UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Staatsexamensarbeit

Experimente in der Zahlentheorie:
Teilbarkeit, Quadratfreiheit und Primzahlverteilung

Frank Jahn

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

1 Einleitung

1.1 Einleitung

Die Zahlentheorie gilt als die mathematische Königsdisziplin und bringt oft einfach verständliche, jedoch schwer zu beweisende Aussagen zum Vorschein. Gerade im schulischen Bereich verzichtet man daher wegen Zeitmangel und fehlenden Leitfäden für die Unterrichtsgestaltung komplett auf dieses große Feld der Mathematik. In dieser Staatsexamensarbeit werden deshalb interessante und einfach zu formulierende Aussagen aus der sogenannten „elementaren Zahlentheorie“aufgegriffen und aufbereitet. Wir beginnen im zweiten Kapitel die beiden Eigenschaften Quadratfreiheit und Teilerfremdheit zu untersuchen und werden zu einem verblüffenden Ergebnis kommen. Im dritten Kapitel steht die Primzahlfunktion im Mittelpunkt, die die Mathematiker bis heute beschäftigt, und im nachfolgenden Kapitel untersuchen wir das Wachstum der Primfaktoren. Im letzten Teil der Arbeit werden die Themen aus den vorherigen Abschnitten erneut aufgegriffen und in einer für Schüler angemessenen Form präsentiert. Diese Arbeit kann und soll auch als Anleitung und Anregung für Lehrer verstanden werden, diese Themen zum Inhalt einer Mathematik AG in der Oberstufe zu machen. Deswegen sind an vielen Stellen didaktische Hinweise zu finden, wie man den Schülern die nicht immer einfachen Aussagen trotz fehlendem Vorwissen veranschaulichen kann. Auch leitet diese Arbeit zum Experimentieren an, denn kaum ein Mathematiker findet Lösungen für Probleme, ohne verschiedene Methoden und Verfahren auszuprobieren und sie dann so zu wählen, dass er auf eine möglichst einfache Art und Weise ein Ergebnis erzielt. Gerade in der heutigen Zeit bietet es sich an, mit Schülern an Computern besondere Eigenschaften von Funktionen herauszuarbeiten und graphisch darzustellen, um somit Vermutungen aufzustellen, welche dann bewiesen werden.
Für die ganze Arbeit gelten, wenn nicht anders angegeben, folgende Notationen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$
- $\mathbb{P} := \{n \in \mathbb{N} | n \text{ ist Primzahl}\}$
- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist $[x]$ definiert als der ganzzahlige Anteil von x und $\{x\} := x - [x]$.
- Seien $m, n \in \mathbb{N}$, dann bedeutet $m|n$, dass m ein Teiler von n ist.

1.2 Danksagung

Ich bedanke mich an erster Stelle bei Herrn Professor Gekeler für das sehr interessante Thema und die exzellente Betreuung während des ganzen Studiums. Weiterhin bedanke ich mich bei Johannes Lengler für die vielen Ratschläge und Diskussionen, die diese Arbeit entscheidend geprägt haben. Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meiner Freundin Luisa Kleine, die mit ihrem sprachlichen Talent so manche Formulierung entscheidend verbessert hat und natürlich bei meinen Eltern, die mich während meines ganzen Studiums stets unterstützt und motiviert haben.

2 Wahrscheinlichkeiten für Teilerfremdheit und Quadratfreiheit

In diesem Kapitel interessieren wir uns vor allem für die Wahrscheinlichkeiten, mit denen zwei zufällig ausgewählte Zahlen teilerfremd sind, bzw. eine zufällig ausgewählte Zahl quadratfrei ist. Auf den ersten Blick haben die beiden Eigenschaften „Teilerfremdheit“und „Quadratfreiheit“nicht viel gemeinsam, jedoch wird sich im Laufe des Kapitels herausstellen, dass auf der Ebene der Wahrscheinlichkeiten enge Zusammenhänge bestehen. Bevor wir uns jedoch die Probleme genauer betrachten, befassen wir uns mit den Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion, da uns diese im Laufe der Beweisführungen immer wieder begegnen wird. In vielen Beweisen des Kapitels halten wir uns grob an die unausgearbeitete Vorgehensweise von [GEKELER] in Kap.7 & 11, falls nicht, wird darauf hingewiesen.

2.1 Die Riemannsche Zetafunktion

2.1.1 Definition
Die Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$$

heißt Riemannsche Zetafunktion. Sie ist definiert für $s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1$, *und die Summe konvergiert für diese* s *absolut (Beweis siehe [EDWARDS] Kap. 1.4).*

Der folgende Satz über $\zeta(s)$ ist von großer Bedeutung für unsere gesuchten Aussagen und wurde erstmals von Euler im Jahr 1735 gezeigt.

2.1.2 Satz
Es gilt

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Um diese Aussage zu beweisen, zeigen wir zunächst das folgende Lemma:

2.1.3 Lemma

Sei $\triangle = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u, v \geq 0,\ u+v \leq \frac{\pi}{2}\}$ *mit Innerem* $\mathring{\triangle} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u, v > 0,\ u+v < \frac{\pi}{2}\}$ *und sei* $\mathring{I} := (0,1)$ *das Einheitsintervall. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : (u,v) \mapsto \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right)$$

eine Bijektion von $\mathring{\triangle}$ *nach* $\mathring{I} \times \mathring{I} = (0,1) \times (0,1)$.

Beweis.
Der Cosinus ist auf $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallend. Deshalb folgt aus $v < \frac{\pi}{2} - u$:

$$\cos(v) > \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u,$$

d.h. $\frac{\sin u}{\cos v} < 1$. Analog folgt $\frac{\sin v}{\cos u} > 1$, da der Sinus in diesem Intervall streng monoton wachsend ist. Wir setzen nun $x := \frac{\sin u}{\cos v}$, $y := \frac{\sin v}{\cos u}$ und erhalten:

$$\sin^2 u = x^2 \cos^2 v \quad \text{und} \quad \sin^2 v = y^2 \cos^2 u$$

Da $1 = \cos^2 v + \sin^2 v$ gilt, können wir $\sin^2 v$ ersetzen und einige Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned}
& 1 = \cos^2 v + y^2 \cos^2 u \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 v = 1 - y^2 \cos^2 u \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 v = 1 - y^2(1 - \sin^2 u) \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 v = 1 - y^2(1 - x^2 \cos^2 v) \\
\Leftrightarrow\ & (1 - x^2 y^2) \cos^2 v = 1 - y^2 \\
\Leftrightarrow\ & \cos v = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2 y^2}}
\end{aligned}$$

Schließlich bekommen wir:

$$v = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2 y^2}} \right). \tag{2.1}$$

Analog erhält man aus $1 = \cos^2 u + \sin^2 u$:

$$u = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - x^2 y^2}} \right). \tag{2.2}$$

Die Gleichungen (2.1) und (2.2) liefern uns somit das Linksinverse Φ^{-1} zu Φ.

Um zu zeigen, dass Φ^{-1} auch Rechtsinverse zu Φ ist, rechnen wir nach, dass $\Phi \circ \Phi^{-1} = id$ gilt. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Phi^{-1}(x,y) &= \Phi\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}\right), \arccos\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}\right)\right) \\
&= \left(\frac{\sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}\right)\right)}, \frac{\sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}\right)\right)}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}\right)\right)}}{\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}}, \frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}\right)\right)}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{1-\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}}{\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}}, \frac{\sqrt{1-\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x^2\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}}{\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}}, \frac{\sqrt{y^2\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}}\right) \\
&= (x,y)\,.
\end{aligned}$$

Hierbei können wir auf Betragsstriche verzichten, da x und y stets positiv sind. Also ist Φ^{-1} Links- und Rechtsinverses und somit Umkehrabbildung zu Φ. $\square$

Nun können wir Satz 2.1.2 beweisen:

2.1.4 Beweis von Satz 2.1.2

Der folgende Beweis stammt von Calabi aus dem Jahr 1985. Er besteht darin, das Doppelintegral über die Funktion $\frac{1}{1-x^2y^2}$ auf zwei verschiedene Arten zu berechnen. Hierfür sei $I = [0,1]$ und $I_\epsilon = [0, 1-\epsilon]$ mit $1 > \epsilon > 0$.

1. Es gilt:
$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(x^2y^2\right)^i = \frac{1}{1-x^2y^2}, \ \forall (x,y) \in I_\epsilon \times I_\epsilon.$$

   Mit der Summenformel der geometrischen Reihe
$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \text{ mit } |q| < 1$$

folgt dies direkt, wenn wir $q = x^2y^2$ setzen. Insbesondere ist dann die Voraussetzung an q erfüllt, da x und y in I_ϵ liegen sollen, und die Summe ist absolut konvergent. Mit Hilfe dieser Umformung und der absoluten Konvergenz $(*)$ können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{I_\epsilon}\int\limits_{I_\epsilon} \frac{1}{1-x^2y^2} dxdy &= \int\limits_{I_\epsilon}\int\limits_{I_\epsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \left(x^2y^2\right)^i \; dxdy \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{I_\epsilon}\int\limits_{I_\epsilon} x^{2i}y^{2i} \; dxdy \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-\epsilon)^{2i+1}}{(2i+1)^2}
\end{aligned}$$

Obige Summe ist ebenfalls absolut konvergent (#), da der Zähler betragskleiner als eins ist und der Nenner quadratisch wächst. Wir erhalten nun das gesuchte Integral, wenn wir ϵ gegen 0 gehen lassen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{I}\int\limits_{I} \frac{1}{1-x^2y^2} dxdy &= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{I_\epsilon}\int\limits_{I_\epsilon} \frac{1}{1-x^2y^2} dxdy \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-\epsilon)^{2i+1}}{(2i+1)^2} \\
&\overset{(\#)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2}
\end{aligned}$$

Dies ist eine Summe über die quadratischen Kehrwerte aller ungeraden natürlichen Zahlen. Diese können wir so ausdrücken, dass wir die Summe über alle natürlichen Zahlen nehmen und davon die die Summe der geraden natürlichen Zahlen wieder abziehen. Es ergibt sich also:

$$\sum_{i\geq 0} \frac{1}{(2i+1)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n)^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\zeta(2).$$

