$, μ_1 Charakter von k^\times ,
- (ii) $(q - 1)$ q^d -dimensionale Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, 1)}$ mit Charakteren μ_1 von k^\times ,
- (iii) $\frac{(q-1)(q^d-2)}{2}$ $(q^d + 1)$ -dimensionale Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$, wobei μ_1 ein Charakter von k^\times und $1 \neq \mu_2$ ein Charakter von M^\times ist,
- (iv) $\frac{(q-1)q^d}{2}$ $(q^d - 1)$ -dimensionale Darstellungen der Form ρ_ν mit Charakteren ν von $[N \in k^\times]$, für die $\nu|_{[N=1]} \neq 1$.

Die Charaktertafel von G im Fall 1

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & \text{Tr}\alpha \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(a)^2$	$\mu_1(ad)$	$\mu_1(N\alpha)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$q^d \mu_1(a)^2$	0	$\mu_1(ad)$	$-\mu_1(N\alpha)$
$\chi_\mu = \chi_{(\mu_1, \mu_2)}$, $\mu_2 \neq 1$	$(q^d + 1)\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	0
$\chi_\nu, \nu \neq \bar{\nu}$	$(q^d - 1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$

4.2 Der Fall char $k \neq 2$ und d gerade

Vorbemerkung: In diesem Fall gilt $(M^\times)^2 \cap k^\times = k^\times \neq (k^\times)^2$, denn M enthält die quadratische Erweiterung von k .

4.2.1 Die Konjugationsklassen im Fall 2

Wir machen uns zunutze, daß wegen der Vorbemerkung die Gruppe G das Erzeugnis von $S(M)$ und dem Zentrum $Z(G)$ ist. Deshalb gilt nämlich für jedes $\sigma \in G$

$$\sigma^G = \sigma^{S(M)} \subseteq \sigma^{G(M)}.$$

Zerlegen wir weiter $\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bar{\sigma}$ mit $\bar{\sigma} \in S(M)$, so folgt

$$\sigma^G = \sigma^{S(M)} = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bar{\sigma} \right)^{S(M)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bar{\sigma}^{S(M)}.$$

Liegt $\bar{\sigma}$ in einer Konjugationsklasse des Typs c_1, c_3 oder c_4 von $S(M)$, so liegt es in einer Konjugationsklasse desselben Typs von $G(M)$. Aus Anzahlgründen gilt dann $\sigma^G = \sigma^{G(M)}$, und wir verwenden die Bezeichnungen für die Konjugationsklassen aus $G(M)$.

Ist aber $\bar{\sigma} \in \begin{pmatrix} \bar{a} & 1 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}^{S(M)}$ oder $\bar{\sigma} \in \begin{pmatrix} \bar{a} & \varepsilon \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}^{S(M)}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma^{G(M)} &= \begin{pmatrix} a\bar{a} & 1 \\ 0 & a\bar{a} \end{pmatrix}^{G(M)} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & 1 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}^{S(M)} \dot{\cup} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \varepsilon \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}^{S(M)} \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{a} & a \\ 0 & a\bar{a} \end{pmatrix}^G \dot{\cup} \begin{pmatrix} a\bar{a} & \varepsilon a \\ 0 & a\bar{a} \end{pmatrix}^G. \end{aligned}$$

Aus der entsprechenden Aussage für $S(M)$ (vgl. Seite 20) folgern wir die Äquivalenz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^G = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}^G \iff bc \in (M^\times)^2$$

und setzen

$$c_2(a, 1) := \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^G$$

und $c_2(a, \varepsilon) := \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}^G.$

Die Anzahlen der verschiedenen Konjugationsklassen der einzelnen Typen erhält man wie im Fall 1, aber unter Berücksichtigung der Tatsache, daß

$$\#\{a \in M : Na \in k^\times\} = \#\{a \in M : a^2 \in k^\times\} = 2(q-1).$$

Sie sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Klassentyp	Anzahl der Klassen	Elemente in der Klasse
$c_1(a), a \in M, a^2 \in k^\times$	$2(q-1)$	1
$c_2(a, 1), a \in M, a^2 \in k^\times$	$2(q-1)$	$\frac{q^{2d}-1}{2}$
$c_2(a, \varepsilon), a \in M, a^2 \in k^\times$	$2(q-1)$	$\frac{q^{2d}-1}{2}$
$c_3(a, b), \begin{matrix} a, b \in M^\times \\ a \neq b, ab \in k^\times \end{matrix}$	$\frac{(q-1)(q^d-3)}{2}$	$q^{2d} + q^d$
$c_4(\alpha), \begin{matrix} \alpha \in L \setminus M \\ N\alpha \in k^\times \end{matrix}$	$\frac{(q^d-1)(q-1)}{2}$	$q^{2d} - q^d$

4.2.2 Die Darstellungen von G im Fall 2

Der Zerfall der Konjugationsklassen $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{G(M)}$ in je zwei Konjugationsklassen in G spiegelt sich in der Darstellungstheorie wider.

Satz 4.5 *Es sei $\text{char } k$ ungerade und d gerade. Dann gilt:*

- (i) *Ist μ_1 irgendein Charakter von M^\times und μ_2 der quadratische Charakter von M^\times , so zerfällt die Darstellung $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ in zwei irreduzible Bestandteile.*
- (ii) *Ist ν ein Charakter von L^\times und $\nu|_{[N=1]}$ der quadratische Charakter auf $[N=1]$, so zerfällt die Darstellung $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_\nu$ in zwei irreduzible Bestandteile.*
- (iii) *Alle übrigen irreduziblen Darstellungen von $G(M)$ bleiben bei Einschränkung auf G irreduzibel.*

Beweis: Wir werden (i) und (ii) gemeinsam beweisen. Es sei dafür $\rho \in \{\rho_{(\mu_1, \mu_2)}, \rho_\nu\}$ eine Darstellung wie in (i) oder (ii). χ sei der zugehörige Charakter. Aus Kapitel 1.1 Abschnitt 1.3 folgt

$$\text{Res}_S^{G(M)} \rho = \rho^+ \oplus \rho^-.$$

Die zugehörigen Charaktere seien mit χ^+ und χ^- bezeichnet. Insbesondere wissen wir daher, daß $\text{Res}_G^{G(M)} \rho$ höchstens zwei irreduzible Bestandteile besitzen kann. Für die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}(\chi^+)$ in G gilt

$$\mathfrak{T}(\chi^+) = \{\sigma \in G : (\chi^+)^\sigma = \chi^+\} = G,$$

weil $\tau^G = \tau^S$ gilt für $\tau \in G$, und χ^+ auf den Konjugationsklassen von $S(M)$ konstant ist. Es sei jetzt $\tilde{\rho}$ die irreduzible Komponente von $\text{Res}_G^{G(M)} \rho$, für die

$$\langle \text{Res}_{S(M)}^G \tilde{\chi}, \chi^+ \rangle_{S(M)} > 0.$$

Dann muß schon $\langle \text{Res}_{S(M)}^G \tilde{\chi}, \chi^+ \rangle_{S(M)} = 1$ gelten, weil $\langle \text{Res}_{S(M)}^{G(M)} \chi, \chi^+ \rangle_{S(M)} = 1$ beträgt. Aus Satz 1.6 folgt somit

$$\text{Res}_S^G \tilde{\rho} = \rho^+,$$

d.h. $\dim \bar{\rho} = \frac{\dim \rho}{2}$. Also ist $\text{Res}_G^{G(M)} \rho$ reduzibel, und die Aussagen (i) und (ii) sind gezeigt.

Die Aussage von (iii) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß alle nicht unter (i) und (ii) betrachteten Darstellungen sogar bei der Einschränkung auf $S(M)$ irreduzibel bleiben. \square

Wir bezeichnen nun mit $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}^+$ und $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}^-$ bzw. ρ_ν^+ und ρ_ν^- die Bestandteile von $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$ bzw. $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_\nu$. $\chi_{(\mu_1, \mu_2)}^\pm$ und χ_ν^\pm seien die zugehörigen Charaktere. Ihre Werte wollen wir nun ermitteln.

Wir verwenden dafür wieder, daß wir jedes Element $\sigma \in G$ als $\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bar{\sigma}$ mit $\bar{\sigma} \in S(M)$ schreiben können. Aus den Beschreibungen der Darstellungen der $G(M)$ und der $S(M)$ geht hervor, daß sowohl vermöge $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}^\pm = \rho_\mu^\pm$ als auch vermöge ρ_ν^\pm die Elemente von $Z(G) \subset Z(M)$ auf den entsprechenden Darstellungsräumen durch Skalarmultiplikation wirken. Genauer gilt

$$\rho_\mu^\pm \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\rho_\nu^\pm \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \nu(a) \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für $\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bar{\sigma}$ mit $\bar{\sigma} \in S(M)$

$$\begin{aligned} \chi_\mu^\pm(\sigma) &= \text{Tr}(\rho_\mu^\pm \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \bar{\sigma} \right)) \\ &= \mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \chi_\mu^\pm(\bar{\sigma}) \end{aligned}$$

und ebenso

$$\chi_\nu^\pm(\sigma) = \nu(a) \chi_\nu^\pm(\bar{\sigma}).$$

Die Werte von χ_μ^\pm und χ_ν^\pm auf $S(M)$ sind uns aber bekannt, d.h. wir können alle Werte von χ_μ^\pm und χ_ν^\pm nun ermitteln.

Wir werden dies exemplarisch für die Fälle $\sigma = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & \text{Tr}\alpha \end{pmatrix}$ durchführen.

Ist $\sigma = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, so können wir $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wählen. Aber $\bar{\sigma}$ liegt in $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^G$ oder in $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^G$, je nachdem, ob a ein Quadrat ist oder nicht. Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_\mu^\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1 \pm \tau(\mu_2)}{2}, \\ \chi_\mu^\pm \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1 \mp \tau(\mu_2)}{2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\chi_\mu^\pm(\sigma) = \mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \frac{1 \pm \mu_2(a) \tau(\mu_2)}{2}.$$

Analog folgt

$$\chi_{\nu}^{\pm}(\sigma) = -\nu(a) \frac{1 \mp \mu_2(a)\tau(\mu_2)}{2}.$$

Ist andererseits $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$ mit $N\alpha \in k^{\times}$, so sei $a \in M^{\times}$ gewählt mit $a^2 = N\alpha$, und $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ \frac{1}{a} & \frac{Tr\alpha}{a} \end{pmatrix}$. Dann ist $\sigma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \tilde{\sigma}$. Das charakteristische Polynom von $\tilde{\sigma}$ ist $X^2 - \frac{Tr\alpha}{a}X + 1$, und $\frac{a}{a}$ ist eine Nullstelle davon. Es folgt, daß $\tilde{\sigma} \in \left(\begin{pmatrix} 0 & -N(\frac{\alpha}{a}) \\ 1 & Tr(\frac{\alpha}{a}) \end{pmatrix} \right)^G$ ist, und

$$\chi_{\nu}^{\pm} \left(\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix} \right) = \nu(a) \chi_{\nu}^{\pm} \left(\begin{pmatrix} 0 & -N(\frac{\alpha}{a}) \\ 1 & Tr(\frac{\alpha}{a}) \end{pmatrix} \right) = -\nu(a) \nu \left(\frac{\alpha}{a} \right) = -\nu(\alpha)$$

sowie

$$\chi_{\mu}^{\pm} \left(\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix} \right) = \nu(a) 0 = 0.$$

Auf diese Weise kann die gesamte Charaktertafel von G aus denen von $S(M)$ und $G(M)$ zusammengebastelt werden. Sie ist am Ende dieses Abschnitts zu finden. Es bleiben noch die Anzahlen der Darstellungen der einzelnen Typen zu bestimmen. Die Überlegungen sind dabei identisch zu denen im Fall 1, sofern es sich um die Darstellungen handelt, die bei Einschränkung irreduzibel bleiben. Wir können daher die dort erzielten Ergebnisse für die eindimensionalen und q^d -dimensionalen Darstellungen übernehmen. Betrachten wir nun die übrigen Darstellungen:

- $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_{(\mu_1, \mu_2)}, \mu_2^2 \neq 1$: Wir können dieselben Argumente verwenden wie in Fall 1. Die irreduziblen Darstellungen der Dimension $q^d + 1$ entstehen also aus Paaren von Charakteren (μ_1, μ_2) , wobei μ_1 ein Charakter von k^{\times} und μ_2 ein Charakter von M^{\times} ist. Dabei liefern genau die Paare (μ_1, μ_2) und $(\mu_1\mu_2|_{k^{\times}}, \mu_2^{-1})$ äquivalente Darstellungen. Weil μ_2 nicht der quadratische Charakter von M^{\times} sein kann, sind dies immer verschiedene Paare, und wir erhalten $\frac{(q-1)(q^d-3)}{2}$ inäquivalente irreduzible Darstellungen der Dimension $q^d + 1$ von G .

- $\rho_{\mu}^{\pm} = \rho_{(\mu_1, \mu_2)}^{\pm}$: Anhand der ermittelten Werte für den zugehörigen Charakter stellen wir fest, daß die Darstellung ρ_{μ}^+ zur Darstellung $\rho_{\mu'}^+$ genau dann äquivalent ist, wenn die zugehörigen Charaktere μ_1 und μ_1' auf k^{\times} übereinstimmen. Dasselbe gilt für die Darstellungen ρ_{μ}^- und $\rho_{\mu'}^-$. Wir müssen noch prüfen, ob die Darstellung ρ_{μ}^+ äquivalent zu einer Darstellung $\rho_{\mu'}^-$ sein kann. Das ist aber nicht der Fall, da

$$\chi_{\mu}^+ \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1+\tau}{2} \neq \frac{1-\tau}{2} = \chi_{\mu'}^- \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

gilt. Folglich erhalten wir je $q-1$ inäquivalente Darstellungen vom Typ ρ_{μ}^+ und ρ_{μ}^- .