2. Nun verwenden wir die Bijektion Φ aus Lemma 2.1.3, um das Integral mit Hilfe einer Koordinatentransformation zu berechnen. Dazu benötigen wir zuerst die Jacobi-Matrix $J_\Phi(u,v)$. Hierbei benutzen wir direkt die Notationen wie im Lemma, also $x = \frac{\sin u}{\cos v}$ und $y = \frac{\sin v}{\cos u}$. Dann ist

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \\ \frac{\sin v \sin u}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{pmatrix}$$

die gesuchte Jacobi-Matrix mit Determinante

$$\det\left(J_\Phi(u,v)\right) = \frac{\cos u}{\cos v}\cdot\frac{\cos v}{\cos u} - \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v}\cdot\frac{\sin v \sin u}{\cos^2 u} = 1 - \frac{\sin^2 u}{\cos^2 v}\cdot\frac{\sin^2 v}{\cos^2 u} = 1 - x^2y^2.$$

Führen wir nun die Koordinatentransformation Φ aus, so wird $I \times I$ nach $\triangle = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u,v \geq 0,\ u+v \leq \frac{\pi}{2}\}$ abgebildet. Also gilt:

$$\int_I\int_I \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy = \int_\triangle \frac{\det\left(J_\Phi(u,v)\right)}{1-x^2y^2}\,dudv = \int_\triangle dudv = \text{ Fläche von } \triangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Vergleichen wir nun die Ergebnisse von 1. und 2., so erhalten wir

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \int_I\int_I \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy = \frac{\pi^2}{8},$$

d.h. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. □

2.2 Die Funktionen $\varphi(n)$ und $\mu(n)$

Bevor wir beginnen können, konkrete Überlegungen zu Wahrscheinlichkeiten durchzuführen, betrachten wir zunächst zwei besondere Funktionen. Beide haben Eigenschaften, die von Natur aus interessant sind und uns zusätzlich helfen, in späteren Beweisen Aussagen umzuformen. Ziel des Abschnitts wird darüber hinaus sein, eine Transformationsformel zu beweisen, welche auf den deutschen Mathematiker August Ferdinand Möbius zurückgeht.

2.2.1 Definition

Es sei für $n \in \mathbb{N}$ definiert:

$$\varphi(n) := \#\{d \in \mathbb{N} | 1 \leq d \leq n;\ ggT(d,n) = 1\}.$$

Die Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Eulersche φ-Funktion.

Eine interessante und nützliche Eigenschaft der oben definierten Funktion erhalten wir, wenn wir die Summe der Funktionswerte $\varphi(d)$ aller Teiler einer Zahl n betrachten. Auskunft darüber gibt das folgende Lemma, welches uns in späteren Beweisen noch von Nutzen sein wird.

2.2.2 Lemma (Summe über $\varphi(n)$)
Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Beweis.
Wir definieren für $d|n$ die Menge $S(d) := \{i \in \mathbb{N}|\ 1 \leq i \leq n;\ ggT(i,n) = d\}$. Dann ist $\#S(d) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ nach Definition von $S(d)$ und $\dot{\bigcup\limits_{d|n}} S(d) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Die Disjunktheit $(*)$ folgt aus folgendem Widerspruch:
Angenommen es existierte ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $i \in S(d_1)$ und $i \in S(d_2)$ mit $d_1 \neq d_2$, wobei d_1 und d_2 Teiler von n sind. Dann würde gelten:

$$ggT(i,n) = d_1, \text{ da } i \in S(d_1) \text{ und } ggT(i,n) = d_2, \text{ da } i \in S(d_2).$$

Also folgt $d_1 = d_2$ im Widerspruch zur Annahme, da der größte gemeinsame Teiler eindeutig bestimmt ist.
Nun gilt:

$$n = \# \dot{\bigcup_{d|n}} S(d) \overset{(*)}{=} \sum_{d|n} \#S(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Es ist nun aber egal, ob d alle Teiler von n durchläuft und man $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ betrachtet, oder ob $d' := \frac{n}{d}$ alle Teiler von n durchläuft und man $\varphi(d')$ betrachtet. Somit ergibt sich:

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n} \varphi(d') = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

□

Bevor wir uns der zweiten namensgebenden Funktion dieses Abschnitts zuwenden, definieren wir zwei Funktionen, die uns eine einfachere Darstellunge erlauben und auf die wir insbesondere in Kapitel 4 wieder zurückkommen werden.

2.2.3 Definition
Für $n = \prod\limits_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p}$, $e_p \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \omega :& \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \\ & n \mapsto \#\{p \in \mathbb{P}|\ e_p \neq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega :&\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0\\ &n \mapsto \sum_{p\in\mathbb{P}} e_p.\end{aligned}$$

Also beschreibt $\omega(n)$ die Anzahl verschiedener Primfaktoren und $\Omega(n)$ die Anzahl der Primfaktoren unter Berücksichtigung der Vielfachheiten e_p.

Nun führen wir die zweite wichtige Funktion ein, die ein essentieller Bestandteil der Transformationsformel sein wird.

2.2.4 Definition
Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $\mu : \mathbb{N}_0 \to \{\pm 1, 0\}$ definiert als:

$$n \mapsto \begin{cases}(-1)^{\omega(n)} & n \text{ quadratfrei}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die Funktion μ heißt Möbius-Funktion und offensichtlich ist sie schwach multiplikativ, d.h. für zwei natürliche Zahlen m, n mit $ggT(m,n) = 1$ gilt:

$$\mu(m \cdot n) = \mu(m)\mu(n).$$

Auch hier ist das Betrachten der Summe über die $\mu(n)$ analog zu der Summe über die $\varphi(n)$ in Lemma 2.2.2 interessant und nützlich zugleich.

2.2.5 Lemma (Summe über $\mu(d)$)
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases}1 & n = 1\\ 0 & n \neq 1.\end{cases}$$

Beweis.
Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion über $\omega(n)$.
Induktionsanfang:

Die Aussage

$$\omega(n) = 0 \;\Leftrightarrow\; n = 1$$

ist richtig, da 1 die einzige Zahl ist, bei der die Vielfachheiten der Primzahlen in der eindeutigen Produktdarstellung alle Null sind. Also gilt natürlich auch

$$\sum_{d|1} \mu(d) = (-1)^0 = 1.$$

Ebenso gilt

$$\omega(n) = 1 \;\Rightarrow\; n = p^{e_p},\; e_p > 0$$

und damit ist

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p^{e_p}} \mu(d) = \mu(1)+\mu(p)+\mu(p^2)+\cdots+\mu(p^{e_p}) = 1+(-1)+0+\cdots+0 = 0. \quad (IV)$$

Induktionsschritt: $n \to n+1,\; n \geq 1$

Für $\omega(n) > 1$, d.h. $n = p^{e_p} \cdot m$ mit $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $p \not| m$ ergibt sich, da man die Teiler von n in beliebiger Reihenfolge durchlaufen kann und die Möbius-Funktion schwach multiplikativ $(*)$ ist:

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} &= \sum_{d'|p^{e_p}} \sum_{d''|m} \mu(d' \cdot d'') \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{d'|p^{e_p}} \sum_{d''|m} \mu(d')\mu(d'') \\
&= \left(\sum_{d'|p^{e_p}} \mu(d')\right) \cdot \left(\sum_{d'|m} \mu(d'')\right) \\
&\overset{IV}{=} 0 \cdot \left(\sum_{d'|m} \mu(d'')\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Schließlich können wir die Transformationsformel der Möbius-Inversion herleiten, die uns im nächsten Abschnitt einen Beweis erleichtern wird.

2.2.6 Satz (Möbius-Inversion)
Sind f, F zwei arithmetische Funktionen, also Abbildungen von den natürlichen in die reellen Zahlen, so sind äquivalent:

1. $F(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

2. $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis.
Sei 1. erfüllt, dann gilt, da es egal ist, in welcher Reihenfolge man die Teiler von n durchläuft:

$$\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\sum_{k|\frac{n}{d}} f(k) \right) = \sum_{\substack{k,d \\ kd|n}} \mu(d) f(k) = \sum_{k|n} f(k) \sum_{d|\frac{n}{k}} \mu(d) \overset{2.2.5}{=} f(n).$$

Die Umkehrung ergibt sich analog. □

2.3 Asymptotische Äquivalenz und mittlere Ordnung

Mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse können wir jetzt die Begriffe „asymptotische Äquivalenz“ und „mittlere Ordnung“ einführen. Mit diesen werden wir in der Lage sein, eine Art Erwartungswert bzw. erwartetes Verhalten für Funktionen anzugeben, was uns nicht nur in diesem Kapitel behilflich sein wird.

2.3.1 Definition

Zwei Funktionen f und g auf einer nach oben unbeschränkten Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißen asymptotisch äquivalent, falls gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Wir schreiben hierfür $f \sim g$. Weiter schreiben wir $f = \mathcal{O}(g)$, wenn es ein $c \in \mathbb{R}^+$ und ein $x_0 \in D$ gibt, sodass für alle $x > x_0$ aus D gilt:

$$|f(x)| \leq c|g(x)|.$$

Das Symbol $\mathcal{O}(g)$ heißt Landau-Symbol.

2.3.2 Definition

Seien f, g reelle Funktionen. Dann hat f mittlere Ordnung g, falls gilt:

$$\sum_{n \leq x} f(n) \sim \sum_{n \leq x} g(n).$$

Da die mittlere Ordnung ein Konzept aus der Heuristik ist, machen wir folgende Bemerkung.

2.3.3 Bemerkung (Mittlere Ordnung)
Genau genommen gibt es nicht „die“ mittlere Ordnung, sondern unter Umständen beliebig viele. Die Funktion g aus der Definition beschreibt nämlich lediglich den Mittelwert von f in einer Umgebung von x, welcher nicht zwangsläufig nur durch g gut approximiert werden kann. Da wir jedoch in unserem Vorgehen stets auf eine bestimmte Ordnung hinaus wollen, sprechen wir trotzdem von „der“ mittleren Ordnung einer Funktion.

In den nächsten Teilen des Kapitels tauchen nun oft unendliche Produkte auf, wesewegen wir zur absoluten Konvergenz dieser eine Bemerkung machen.

2.3.4 Bemerkung (Absolute Konvergenz unendlicher Produkte)
Sei $P := \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ ein unendliches Produkt. Man kann zeigen (siehe [JAENICH] Kap. 9), dass das Produkt P genau dann absolut konvergiert, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Insbesondere dürfen wir bei absoluter Konvergenz von Prdukten ebenso umordnen, wie wir es von absolut konvergenten Summen gewöhnt sind.

Um nun die mittlere Ordnung von $\varphi(n)$ ausrechnen zu können, brauchen wir noch ein Lemma:

2.3.5 Lemma
Es gilt:

$$\zeta(2) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}.$$

Beweis.
Die Aussage ist der Spezialfall $s = 2$ des später bewiesenen Satzes 3.1.2.

□

Jetzt können wir die mittlere Ordnung von $\varphi(n)$ berechnen, welche entscheidend für den nächsten Abschnitt sein wird und uns wieder auf die in Abschnitt 2.1 angesprochene Zeta-Funktion führt.

2.3.6 Satz (Mittlere Ordnung von $\varphi(n)$)
Für die Eulersche φ-Funktion gilt:

i) Ihre mittlere Ordnung ist gegeben durch:

$$g(x) = \frac{6}{\pi^2}x.$$

ii) Genauer gilt sogar die Formel

$$\sum_{n \le x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + \mathcal{O}(x \log x).$$

Beweis.
Wir zeigen die Aussagen in 4 Schritten, in denen wir nacheinander die Summe abschätzen. Hierbei nutzen wir z.T. andere Methoden als in [GEKELER], weil wir auf die Einführung Dirichlet-Reihen verzichtet haben.

1. Nach Lemma 2.2.2 gilt:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

   Setzen wir $f(n) = \varphi(n)$ und $F(n) = n$, so erhalten wir mit der Möbius-Inversion aus Satz 2.2.6 die Aussage

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = \sum_{d=\frac{n}{m}} \mu(d)m. \qquad (*)$$

   Ausgehend von dieser ist, wenn wir bei $(**)$ die gaußsche Summenformel $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ benutzen,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} \varphi(n) \overset{(*)}{=} \sum_{n \le x} \sum_{d=\frac{n}{m}} \mu(d)m &= \sum_{d \le x} \mu(d) \sum_{m \le \frac{x}{d}} m \\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{2} \sum_{d \le x} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right] \left[\frac{x}{d} + 1\right] \\
&\le \sum_{d \le x} \mu(d) \left(\frac{x}{d} + 1\right) \left(\frac{x}{d} + 2\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{d \le x} \mu(d)\frac{x^2}{d^2} + \frac{3}{2} \sum_{d \le x} \mu(d)\frac{x}{d} + \sum_{d \le x} \mu(d)2 \\
&= \frac{1}{2}x^2 \sum_{d \le x} \frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{3}{2}x \sum_{d \le x} \frac{\mu(d)}{d} + \mathcal{O}(x). \qquad (\#)
\end{aligned}$$

2. Um die erste Summe abzuschätzen, benutzen wir:

$$\frac{1}{\zeta(2)} \overset{2.3.5}{=} \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Sei $a_n := \begin{cases} -\frac{1}{n^2} & n \in \mathbb{P}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^2} < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und damit nach Bemerkung 2.3.4 auch das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$. Betrachten wir nun das Produkt, so stellen wir fest, dass wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung das Inverse jeder Quadratzahl gebildet wird. Das Vorzeichen hängt von der Anzahl der Faktoren $\frac{1}{p^2}$, die zur Bildung erforderlich waren, ab. Bei gerader Anzahl ist es positiv, sonst negativ. Durch die absolute Konvergenz des Produktes dürfen wir so umordnen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) &= \sum_{n \text{ quadratfrei}} \frac{(-1)^{\omega(n)}}{n^2} \\
&= \sum_{\substack{n \text{ quadratfrei} \\ \omega(n) \text{ gerade}}} -\frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n \text{ quadratfrei} \\ \omega(n) \text{ ungerade}}} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n^2}.
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d\in\mathbb{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \zeta(2)^{-1} + \mathcal{O}(x^{-1}),$$

weil wir den Restterm aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe gegen $\frac{1}{x}$ abschätzen können.

3. Um die zweite Summe abschätzen zu können, verwenden wir, dass für alle natürlichen Zahlen $d \geq 1$
$$\frac{\mu(d)}{d} \leq \frac{1}{d}$$
gilt. Dies liefert uns eine geeignete Abschätzung durch:
$$\sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d} \leq \sum_{d\leq x} \frac{1}{d} \leq 1 + \int_1^x \frac{1}{y} dy = 1 + \log(x) = \mathcal{O}(\log x).$$

4. Setzen wir die beiden Abschätzungen in (#) ein, so erhalten wir:
$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \varphi(n) &= \frac{1}{2}x^2 \sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{1}{2}x \sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d} + \mathcal{O}(x) \\
&= \frac{1}{2}\zeta(2)^{-1}x^2 + \frac{1}{2}x^2\mathcal{O}(x^{-1}) + \frac{1}{2}x\mathcal{O}(\log x) + \mathcal{O}(x) \\
&= \frac{1}{2}\zeta(2)^{-1}x^2 + \mathcal{O}(x) + \mathcal{O}(x\log x) + \mathcal{O}(x) \\
&\overset{2.1.2}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\pi^2}x^2 + \mathcal{O}(x\log x) \\
&= \frac{3}{\pi^2}x^2 + \mathcal{O}(x\log x).
\end{aligned}$$

□

2.4 Wahrscheinlichkeiten für Teilerfremdheit und Quadratfreiheit

Nachdem wir nun alle nötigen Vorbereitungen gemacht haben, können wir uns mit den eigentlichen Fragestellungen des Kapitels beschäftigen. Wir beginnen mit der Wahrscheinlichkeit für Teilerfremdheit.

2.4.1 Korollar (Wahrscheinlichkeiten für Teilerfremdheit)
Es gilt:
$$P(m, n \text{ } teilerfremd) := \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \text{ } m,n \leq x \text{ } mit \text{ } ggT(m,n) = 1\}}{\#\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \text{ } m,n \leq x\}} = \frac{6}{\pi^2}$$
Hierbei können wir $P(m, n$ teilerfremd) als Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte natürliche Zahlen m, n teilerfremd sind interpretieren und erhalten:
$$P(ggT(m,n) = 1) = \zeta(2)^{-1} = \frac{6}{\pi^2} \approx 60,793\%.$$

Beweis.
Wir beweisen die Aussage, in dem wir die relative Häufigkeit aller teilerfremden Zufallspaare natürlicher Zahlen (m, n) innerhalb der Grundgesamtheit aller Zufallspaare und dies dann durch die mittlere Ordnung der Eulerschen φ-Funktion ausdrücken, die wir kennen. Hierbei wird bei $(*)$ ausgenutzt, dass die Menge
$\{m \in \mathbb{N} | x > m > n \text{ mit } ggT(m, n) = 1\}$ gleichmächtig mit der Menge
$\{n \in \mathbb{N} | x > n > m \text{ mit } ggT(m, n) = 1\}$ ist und der Fall $m = n$ mit $ggT(m, n) = 1$ nur für $m = n = 1$ auftritt. Darüber hinaus ist die Mächtigkeit der Menge
$\{m \in \mathbb{N} | x > m > n \text{ mit } ggT(m, n) = 1\}$ gegeben durch $\sum\limits_{m \leq x} \varphi(m)$, weil die φ-Funktion genau die Zahlen n zählt, die zu m teilerfremd sind und somit die Summe der Anzahl aller zu m teilerfremden Zahlen bis x entspricht. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
P(m, n \text{ teilerfremd}) &= \lim_{x \to \infty} \frac{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m, n \leq x \text{ mit } ggT(m, n) = 1\}}{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m, n \leq x\}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x > m > n \text{ mit } ggT(m, n) = 1\}}{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m, n \leq x\}} \right. \\
&\quad + \frac{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x > n > m \text{ mit } ggT(m, n) = 1\}}{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m, n \leq x\}} \\
&\quad \left. + \frac{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x > m = n \text{ mit } ggT(m, n) = 1\}}{\#\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} |\ m, n \leq x\}} \right) \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x \to \infty} \left(2 \cdot \frac{\sum\limits_{m \leq x} \varphi(m)}{[x]^2} + \frac{1}{[x]^2} \right) \\
&\overset{2.3.6}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{6}{\pi^2} x^2 + \mathcal{O}(x \log x) + 1}{[x]^2} \\
&= \frac{6}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

□

Nachdem wir nun konkret einen Wert für die Wahrscheinlichkeit der Teilerfremdheit angeben konnten, wollen wir nun ebenso eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit der Quadratfreiheit machen, welche nicht ganz so einfach zu beweisen ist wie das vorherige Korollar.

2.4.2 Satz (Wahrscheinlichkeit für Quadratfreiheit)
Es gilt:

$$P(n \textit{ quadratfrei}) := \lim_{x \to \infty} \frac{\#\{n \in \mathbb{N} | n \leq x \textit{ mit } n \textit{ quadratfrei}\}}{\#\{n \in \mathbb{N} | n \leq x\}} = \zeta(2)^{-1}.$$

Analog zu Satz 2.4.1 können wir P(n quadratfrei) als Wahrscheinlichkeit auffassen, dass eine zufällig ausgewählte Zahl n quadratfrei ist.

Beweis.

1. n quadratfrei $\Leftrightarrow \; \mu(n) = \pm 1 \; \Leftrightarrow \; \mu(n)^2 = 1$, also

$$P(n \text{ quadratfrei}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{n \in \mathbb{N} | n \leq x \text{ mit } n \text{ quadratfrei}\}}{\#\{n \in \mathbb{N} | n \leq x\}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{n \leq x} \mu(n)^2}{[x]} \right).$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Darstellung $n = qm^2$, wobei $m, q \in \mathbb{N}$ und q quadratfrei ist. Hierbei ist q durch die Darstellung

$$q = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ e_p \text{ ungerade}}} p$$

gegeben, da in m^2 bereits alle quadratischen Primfaktoren aus n enthalten sind.