- $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_{\nu}, \nu^2|_{[N=1]} \neq 1$: Wie im vorher untersuchten Fall ergibt sich, daß die Äquivalenzklasse der Darstellung $\text{Res}_G^{G(M)} \rho_{\nu}$ nur von der Einschränkung $\nu|_{[N \in k^{\times}]}$ abhängt, und daß zueinander konjugierte Charaktere äquivalente Darstellungen liefern. Es ist also zu überprüfen, ob es einen Charakter ν von L^{\times} mit $\nu^2|_{[N=1]} \neq 1$ gibt, so daß $\nu|_{[N \in k^{\times}]} = \bar{\nu}|_{[N \in k^{\times}]}$ gilt. In diesem Fall ergäbe sich für alle $\alpha \in [N \in k^{\times}]$ die Gleichheit

$$\frac{\bar{\nu}(\alpha)}{\nu(\alpha)} = \nu \left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \right) = 1.$$

Mit Lemma 4.2 folgern wir, daß $\nu^2|_{[N=1]} = 1$ sein müßte, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Schließlich gibt es genau so viele Charaktere von $[N \in k^\times]$, deren Einschränkung auf $[N = 1]$ der quadratische Charakter dieser Untergruppe ist, wie es Charaktere auf $[N \in k^\times]$ gibt, deren Einschränkung auf $[N = 1]$ trivial ist, nämlich $\frac{\#([N \in k^\times])}{\#([N=1])} = q - 1$. Folglich besitzt G $\frac{(q^d-1)(q-1)}{2}$ irreduzible Darstellungen der Dimension $q^d - 1$.

• ρ_ν^\pm : Nach Konstruktion dieser Darstellungen ist uns bekannt, daß sie zu Charakteren ν von L^\times gehören, deren Einschränkung auf $[N = 1]$ der quadratische Charakter dieser Gruppe ist. Weiter können wir aus der Charaktertafel schließen, daß die Äquivalenzklasse der Darstellungen bereits durch $\nu|_{[N \in k^\times]}$ bestimmt wird. Es stellt sich noch die Frage, ob eine Darstellung ρ_ν^+ zu einer Darstellung ρ_ν^- äquivalent sein kann. Aus den Werten der zugehörigen Charaktere auf dem Element $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir unmittelbar, daß dies nicht möglich ist. Insgesamt folgt also, daß G zu je einem Charakter ν von $[N \in k^\times]$ mit $\nu^2|_{[N=1]} = 1$, $\nu|_{[N=1]} \neq 1$ zwei zueinander inäquivalente Darstellungen ρ_ν^+ und ρ_ν^- besitzt, d.h. zweimal $q - 1$ irreduzible Darstellungen der Dimension $\frac{q^d-1}{2}$.

Wir fassen diese Ergebnisse wieder in einem Satz zusammen:

Satz 4.6 *Ist char k ungerade und ist d gerade, so besitzt G die folgenden irreduziblen Darstellungen:*

- (i) $(q - 1)$ 1-dimensionale Darstellungen vom Typ $\mu_1 \circ \det$ mit Charakteren μ_1 von k^\times ,
- (ii) $(q - 1)$ q^d -dimensionale Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, 1)}$, ebenfalls mit Charakteren μ_1 von k^\times ,
- (iii) $\frac{(q-1)(q^d-3)}{2}$ $(q^d + 1)$ -dimensionale Darstellungen der Form $\rho_{(\mu_1, \mu_2)}$, wobei μ_1 ein Charakter von k^\times und μ_2 ein Charakter von M^\times mit $\mu_2^2 \neq 1$ ist,
- (iv) je $(q - 1)$ Darstellungen der Typen ρ_μ^+ und ρ_μ^- der Dimension $\frac{q^d+1}{2}$ mit Charakteren μ von $D(G)$, wobei der zugehörige Charakter μ_2 der quadratische Charakter von M^\times ist,
- (v) $\frac{(q-1)(q^d-1)}{2}$ $(q^d - 1)$ -dimensionale Darstellungen der Form ρ_ν zu Charakteren ν von $[N \in k^\times]$, für die $\nu^2|_{[N=1]} \neq 1$ gilt,
- (vi) je $(q - 1)$ Darstellungen der Typen ρ_ν^+ und ρ_ν^- der Dimension $\frac{q^d-1}{2}$ zu Charakteren ν von $[N \in k^\times]$, deren Einschränkung auf $[N = 1]$ den quadratischen Charakter dieser Gruppe liefert.

Die Charaktertafel von G im Fall 2

Die auftretende Gaußsche Summe τ ist die mit dem quadratischen Charakter von M^\times gebildete.

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(a^2)$	$\mu_1(a^2)$	$\mu_1(a^2)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$q^d \mu_1(a^2)$	0	0
$\chi_\mu, \mu^2 _{E(G)} \neq 1$	$(q^d + 1)\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
$\chi_\mu^\pm, \begin{matrix} \mu_2^2 \neq 1 \\ \mu_2^2 = 1 \end{matrix}$	$\frac{q^d+1}{2}\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \frac{1 \pm \mu_2(a)\tau}{2}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \frac{1 \mp \mu_2(a)\tau}{2}$
$\chi_\nu, \nu^2 _{[N=1]} \neq 1$	$(q^d - 1)\nu(a)$	$-\nu(a)$	$-\nu(a)$
$\chi_\nu^\pm, \begin{matrix} \nu _{[N=1]} \neq 1 \\ \nu^2 _{[N=1]} = 1 \end{matrix}$	$\frac{q^d-1}{2}\nu(a)$	$-\nu(a) \frac{1 \mp \mu_2(a)\tau}{2}$	$-\nu(a) \frac{1 \pm \mu_2(a)\tau}{2}$

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$
$\mu_1 \circ \det$	$\mu_1(ad)$	$\mu_1(N\alpha)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$\mu_1(ad)$	$-\mu_1(N\alpha)$
$\chi_\mu, \mu_2^2 \neq 1$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	0
$\chi_\mu^\pm, \begin{matrix} \mu_2 \neq 1 \\ \mu_2^2 = 1 \end{matrix}$	$\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	0
$\chi_\nu, \nu^2 _{[N=1]} \neq 1$	0	$-(\nu(\alpha) + \nu(\bar{\alpha}))$
$\chi_\nu^\pm, \begin{matrix} \nu _{[N=1]} \neq 1 \\ \nu^2 _{[N=1]} = 1 \end{matrix}$	0	$-\nu(\alpha)$

4.3 Die Darstellungen von $G/Z(k)$

Aus den letzten beiden Abschnitten kennen wir alle irreduziblen Darstellungen der Gruppe $G = \Gamma/\Gamma(n)$ für ein irreduzibles Polynom $n \in A$. Da wir aber eine spezielle Darstellung von G auf $H_1(\Gamma(n) \backslash T, \mathbb{C})$ untersuchen wollen, von der wir bereits wissen, daß die Elemente von $Z(k)$ trivial operieren, sind für die weiteren Überlegungen nur diejenigen Darstellungen von G von Interesse, bei denen $Z(k)$ trivial operiert. Anhand der Beschreibungen der Darstellungen von G kann leicht ermittelt werden, um welche Darstellungen es sich dabei handelt.

Bemerkung: Man beachte, daß im Fall 2 $Z(k) \neq Z(G)$ gilt. Das Zentrum $Z(G)$ von G muß also keineswegs trivial operieren.

Satz 4.7 Die irreduziblen Darstellungen von $G/Z(k)$ sind wie folgt gegeben:

- (i) die Darstellungen von G vom Typ $\mu_1 \circ \det$, für die $\mu_1^2 = 1$,
- (ii) die Darstellungen von G vom Typ $\rho_{(\mu_1, 1)}$, für die $\mu_1^2 = 1$,
- (iii) die Darstellungen von G vom Typ $\rho_\mu = \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$, für die $\mu|_{Z(k)} = 1$,
- (iv) die Darstellungen von G vom Typ $\rho_\mu^\pm = \rho_{(\mu_1, \mu_2)}^\pm$, für die $\mu|_{Z(k)} = 1$,
- (v) die Darstellungen von G vom Typ ρ_ν , für die $\nu|_{k^\times} = 1$, und
- (vi) die Darstellungen von G vom Typ ρ_ν^\pm , für die $\nu|_{k^\times} = 1$.

Beweis: (i) und (ii): Ein Element $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Z(k)$ wirkt bei den Darstellungen dieser Typen gerade als Multiplikation mit $\mu_1(a^2)$. Die Operation von $Z(k)$ ist also genau dann trivial, wenn $\mu_1^2 = 1$ gilt.

(iii) und (iv): Bei irreduziblen Darstellungen der Dimensionen $q^d + 1$ und $\frac{q^d + 1}{2}$ operiert $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ als Skalarmultiplikation mit $\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$; damit also $\rho_\mu|_{Z(k)}$ bzw. $\rho_\mu^\pm|_{Z(k)}$ trivial ist, muß $\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = 1$ sein für $a \in k^\times$.

(v) und (vi): Vermöge der $(q^d - 1)$ - und der $\frac{q^d - 1}{2}$ -dimensionalen irreduziblen Darstellungen von G operiert ein Element $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ durch Multiplikation mit $\nu(a)$. Daher muß $\nu|_{k^\times}$ trivial sein. \square

Durch Abzählen der Charaktere, die die jeweiligen Bedingungen erfüllen, erhalten wir die Anzahlen der irreduziblen Darstellungen von $G/Z(k)$ wie in den folgenden Tabellen zusammengefaßt:

Fall 1.a): $\text{char } k = 2$

dim	1	q^d	$q^d + 1$	$q^d - 1$
Anzahl	1	1	$\frac{q^d - 2}{2}$	$\frac{q^d}{2}$

Fall 1.b): q und d ungerade

dim	1	q^d	$q^d + 1$	$q^d - 1$
Anzahl	2	2	$\frac{q^d - 3}{2}$	$\frac{q^d - 1}{2}$

Fall 2: $\text{char } k \neq 2$ und d gerade

dim	1	q^d	$q^d + 1$	$\frac{q^d + 1}{2}$	$q^d - 1$	$\frac{q^d - 1}{2}$
Anzahl	2	2	$\frac{q^d - 5}{2}$	4	$\frac{q^d - 1}{2}$	0

Bei der Berechnung der Anzahlen bereiten nur im Fall 2 die Dimensionen $q^d - 1$ und $\frac{q^d - 1}{2}$ Probleme. In dieser Situation findet das folgende Lemma Verwendung.

Lemma 4.8 *Ist $\nu|_{[N=1]}$ der quadratische Charakter auf $[N = 1]$, und ist weiter μ_2 der quadratische Charakter auf M^\times , so gilt:*

$$\mu_2(-1)\nu(-1) = -1.$$

Beweis: [Tan67, Seite: 67, Lemma 1] □

Aus dem Lemma folgt, daß für $\text{char } k \neq 2$ und gerades d kein Charakter ν von $[N \in k^\times]$ existieren kann, für den $\nu|_{[N=1]}$ der quadratische Charakter ist und gleichzeitig $\nu|_{k^\times} = 1$ gilt, denn es ist $k^\times \subset (M^\times)^2$, und daher $\nu(-1) = -1$. Also kann es keine irreduziblen Darstellungen der Dimension $\frac{q^d - 1}{2}$ von $G/Z(k)$ geben. Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen der Dimension $q^d - 1$ beträgt deshalb

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\#(\{\nu : \nu \text{ Charakter von } [N \in k^\times]/k^\times\}) \right. \\ & \quad \left. - \#(\{\nu : \nu \text{ Charakter von } [N \in k^\times]/(k^\times \cdot [N = 1])\}) \right) \\ & = \frac{1}{2}((q^d + 1) - 2) = \frac{q^d - 1}{2}. \end{aligned}$$

Kapitel 5

Die Zerlegung der Darstellung auf $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$

In diesem Kapitel soll die Darstellung ρ von $G = \Gamma/\Gamma(n)$ auf $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$, die durch die natürliche Operation von G auf $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$ induziert wird, in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt werden.

5.1 Die Zerlegung von ρ anhand der Kantentypen

Es sei zunächst $\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}$ der endliche Graph, den man aus $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$ durch Abschneiden der Spitzen erhält, also der Untergraph von $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$ mit

$$V(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}) = \bigcup_{i=0}^{d-1} V_i,$$
$$E^+(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}) = \bigcup_{i=0}^{d-2} E_i.$$

Definition 5.1 Für einen endlichen Graphen X sei

$$C_0(X) := \{f_V \mid f_V : V(X) \rightarrow \mathbb{C} \text{ Funktion}\}$$

der Vektorraum der \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf $V(X)$ und

$$C_1(X) := \{f_E \mid f_E : E(X) \rightarrow \mathbb{C} \text{ alternierende Funktion}\}$$

der Vektorraum der alternierenden \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf $E(X)$.

Ist eine Orientierung $E^+(X)$ gegeben, so ist der Raum $C_1(X)$ isomorph zum Vektorraum aller \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf $E^+(X)$.

Wir definieren ferner eine Abbildung $d : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$ durch

$$(df_E)(v) = \sum_{t(e)=v} f_E(e)$$

für $v \in V(X)$, und eine Abbildung $\text{deg} : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\text{deg } f_V = \sum_{v \in V(X)} f_V(v).$$

Beide Abbildungen sind offensichtlich Vektorraumhomomorphismen.

Wählen wir für X den endlichen Graphen $\widehat{\Gamma(n)\setminus T}$, auf dem die Operation von $\tau \in G$ durch

$$\tau[\sigma]_i = [\sigma\tau^{-1}]_i \quad \text{für } [\sigma]_i \in V(X),$$

bzw. durch

$$\tau[\sigma]_{i,i+1} = [\sigma\tau^{-1}]_{i,i+1} \quad \text{für } [\sigma]_{i,i+1} \in E^+(X)$$

gegeben ist, so sind $C_0(X)$ und $C_1(X)$ Darstellungsräume zu Darstellungen ρ_V und ρ_E von G , die wir folgendermaßen definieren: Für $\tau \in G$, $f_V \in C_0(X)$, $f_E \in C_1(X)$, $v \in V(X)$ und $e \in E^+(X)$ sei

$$\rho_V(\tau)(f_V)(v) = f_V(\tau^{-1}v)$$

und

$$\rho_E(\tau)(f_E)(e) = f_E(\tau^{-1}e).$$

Die Charaktere der Darstellungen ρ_V und ρ_E seien mit χ_V bzw. χ_E bezeichnet. Aus der disjunkten Zerlegung der Knoten- und Kantenmenge von $\widehat{\Gamma(n)\setminus T}$ in die Knoten- bzw. Kantenmengen der verschiedenen Typen können wir eine Zerlegung der Räume $C_0(\widehat{\Gamma(n)\setminus T})$ und $C_1(\widehat{\Gamma(n)\setminus T})$ ableiten. Wir setzen nämlich für $-1 \leq i \leq d-2$

$$C_0^{(i)} := \{f_V \in C_0(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}) : \text{supp } f_V \subseteq V_{i+1}\}$$

und für $0 \leq i \leq d-1$

$$C_1^{(i)} := \{f_E \in C_1(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}) : \text{supp } f_E \subseteq E_i\}.$$

Die so definierten Mengen sind sicher Vektorräume. Außerdem sind sie G -stabil, weil $\text{Typ}(\sigma v) = \text{Typ}(v)$ und $\text{Typ}(\sigma e) = \text{Typ}(e)$ gilt für $\sigma \in G$, $v \in V(\widehat{\Gamma(n)\setminus T})$ und $e \in E^+(\widehat{\Gamma(n)\setminus T})$. Also sind $C_0^{(i)}$ und $C_1^{(i)}$ Darstellungsräume zu Unterdarstellungen von ρ_V und ρ_E . Fassen wir einige dieser Räume wieder zusammen und bilden für $0 \leq i \leq d-2$

$$\tilde{C}_0^{(i)} := \bigoplus_{j=-1}^i C_0^{(j)}, \quad \tilde{C}_1^{(i)} := \bigoplus_{j=0}^i C_1^{(j)},$$

so gilt

$$\tilde{C}_0^{(i)} = \{f_V \in C_0(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}) : \text{supp } f_V \subseteq \bigcup_{j=0}^{i+1} V_j\}$$

und

$$\tilde{C}_1^{(i)} = \{f_E \in C_1(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}) : \text{supp } f_E \subseteq \bigcup_{j=0}^i E_j\},$$

und sowohl $\tilde{C}_0^{(i)}$ als auch $\tilde{C}_1^{(i)}$ sind als direkte Summen G -stabiler Vektorräume G -stabil. Schließlich sei noch

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1^{(i)} &:= \tilde{C}_1^{(i)} \cap H_1(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}, \mathbb{C}) \\ &= \{f \in H_1(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}, \mathbb{C}) : \text{supp } f \subseteq \bigcup_{j=0}^i (E_j \cup \overline{E_j})\}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir Filtrierungen

$$\begin{aligned} C_0(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}) &= \tilde{C}_0^{(d-2)} \supseteq \tilde{C}_0^{(d-3)} \supseteq \dots \supseteq \tilde{C}_0^{(-1)}, \\ C_1(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}) &= \tilde{C}_1^{(d-2)} \supseteq \tilde{C}_1^{(d-3)} \supseteq \dots \supseteq \tilde{C}_1^{(0)} \quad \text{und} \\ H_1(\widehat{\Gamma(n)\setminus T}, \mathbb{C}) &= \tilde{H}_1^{(d-2)} \supseteq \tilde{H}_1^{(d-3)} \supseteq \dots \supseteq \tilde{H}_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Einschränkungen $d^{(i)} := d|_{\tilde{C}_1^{(i)}}$ der Abbildung $d : C_1(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}) \rightarrow C_0(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}})$. Man beachte dazu den folgenden Sachverhalt: Ist $v \in V_j$ und $e \in E^+(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}})$ mit $t(e) = v$, so muß $e \in E_{j-1}$ gelten. Deshalb ergibt sich für $f \in \tilde{C}_1^{(i)}$, $v \in V_j$, $j \geq i+2$

$$(df)(v) = \sum_{t(e)=v} f(e) = \sum_{\substack{t(e)=v \\ e \in E_{j-1}}} f(e) - \sum_{\substack{o(e)=v \\ e \in E_j}} f(e) = 0.$$

Somit muß df in $\tilde{C}_0^{(i)}$ liegen. Weiter bezeichne $\text{deg}^{(i)}$ die Einschränkung von $\text{deg} : C_0(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}) \rightarrow \mathbb{C}$ auf $\tilde{C}_0^{(i)}$.

Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt der

Satz 5.1 Für $0 \leq i \leq d-2$ ist die Folge

$$0 \rightarrow \tilde{H}_1^{(i)} \hookrightarrow \tilde{C}_1^{(i)} \xrightarrow{d^{(i)}} \tilde{C}_0^{(i)} \xrightarrow{\text{deg}^{(i)}} \mathbb{C} \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Es sei $0 \leq i \leq d-2$.

(1) $\tilde{H}_1^{(i)}$ ist ein Untervektorraum von $\tilde{C}_1^{(i)}$. Er besteht nach Definition von $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$ gerade aus den Funktionen f_E von $\tilde{C}_1^{(i)}$, die für alle $v \in V(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}})$ die Gleichung

$$0 = \sum_{\substack{e \in E(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}) \\ t(e)=v}} f_E(v) = (df_E)(v)$$

erfüllen. Also ist $\tilde{H}_1^{(i)} = \text{Ker } d^{(i)}$, womit die Exaktheit bei $\tilde{C}_1^{(i)}$ gezeigt ist.

(2) Die Abbildung $\text{deg}^{(i)}$ ist surjektiv, weil für beliebiges $c \in \mathbb{C}$ und ein $v \in V_0$ die Abbildung f_c mit $f_c(v) = c$ und $f_c(\bar{v}) = 0$ für $\bar{v} \in V(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}) \setminus \{v\}$ ein Urbild von c liefert.

(3) Es bleibt die Exaktheit bei $\tilde{C}_0^{(i)}$ zu zeigen. Für $f_E \in \tilde{C}_1^{(i)}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{deg}^{(i)}(d^{(i)}f_E) &= \sum_{v \in V(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}})} (d^{(i)}f_E)(v) = \sum_{v \in V(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}})} \sum_{\substack{e \in E(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}}) \\ t(e)=v}} f_E(e) \\ &= \sum_{e \in E(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}})} f_E(e) = \sum_{e \in E^+(\widehat{\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}})} f_E(e) - f_E(e) = 0, \end{aligned}$$

weil f_E alternierend ist. Also gilt $\text{Im } d^{(i)} \subseteq \text{Ker } \text{deg}^{(i)}$.

Andererseits ist nach Satz 2.1, weil die Untergraphen von $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$, die aus den Knoten der Typen j , $0 \leq j \leq i+1$, und den Kanten der Typen j , $0 \leq j \leq i$, bestehen, zusammenhängend sind,

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } \text{deg}^{(i)} &= \# \left(\bigcup_{j=0}^{i+1} V_j \right) - 1 = \# \left(\bigcup_{j=0}^i E_j \right) - \left(\# \left(\bigcup_{j=0}^i E_j \right) - \# \left(\bigcup_{j=0}^{i+1} V_j \right) + 1 \right) \\ &= \dim \tilde{C}_1^{(i)} - \dim \tilde{H}_1^{(i)} = \dim \tilde{C}_1^{(i)} - \dim \text{Ker } d^{(i)} \\ &= \dim \text{Im } d^{(i)}. \end{aligned}$$

Infolgedessen erhalten wir die Gleichheit $\text{Im } d^{(i)} = \text{Ker } \text{deg}^{(i)}$. \square

Ergänzen wir nun die exakte Sequenz aus dem Satz zu

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{H}_1^{(i)} & \hookrightarrow & \tilde{C}_1^{(i)} & \xrightarrow{d^{(i)}} & \tilde{C}_0^{(i)} \xrightarrow{\text{deg}^{(i)}} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \\
& & & & \searrow & & \nearrow \\
& & & & \text{Im } d^{(i)} = \text{Ker } \text{deg}^{(i)} & & \\
& & & & \nearrow & & \searrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

so sind auch die geknickten Folgen exakt, und wir können für $0 \leq i \leq d-2$ auf die Zerlegungen

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}_0^{(i)} \cong \text{Im } d^{(i)} \oplus \mathbb{C} \\
\text{und} & \\
& \tilde{C}_1^{(i)} \cong \text{Im } d^{(i)} \oplus \tilde{H}_1^{(i)}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

in \mathbb{C} -Vektorräume schließen.

Als nächstes werden wir zeigen, daß diese Zerlegungen tatsächlich Zerlegungen von Darstellungen sind, und wir werden eine Formel für den Charakter χ von ρ herleiten. Da die Räume $\tilde{C}_0^{(i)}$ und $\tilde{C}_1^{(i)}$ G -stabil sind, können wir sie als Darstellungsräume von Darstellungen von G auffassen, die wir mit $\tilde{\rho}_V^{(i)}$ und $\tilde{\rho}_E^{(i)}$ bezeichnen wollen. $\tilde{\rho}_V^{(i)}$ bzw. $\tilde{\rho}_E^{(i)}$ sind somit Unterdarstellungen von ρ_V bzw. ρ_E .

Lemma 5.2 *Betrachtet man die Vektorräume $\tilde{C}_0^{(i)}$ und $\tilde{C}_1^{(i)}$ als Darstellungsräume der Darstellungen $\tilde{\rho}_V^{(i)}$ und $\tilde{\rho}_E^{(i)}$, sowie \mathbb{C} als Darstellungsraum der trivialen Darstellung, so sind die Homomorphismen*

$$d^{(i)} : \tilde{C}_1^{(i)} \rightarrow \tilde{C}_0^{(i)}$$

und

$$\text{deg}^{(i)} : \tilde{C}_0^{(i)} \rightarrow \mathbb{C}$$

G -Homomorphismen, d.h. für $\sigma \in G$, $f_V \in \tilde{C}_0^{(i)}$ und $f_E \in \tilde{C}_1^{(i)}$ gilt

$$d^{(i)}(\tilde{\rho}_E^{(i)}(\sigma)(f_E)) = \tilde{\rho}_V^{(i)}(\sigma)(d^{(i)} f_E)$$

und

$$\text{deg}^{(i)}(\tilde{\rho}_V^{(i)}(\sigma)(f_V)) = \text{deg}^{(i)} f_V.$$

Beweis: Da die Darstellungen $\tilde{\rho}_V^{(i)}$ bzw. $\tilde{\rho}_E^{(i)}$ Unterdarstellungen von ρ_V bzw. ρ_E sind, können wir im Beweis auf den Index i verzichten.

(1) Für $\sigma \in G$, $f_E \in \tilde{C}_1^{(i)}$ und $v \in V(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T})$ gilt

$$\begin{aligned}
d(\rho_E(\sigma)(f_E))(v) &= \sum_{\substack{e \in E(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}) \\ t(e)=v}} \rho_E(\sigma)(f_E)(e) = \sum_{\substack{e \in E(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}) \\ t(e)=v}} f_E(\sigma^{-1}e) \\
&= \sum_{\substack{e \in E(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}) \\ t(e)=\sigma^{-1}v}} f_E(e) = (df_E)(\sigma^{-1}v) = \rho_V(\sigma)(df_E)(v).
\end{aligned}$$

Es ist somit $d(\rho_E(\sigma)(f_E)) = \rho_V(\sigma)(df_E)$.
(2) Ist $\sigma \in G$ und $f_V \in \tilde{C}_0^{(i)}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \deg(\rho_V(\sigma)(f_V)) &= \sum_{v \in V(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T})} \rho_V(\sigma)(f_V)(v) = \sum_{v \in V(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T})} f_V(\sigma^{-1}v) \\ &= \sum_{v \in V(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T})} f_V(v) = \deg f_V. \end{aligned}$$

□

Korollar 5.3 Für $0 \leq i \leq d-2$ ist $\tilde{H}_1^{(i)}$ G -stabil.

Beweis: Das Korollar folgt, weil $\tilde{H}_1^{(i)} = \text{Ker } d^{(i)}$ und $d^{(i)}$ ein G -Homomorphismus ist. □

Es ist also $\tilde{H}_1^{(i)}$ der Darstellungsraum zu einer Unterdarstellung von $\tilde{\rho}_E^{(i)}$, die wir im weiteren $\tilde{\rho}^{(i)}$ nennen wollen. Ihr Charakter heiße $\tilde{\chi}^{(i)}$.