Dann ist für dieses n

i)

$$\mu(n)^2 = \begin{Bmatrix} 1 & m = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} \overset{2.2.5}{=} \sum_{d|m} \mu(d),$$

und für $d \in \mathbb{N}$ gilt:

ii)

$$d|m \; \Leftrightarrow \; d^2|m^2 \; \Leftrightarrow \; d^2|m^2 q \; \Leftrightarrow \; d^2|n.$$

3. Nun können wir die Summe in 1. umformen. Hierbei nutzen wir bei $(*)$, dass es genügt, d durch alle Zahlen bis x laufen zu lassen, wenn wir für jedes d den Faktor $\left[\frac{x}{d^2}\right]$ heranmultiplizieren, der angibt, wie viele Zahlen die Bedingung $d^2|n$ in der ersetzten Summe erfüllt hätten. Bei $(**)$ haben wir $\left\{\frac{x}{d^2}\right\}$ durch 1 abgeschätzt, was uns die Wachstumsabschätzung $\sum\limits_{d \leq \sqrt{x}} 1 = \mathcal{O}(\sqrt{x})$ liefert. Den Wert für $\sum\limits_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2}$ kennen wir bereits aus dem Beweis von 2.3.6. Also ergibt sich, wenn wir im Folgenden $m(n)$ statt m schreiben, da m implizit von n abhängt:

$$\sum_{n \leq x} \mu(n)^2 \overset{i)}{=} \sum_{n \leq 1} \sum_{d|m(n)} \mu(d)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{ii)}{=} \sum_{n\leq x} \sum_{d^2|n} \mu(d) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{d\leq\sqrt{x}} \mu(d) \left[\frac{x}{d^2}\right] \\
&= \sum_{d\leq\sqrt{x}} \mu(d) \left(\frac{x}{d^2} - \left\{\frac{x}{d^2}\right\}\right) \\
&\overset{(**)}{=} x \sum_{d\leq\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathcal{O}(\sqrt{x}) \\
&\overset{2.3.6}{=} x \left(\zeta(2)^{-1} + \mathcal{O}(x^{-\frac{1}{2}})\right) + \mathcal{O}(\sqrt{x}) \\
&= x\zeta(2)^{-1} + \mathcal{O}(\sqrt{x}).
\end{aligned}
$$

4. Kommen wir nun wieder zurück zur eigentlichen Aussage in 1., so erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgendermaßen:

$$
P(n \text{ quadratfrei}) \overset{1.}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{n\leq x} \mu(n)^2}{[x]} \right) \overset{3.}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x\zeta(2)^{-1} + \mathcal{O}(\sqrt{x})}{[x]} \right) = \zeta(2)^{-1}.
$$

□

2.4.3 Bemerkung

Wir haben also insgesamt, dass die relativen Häufigkeiten in 2.4.1 und 2.4.2 gegen denselben Wert konvergieren, also die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Zahl quadratfrei ist, ist genauso hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig gewählte Zahlen zueinander teilerfremd sind. In Kapitel 5 werden wir anschaulich sehen, warum diese beiden Wahrscheinlichkeiten so eng miteinander verknüpft sind und die Gleichheit durch einen anderen Beweis heuristischer Art zeigen.

3 Der Primzahlsatz

In diesem Kapitel wollen wir eine Abschätzung für die Primzahlfunktion $\pi(x)$ herleiten, was ein wichtiges Ergebnis der analytischen Zahlentheorie ist. Der Kern des Beweises hierfür stammt von D. J. Newman aus dem Jahr 1980, ist also noch relativ neu. Hier werden wir uns mit der Fassung von D. Zagier befassen (siehe [ZAGIER]), die weitere Vereinfachungen ausnutzt. Wir werden vor allem sehen, dass wir auf viele Ergebnisse der komplexen Analysis zurückgreifen müssen, um unser Ziel zu erreichen. Zunächst jedoch werden wir neben $\zeta(s)$ noch zwei weitere Funktionen untersuchen, die uns dabei helfen, $\pi(x)$ korrekt abzuschätzen.

3.1 Die Funktionen $\Phi(s)$ und $\vartheta(x)$

3.1.1 Definition
Seien $s \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$, so definieren wir:

$$\Phi(s) := \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s}, \quad \vartheta(x) := \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \log p.$$

Man sieht direkt, dass $\Phi(s)$ genauso wie $\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert und somit $\Phi(s)$ sowie $\zeta(s)$ in diesem Gebiet holomorph sind.

Nun beweisen wir zunächst die allgemeine Version des Lemmas 2.3.5:

3.1.2 Lemma (Produktschreibweise der Zeta-Funktion)
Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Beweis.
Aufgrund der eindeutigen Faktorisierung der natürlichen Zahlen $(*)$ und der absoluten Konvergenz $(**)$ von $\zeta(s)$ in diesem Bereich haben wir:

$$\zeta(s) \overset{(*)}{=} \sum_{(e_p)_p \geq 0} \frac{1}{\left(\prod\limits_{p\in\mathbb{P}} p^{e_p}\right)^s} = \sum_{(e_p)_p\geq 0} \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{-e_p s}\right) \overset{(**)}{=} \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{(e_p)_p\geq 0} p^{-e_p s}\right) \overset{\mathrm{Re}(s)>1}{=} \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Hierbei muss man beachten, dass man über Tupel $(e_p)_p$ summiert, bei denen fast alle Einträge 0 sind. $\square$

Die nächsten Lemmata benötigen wir, um Aussagen über Eigenschaften der Funktionen $\Phi(s)$ und $\vartheta(x)$ zu machen, welche uns später helfen werden, den Primzahlsatz zu zeigen.

3.1.3 Lemma (Holomorphie der Zeta-Funktion für $\mathrm{Re}(s) > 0$)
Die Funktion

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}, \ s \in \mathbb{C}$$

besitzt eine holomorphe Fortsetzung für $\mathrm{Re}(s) > 0$. *Diese ist gegeben durch die Funktion*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right).$$

Beweis.
Im Folgenden nutzen wir die Schreibweise $[g(x)]_{t_2}^{t_1}$ für $g(t_1) - g(t_2)$. Dann haben wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{s-1} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{1-s} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left((n+1)^{-s+1} - n^{-s+1}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-s} \left((n+1)^{-s+1} - n^{-s+1}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} [x]_n^{n+1} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{1-s} x^{-s+1}\right]_n^{n+1} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n^s} [x]_n^{n+1} - \left[\frac{1}{1-s} x^{-s+1}\right]_n^{n+1}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right).
\end{aligned}$$

Die Summe bei $(*)$ ist eine Teleskopsumme, d.h. die Glieder heben sich fast alle gegenseitig auf. Übrig bleibt allein $(-1)^{-s+1} = -1$.
Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s) > 0$, da

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| &= \left| \int\limits_n^{n+1} s \left[-\frac{1}{su^s} \right]_n^x dx \right| \\
&= \left| s \int\limits_n^{n+1} \int\limits_n^x \frac{1}{u^{s+1}} du\ dx \right| \\
&\leq |s| \int\limits_n^{n+1} \int\limits_n^x \left| \frac{1}{u^{s+1}} \right| du\ dx \\
&\overset{(**)}{\leq} |s| \int\limits_n^{n+1} \int\limits_n^x \left| \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}} \right| du\ dx \\
&= \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}} \int\limits_n^{n+1} \int\limits_n^x 1 du\ dx \\
&\leq \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}.
\end{aligned}$$

Bei $(**)$ haben wir ausgenutzt, dass die Funktion $\left|\frac{1}{u^{s+1}}\right|$ offensichtlich für $u = n$ ihr Maximum hat, da dann der Nenner am kleinsten ist. Wegen der so bewiesenen absoluten Konvergenz der Reihe kann die Funktion $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ mit dieser Formel holomorph für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ fortgesetzt werden. □

Im nächsten Schritt versuchen wir eine grobe Abschätzung für $\vartheta(x)$ zu finden, die wir im Verlauf dieses Kapitels aber noch verbessern können. Zunächst reicht aber folgendes Lemma aus:

3.1.4 Lemma (Abschätzung für $\vartheta(x)$)
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vartheta(x) = \mathcal{O}(x).$$

Beweis.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist nach dem binomischen Lehrsatz (siehe [HEUSER] Satz 7.4), angewandt bei $(*)$,

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \geq \binom{2n}{n},$$

da alle Binomialkoeffizienten positiv sind. Aber

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p\in\mathbb{P}}} p$$

gilt, weil $\binom{2n}{n}$ eine natürliche Zahl ist und keine Primzahl größer als n in $n!$ enthalten sein kann. Somit enthält $\binom{2n}{n}$ mindestens alle Primzahlen p mit $n < p \leq 2n$, was die Ungleichung zeigt. Wir erhalten also die Abschätzung

$$2^{2n} \geq \prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p\in\mathbb{P}}} p = \exp\left(\log\left(\prod_{\substack{n<p\leq 2n \\ p\in\mathbb{P}}} p\right)\right) = \exp\left(\sum_{\substack{n<p\leq 2n \\ p\in\mathbb{P}}} \log p\right) = e^{\vartheta(2n)-\vartheta(n)}.$$

Wenden wir nun darauf den Logarithmus an, so haben wir

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) \leq \log(2^{2n}) = 2n\log 2.$$

Jetzt können wir für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
\vartheta(2^m) &\overset{(**)}{=} \sum_{n=1}^{m} (\vartheta(2^n) - \vartheta(2^{n-1})) \\
&\overset{(\#)}{\leq} \sum_{n=1}^{m} 2^n \log 2 \\
&\overset{(+)}{=} (2^{m+1} - 2)\log 2 \\
&< 2^{m+1}\log 2.
\end{aligned}$$

Hier haben wir bei (#) die eben gezeigt Ungleichung für 2^{n-1} statt n angewendet, bei (**) konnten wir den Ausdruck durch eine Teleskopsumme schreiben, weil $\vartheta(1) = 0$ gilt und bei (+) haben wir die geometrische Summenformel $\sum\limits_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^b - q^a}{q-1}$ für $|q| < 1$ ausgenutzt.
Jetzt können wir für beliebiges reelles $x \geq 1$ ein m finden, sodass $2^{m-1} \leq x < 2^m$ erfüllt ist. Dies gibt uns

$$\vartheta(x) \leq \vartheta(2^m) < 2^{m+1}\log 2 = (4\log 2)2^{m-1} \leq (4\log 2)x,$$

und wir erhalten $\vartheta(x) = \mathcal{O}(x)$ wie gewünscht. □

Um später das analytische Theorem anwenden zu können, welches unseren Beweis stark abkürzen wird, müssen wir jetzt folgende Holomorphieeigenschaft zeigen:

3.1.5 Lemma/Bemerkung (Holomorphie von $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$)
Für komplexe Zahlen s mit $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ *ist die Funktion*

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$$

holomorph. D.h. es existieren auch für alle komplexen Zahlen mit Realteil 1 offene Umgebungen, also insbesondere auch für bestimmte komplexe Zahlen mit Realteil kleiner als 1, für die die Funktion holomorph ist.