Satz 5.4 (i) Es bezeichne $\rho_{\text{Im } d^{(i)}}$ die Unterdarstellung von $\tilde{\rho}_V^{(i)}$ mit Darstellungsraum $\text{Im } d^{(i)}$. Dann gilt

$$\tilde{\rho}_E^{(i)} = \rho_{\text{Im } d^{(i)}} \oplus \tilde{\rho}^{(i)}$$

und

$$\tilde{\rho}_V^{(i)} = \rho_{\text{Im } d^{(i)}} \oplus 1.$$

(ii) Der Charakter $\tilde{\chi}^{(i)}$ von $\tilde{\rho}^{(i)}$ ermittelt sich als

$$\tilde{\chi}^{(i)} = \tilde{\chi}_E^{(i)} - \tilde{\chi}_V^{(i)} + 1.$$

Beweis: (i) Die Zerlegungen der zugehörigen Darstellungsräume als Vektorräume ist die Aussage (5.1). Nach Definition ist $\rho_{\text{Im } d^{(i)}}(\sigma) = \rho_V^{(i)}(\sigma)|_{\text{Im } d^{(i)}}$. Da $\deg^{(i)}$ nach dem Lemma ein G -Homomorphismus ist, folgt, daß ein Komplementärraum von $\text{Im } d^{(i)}$ G -isomorph zu \mathbb{C} mit der trivialen Darstellung sein muß.

Analog ergibt sich, daß ein Komplementärraum von $\text{Ker } d^{(i)} = \tilde{H}_1^{(i)}$ G -isomorph zu $\text{Im } d^{(i)}$ mit der Darstellung $\rho_{\text{Im } d^{(i)}}$ ist, weil nach dem Lemma $d^{(i)}$ ein G -Homomorphismus ist.

(ii) Es sei $\chi_{\text{Im } d^{(i)}}$ der Charakter zu $\rho_{\text{Im } d^{(i)}}$. Wegen (i) gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_E^{(i)} &= \chi_{\text{Im } d^{(i)}} + \tilde{\chi}^{(i)}, \\ \tilde{\chi}_V^{(i)} &= \chi_{\text{Im } d^{(i)}} + 1. \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung liefert

$$\tilde{\chi}^{(i)} = \tilde{\chi}_E^{(i)} - \tilde{\chi}_V^{(i)} + 1.$$

□

Korollar 5.5 Für den Charakter χ von ρ gilt

$$\chi = \chi_E - \chi_V + 1.$$

Beweis: Da $\chi = \tilde{\chi}^{(d-2)}$, $\chi_E = \tilde{\chi}_E^{(d-2)}$ und $\chi_V = \tilde{\chi}_V^{(d-2)}$ gilt, ergibt sich die Aussage als ein Spezialfall von Satz 5.4, (ii). \square

Erinnern wir uns nun an die Struktur von $\tilde{C}_0^{(i)}$ und $\tilde{C}_1^{(i)}$: Diese G -Moduln sind direkte Summen

$$\tilde{C}_0^{(i)} = \bigoplus_{j=-1}^i C_0^{(i)},$$

$$\tilde{C}_1^{(i)} = \bigoplus_{j=0}^i C_1^{(i)}$$

von G -Moduln. Bezeichnen wir die Unterdarstellung von ρ_V (bzw. ρ_E) mit Darstellungsraum $C_0^{(i)}$ (bzw. $C_1^{(i)}$) als $\rho_V^{(i)}$ (bzw. $\rho_E^{(i)}$) mit Charakter $\chi_V^{(i)}$ (bzw. $\chi_E^{(i)}$), so erhalten wir die Relationen

$$\tilde{\chi}_V^{(i)} = \sum_{j=-1}^i \chi_V^{(j)} \quad \text{für } -1 \leq i \leq d-2,$$

$$\tilde{\chi}_E^{(i)} = \sum_{j=0}^i \chi_E^{(j)} \quad \text{für } 0 \leq i \leq d-2.$$
(5.2)

Lemma 5.6 *Ist $i \geq 1$, so besteht ein G -Isomorphismus*

$$C_1^{(i)} \cong C_0^{(i-1)}.$$

Beweis: Wir identifizieren $C_1^{(i)}$ mit dem Raum der \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf $E^+(\widehat{\Gamma(n)\backslash T})$, deren Träger in E_i enthalten ist, und definieren eine Abbildung

$$\varphi : C_0^{(i-1)} \rightarrow C_1^{(i)}, \quad f \mapsto \varphi(f)$$

durch $\varphi(f)(e) := f(o(e))$ für $e \in E^+(\widehat{\Gamma(n)\backslash T})$.

(1) $\varphi(f) \in C_1^{(i)}$: Sei $e \in E^+(\widehat{\Gamma(n)\backslash T}) \setminus E_i$ und $f \in C_0^{(i-1)}$. Dann ist $o(e) \notin \text{supp } f \subseteq V_i$, und wir erhalten

$$\varphi(f)(e) = f(o(e)) = 0,$$

also $\text{supp } \varphi(f) \subseteq E_i$. Daher ist $\varphi(f)$ ein Element von $C_1^{(i)}$, und die Abbildung ist wohldefiniert.

(2) φ ist ein G -Homomorphismus: Offensichtlich ist φ ein Vektorraumhomomorphismus. Für $\sigma \in G$ und $e \in E(\widehat{\Gamma(n)\backslash T})$ gilt außerdem

$$(o(\sigma e), t(\sigma e)) = (\sigma o(e), \sigma t(e)),$$

weshalb für $e \in E^+(\widehat{\Gamma(n)\backslash T})$ folgt

$$\varphi(\sigma f)(e) = (\sigma f)(o(e)) = f(\sigma^{-1}o(e)) = f(o(\sigma^{-1}e)) = \varphi(f)(\sigma^{-1}e) = (\sigma\varphi(f))(e).$$

(3) φ ist bijektiv: Die Bijektivität folgt unmittelbar aus der Bijektivität von o_i für $i \geq 1$ (vgl. Abschnitt 3.3, Seite 35). \square

Korollar 5.7 *Für $1 \leq i \leq d-2$ gilt die Gleichung*

$$\chi_V^{(i-1)} = \chi_E^{(i)}.$$

Beweis: Da die zugehörigen Darstellungsräume nach dem Lemma G -isomorph sind, müssen auch die Charaktere der Darstellungen übereinstimmen. \square

Korollar 5.8 *Der Charakter χ von ρ ergibt sich aus der Gleichung*

$$\chi = \chi_E^{(0)} - \chi_V^{(-1)} - \chi_V^{(d-2)} + 1.$$

Beweis: Das Korollar ist eine Konsequenz aus den Korollaren 5.5 und 5.7, denn

$$\begin{aligned} \chi &\stackrel{\text{Kor. 5.5}}{=} \chi_E - \chi_V + 1 = \sum_{i=0}^{d-2} \chi_E^{(i)} - \sum_{i=-1}^{d-2} \chi_V^{(i)} + 1 \\ &= \chi_E^{(0)} + \sum_{i=1}^{d-2} (\chi_E^{(i)} - \chi_V^{(i-1)}) - \chi_V^{(-1)} - \chi_V^{(d-2)} + 1 \\ &\stackrel{\text{Kor. 5.7}}{=} \chi_E^{(0)} - \chi_V^{(-1)} - \chi_V^{(d-2)} + 1. \end{aligned}$$

\square

Dank Korollar 5.8 könnten wir jetzt leicht die Werte von χ berechnen; wir werden jedoch im folgenden eine Zerlegung der Darstellung ρ beschreiben, der die Filtrierung

$$H_1(\widehat{\Gamma(n)} \backslash \mathcal{T}, \mathbb{C}) = \tilde{H}_1^{(d-2)} \supseteq \tilde{H}_1^{(d-3)} \supseteq \dots \supseteq \tilde{H}_1^{(0)}$$

zugrunde liegt. Wir setzen nämlich jetzt

$$H_1^{(0)} := \tilde{H}_1^{(0)}$$

und für $1 \leq i \leq d-2$

$$H_1^{(i)} := (\tilde{H}_1^{(i-1)})^\perp \cap \tilde{H}_1^{(i)}.$$

Der Orthogonalraum $(\tilde{H}_1^{(i-1)})^\perp$ sei bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ aus Abschnitt 3.3 gebildet. Es gilt dann

$$\tilde{H}_1^{(i)} = \bigoplus_{j=0}^i H_1^{(j)},$$

und da das Skalarprodukt unter der Operation von G invariant ist, erweist sich diese Zerlegung als eine Zerlegung in G -Moduln. Die zu $H_1^{(i)}$ gehörige Darstellung sei mit $\rho^{(i)}$ bezeichnet, ihr Charakter mit $\chi^{(i)}$. Es gilt der

Satz 5.9 (i) *Die Darstellung ρ läßt sich zerlegen in die direkte Summe der Darstellungen*

$$\rho = \bigoplus_{j=0}^{d-2} \rho^{(j)}.$$

(ii) *Der Charakter $\chi^{(i)}$ der Darstellung $\rho^{(i)}$ genügt der Gleichung*

$$\begin{aligned} \chi^{(0)} &= \chi_E^{(0)} - \chi_V^{(0)} - \chi_V^{(-1)} + 1, \quad \text{falls } i=0, \\ \chi^{(i)} &= \chi_E^{(i)} - \chi_V^{(i)}, \quad \text{falls } 1 \leq i \leq d-2. \end{aligned}$$

Beweis: (i) Es gilt

$$H_1(\widehat{\Gamma(n)} \backslash \mathcal{T}, \mathbb{C}) = \tilde{H}_1^{(d-2)} = \bigoplus_{j=0}^{d-2} H_1^{(j)},$$

und die in (i) auftauchenden Darstellungen sind gerade die zu dieser Zerlegung in G -Moduln gehörigen.

(ii) Aus Satz 5.4 folgt

$$\tilde{\chi}^{(0)} = \tilde{\chi}_E^{(0)} - \tilde{\chi}_V^{(0)} + 1,$$

wegen der Relationen (5.2) ist dann

$$\chi^{(0)} = \chi_E^{(0)} - \chi_V^{(-1)} - \chi_V^{(0)} + 1,$$

was zu zeigen war. Weiter besteht für $1 \leq i \leq d-2$ die Zerlegung

$$\tilde{H}_1^{(i)} = \tilde{H}_1^{(i-1)} \oplus H_1^{(i)},$$

die für die zugehörigen Charaktere die Gleichung

$$\chi^{(i)} = \tilde{\chi}^{(i)} - \tilde{\chi}^{(i-1)}$$

zur Folge hat. Satz 5.4 liefert nun

$$\chi^{(i)} = \tilde{\chi}_E^{(i)} - \tilde{\chi}_E^{(i-1)} - \tilde{\chi}_V^{(i)} + \tilde{\chi}_V^{(i-1)}.$$

Wieder unter Berücksichtigung der Relationen (5.2) erhalten wir daraus

$$\chi^{(i)} = \chi_E^{(i)} - \chi_V^{(i)},$$

d.h. die Gültigkeit von (ii). □

5.2 Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$

Im vergangenen Abschnitt haben wir im wesentlichen die Ermittlung der Bestandteile von $\rho^{(i)}$ auf die der Bestandteile von $\rho_E^{(i)}$ und $\rho_V^{(i)}$ zurückgeführt. Um letztere zu zerlegen, machen wir uns die spezielle Struktur der Darstellungen zunutze:

Es sei $-1 \leq i \leq d-2$. Die Elemente von V_i sind gerade die Linksnebenklassen von G bzgl. $\bar{\Gamma}_i$. Bilden wir zu einer Funktion $f \in C_0^{(i)}$ die Funktion $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$\tilde{f}(\sigma) = f([\sigma]_{i+1}) = f(\bar{\Gamma}_{i+1}\sigma)$$

gegeben ist, so liefert die Zuordnung $f \mapsto \tilde{f}$ einen Vektorraumisomorphismus zwischen $C_0^{(i)}$ und $\{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(\sigma\xi) = f(\xi)\forall\sigma \in \bar{\Gamma}_{i+1}, \xi \in G\}$. Die Operation von G auf $f \in C_0^{(i)}$ wird für $\tau \in G$ durch die Gleichung

$$\rho_V^{(i)}(\tau)(f)([\sigma]_{i+1}) = f(\tau^{-1}[\sigma]_{i+1}) = f([\sigma\tau]_{i+1})$$

beschrieben, was sich auf \tilde{f} in der Form

$$\rho_V^{(i)}(\tau)(\tilde{f})(\sigma) = \tilde{f}(\sigma\tau)$$

überträgt. Mit der Definition der induzierten Darstellung auf Seite 8 vergleichend erhalten wir die Identität

$$\rho_V^{(i)} = \text{Ind}_{\bar{\Gamma}_{i+1}}^G 1.$$

Ganz analog gilt für $0 \leq i \leq d-2$

$$\rho_E^{(i)} = \text{Ind}_{\bar{\Gamma}_i \cap \bar{\Gamma}_{i+1}}^G 1.$$

Bemerkung: Diese Interpretation der Darstellungen $\rho_V^{(i)}$ und $\rho_E^{(i)}$ liefert wegen $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}} = \overline{\Gamma_i}$ für $i \geq 1$ direkt das Lemma 5.6.

Unter Zuhilfenahme der Frobeniusreziprozität können wir jetzt tatsächlich die Darstellungen $\rho^{(i)}$ (und damit die Darstellung ρ) in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegen. Es gilt nämlich für eine der in Kapitel 4 ermittelten irreduziblen Darstellungen $\tilde{\rho}$ von G

$$\langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(i)} \rangle_G = \langle \text{Res}_{\overline{\Gamma_{i+1}}}^G \tilde{\chi}, 1 \rangle_{\overline{\Gamma_{i+1}}} = \frac{1}{\#(\overline{\Gamma_{i+1}})} \sum_{\sigma \in \overline{\Gamma_{i+1}}} \tilde{\chi}(\sigma), \quad (5.3)$$

falls $-1 \leq i \leq d-2$ ist, und

$$\langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(i)} \rangle_G = \langle \text{Res}_{\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}}^G \tilde{\chi}, 1 \rangle_{\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}} = \frac{1}{\#(\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}})} \sum_{\sigma \in \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}} \tilde{\chi}(\sigma), \quad (5.4)$$

falls $0 \leq i \leq d-2$.

Da im weiteren Verlauf der Berechnungen häufig eine Fallunterscheidung auftreten wird, je nachdem, ob ein Charakter trivial ist oder nicht, führen wir das folgende Symbol ein:

Ist μ ein Charakter einer Gruppe, die die Gruppe H enthält, so setzen wir

$$\delta(\mu, H) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mu|_H = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Während der dafür nötigen Berechnungen müssen wir jedoch wieder eine Fallunterscheidung vornehmen.

5.2.1 Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für d ungerade

Um die Formeln (5.3) und (5.4) für irgendeinen Charakter gut auswerten zu können, wird uns das folgende Lemma nützen, das den Übergang von sämtlichen Elementen der auftretenden Untergruppen zu den ausgezeichneten Repräsentanten von Konjugationsklassen ermöglicht.

Lemma 5.10 Die Bezeichnungen für Konjugationsklassen seien wie in Kapitel 4. Es gelten die folgenden Formeln für die Mächtigkeiten der Schnittmengen von Konjugationsklassen von G mit $\overline{\Gamma_0}$ bzw. mit $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$.

(i) Wir betrachten zunächst $\overline{\Gamma_0}$.

$$\begin{aligned} \bullet \#(c_1(a) \cap \overline{\Gamma_0}) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \bullet \#(c_2(a) \cap \overline{\Gamma_0}) &= \begin{cases} q^2 - 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \bullet \#(c_3(a, d) \cap \overline{\Gamma_0}) &= \begin{cases} q^2 + q, & \text{falls } a, d \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet \#(c_4(\alpha) \cap \overline{\Gamma_0}) = \begin{cases} q^2 - q, & \text{falls } \alpha \in l^\times, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Für $0 \leq i \leq d-1$ gilt dagegen

$$\bullet \#(c_1(a) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\bullet \#(c_2(a) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \begin{cases} q^{i+1} - 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\bullet \#(c_3(a, d) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \begin{cases} 2q^{i+1}, & \text{falls } a, d \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\bullet \#(c_4(\alpha) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = 0.$$

Beweis: (i) Ist σ ein Element von $\overline{\Gamma_0}$, so ist seine Konjugationsklasse sowohl in G als auch in $\overline{\Gamma_0}$ vollständig durch sein charakteristisches Polynom und sein Minimalpolynom bestimmt. Deshalb können die Schnittmengen von Konjugationsklassen mit $\overline{\Gamma_0}$ nur leer sein oder aber volle Konjugationsklassen in $\overline{\Gamma_0}$ bilden. Ferner ist das charakteristische Polynom von σ ein quadratisches Polynom über k , und weil d ungerade ist, zerfällt es genau dann über M , wenn es schon über k zerfällt. Es folgt, daß die Konjugationsklassen in $\overline{\Gamma_0}$ von Elementen von $\overline{\Gamma_0}$ eines bestimmten Typs in einer Konjugationsklasse in G desselben Typs enthalten sein müssen. Deshalb folgen die behaupteten Mächtigkeiten der Schnittmengen, sofern sie nicht leer sind aus der Tabelle der Konjugationsklassen von $G(k)$.

Die Schnittmenge einer Konjugationsklasse mit $\overline{\Gamma_0}$ kann aber nur dann nicht leer sein, wenn die zugehörigen Eigenwerte entweder in k^\times oder in l liegen. Genau das besagen aber die Bedingungen im Lemma, wann immer ein Wert ungleich 0 angegeben ist.

(ii) Wir merken zunächst an, daß für alle i , $0 \leq i \leq d-2$, die Gruppe $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$ in der Borelgruppe $B(G)$ enthalten ist. Liegt also σ in der Schnittmenge einer Konjugationsklasse mit $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$, so müssen die Einträge auf der Diagonalen von σ gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von σ sein. Andererseits müssen sie nach Definition der Γ_i in k^\times liegen, was $\#(c_4(\alpha) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = 0$ nach sich zieht, und den Wert 0 für die anderen Typen in den dort angegebenen Fällen erzwingt. Die Aussage für $c_1(a)$ folgt unmittelbar, und für die Menge $c_2(a) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$ ergibt sich, falls $a \in k^\times$,

$$c_2(a) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : \deg b \leq i, b \neq 0 \right\}.$$

Diese Menge besteht aus $q^{i+1} - 1$ Elementen. Schließlich kann $c_3(a, d) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$ für $a, d \in k^\times$ nur die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : \deg b \leq i \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : \deg b \leq i \right\}$$

sein, und es folgt, daß $\#(c_3(a, d) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = 2q^{i+1}$. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir die Gleichungen (5.3) und (5.4) umformen zu

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G &= \frac{1}{\#(\Gamma_0)} \left[\sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + (q^2 - 1) \sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^2 + q}{2} \sum_{\substack{a, d \in k^\times \\ a \neq d}} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \frac{q^2 - q}{2} \sum_{\alpha \in l \setminus k} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

und für $0 \leq i \leq d-1$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(i)} \rangle_G &= \frac{1}{\#(\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1})} \left[\sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (q^{i+1} - 1) \sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} + q^{i+1} \sum_{\substack{a, d \in k^\times \\ a \neq d}} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Diese Formeln werden wir zum Beweis des folgenden Satzes verwenden:

Satz 5.11 *Es sei d ungerade. Die Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen von $G/Z(k)$ in der Darstellung $\rho_V^{(-1)}$ sind wie folgt gegeben:*

(i) *Ist μ_1 ein Charakter von k^\times mit $\mu_1^2 = 1$, so gilt*

$$\langle \mu_1 \circ \det, \chi_V^{(-1)} \rangle_G = \delta(\mu_1, k^\times).$$

(ii) *Für μ_1 wie in (i) ist*

$$\langle \chi_{(\mu_1, 1)}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G = \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1}.$$

(iii) *Es sei μ ein Charakter von $D(G)$ mit $\mu|_{Z(k)} = 1$ und $\mu|_{E(G)} \neq 1$. Dann gilt*

$$\langle \chi_\mu, \chi_V^{(-1)} \rangle_G = \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} + \delta(\mu, D(k)).$$

(iv) *Für einen unzerlegbaren Charakter ν von L^\times mit $\nu|_{k^\times} = 1$ ist*

$$\langle \chi_\nu, \chi_V^{(-1)} \rangle_G = \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} - \delta(\nu, l^\times).$$

Beweis: (i) Nach (5.5) ist

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 \circ \det, \chi_V^{(-1)} \rangle_G &= \frac{1}{(q^2 - 1)(q - 1)q} \left[\sum_{a \in k^\times} \mu_1(a^2) + (q^2 - 1) \sum_{a \in k^\times} \mu_1(a^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^2 + q}{2} \sum_{\substack{a, d \in k^\times \\ a \neq d}} \mu_1(ad) + \frac{q^2 - q}{2} \sum_{\alpha \in l \setminus k} \mu_1(N\alpha) \right] \\ &= \frac{1}{(q^2 - 1)(q - 1)q} \left[q^2(q - 1) + \frac{(q^2 + q)}{2} \left(\sum_{a, d \in k^\times} \mu_1(ad) - \sum_{a \in k^\times} \mu_1(a^2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^2 - q}{2} \left(\sum_{\alpha \in l \setminus k} \mu_1(N\alpha) - \sum_{a \in k^\times} \mu_1(a^2) \right) \right] \end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Tatsache, daß die Summe über alle Werte eines Charakters auf einer Gruppe nur dann ungleich 0 ist, wenn der Charakter auf dieser Gruppe trivial ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle \mu_1 \circ \det, \chi_V^{(-1)} \rangle_G &= \frac{1}{(q^2-1)(q-1)q} \left[q^2(q-1) + \right. \\
&\quad \left. \frac{q^2+q}{2} (\delta(\mu_1, k^\times)(q-1)^2 - (q-1)) + \frac{q^2-q}{2} (\delta(\mu_1, k^\times)(q^2-1) - (q-1)) \right] \\
&= \frac{1}{(q^2-1)q} [q^2 + (q^2-1)q\delta(\mu_1, k^\times) - q^2] \\
&= \delta(\mu_1, k^\times).
\end{aligned}$$

(ii) Genauso erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{(\mu_1, 1)}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G &= \frac{1}{(q^2-1)(q-1)q} \left[\sum_{\alpha \in k^\times} q^d + \right. \\
&\quad \left. + \frac{q^2+q}{2} \sum_{\substack{\alpha, d \in k^\times \\ \alpha \neq d}} \mu_1(\alpha d) - \frac{q^2-q}{2} \sum_{\alpha \in l \setminus k} \mu_1(N\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{(q^2-1)(q-1)q} \left[(q^d - q)(q-1) + \frac{(q^2-1)(q-1)q}{2} \delta(\mu_1, k^\times) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(q^2-1)(q-1)q}{2} \delta(\mu_1, k^\times) \right] \\
&= \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Entsprechend setzt man die Werte der Charaktere χ_μ und χ_ν ein, um die Ergebnisse (iii) und (iv) zu beweisen. \square

Indem man (5.6) anstelle (5.5) für die Berechnungen zugrunde legt, erhält man die Vielfachheiten der einzelnen irreduziblen Darstellungen in $\rho_E^{(i)}$. Da die Rechnungen weder schwierig noch interessant sind, sollen hier lediglich die Ergebnisse in einer Tabelle zusammengefaßt werden.

Die Zerlegung von $\rho_V^{(i)}$ und $\rho_E^{(i)}$ für ungerades d

$\langle \cdot, \cdot \rangle_G$	$\chi_V^{(-1)}$	$\chi_E^{(0)}$	$\chi_E^{(i)} = \chi_V^{(i-1)}, i = 1, \dots, d-1$
$\mu_1 \circ \det$	$\delta(\mu_1, k^\times)$	$\delta(\mu_1, k^\times)$	$\delta(\mu_1, k^\times)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1}$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} + \delta(\mu_1, k^\times)$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} + \delta(\mu_1, k^\times)$
χ_μ	$\frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} + \delta(\mu, D(k))$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} + 2\delta(\mu, D(k))$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} + 2\delta(\mu, D(k))$
χ_ν	$\frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} - \delta(\nu, l^\times)$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1}$

Nun können wir die Darstellungen $\rho^{(i)}$, aus denen sich die Darstellung ρ auf der Homologie des Quotientengraphen zusammensetzt, in ihre Bestandteile zerlegen.

Hauptsatz 5.1 Ist d ungerade, so gilt:

(i) Die Vielfachheiten der verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $G/Z(k)$ in $\rho^{(0)}$ sind:

• Für einen Charakter μ_1 von k^\times mit $\mu_1^2 = 1$ ist

$$\langle \mu_1 \circ \det, \chi^{(0)} \rangle_G = 0.$$

• Ist μ_1 wie eben, so gilt

$$\langle \chi_{(\mu_1, 1)}, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1}.$$

• Die Vielfachheit einer Darstellung ρ_μ mit $\mu|_{Z(k)} = 1$ und $\mu|_{E(G)} \neq 1$ beträgt

$$\langle \chi_\mu, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} - \delta(\mu, D(k)).$$

• Ist ν ein unzerlegbarer Charakter von L^\times mit $\nu|_{k^\times} = 1$, so gilt

$$\langle \chi_\nu, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} + \delta(\nu, l^\times).$$

(ii) Für $1 \leq i \leq d-1$ gilt

$$\rho^{(i)} = q^{d-i-2} \bigoplus_{\substack{\tilde{\rho} \text{ irred.} \\ \dim \tilde{\rho} > 1}} \tilde{\rho}.$$

Beweis: (i) Die Vielfachheit einer irreduziblen Darstellung $\tilde{\rho}$ in $\rho^{(0)}$ ist nach Satz 5.9 gerade

$$\langle \tilde{\chi}, \chi^{(0)} \rangle_G = \langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(0)} \rangle_G - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(0)} \rangle_G - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G + \langle \tilde{\chi}, 1 \rangle_G.$$

Es gilt aber $\langle \tilde{\chi}, 1 \rangle_G = 0$, wann immer $\tilde{\chi}$ eine nichttriviale irreduzible Darstellung ist. Setzen wir die Werte aus der Tabelle ein, so sieht man sofort, daß die eindimensionalen Darstellungen nicht in $\rho^{(0)}$ vorkommen. Die Vielfachheit jeder anderen Darstellung $\tilde{\chi}$ in $\rho^{(0)}$ ergibt sich gemäß der Tabelle als

$$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} - \frac{q^{d-2} - 1}{q - 1} - \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} + k_{\tilde{\chi}} = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} + k_{\tilde{\chi}},$$

wobei $k_{\tilde{\chi}} = \frac{q^{d-1} - 1}{q^2 - 1} - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G$. Dies entspricht den im Satz angegebenen Vielfachheiten.