Beweis.
Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ impliziert das konvergente Produkt aus Lemma 3.1.2, dass $\zeta(s)$ dort nullstellenfrei ist. Da wir Ableitungen von Produkten viel schwerer berechnen können als die von Summen, versuchen wir, durch die nachfolgenden Rechnungen das Produkt zu eliminieren und somit unsere Problemstellung auf Summen zu beschränken. Leiten wir die Funktion $\zeta(s)$ nun ab und nutzen die Produkdarstellung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\zeta(s)' &= \frac{d}{ds}\left(\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-e^{-s\log p}\right)^{-1}\right) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\left(\prod_{\substack{p'\in\mathbb{P}\\ p'\neq p}}\left(1-p'^{-s}\right)^{-1}\right)\cdot\frac{-\log p\cdot p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\zeta(s)\cdot\frac{-\log p}{p^s(1-p^{-s})} \\
&= -\zeta(s)\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^s-1}.
\end{aligned}$$

Nutzen wir dies, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^s-1} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{p^s\log p}{p^s(p^s-1)} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{p^s\log p-\log p+\log p}{p^s(p^s-1)} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{(p^s-1)\log p}{p^s(p^s-1)}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s} + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)} \\
&= \Phi(s) + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)}.
\end{aligned}
$$

Die hintere Summe konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, da der größte Exponent im Nenner $2s$ ist. Aus Lemma 3.1.3 folgt, dass $\zeta(s)$ meromorph fortsetzbar auf $\mathrm{Re}(s) > 0$ ist und einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$ hat. Also hat $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$ und bei allen Nullstellen von $\zeta(s)$. Somit kann man $\Phi(s)$ meromorph auf $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ fortsetzen. Sei nun $s_\alpha := 1 + i\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und sei $\mu \in \mathbb{Z}$ die Nullstellenordnung von $\zeta(s)$ in s_α. Dann folgt aus Lemma 3.1.3, dass μ nicht negativ ist, da sonst $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ für s_α eine weitere Polstelle hätte und nicht holomorph wäre.
Setzen wir nun

$$Z(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1},$$

so ist

$$Z'(s) = \zeta'(s) + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Insbesondere ist nach Lemma 3.1.3 $Z(s)$ holomorph für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und $Z(1) = z$ sowie $Z'(1) = z'$ mit endlichen $z, z' \in \mathbb{C}$. Somit erhalten wir

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{Z'(s)}{Z(s) + \frac{1}{s-1}} - \frac{1}{(s-1)^2 Z(s) + (s-1)}.$$

Sei $\epsilon > 0$. Es ergibt sich folgender Grenzwert:

$$
\begin{aligned}
i)\quad \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon\cdot\Phi(1+\epsilon) &= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \left(-\frac{\zeta'(1+\epsilon)}{\zeta(1+\epsilon)} - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}(p^{1+\epsilon}-1)} \right) \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \frac{\zeta'(1+\epsilon)}{\zeta(1+\epsilon)} - \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}(p^{1+\epsilon}-1)}}_{=0} \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \left(\frac{Z'(1+\epsilon)}{Z(1+\epsilon) + \frac{1}{1+\epsilon-1}} - \frac{1}{(1+\epsilon-1)^2 Z(1+\epsilon) + (1+\epsilon-1)} \right) \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{\epsilon Z'(1+\epsilon)}{Z(1+\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}} - \frac{\epsilon}{\epsilon^2 Z(1+\epsilon) + \epsilon} \right) \\
&= -\left(\frac{0\cdot Z'(1)}{Z(1) + \infty} - \frac{1}{0\cdot Z(1) + 1} \right) \\
&= -(0-1) = 1.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt bereits, dass $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ holomorph für $s = 1$ ist, da $\Phi(s)$ dort einen einfachen Pol hat. Weiter können wir nun in einer Umgebung von $1 + i\alpha$ ein holomorphes $K(s)$ finden, sodass

$$\zeta(s) = K(s)(s - (1 + i\alpha))^{\mu}$$

gilt. Insbesondere ist dann $K(1 + i\alpha)$ endlich und verschieden von Null. Somit erhalten wir als Ableitung

$$\zeta'(s) = K'(s)(s - (1 + i\alpha))^{\mu} + \mu K(s)(s - (1 + i\alpha))^{\mu-1}.$$

An der Stelle s_α genügt es, eine beliebige Richtungsableitung zu berechnen, weil $\Phi(s)$ meromorph für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ ist. Außerdem können wir die Berechnung gleichzeitig für s_α und das komplex konjugierte $\overline{s_\alpha}$ durchführen, da aufgrund der rellen Basis und des komplexen Exponenten $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$ gilt und sich somit auch die Polstellenordnung nicht ändert. Ist wieder $\epsilon > 0$, so erhalten wir analog zu *i)*:

$$\begin{aligned}
ii) \quad \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \cdot \Phi(1 + \epsilon \pm i\alpha) &= -\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \frac{\zeta'(1 + \epsilon \pm i\alpha)}{\zeta(1 + \epsilon \pm i\alpha)} - 0 \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \left(\frac{K'(1 + \epsilon \pm i\alpha)(1 + \epsilon \pm i\alpha - (1 \pm i\alpha))^{\mu}}{K(1 + \epsilon \pm i\alpha)(1 + \epsilon \pm i\alpha - (1 + \pm i\alpha))^{\mu}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu K(1 + \epsilon \pm i\alpha)(1 + \epsilon \pm i\alpha - (1 \pm i\alpha))^{\mu-1}}{K(1 + \epsilon \pm i\alpha)(1 + \epsilon \pm i\alpha - (1 + \pm i\alpha))^{\mu}} \right) \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \left(\frac{K'(1 + \epsilon \pm i\alpha)}{K(1 + \epsilon \pm i\alpha)} + \frac{\mu}{\epsilon} \right) \\
&= -\left(0 \cdot \frac{K'(1 \pm i\alpha)}{K(1 \pm i\alpha)} + \mu \right) \\
&= -\mu.
\end{aligned}$$

Ebenso können wir den Punkt $s_{2\alpha} = 1 + 2i\alpha$ mit Nullstellenordnung $\nu \geq 0$ betrachten und erhalten wie in *ii)*:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \cdot \Phi(1 + \epsilon \pm 2i\alpha) = -\nu.$$

Mit Hilfe der Ungleichung für $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \Phi(1 + \epsilon + ir\alpha) &= \Phi(1 + \epsilon - 2i\alpha) + 4\Phi(1 + \epsilon - i\alpha) + 6\Phi(1 + \epsilon) \\
&\quad + 4\Phi(1 + \epsilon + i\alpha) + \Phi(1 + \epsilon + 2i\alpha) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} (p^{2i\alpha} + 4p^{i\alpha} + 6p^0 + 4p^{-i\alpha} + p^{-2i\alpha})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} (p^{i\frac{\alpha}{2}} + p^{-i\frac{\alpha}{2}})^4 \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

können wir den Grenzübergang wie in $i)$, $ii)$, $iii)$ durchführen und erhalten für

$$
\lim_{\epsilon\to 0} \left(\epsilon \cdot \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \Phi(1+\epsilon+ir\alpha) \right) \geq 0
$$

die Ungleichung

$$
-\nu - 4\mu + 6 - 4\mu - \nu = 6 - 8\mu - 2\nu \geq 0.
$$

Da μ und ν nach Voraussetzung nicht negativ waren folgt sofort $\mu = 0$. Weil μ aber die Nullstellenordnung von $\zeta(1+i\alpha)$ war, folgt zusammen mit der Polstelle bei $s = 1$, dass $\zeta(s)$ nullstellenfrei für $\mathrm{Re}(s) = 1$ ist. □

3.2 Das analytische Theorem von Newman

Um nun in unserem Beweis den entscheidenden Schritt machen zu können, brauchen wir zunächst einen Satz, der erstmals 1980 von D. J. Newman in [NEWMAN] gezeigt wurde.

3.2.1 Satz (Analytisches Theorem von Newman)
Sei $f(t)$ $(t \geq 0)$ eine beschränkte und lokal integrierbare Funktion und $g(z) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ holomorph fortsetzbar auf $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Dann existiert $\int\limits_0^\infty f(t)dt$.

Beweis.
Sei $T > 0$ und

$$
g_T(z) := \int_0^T f(t)e^{-zt}dt.
$$

Nach Voraussetzung ist diese Funktion holomorph für alle z. Wir müssen nun zeigen, dass gilt

$$
\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0).
$$

Sei $R \in \mathbb{R}^+$ beliebig groß und sei ∂C der Rand des Gebietes

$$
C := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| \leq R, \ \mathrm{Re}(z) \geq -\delta\}
$$

mit $\delta > 0$ abhängig von R klein genug, sodass $g(z)$ auf ganz C holomorph ist. Dieses δ kann man finden, denn aufgrund der holomorphen Fortsetzbarkeit von $g(z)$ existieren Umgebungen für $\mathrm{Re}(s) = 0, |\operatorname{Im}(s)| \leq R$ auf denen $g(z)$ immer noch holomorph fortsetzbar ist. Man aus den unendlich vielen Umgebungen eine endliche Anzahl auswählen, die die Menge $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) = 0, |\operatorname{Im}(s)| \leq R\}$ überdecken, weil sie kompakt ist. Habe die kleinste dieser nun endlich vielen Umgebungen den Radius 2δ. Da der Radius dieser Umgebungen mindestens 2δ ist, existiert für jeden Punkt eine Umgebung mit mindestens Radius δ, auf der $g(z)$ noch holomorph fortsetzbar ist. Also ist dieser Radius unser gesuchtes δ.
Dann ist nach dem Cauchyschen Integralsatz (siehe [Freitag] Theorem 3.2):

$$\begin{aligned}
g(0) - g_T(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial C} \frac{g(z) - g_T(z)}{z - 0} dz \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial C} \frac{g(z) - g_T(z)}{z} e^{zT} dz \\
&\overset{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial C} \frac{g(z) - g_T(z)}{z} e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial C} (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ und $(**)$ haben wir holomorphe Funktionen hinzugefügt, die an der Stelle $z = 0$, an der die Funktion $\frac{1}{z}$ eine Polstelle hat, den Wert 1 haben. Also ändern sie an unserem Ergebnis nichts.
Wir betrachten nun nacheinander verschiedene Wege, um ∂C möglichst geschickt zu umlaufen, sodass wir das Integral ausrechnen können.