(ii) Satz 5.9 liefert für $1 \leq i \leq d-2$

$$\langle \tilde{\chi}, \chi^{(i)} \rangle_G = \langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(i)} \rangle_G - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(i)} \rangle_G.$$

Aus der Tabelle entnimmt man sofort, daß keine eindimensionale Darstellung in der Zerlegung von $\rho^{(i)}$ auftreten kann. Es sei also $\tilde{\chi}$ der Charakter einer Darstellung $\tilde{\rho}$ mit $\dim \tilde{\rho} > 1$. Für alle $1 \leq i \leq d-2$ ist dann

$$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} - \langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(i)} \rangle_G = \frac{q^{d-i-2} - 1}{q - 1} - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(i)} \rangle_G.$$

Infolgedessen erhalten wir

$$\langle \tilde{\chi}, \chi^{(i)} \rangle_G = \frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} - \frac{q^{d-i-2} - 1}{q - 1} = q^{d-i-2}.$$

□

5.2.2 Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für $\text{char } k = 2$ und d gerade

Der Unterschied zum eben behandelten Fall liegt in der Tatsache, daß die quadratische Erweiterung l von k in M enthalten ist. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache formulieren wir zunächst das Analogon von Lemma 5.10.

Lemma 5.12 *Die Mächtigkeiten der Schnittmengen von Konjugationsklassen von G mit $\overline{\Gamma_0}$ bzw. mit $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$ für $0 \leq i \leq d-1$ sind wie folgt gegeben:*

(i) Für die Schnittmengen mit $\overline{\Gamma_0}$ gilt

$$\begin{aligned} \bullet \#(c_1(a) \cap \overline{\Gamma_0}) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ \bullet \#(c_2(a) \cap \overline{\Gamma_0}) &= \begin{cases} q^2 - 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ \bullet \#(c_3(a, d) \cap \overline{\Gamma_0}) &= \begin{cases} q^2 + q, & \text{falls } a, d \in k^\times, \\ q^2 - q, & \text{falls } a, d \in l \setminus k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ \bullet \#(c_4(\alpha) \cap \overline{\Gamma_0}) &= 0 \end{aligned}$$

(ii) Die Mächtigkeiten der Schnittmengen mit $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$ für $0 \leq i \leq d-1$ sind wie in Lemma 5.10 angeführt.

Beweis: (i) Der Unterschied zum Beweis von Lemma 5.10 besteht darin, daß jedes quadratische Polynom über k , also auch das charakteristische Polynom P_σ jeden Elementes $\sigma \in \overline{\Gamma_0}$, über M zerfällt, weil die quadratische Erweiterung l von k in M enthalten ist. Es liegt deshalb kein Element von $\overline{\Gamma_0}$ in einer Konjugationsklasse vom Typ c_4 . Ein Element $\sigma \in \overline{\Gamma_0}$, dessen charakteristisches Polynom über k irreduzibel ist, besitzt zwei verschiedene Eigenwerte a_σ und $d_\sigma \in l$. Diese müssen in l konjugiert sein, und da die Galoisgruppe von l/k von der Frobeniusabbildung $x \mapsto x^q$ erzeugt wird, ist $d_\sigma = a_\sigma^q$. σ liegt deshalb in der Konjugationsklasse $c_3(a_\sigma, a_\sigma^q)$ von G . Es folgt

$$\#(c_3(a_\sigma, a_\sigma^q) \cap \overline{\Gamma_0}) = \#(\sigma^{\overline{\Gamma_0}}) = q^2 - q.$$

Die übrigen Aussagen ergeben sich, ebenso wie (ii), wörtlich wie in Lemma 5.10. \square

Setzen wir die im Lemma ermittelten Werte in (5.3) und (5.4) ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G &= \frac{1}{\#(\overline{\Gamma_0})} \left[\sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + (q^2 - 1) \sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^2 + q}{2} \sum_{\substack{a, d \in k^\times \\ a \neq d}} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \frac{q^2 - q}{2} \sum_{a \in l \setminus k} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^q \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (5.7)$$

und für $0 \leq i \leq d-1$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(i)} \rangle_G &= \frac{1}{\#(\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1})} \left[\sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (q^{i+1} - 1) \sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} + q^{i+1} \sum_{\substack{a, d \in k^\times \\ a \neq d}} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Durch Einsetzen der Werte aus der Charaktertafel von $G/Z(k)$ in diese Gleichungen erhalten wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte für die Vielfachheiten der verschiedenen irreduziblen Darstellungen in $\rho_V^{(i)}$ und $\rho_E^{(i)}$:

Die Zerlegung von $\rho_V^{(i)}$ und $\rho_E^{(i)}$, falls $\text{char } k$ und d gerade

$\langle \cdot, \cdot \rangle_G$	$\chi_V^{(-1)}$	$\chi_E^{(0)}$	$\chi_E^{(i)} = \chi_V^{(i-1)}, i = 1, \dots, d-1$
1	1	1	1
$\chi_{(1,1)}$	$\frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} + 1$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} + 1$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} + 1$
χ_μ	$\frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} + \delta(\mu, D(k)) + \delta(\mu, C(k))$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} + 2\delta(\mu, D(k))$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} + 2\delta(\mu, D(k))$
χ_ν	$\frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1}$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1}$

Diese Einträge der Tabelle führen uns wiederum zu

Hauptsatz 5.2 Ist $\text{char } k = 2$ und d gerade, so sind die Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen von $G/Z(k)$ in $\rho^{(i)}$, $0 \leq i \leq d-2$, wie folgt gegeben:

(i) Die Werte der Skalarprodukte mit $\chi^{(0)}$ sind:

- Für den trivialen Charakter ist

$$\langle 1, \chi^{(0)} \rangle_G = 0.$$

- Weiter ist

$$\langle \chi_{(1,1)}, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} - 1.$$

- Für einen Charakter μ von $D(G)$ mit $\mu|_{Z(k)} = 1$ und $\mu|_{E(G)} \neq 1$ gilt

$$\langle \chi_\mu, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} - \delta(\mu, D(k)) - \delta(\mu, C(k)).$$

- Ist ν ein unzerlegbarer Charakter von L^\times mit $\nu|_{k^\times} = 1$, so gilt

$$\langle \chi_\nu, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1}.$$

(ii) Die Darstellung $\rho^{(i)}$ mit $1 \leq i \leq d-2$ zerlegt sich gemäß

$$\rho^{(i)} = q^{d-i-2} \bigoplus_{\substack{\tilde{\rho} \text{ irreduzibel} \\ \dim \tilde{\rho} > 1}} \tilde{\rho}.$$

Beweis: (i) Wie im Beweis von Hauptsatz 5.1 ergibt sich die Vielfachheit einer Darstellung $\tilde{\rho}$ in $\rho^{(0)}$ als

$$\langle \tilde{\chi}, \chi^{(0)} \rangle_G = \langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(0)} \rangle_G - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(0)} \rangle_G - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G + \langle \tilde{\chi}, 1 \rangle_G.$$

Hieraus folgt mit den Einträgen der Tabelle

$$\langle 1, \chi^{(0)} \rangle_G = 0,$$

und für die höherdimensionalen Darstellungen mit Charakter $\tilde{\chi}$ erhalten wir die Vielfachheit

$$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} - \frac{q^{d-2} - 1}{q - 1} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} + k_{\tilde{\chi}} = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} + k_{\tilde{\chi}},$$

allerdings ist $k_{\tilde{\chi}}$ in diesem Fall die Differenz

$$k_{\tilde{\chi}} = \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} - \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit den im Satz behaupteten Vielfachheiten überein.

(ii) Der Beweis von (ii) kann aus Hauptsatz 5.1 übernommen werden. \square

5.2.3 Die Zerlegung von $\rho^{(i)}$ für $\text{char } k \neq 2$ und d gerade

Wollen wir in diesem Fall das Analogon zu Lemma 5.10 beweisen, so stellen wir fest, daß gewisse Größen auftauchen, die wir bisher noch nicht bezeichnet haben: Die Anzahlen von Quadraten bzw. Nichtquadraten in $k[T]/(n) = M$, deren Urbild ein Polynom vom Grad kleiner einer Schranke i ist. Wir führen deshalb ein: Für $0 \leq i \leq d - 1$ sei

$$M_i := \{a \in M^\times : \text{deg } a \leq i\},$$

und

$$Q_i := \#(M_i \cap M^2).$$

Dabei ist unter dem Grad eines Elementes a von M gerade der kleinste Grad einer Liftung von a in $k[T]$ zu verstehen.

Da d gerade ist, ist k^\times in $(M^\times)^2$ enthalten, und es folgt

$$Q_0 = \#(M_0 \cap M^2) = \#(k^\times \cap M^2) = \#(k^\times) = q - 1.$$

Außerdem gilt

$$Q_{d-1} = \#(M_{d-1} \cap M^2) = \#(M^\times \cap M^2) = \frac{q^d - 1}{2}.$$

Mit dieser Notation können wir das Lemma formulieren:

Lemma 5.13 *Ist q ungerade und d gerade, so besitzen die Schnittmengen von Konjugationsklassen von G mit $\overline{\Gamma_0}$ bzw. mit $\overline{\Gamma_i} \cap \overline{\Gamma_{i+1}}$ die folgenden Mächtigkeiten:*

(i) *Die Elementanzahlen der Schnittmengen mit $\overline{\Gamma_0}$ betragen*

$$\bullet \#(c_1(a) \cap \overline{\Gamma_0}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \#(c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_0}) = \begin{cases} q^2 - 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
& \#(c_2(a, \varepsilon) \cap \overline{\Gamma_0}) = 0. \\
& \bullet \#(c_3(a, d) \cap \overline{\Gamma_0}) = \begin{cases} q^2 + q, & \text{falls } a, d \in k^\times, \\ q^2 - q, & \text{falls } a, d \in l \setminus k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
& \bullet \#(c_4(\alpha) \cap \overline{\Gamma_0}) = 0
\end{aligned}$$

(ii) Die Anzahlen der Elemente in Schnittmengen mit $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$ für $0 \leq i \leq d-1$ sind

$$\begin{aligned}
& \bullet \#(c_1(a) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
& \bullet \#(c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \begin{cases} Q_i, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
& \#(c_2(a, \varepsilon) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \begin{cases} q^{i+1} - Q_i - 1, & \text{falls } a \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
& \bullet \#(c_3(a, d) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \begin{cases} 2q^{i+1}, & \text{falls } a, d \in k^\times, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\
& \bullet \#(c_4(\alpha) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = 0.
\end{aligned}$$

Beweis: (i) Die Elementanzahlen der Schnittmengen von $\overline{\Gamma_0}$ mit Konjugationsklassen der Typen c_1 , c_3 und c_4 ergeben sich wie in Lemma 5.12. Es bleiben also nur die Schnittmengen von Konjugationsklassen des Typs c_2 mit $\overline{\Gamma_0}$ zu untersuchen: Alle Elemente von $c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_0}$ besitzen das Minimalpolynom $(X - a)^2$. Also kann $c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_0}$ nur dann nicht leer sein, wenn $a \in k^\times$ liegt, denn die Minimalpolynome von Elementen von $\overline{\Gamma_0}$ liegen in $k[X]$. Ist $a \in k^\times$, so folgt

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_0}.$$

Weil aber $\overline{\Gamma_0} \subset G$ gilt, erzwingt dies die Inklusion

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{\overline{\Gamma_0}} \subseteq c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_0},$$

also insbesondere $\#(c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_0}) \geq q^2 - 1$. Da andere Elemente von $\overline{\Gamma_0}$ ein anderes Minimalpolynom besitzen, ist somit

$$\#(c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_0}) = q^2 - 1.$$

Andererseits ist auch das Minimalpolynom der Elemente von $c_2(a, \varepsilon)$ gerade das Polynom $(X - a)^2$. Da jedes Element von $\overline{\Gamma_0}$ mit diesem Minimalpolynom jedoch in $c_2(a, 1)$ liegt, muß $c_2(a, \varepsilon) \cap \overline{\Gamma_0}$ leer sein.

(ii) Für die Typen c_1 , c_3 und c_4 können wir wieder den Beweis von Lemma 5.10 übernehmen. Also betrachten wir nun die Elemente von $c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$. Für $a \notin k^\times$ ist diese Menge leer. Es sei deshalb $a \in k^\times$. Da $\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}$ in der Borelgruppe von G enthalten ist, muß gelten

$$c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : \deg b \leq i \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : b \in M_i \right\}.$$

Andererseits wissen wir aus der Betrachtung der Konjugationsklassen von G (bzw. von $S(M)$), daß die Gleichheit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^G = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix}^G$$

genau dann gilt, wenn $b \cdot \bar{b} \in (M^\times)^2$. Also beträgt

$$\#(c_2(a, 1) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \# \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : b \in M_i \cap (M^\times)^2 \right\} \right) = Q_i.$$

Entsprechend erhalten wir

$$\#(c_2(a, \varepsilon) \cap \overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}) = \# \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : b \in M_i \cap \varepsilon(M^\times)^2 \right\} \right) = q^{i+1} - Q_i - 1,$$

weil $q^{i+1} = \#(M_i \cup \{0\}) = 1 + \#(M_i \cap (M^\times)^2) + \#(M_i \cap \varepsilon(M^\times)^2)$. \square

Um die Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen in $\rho_V^{(i)}$ und $\rho_E^{(i)}$ zu ermitteln, setzen wir wieder die im Lemma ermittelten Werte in die Gleichungen (5.3) und (5.4) ein, und wir erhalten die Identitäten

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \chi_V^{(-1)} \rangle_G &= \frac{1}{\#\overline{\Gamma_0}} \left[\sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + (q^2 - 1) \sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^2 + q}{2} \sum_{\substack{a, d \in k^\times \\ a \neq d}} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \frac{q^2 - q}{2} \sum_{a \in I \setminus k} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^q \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

und für $0 \leq i \leq d-1$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\chi}, \chi_E^{(i)} \rangle_G &= \frac{1}{\#\overline{\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}}} \left[\sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + Q_i \sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (q^{i+1} - Q_i - 1) \sum_{a \in k^\times} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix} + q^{i+1} \sum_{\substack{a, d \in k^\times \\ a \neq d}} \tilde{\chi} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Für Darstellungen, deren Charakter auf der Vereinigung der Konjugationsklassen $c_2(a, 1) \cup c_2(a, \varepsilon)$ konstant ist, stimmen die Gleichungen (5.9) und (5.10) mit den entsprechenden Formeln für $\text{char } k = 2$ überein. Wir können deshalb für alle Darstellungen, deren Dimension $\neq \frac{q^d+1}{2}$ ist, die Werte aus der Tabelle auf Seite 69 übertragen, müssen allerdings zusätzlich nichttriviale Charaktere auf $D(G)$ zulassen, die auf $D(k)$ trivial sind. Für die $\frac{q^d+1}{2}$ -dimensionalen Darstellungen von $G/Z(k)$ kann man die in der folgenden Tabelle angeführten Werte wieder durch Einsetzen der Charakterwerte in die Gleichungen (5.9) und (5.10) ermitteln.

Die Zerlegung von $\rho_V^{(i)}$ und $\rho_E^{(i)}$ für $\text{char } k$ ungerade und d gerade

$\langle \cdot, \cdot \rangle_G$	$\chi_V^{(-1)}$	$\chi_E^{(0)}$	$\chi_E^{(i)} = \chi_V^{(i-1)}, i = 1, \dots, d-1$
$\mu_1 \circ \det$	$\delta(\mu_1, k^\times)$	$\delta(\mu_1, k^\times)$	$\delta(\mu_1, k^\times)$
$\chi_{(\mu_1, 1)}$	$\frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} + \delta(\mu_1, k^\times)$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} + \delta(\mu_1, k^\times)$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} + \delta(\mu_1, k^\times)$
χ_μ	$\frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} +$ $\delta(\mu, D(k)) + \delta(\mu, C(k))$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1} + 2\delta(\mu, D(k))$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1} + 2\delta(\mu, D(k))$
χ_μ^\pm	$\frac{q^{d-1} - q}{2(q^2 - 1)} \pm \frac{\tau}{2q} +$ $\frac{\delta(\mu, D(k)) + \delta(\mu, C(k))}{2}$	$\frac{q^{d-1} - 1}{2(q - 1)} \pm \frac{\tau}{2q} + \delta(\mu, D(k))$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{2(q - 1)} \pm$ $\frac{\tau(2Q_i - q^{i+1} + 1)}{2(q - 1)q^{i+1}} + \delta(\mu, D(k))$
χ_ν	$\frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1}$	$\frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}$	$\frac{q^{d-i-1} - 1}{q - 1}$

In der Tabelle bezeichnet τ immer die Gauß'sche Summe $\tau(\psi, \mu_2)$, wobei μ_2 der quadratische Charakter auf M^\times ist.

Wir kombinieren die in der Tabelle eingetragenen Ergebnisse zu dem folgenden

Hauptsatz 5.3 Ist $\text{char } k$ ungerade und d gerade, so zerlegen sich die Darstellungen $\rho^{(i)}$ für $0 \leq i \leq d-2$ folgendermaßen:

(i) Die Bestandteile von $\rho^{(0)}$ mit ihren Vielfachheiten sind:

- Für einen Charakter μ_1 von k^\times kommt die Darstellung $\mu_1 \circ \det$ nicht in $\rho^{(0)}$ vor.
- Die Vielfachheit von $\rho_{(\mu_1, 1)}$ für einen Charakter μ_1 von k^\times mit $\mu_1^2 = 1$ beträgt

$$\langle \chi_{(\mu_1, 1)}, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} - \delta(\mu_1, k^\times).$$

- Ist μ ein Charakter von $D(G)$ mit $\mu|_{Z(k)} = 1$ und $\mu^2|_{E(G)} \neq 1$, so erhalten wir

$$\langle \chi_\mu, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} - \delta(\mu, D(k)) - \delta(\mu, C(k)).$$

- Ist μ ein Charakter von $D(G)$ mit $\mu|_{Z(k)} = 1$ und $\mu^2|_{E(G)} = 1 \neq \mu|_{E(G)}$, so ergibt sich

$$\langle \chi_\mu^\pm, \chi^{(0)} \rangle_G = \frac{1}{2} \left(q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} - \delta(\mu, D(k)) - \delta(\mu, C(k)) \right) \mp \frac{\tau(2Q_1 - q^2 + 1)}{2(q-1)q^2}.$$

- Für einen unzerlegbaren Charakter ν von L^\times mit $\nu|_{k^\times} = 1$ ist schließlich

$$\langle \chi_\nu, \chi^{(0)} \rangle_G = q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1}.$$

(ii) Die Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen in $\rho^{(i)}$ für $1 \leq i \leq d-2$ sind:

- Für die eindimensionalen Darstellungen der Form $\mu_1 \circ \det$ ist

$$\langle \mu_1 \circ \det, \chi^{(i)} \rangle_G = 0.$$

- Ist $\tilde{\rho}$ eine irreduzible Darstellung von $G/Z(k)$ mit $\dim \tilde{\rho} \neq \frac{q^d+1}{2}$, so gilt

$$\langle \tilde{\chi}, \chi^{(i)} \rangle_G = q^{d-i-2}.$$

- Es sei μ ein Charakter von $D(G)$ mit $\mu|_{Z(k)} = 1$ und $\mu^2|_{E(G)} = 1 \neq \mu|_{E(G)}$. Dann ist

$$\langle \chi_\mu^\pm, \chi^{(i)} \rangle_G = \frac{q^{d-i-2}}{2} \pm \frac{\tau(2(qQ_i - Q_{i+1}) + (q-1))}{2(q-1)q^{i+2}}.$$

Beweis: Für die Werte der Skalarprodukte von $\chi^{(i)}$ mit Charakteren der Darstellungen, deren Dimension ungleich $\frac{q^d+1}{2}$ ist, sind die Ergebnisse dieselben wie in Hauptsatz 5.2. Es sind daher nur die Skalarprodukte mit χ_μ^\pm zu berechnen. Aus der Tabelle und mit Satz 5.9 folgt

$$\begin{aligned} & \langle \chi_\mu^\pm, \chi^{(0)} \rangle_G \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{q^{d-1} - 1}{q-1} \pm \frac{\tau}{q} - \frac{q^{d-2} - 1}{q-1} \mp \frac{\tau(2Q_1 - q^2 + 1)}{(q-1)q^2} \right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} \pm \frac{\tau}{q} + \delta(\mu, D(k)) + \delta(\mu, C(k)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(q^{d-2} - \frac{q^{d-1} - q}{q^2 - 1} - \delta(\mu, D(k)) - \delta(\mu, C(k)) \mp \frac{\tau(2Q_1 - q^2 + 1)}{(q-1)q^2} \right). \end{aligned}$$

Für $1 \leq i \leq d-2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \langle \chi_\mu^\pm, \chi^{(i)} \rangle_G \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{q^{d-i-1} - 1}{q-1} \pm \frac{\tau(2Q_i - q^{i+1} + 1)}{(q-1)q^{i+1}} + 2\delta(\mu, D(k)) \right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{q^{d-i-2} - 1}{q-1} \pm \frac{\tau(2Q_{i+1} - q^{i+2} + 1)}{(q-1)q^{i+2}} + 2\delta(\mu, D(k)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(q^{d-i-2} \pm \frac{\tau(2(qQ_i - Q_{i+1}) + (q-1))}{(q-1)q^{i+2}} \right). \end{aligned}$$

□

5.3 Zusammenfassung der drei Fälle

Aus den Hauptsätzen 5.1 - 5.3 ergeben sich unmittelbar die folgenden Korollare.

Korollar 5.14 (i) Die Darstellung $\rho^{(0)}$ enthält keine eindimensionalen Komponenten.

(ii) Sind ρ_1 und ρ_2 zwei irreduzible Darstellungen von G mit

$$\dim \rho_1, \dim \rho_2 \notin \left\{ 1, \frac{q^d+1}{2} \right\},$$

so weichen die Vielfachheiten in $\rho^{(0)}$ um maximal zwei voneinander ab.

(iii) Sind ρ_μ^\pm Darstellungen von G der Dimension $\frac{d+1}{2}$, und ist ρ_1 eine irreduzible Darstellung wie in (ii), so weicht die Summe der Vielfachheiten von ρ_μ^+ und ρ_μ^- in $\rho^{(0)}$ um höchstens zwei von der Vielfachheit von ρ_1 in $\rho^{(0)}$ ab.

Korollar 5.15 Es sei $1 \leq i \leq d-2$. Dann gelten

- (i) Die Darstellung $\rho^{(i)}$ enthält keine irreduziblen Bestandteile der Dimension 1.
- (ii) Die Vielfachheiten zweier in $\rho^{(i)}$ auftretenden Darstellungen, deren Dimension nicht $\frac{d+1}{2}$ beträgt, stimmen überein.
- (iii) Die Summe der Vielfachheiten von ρ_μ^+ und ρ_μ^- für ein μ mit $\mu_2^2 = 1$ in $\rho^{(i)}$ ist gleich der Vielfachheit jeder in $\rho^{(i)}$ auftretenden Darstellung aus (ii).

Korollar 5.16 Korollar 5.14 bleibt gültig, wenn man überall $\rho^{(0)}$ durch ρ ersetzt.

Es ist also $\rho^{(0)}$ die in der Einleitung erwähnte ausgezeichnete Darstellung, die die Abweichungen in den Vielfachheiten der auftretenden Darstellungen kodiert.

Bemerkung: Eine Verallgemeinerung der vorliegenden Arbeit auf reduzible Polynome würde zwei Facetten ganz unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades beinhalten: Nimmt man an, das Polynom m ist quadratfrei, so ist die zugehörige Gruppe $G(m)$ ein direktes Produkt von den hier untersuchten Gruppen zu irreduziblen Polynomen. Entsprechend leicht läßt sich die Darstellungstheorie von $G(m)$ aus den erzielten Ergebnissen herleiten. Der Übergang zu Potenzen von irreduziblen Polynomen jedoch würde zunächst eine Betrachtung der Darstellungen der $GL(2)$ und der $SL(2)$ über Ringen erfordern. Legt man die Kenntnis derselben aber zugrunde, so ist zu vermuten, daß die in der vorliegenden Arbeit angewandten Methoden auch hier zu einer Zerlegung der zugehörigen Darstellung führen. Die Untersuchung der Darstellung von $G(n')$ auf $H_1(T, \mathbb{C})^{\Gamma(n')}$ für ein irreduzibles Polynom n wäre insbesondere deshalb von Interesse, weil es möglich sein müßte, aus den entsprechenden Ergebnissen die zugehörige Darstellung des projektiven Limes der Gruppen $G(n')$ herzuleiten.