1. Auf dem Halbkreis $C_+ = \partial C \cap \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ ist die zu integrierende Funktion beschränkt durch $\frac{2B}{R^2}$ mit $B = \max\limits_{t \geq 0} |f(t)|$, da für $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $|z| = R$

$$\begin{aligned}
|g(z) - g_T(z)| &= \left| \int\limits_0^\infty f(t) e^{-zt} dt - \int\limits_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| \\
&= \left| \int\limits_T^\infty f(t) e^{-zt} dt \right| \\
&\overset{(\#)}{\leq} B \int\limits_T^\infty |e^{-zt}| dt \\
&= \frac{B e^{-\operatorname{Re}(z) T}}{\operatorname{Re}},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left|e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| &= e^{\operatorname{Re}(z)T}\cdot\left|\frac{z\overline{z}+z^2}{R^2z}\right| \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)T}\cdot\left|\frac{z(\overline{z}+z)}{R^2z}\right| \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)T}\cdot\left|\frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2}\right| \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)T}\cdot\frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2}\end{aligned}$$

gilt, wobei wir bei (#) die Standardabschätzung für Integrale $\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leq \int\limits_a^b |f(t)|dt$ (siehe auch [FREITAG] Bemerkung 1.5) benutzt haben. Also haben wir insgesamt

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_+}(g(z)-g_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_+}\left(|(g(z)-g_T(z))|\cdot\left|e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right|\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_+}\left(\frac{Be^{-\operatorname{Re}(z)T}}{\operatorname{Re}}\cdot e^{\operatorname{Re}(z)T}\cdot\frac{2\operatorname{Re}(z)}{R^2}\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2B}{R^2}\int\limits_{C_+}dz \\ &= \frac{B}{\pi R^2}\cdot\pi R \\ &= \frac{B}{R}.\end{aligned}$$

2. Sei nun $C_- = \partial C \cap \{\operatorname{Re}(z) < 0\}$. Hier betrachten wir $g(z)$ und $g_T(z)$ einzeln.

   Da $g_T(z)$ ganz ist, also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, können wir wegen der Transformationsinvarianz (siehe [FREITAG] Satz 1.6) C_- ersetzen durch den Halbkreis $C'_- = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = R,\ \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Dann gilt analog zu 1. für $\operatorname{Re}(z) < 0$

$$|g_T(z)| = \left|\int\limits_0^T f(t)e^{-zt}dt\right| \leq B\int\limits_0^T |e^{-zT}|dt = \frac{Be^{-\operatorname{Re}(z)T}}{|\operatorname{Re}(z)|},$$

   und deshalb

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_-} g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'_-}\left(|g_T(z)|\left|e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right|\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{Be^{-\operatorname{Re}(z)T}}{|\operatorname{Re}(z)|}\cdot e^{\operatorname{Re}(z)T}\cdot\frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2}\int\limits_{C'_-} dz \\
&= \frac{B}{\pi R^2}\cdot\pi R \\
&= \frac{B}{R}.
\end{aligned}
$$

3. Schließlich betrachten wir den letzten Integrand. Da

$$
g(z)\cdot\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\cdot\frac{1}{z}
$$

unabhängig von T ist, und e^{zT} für $\operatorname{Re}(z) < 0$ für große T gegen 0 konvergiert, erhalten wir:

$$
\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_-} g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} = 0.
$$

4. Nehmen wir nun 1., 2. und 3. zusammen, so bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)| &= \limsup_{T\to\infty}\left(\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_+}(g(z)-g_T(z))e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right|\right. \\
&\qquad + \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_-} g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\qquad \left. + \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_-} g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right|\right) \\
&\leq \limsup_{T\to\infty}\left(\frac{B}{R}+\frac{B}{R}+0\right) \\
&= \frac{2B}{R}.
\end{aligned}
$$

Da aber R beliebig war und B nach Konstruktion nicht von R abhängt, ergibt sich

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0), \text{ für } R \to \infty.$$

□

3.3 Der Primzahlsatz

Jetzt können wir das analytische Theorem benutzen, um folgende Integralexistenz nachzuweisen, welche uns im nachfolgenden Lemma eine genauere Abschätzung für $\vartheta(x)$ liefern wird.

3.3.1 Lemma (Konvergenz des Integrals $\int\limits_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}dx$)

Das Integral

$$\int\limits_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}dx$$

ist konvergent.

Beweis.
In diesem Beweis kommen nun viele unserer bisherigen Erkenntnisse zusammen. Sei $\mathrm{Re}(s) > 1$, dann ist, weil $\vartheta(x)$ für Werte x zwischen zwei Primzahlen konstant ist,

$$\Phi(s) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p^s} = \int\limits_1^\infty \frac{d\vartheta(x)}{x^s} \stackrel{(*)}{=} \left[\frac{\vartheta(x)}{x^s}\right]_1^\infty + s\int\limits_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}dx \stackrel{(**)}{=} s\int\limits_0^\infty e^{-st}\vartheta(e^t)dt.$$

Bei $(*)$ haben wir partiell integriert und bei $(**)$ haben wir die Substitution $x \mapsto e^t$ durchgeführt.
Wir setzen nun

$$f(t) := \vartheta(e^t)e^{-t} - 1,$$
$$g(z) := \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}.$$

Dann ist, wenn wir bei $(+)$ das oben berechnete Integral benutzen,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt &= \int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t}-1)e^{-zt}dt \\
&= \int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t(z+1)} - e^{-zt})dt \\
&\overset{(+)}{=} \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \int_0^\infty e^{-zt}dt \\
&= \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} \\
&= g(z).
\end{aligned}
$$

Das Lemma 3.1.5 liefert, falls wir dort $s = z+1$ setzen, dass $g(z)$ für $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ holomorph ist. Außerdem erhalten wir aus Lemma 3.1.4, dass gilt:

$$
\begin{aligned}
& \vartheta(x) = \mathcal{O}(x) \\
\Leftrightarrow\ & \vartheta(e^t) = \mathcal{O}(e^t).
\end{aligned}
$$

Also bekommen wir

$$
f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1 = \mathcal{O}(e^t)e^{-t} - 1 = \mathcal{O}(1).
$$

Insbesondere ist also $f(t)$ beschränkt.
Somit erfüllen $f(t)$ und $g(z)$ die Voraussetzungen des analytischen Theorems 3.2.1, d.h. das Integral

$$
\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t}-1)dt = \int_0^\infty \frac{\vartheta(e^t)-e^t}{e^t}dt = \int_0^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}dx,
$$

wobei wir die Substitution $t \mapsto \log x$ durchgeführt haben, existiert. □

Jetzt sind wir in der Lage, eine noch bessere Abschätzung für $\vartheta(x)$ zu beweisen, welche uns im Anschluss direkt Abschätzungen zum Beweis des Primzahlsatzes liefern wird.

3.3.2 Lemma ($\vartheta(x) \sim x$)
Es gilt

$$
\vartheta(x) \sim x.
$$

Beweis.
Angenommen, dass es für $\lambda > 1$ ein genügend großes x gäbe, sodass $\vartheta(x) \geq \lambda x$. Da $\vartheta(x)$ nicht fallend ist, ergäbe sich dann für diese x:

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt \overset{(*)}{=} \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - t}{t^2} dt = -\log \lambda + \lambda - 1 > 0.$$

Bei $(*)$ haben wir die Substitution $t \to \frac{t}{x}$ durchgeführt. Betrachten wir nun den Grenzwert

$$\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \lim_{\lambda \to \infty} \int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geq \lim_{\lambda \to \infty} (-\log \lambda + \lambda - 1) = \infty,$$

so erhalten wir einen Widerspruch zur Konvergenz des Integrals $\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(t)-t}{t^2} dt$ wegen Lemma 3.3.1. Analog kommen wir durch die Annahme, es gäbe ein $\lambda < 1$ mit $\vartheta(x) \leq \lambda x$, zur Ungleichung:

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - t}{t^2} dt = \log \lambda - \lambda + 1 < 0.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit -1 und betrachten erneut den Grenzübergang $\lambda \to \infty$, so ergibt sich derselbe Widerspruch wie oben. Also muss $\lambda = 1$ gelten, d.h. $\vartheta(x) \sim x$. □

Es bleibt nun noch übrig, den Primzahlsatz zu beweisen. Er wurde zwar bereits von Gauß vermutet, konnte jedoch erst 1896 unabhängig von Jacques Salomon Hadamard und Charles-Jean de La Vallée Poussin bewiesen werden.

3.3.3 Satz (Der Primzahlsatz)
Die Funktion $\pi(x)$, welche die Anzahl der Primzahlen bis zu einer Schranke x beschreibt, ist asymptotisch äquivalent zu $\frac{x}{\log x}$, d.h.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Beweis.
Wir können schreiben:

$$\vartheta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \log p \leq \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \log x = \pi(x) \log x,$$

da die Summe nur $\pi(x)$ Summanden hat und diese höchstens so groß wie $\log x$ sein können. Es ergibt sich also:

$$\frac{\vartheta(x)}{\log x} \leq \pi(x). \tag{3.1}$$

Außerdem gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &\geq \sum_{\substack{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \log p \\
&\geq \sum_{\substack{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} \log\left(x^{1-\epsilon}\right) \\
&= \sum_{\substack{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} (1-\epsilon)\log x \\
&= (1-\epsilon)\log x(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})).
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt aber auch $\pi(x^{1-\epsilon}) \leq x^{1-\epsilon}$, d.h. es gilt:

$$\vartheta(x) \geq (1-\epsilon)\log x(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})).$$

Formen wir dies um, erhalten wir:

$$\pi(x) \leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\vartheta(x)}{\log x} + x^{1-\epsilon}. \tag{3.2}$$

Aus den Gleichungen 3.1 und 3.2 ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
&\frac{\vartheta(x)}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\vartheta(x)}{\log x} + x^{1-\epsilon} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \pi(x) \cdot \frac{\log x}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon} \cdot \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Da für jedes $\epsilon > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\epsilon}} = 0$$

gilt und weil nach Lemma 3.3.2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

ist, erhalten wir aus obiger Ungleichung

$$1 \leq \lim_{x\to\infty} \left(\pi(x) \cdot \frac{\log x}{x}\right) \leq 1.$$

Somit folgt $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. $\square$

4 Die durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren

In unserem letzten Kapitel haben wir den Primzahlsatz bewiesen, der etwas über die Dichteverteilung der Primzahlen aussagt. Nun wollen wir uns damit befassen, wie sich die durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren entwickelt. Hierbei unterscheiden wir zwischen der Anzahl an verschiedenen Primfaktoren $\omega(n)$ und der Anzahl an Primfaktoren mit Vielfachheiten $\Omega(n)$ einer beliebigen natürlichen Zahl n. Allerdings werden wir sehen, dass auch hier die Ergebnisse eng miteinander zusammenhängen. Bevor wir jedoch beginnen können, direkt die mittleren Ordnungen zu berechnen, benötigen wir noch einige Aussagen über Primzahlsummen.