Symbolverzeichnis

K^\times	multiplikative Gruppe des Körpers K ,	9
K^+	additive Gruppe des Körpers K ,	9
$\langle \cdot, \cdot \rangle_G$	Skalarprodukt auf dem Raum der Klassenfunktionen einer Gruppe G ,	6
\rtimes, \ltimes	semidirektes Produkt,	10
G'	Kommutator einer Gruppe G ,	10
σ^τ	$\tau^{-1}\sigma\tau$, das mit τ zu konjugierte Element zu σ ,	6
σ^G	die Menge der zu σ mit Elementen aus G konjugierten Elemente,	10
G^σ	die mit σ zu G konjugierte Gruppe,	30
\bar{e}	zu e inverse Kante,	27
Gx	Bahn von x unter der Operation von G ,	30
G_x	Fixgruppe von x in G ,	30
$[L]$	Gitterklasse von L ,	33
$[\sigma]_i$	Rechtsnebenklasse von σ bzgl. $\overline{\Gamma}_i$, zugleich ein Knoten vom Typ i ,	35
$[\sigma]_{i,i+1}$	Rechtsnebenklasse von σ bzgl. $\overline{\Gamma}_i \cap \overline{\Gamma}_{i+1}$, zugleich Kante des Typs i ,	35
(\cdot, \cdot)	Skalarprodukt auf $H_1(\mathcal{T}, \mathbb{C})^{\Gamma(n)}$,	38
$(\cdot, \cdot)_{H_1}$	Skalarprodukt auf $H_1(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T}, \mathbb{C})$,	39
V^\perp	orthogonales Komplement,	39
$[N = 1]$	Kern der Normabbildung,	41
$[N \in k^\times]$	Elemente von L , deren Norm in k^\times liegt,	41
A	Polynomring über k ,	32
$A, A(G), A(K), \dots$	die Untergruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ von $G(K)$ bzw. von $G = \Gamma/\Gamma(n)$,	9, 41
$\text{Aut}_k(V)$	Gruppe der k -Automorphismen eines k -Vektorraums V ,	4
$B, B(G), B(K), \dots$	Borelgruppe von $G(K)$ bzw. deren Schnitt $G = \Gamma/\Gamma(n)$,	9, 41
$C(k)$	die Untergruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^q \end{pmatrix} \mid a \in k^\times \right\}$ von $G(L)$,	41
$C_0(X)$	\mathbb{C} -Vektorraum der Funktionen auf $V(X)$,	55
$\tilde{C}_0^{(i)}$	Unterraum von $C_0(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T})$, der Filtrierung beschreibt,	56
$C_0^{(i)}$	Bestandteil von $\tilde{C}_0^{(i)}$,	56
$C_1(X)$	\mathbb{C} -Vektorraum der alternierenden Funktionen auf $E(X)$,	55
$\tilde{C}_1^{(i)}$	Unterraum von $C_1(\Gamma(n) \setminus \mathcal{T})$, der Filtrierung beschreibt,	56
$C_1^{(i)}$	Bestandteil von $\tilde{C}_1^{(i)}$,	56
$c_1(a)$	Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ in $G(K)$, $S(K)$ oder $\Gamma/\Gamma(n)$,	11, 20, 43, 47
$c_2(a), c_2(a, 1), c_2(a, \varepsilon)$	Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ 0 & a \end{pmatrix}$,	11, 21, 43, 47

$c_3(a, d)$	Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$,	11, 21, 43, 47
$c_4(\alpha)$	Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} 0 & -N\alpha \\ 1 & Tr\alpha \end{pmatrix}$,	11, 21, 43, 47
$char K$	Charakteristik von K ,	20
d	Grad von n ,	32, 41
$d : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$	G -Homomorphismus,	55
$d^{(i)}$	Einschränkung von d auf $\tilde{C}_1^{(i)}$,	57
$d(\Lambda, \Lambda')$	Abstand von Gitterklassen,	33
$D, D(G), D(K), \dots$	Diagonalgruppe von $G(K)$ bzw. von $G = \Gamma/\Gamma(n)$,	9, 41
$deg : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$	G -Homomorphismus,	55
$deg^{(i)}$	Einschränkung von deg auf $\tilde{C}_0^{(i)}$,	57
δ_{ij}	Kronecker-Symbol,	7
$\delta(\cdot, \cdot)$	mißt, ob ein Charakter trivial ist oder nicht,	63
$E, E(G), E(K), \dots$	die Untergruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\}$ von $G(K)$ bzw. G ,	9, 41
$E(X)$	Kantenmenge von X ,	27
$E^+(X)$	Orientierung von X ,	28
E^+	spezielle Orientierung von $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$,	35
E_i	Menge der Kanten von $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$ vom Typ i ,	35
ϵ	Erzeuger von K^\times (Kap. 1) bzw. von M^\times (Kap. 4),	9, 41
$G(n), G$	die Gruppe $\Gamma/\Gamma(n)$,	35
Γ	$GL(2, A)$,	32
$\Gamma(n)$	Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe n ,	34
Γ_i	Stabilisator von v_i in Γ ,	34
$GL(2, K), G(K)$	Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen über K ,	9
$H_1(X, \mathbb{C}), H_1(X, \mathbb{Z}), \dots$	Homologie von X ,	29
$\underline{H}_i(X, \mathbb{C})^H$	Raum der harmonischen Coketten zu H ,	30
$\tilde{H}_1^{(i)}$	Unterraum von $H_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}, \mathbb{C})$, der Filtrierung beschreibt,	59
$H_1^{(i)}$	orthogonales Komplement von $\tilde{H}_1^{(i-1)}$ in $\tilde{H}_1^{(i)}$,	61
\mathcal{I}	Iwahori-Untergruppe von $G(K_\infty)$,	32
$\text{Ind}_H^G \rho$	von ρ induzierte Darstellung,	8
$\text{Ind}_H^G \chi$	von χ induzierter Charakter,	8
\mathcal{K}	maximalkompakte Untergruppe von $G(K_\infty)$,	32
$k[G]$	Gruppenalgebra einer Gruppe G über einem Körper k ,	4
L	quadratische Erweiterung von K (Kap. 1) bzw. von M (ab Kap. 4),	9, 41
l	quadratische Erweiterung von k ,	41
M	$A/(n)$,	41
M_i	Elemente von M vom Grad $\leq i$,	70
m_ξ	Multiplikationsabbildung mit ξ ,	10
n	Polynom aus A ,	32
$\bar{\nu}$	zu ν konjugierter Charakter,	17

\mathcal{O}_∞	Ganzheitsring von K_∞ ,	32
$o(e)$	Startknoten von e ,	27
o_i	Einschränkung der Abbildung o auf E_i ,	35
$\mathbb{P}^1(K)$	projektive Gerade über K ,	15
$P, P(G), P(K), \dots$	affine Gruppe in $G(K)$ bzw. ihr Schnitt mit $G = \Gamma/\Gamma(n)$,	9
P_σ	charakteristisches Polynom von σ ,	10
π	die Darstellung $\text{Ind}_U^G \psi$ von $G(K)$,	13
π	Uniformisierende bzgl. der Gradbewertung,	32
ψ	fixierter Charakter von K^+ (Kap. 1) bzw. von M^+ (Kap. 4),	9, 41
Q_i	Anzahl der Quadrate in M_i ,	70
$\text{Res}_H^G \rho$	Einschränkung der Darstellung ρ von G auf H ,	7
$\text{Res}_H^G \chi$	Charakter von $\text{Res}_H^G \rho$,	7
ρ	ab Kap. 5 die untersuchte Darstellung,	55
ρ_V	die Darstellung von G auf $C_0(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T})$,	56
$\tilde{\rho}_V^{(i)}, \rho_V^{(i)}$	Unterdarstellung von ρ_V auf $\tilde{C}_0^{(i)}$ bzw. $C_0^{(i)}$,	58
ρ_E	die Darstellung von G auf $C_1(\Gamma(n)\backslash\mathcal{T})$,	56
$\tilde{\rho}_E^{(i)}, \rho_E^{(i)}$	Unterdarstellung von ρ_E auf $\tilde{C}_1^{(i)}$ bzw. $C_1^{(i)}$,	58
$\tilde{\rho}^{(i)}, \rho^{(i)}$	Unterdarstellung von ρ auf $\tilde{H}_1^{(i)}$ bzw. $H_1^{(i)}$,	59, 61
$\rho_\mu, \rho_{(\mu_1, \mu_2)}$	Darstellung von $G(K)$ oder $\Gamma/\Gamma(n)$ zu einem Charakter μ der entsprechenden Diagonalgruppe,	14, 46
ρ_μ^+, ρ_μ^-	irreduzible Komponenten von ρ_μ , falls dies zerfällt,	24, 49
ρ_ν	Darstellung von $G(K)$, $S(K)$ oder $\Gamma/\Gamma(n)$ zu einem Charakter der quadratischen Erweiterung von K ,	18, 46
ρ_ν^+, ρ_ν^-	irreduzible Komponenten von ρ_ν , falls dies zerfällt,	26, 49
$SL(2, K), S(K)$	Untergruppe von $G(K)$ mit Elementen der Determinante 1,	20
$\mathfrak{I}(\chi)$	Trägheitsgruppe des Charakters χ ,	7
\mathcal{T}	Bruhat-Tits-Baum,	32
$t(e)$	Zielknoten von e ,	27
t_i	Einschränkung der Abbildung t auf E_i ,	35
$\tau(\mu_1, \psi), \tau(\mu_1), \tau$	Gauß'sche Summe,	20
$U, U(G), U(K), \dots$	unipotente Untergruppe von $G(K)$, bzw. ihr Schnitt mit $G = \Gamma/\Gamma(n)$,	9
$V(X)$	Knotenmenge von X ,	27
V_i	Menge der Knoten von $\Gamma(n)\backslash\mathcal{T}$ vom Typ i ,	35
w	das Element $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,	9
w'	das Element $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,	9
$Z, Z(G), Z(K), \dots$	Zentrum von $G(K)$ bzw. G ,	9, 32
$Z_G(\sigma)$	Zentralisator eines Elements σ ,	11

Stichwortverzeichnis

- Abstand
 - von Gitterklassen, 33
 - von Knoten, 29
- adjazent, 27
- affine Gruppe, 9
- alternierend, 29

- Bahn, 30
- Baum, 29
- benachbart, 27
- benachbarte Gitterklassen, 33
- Borelgruppe, 9
- Bruhat-Tits-Baum, 32
- Bruhat-Zerlegung, 10

- C_0 , 55
- C_1 , 55
- Cartan-Untergruppen, 9
 - nicht zerfallende, 9
 - zerfallende, 9
- Charakter
 - einer Darstellung, 6
 - induzierter, 9
 - konjugierter, 17
 - unzerlegbarer, 17
 - zerlegbarer, 17
- charakteristisches Polynom, 10

- Darstellung, 4
 - cuspidale, 14
 - induzierte, 8
 - irreduzible, 5
 - reduzible, 5
 - reguläre, 7
 - triviale, 4
- Darstellungen
 - äquivalente, 5
 - der Hauptserie, 14
 - direkte Summe von, 5
- Darstellungsraum, 4
- Diagonalgruppe, 9
- Dimension einer Darstellung, 4

- Einsdarstellung, 4
- Endknoten, 27
- ε , 9, 42

- Euler-Formel, 29

- Fixgruppe, 30
- Fluß, 29
- Frobeniusreziprozität, 9
- Fundamentalebene, 30

- G -Homomorphismus, 4
- G -Modul, 4
- G -Untermodul, 5
- Gauß'sche Summe, 20
- Geschlecht, 37
- Gitter, 33
- Gitterklasse, 33
- Graph, 27
 - kombinatorischer, 29
 - schlichter, 29
- Gruppenalgebra, 4

- harmonische Coketten, 30
- Hauptkongruenzuntergruppe, 34
- Hauptserie, 14
- Homologie, 29

- $\text{Ind}_H^G \rho$, 8
- Inversionsabbildung, 28
- inversionsfrei, 30
- Inzidenzabbildung, 28
- Iwahori-Untergruppe, 33

- Kante, 28
- Klassenfunktion, 6
- Knoten, 28
- kombinatorischer Graph, 29
- Kommutator, 10
- Kreis, 29
- Kreis $_n$, 29

- Maschke, Satz von, 5
- Matrixform, 5
- Morphismus von Graphen, 27

- Operation einer Gruppe auf einem Graphen, 30
- Orientierung, 28

- Pfad $_\infty$, 28

Pfad_n, 28
 ψ , 9, 41
 Quotientengraph, 30
 Raum der harmonischen Coketten, 30
 $\text{Res}_H^G \rho$, 7
 Satz von Maschke, 5
 Schlinge, 29
 semidirektes Produkt, 10
 stabil, 5
 Startknoten, 27
 Stufe, 34
 \mathcal{T} , 33
 Tensorprodukt von Darstellungen, 5
 Trägheitsgruppe eines Charakters, 7
 Typ
 einer Kante, 35
 eines Knotens, 35
 unipotente Untergruppe, 9
 Unterbaum,
 aufspannender, 29
 Unterdarstellung, 5
 Untergraph, 28
 unzerlegbar, 18
 w , 9
 w' , 9
 Weg, 29
 Weg, unendlicher, 29
 Zentralisator, 11
 Zielknoten, 27
 zusammenhängend, 29
 Zusammenhangskomponente, 29
 Zykel, 29

Literaturverzeichnis

- [Cal86] I. Calvino. *Der Baron auf den Bäumen*. dtv, 1986. Italienischer Originaltitel: *Il barone rampante*.
- [Dor71] L. Dornhoff. *Group Representation Theory, vol. 1*. Pure and applied Mathematics. Marcel Decker, Inc., New York, 1971.
- [GR] E.-U. Gekeler and M. Reversat. Jacobians of drinfeld modular curves. Eingereicht.
- [Hec59a] E. Hecke. Über das Verhalten der Integrale erster Gattung bei Abbildungen, insbesondere in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 1930. In *Mathematische Werke*, pages 548 – 558. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1959.
- [Hec59b] E. Hecke. Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 1928. In *Mathematische Werke*, pages 525 – 547. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1959.
- [Hup67] B. Huppert. *Endliche Gruppen*, volume 1. Springer-Verlag, 1967.
- [Lan93] S. Lang. *Algebra*, chapter XVIII. Addison-Wesley, third edition, 1993.
- [Non94] U. Nonnengardt. Arithmetisch definierte Graphen über rationalen Funktionenkörpern. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1994.
- [PS83] I. Piatetski-Shapiro. Complex representations of $GL(2, K)$ for finite fields K . Number 16 in Contemporary Mathematics. AMS, 1983.
- [Ser67] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, 1967.
- [Ser80] J.-P. Serre. *Trees*. Springer, 1980.
- [Sma91] C. Small. *Arithmetic of finite fields*. Pure and applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., 1991.
- [Tan67] S. Tanaka. Construction and classification of irreducible representations of the special linear group of the second order over a finite field. *Osaka Journal of Mathematics*, 1967.
- [Wei70] A. Weil. On the analogue of the modular group in characteristic p . In *Proc. Conf. in honour of M. Stone*. Springer, 1970.