4.1 Die Sätze von Mertens

Zuerst zeigen wir jedoch einen sehr nützlichen Transformationssatz, mit dem wir später die Sätze von Mertens beweisen können.

4.1.1 Satz (Transformationssatz, Abel-Summation)
Sei $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $c_i = 0$ für $i < i_0 \in \mathbb{N}$ und sei

$$C(x) := \sum_{i=1}^{[x]} c_i$$

Ist $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion für $x \geq i_0$, dann gilt:

$$\sum_{i\leq x} c_i f(i) = C(x)f(x) - \int_{i_0}^{x} C(t)f'(t)dt.$$

Beweis.
Wir halten uns in diesem Beweis an die Vorgabe aus [HARDY] Theorem 421. Setze $N := [x]$, dann erhalten wir durch Konstruktion einer Teleskopsumme und Umordnen:

$$\sum_{i\leq x} c_i f(i) = \sum_{i\leq x} ((C(i) - C(i-1))f(i))$$

$$
\begin{aligned}
&= C(1)f(1) + \left(C(2) - C(1)\right) f(2) + \cdots + \left(C(N) - C(N-1)\right) f(N) \\
&= C(1) \left(f(1) - f(2)\right) + \cdots + C(N-1) \left(f(N-1) - f(N)\right) + C(N)f(N) \\
&= \sum_{i \le x-1} \left(C(i) \left(f(i) - f(i+1)\right)\right) + C(x)f([x]),
\end{aligned}
$$

weil $C(N) = C(x)$ ist. Ebenso ist $C(t) = C(i)$, falls $i \le t < i+1$, weil zwischen i und $i+1$ keine weiteren Folgenglieder summiert werden. Deshalb gilt:

$$C(i)(f(i) - f(i+1)) = C(i) \int\limits_{i+1}^{i} f'(t)dt = -\int\limits_{i}^{i+1} C(t)f'(t)dt.$$

Also gilt mit $C(t) = 0$ für $t < i_0$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \le x} c_i f(i) &= -\left(\sum_{i_0 \le i < x-1} \int\limits_{i}^{i+1} C(t)f'(t)dt \right) + C(x)f([x]) \\
&= C(x)f([x]) - \int\limits_{i_0}^{[x]} C(t)f'(t)dt \\
&= C(x)f(x) - \int\limits_{i_0}^{x} C(t)f'(t)dt.
\end{aligned}
$$

□

4.1.2 Lemma (Mertens' erster Satz)
Es gilt für $p \in \mathbb{P}$:

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + \mathcal{O}(1).$$

Beweis.

1. Sei $f(t) = \log t$ und $(c_i)_{i \in \mathbb{N}} = 1$ für alle i, dann ist $C(x) = \sum\limits_{i \le x} 1 = [x]$. Ebenso ist $f(t)$ für $t > 0$ stetig differenzierbar. Wenden wir nun den Transformationssatz 4.1.1 an, so erhalten wir mit $n = [x]$:

$$\log(n!) = \sum_{i \le n} \log i$$

$$
\begin{aligned}
&= [x]\log x - \int_1^x [t]\cdot\frac{1}{t}dt\\
&= x\log x + \mathcal{O}(\log x) - [t]_{t=1}^{t=x}\\
&= x\log x + \mathcal{O}(\log x) - [x] + 1\\
&= x\log x + \mathcal{O}(x).
\end{aligned}
$$

2. Als nächstes berechnen wir denselben Ausdruck auf eine andere Art. Da die Vielfachheit e_p einer Primzahl in der Primfaktorzerlegung von n implizit von n abhängt, setzen wir für die Dauer des Beweises $e_p = e_p(n)$, um die Summen besser überschaubar zu machen.

$$
\begin{aligned}
\log(n!) &= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} e_p(n!)\log p\\
&= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^m}\right]\log p\\
&= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x}{p^m}\log p - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{x}{p^m}\right\}\log p\\
&= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x}{p^m}\log p - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\log p\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{x}{p^m}\right\}\\
&= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x}{p^m}\log p - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\log p\sum_{m=1}^{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]}\left\{\frac{x}{p^m}\right\}\\
&\quad - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\log p\sum_{m=\left[\frac{\log x}{\log p}+1\right]}^{\left[\frac{\log x}{\log p}+2\right]}\frac{x}{p^m} - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\log p\sum_{m=\left[\frac{\log x}{\log p}+3\right]}^{\infty}\frac{x}{p^m}\\
&\le \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x}{p^m}\log p - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\log p\sum_{m=1}^{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]} -2\sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\log p - x\sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\frac{\log p}{p^2}\underbrace{\sum_{m=\left[\frac{\log x}{\log p}+1\right]}^{\infty}\frac{1}{p^m}}_{=C_1}\\
&\overset{3.1.4}{\le} \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x}{p^m}\log p - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\log p\frac{\log x}{\log p} - \mathcal{O}(x) - C_1x\underbrace{\sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\frac{\log p}{p^2}}_{=C_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{p^m}\log p - \pi(x)\log x - \mathcal{O}(x) - C_1C_2x \\
&\overset{3.3.3}{=} \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{p^m}\log p + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\log x\right) + \mathcal{O}(x) \\
&= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{p^m}\log p + \mathcal{O}(x).
\end{aligned}
$$

Die positive Konstante $C_1 \le 2$ ergibt sich aus dem Anwenden der geometrischen Reihe, da in den Grenzen der Summe stets $\frac{x}{p^m} < 1$, gilt und die Existenz von C_2 folgt aus der bekannten Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$.

3. Nun schätzen wir folgende Differenz ab:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^m} - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} \frac{\log p}{p} &= \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log p}{p^m} \\
&\le \sum_{p\in\mathbb{P}} \log p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^m} \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{p\in\mathbb{P}} \log p \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p}\right) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p(p-1)} \\
&< \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log n}{n(n-1)} \\
&= K.
\end{aligned}
$$

Bei $(**)$ verwenden wir die Summenformel der geometrische Reihe, da für alle $p \in \mathbb{P}$ stets $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$ gilt. Also können wir die Doppelsumme durch eine Summe über alle Primzahlen bis zur Schranke x abschätzen und haben dabei nur einen konstanten Fehlerterm.

4. Fassen wir nun unsere Ergebnisse zusammen, so erhalten wir:

$$
x\log x + \mathcal{O}(x) \overset{1.}{=} \log(n!) \overset{2.}{=} \sum_{p\le x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{p^m}\log p + \mathcal{O}(x) \overset{3.}{=} x\sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} + x\mathcal{O}(1).
$$

Teilen durch x und Umsortieren liefert

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\log x+\mathcal{O}(1),$$

was den ersten Satz von Mertens beweist.

□

Mit Hilfe des ersten Satzes von Mertens können wir nun den zweiten Satz von Mertens beweisen, welcher uns im nächsten Abschnitt eine Abschätzung für die mittlere Ordnung von $\omega(n)$ und $\Omega(n)$ liefern wird.

4.1.3 Lemma (Mertens' zweiter Satz)
Es gibt eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log x+C_1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Beweis.
Wir setzen

$$c_i := \begin{cases}\frac{\log i}{i}, & \text{falls } i \text{ Primzahl,}\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann gilt nach dem ersten Satz von Mertens 4.1.2

$$\sum_{i\leq x}c_i=\sum_{\substack{p\leq x\\ p\in\mathbb{P}}}\frac{\log p}{p}=\log x+\mathcal{O}(1).$$

Setzen wir nun $f(t):=\frac{1}{\log t}$, so erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes 4.1.1:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leq x\\ p\in\mathbb{P}}}\frac{1}{p}&=\sum_{i\leq x}c_i f(i)\\ &=\frac{C(x)}{\log x}+\int_2^x\frac{C(t)}{t(\log t)^2}dt\\ &=1+\frac{1}{\log x}\mathcal{O}(1)+\int_2^x\frac{1}{t\log t}dt+\int_2^x\frac{1}{t(\log t)^2}\mathcal{O}(1)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{\log x}\mathcal{O}(1) + [\log\log t]_{t=2}^{t=x} + \mathcal{O}(1)\int\limits_2^x \frac{1}{t(\log t)^2}dt \\
&= 1 + \frac{1}{\log x}\mathcal{O}(1) + [\log\log t]_{t=2}^{t=x} + \mathcal{O}(1)\int\limits_2^\infty \frac{1}{t(\log t)^2}dt - \mathcal{O}(1)\int\limits_x^\infty \frac{1}{t(\log t)^2}dt \\
&= \log\log x + C_1 + E(x),
\end{aligned}
$$

mit

$$
C_1 = 1 - \log\log 2 + \mathcal{O}(1)\int\limits_2^\infty \frac{1}{t(\log t)^2}dt \quad \text{und} \quad E(x) = \frac{1}{\log x}\mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(1)\int\limits_x^\infty \frac{1}{t(\log t)^2}dt.
$$

Hierbei ist C_1 konstant, da

$$
\int\limits_2^\infty \frac{1}{t(\log t)^2}dt = \left[-\frac{1}{\log t}\right]_{t=2}^{t=\infty} = \frac{1}{\log 2},
$$

und wird Meissel-Mertens-Konstante genannt. Außerdem gilt:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \frac{1}{\log x}\mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(1)\int\limits_x^\infty \frac{1}{t(\log t)^2}dt \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) + \mathcal{O}\left(\left[-\frac{1}{\log t}\right]_{t=x}^{t=\infty}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right).
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir nun

$$
\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + C_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)
$$

und damit Mertens zweiten Satz gezeigt. □

4.1.4 Bemerkung (Die Meissel-Mertens-Konstante)
Man kann zeigen, dass

$$C_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\substack{p\le n\\ p\in\mathbb{P}}}\frac{1}{p} - \log\log x\right) = \gamma + \sum_{p\in\mathbb{P}}\left[\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right] \approx 0,261497\ldots$$

gilt, wobei

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) \approx 0,577215\ldots$$

die Euler-Mascheroni-Konstante ist [HAVIL] Kap. 7.2.

4.2 Die durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren

Ausgehend von den Sätzen von Mertens können wir nun die mittleren Ordnungen bestimmen. Nach dem Erhalt dieser sind wir in der Lage, für große x mittels Ableitungen die durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren zu bestimmen. Wir beginnen mit der Summe über die $\omega(n)$:

4.2.1 Satz (Summe über die $\omega(n)$)
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\log\log x + C_1 x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Beweis.
Es gilt folgende Gleichungungskette:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = \sum_{n\le x}\sum_{\substack{p\mid n\\ p\in\mathbb{P}}} 1 = \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\frac{x}{p} - \sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\left\{\frac{x}{p}\right\}.$$

Da wir wissen, dass $\left\{\frac{x}{p}\right\} < 1$ gilt, können wir die zweite Summe mit $\pi(x)$ abschätzen und erhalten so:

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\omega(n) &= x\sum_{\substack{p\le x\\ p\in\mathbb{P}}}\frac{1}{p} + \mathcal{O}(\pi(x))\\ &\overset{4.1.3}{=} x\left(\log\log x + C_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) + \mathcal{O}(\pi(x))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{3.3.3}{=} x\log\log x + C_1 x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right)\\
&= x\log\log x + C_1 x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right)
\end{aligned}
$$

□

Nun wenden wir uns der Summe über die $\Omega(n)$ zu:

4.2.2 Satz (Summe über die $\Omega(n)$)
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n\leq x} \Omega(n) = x\log\log x + C_2 x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

wobei $C_2 = 1{,}03465\ldots$ eine Konstante ist.

Beweis.

1. In diesem Beweis verwenden wir wieder die Schreibweise $e_p = e_p(n)$, um eine bessere Übersicht zu gewährleisten. Wir definieren nun die Funktion

$$A(x) := \sum_{n\leq x} (\Omega(n) - \omega(n)) = \sum_{n\leq x} \sum_{\substack{p\mid n\\ p\in\mathbb{P}}} (e_p(n) - 1) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{x}{p^k}\right],$$

weil $\left[\frac{x}{p^k}\right]$ die Anzahl der Zahlen $n \leq x$ angibt, welche k-mal durch p teilbar sind. Nun setzen wir:

$$C_2 := C_1 + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)},$$

was wegen der Konvergenz der Summe konstant ist.

2. Es gilt nun aufgrund der Definition der Gaußklammer:

$$
\begin{aligned}
A(x) &\leq x \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k}\\
&= x \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(*)}{=} x \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\\
&= x\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)}\\
&= x(C_2 - C_1).
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir die geometrische Summenformel angewendet, da $\frac{1}{p}$ stets kleiner als 1 ist.

3. Wenden wir nun die geometrische Summenformel auf folgenden Ausdruck an, so ist

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{p^k} = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p^k}\right) - 1 - \frac{1}{p} = \frac{1-\frac{1}{p^{n+1}}}{1-\frac{1}{p}} - 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p(p-1)} - \frac{1}{p^{n+1}-p^n} = \frac{1}{p(p-1)} - cp^{-n}$$

   für ein geeignetes $c > 0$.

   Nun ist aber mit $n := \left[\frac{\log x}{\log p} + 1\right]$

$$p^{-n} = p^{-\left[\frac{\log x}{\log p}+1\right]} = e^{-\left[\frac{\log x}{\log p}+1\right]\log p} \leq e^{-\log x} = x^{-1}.$$

4. Verkleinern wir nun die Summanden in $A(x)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A(x) &\geq \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{k=2}^{\frac{\log x}{\log p}+1} \left(\frac{x}{p^k} - 1\right)\\
&= \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{k=2}^{\frac{\log x}{\log p}+1} \left(\frac{x}{p^k}\right) - \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \sum_{k=2}^{\frac{\log x}{\log p}+1} 1\\
&\overset{3.}{=} x \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \left(\frac{1}{p(p-1)} - cp^{-n}\right) + \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \mathcal{O}\left(\frac{\log x}{\log p}\right)\\
&\geq x \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \left(\frac{1}{p(p-1)} - cx^{-1}\right) - \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \mathcal{O}(\log x)\\
&= x \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} \frac{1}{p(p-1)} + \mathcal{O}(1) \sum_{\substack{p\leq\sqrt{x}\\ p\in\mathbb{P}}} 1 + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(**)}{=} x\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)} + \mathcal{O}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)\right) + \mathcal{O}(\pi(\sqrt{x})) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x)\\
&\overset{2.}{=} x(C_2 - C_1) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x).
\end{aligned}$$

mit $C_2 = C_1 + \sum\limits_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)} = 1{,}03465\ldots$. Hier haben wir bei $(**)$ die Summe vergrößert und einen Abschätzungsterm hinzugefügt.

5. Aus 2. und 4. erhalten wir also

$$A(x) = x(C_2 - C_1) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x).$$

Die Behauptung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \Omega(n) &= \sum_{n\leq x} \omega(n) + A(x)\\
&\overset{4.2.1}{=} x\log\log x + C_1 x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) + x(C_2 - C_1) + \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x)\\
&= x\log\log x + C_2 x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right),
\end{aligned}$$

da $\frac{x}{\log x} > \sqrt{x}\log x$ für $x \gtrsim 5504$.

□

4.2.3 Bemerkung (Die durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren)
Für $x \in \mathbb{R},\ x \gg 1$ und $n \in \mathbb{N},\ n \approx x$ kann man die Näherungsausdrücke für die Summen über $\omega(n)$ und $\Omega(n)$ als Funktionen in x auffassen, die stetig differenzierbar sind. Die Ableitung entspricht dann der Änderung der Summe, also der Anzahl der Primfaktoren, die beim nächsten Summanden auftauchen. Also kann man die Ableitung als durchschnittliche Anzahl an Primzahlen auffassen, die pro Summand im Bereich um x auftritt. Wir erhalten also für die durchschnittliche Anzahl an verschiedenen Primfaktoren:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\leq x} \omega(n)\right) \approx \frac{d}{dx}\left(x\log\log x + C_1 x\right) = \log\log x + \frac{1}{\log x} + C_1.$$

Für die durchschnittliche Anzahl aller Primfaktoren bekommen wir:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\leq x}\Omega(n)\right) \approx \frac{d}{dx}\left(x\log\log x + C_2 x\right) = \log\log x + \frac{1}{\log x} + C_2.$$

Wir sehen also, dass sich die beiden Durchschnittswerte nur um einen konstanten Summanden unterscheiden, was überraschend ist. Betrachten wir ein paar numerische Beispiele, so stellen wir fest, dass trotz sehr großer Schranke x, die zu erwartende Anzahl an Primteilern sehr gering bleibt.

Tabelle 4.1: Durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren

Obere Schranke	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}
$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\leq x}\omega(n)\right)$	3,3981	4,0913	5,0076	5,7010
$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n\leq x}\Omega(n)\right)$	4,1713	4,8644	5,7807	6,4739

5 Zahlentheoretische Probleme in der Schule

Nachdem wir es in den vorherigen Kapiteln geschafft haben, mit zum Teil schwierigen mathematischen Methoden Aussagen zu erhalten, wollen wir nun versuchen, diese Probleme auch im schulischen Kontext zu behandeln. Die Zielgruppe für unsere Überlegungen ist eine Gruppe Oberstufenschüler, die besonders gute Leistungen in Mathematik hervorbringen. Ein Beispiel für eine solche Gruppe wäre eine Mathematik AG in der Oberstufe. Es ist offensichtlich, dass diese Schüler in der Regel noch nicht das mathematische Vorwissen erworben haben, mit dem sie die Probleme auf oben beschriebenem Weg lösen oder nachvollziehen können. Dazu ist eine Motivation des Themas sehr wichtig, weil davon maßgeblich der Lernerfolg der Schüler abhängt. Im Folgenden werden wir nun die Kapitel einzeln motivieren, zeigen, wo sich in den genutzen Beweisen Probleme ergeben und anschließend andere Möglichkeiten angeben, durch die man äquivalente Aussagen beweisen kann.

5.1 Wahrscheinlichkeiten für Teilerfremdheit und Quadratfreiheit

Im ersten Abschnitt befassen wir uns mit den Wahrscheinlichkeiten für Teilerfremdheit und Quadratfreiheit. Wir beginnen mit einer Motivation.

5.1.1 Motivation

Zunächst müssen wir uns klar machen, was Teilerfremdheit und Quadratfreiheit eigentlich bedeuten. Teilerfremdheit zweier Zahlen bedeutet, dass der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen 1 ist, d.h. in den beiden Primfaktorzerlegung sind alle Primzahlen mit Vielfachheiten größer als 0 paarweise verschieden. Quadratfreiheit hingegen bedeutet, dass wir für eine natürliche Zahl keine Quadratzahl finden, sodass der Quotient wieder eine natürliche Zahl ist, d.h. in der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl dürfen nur die Vielfachheiten 1 oder 0 vorkommen. Das Besondere an diesen Eigenschaften ist, dass sie so unterschiedlich aussehen, man jedoch auf den ersten Blick keine Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten machen kann, mit denen zwei natürliche Zahlen bzw. eine natürliche Zahl diese Eigenschaft besitzen.

Um nun eine erste Vorstellung zu gewinnen, wie die Eigenschaften auftreten, bietet es sich an, die Schüler experimentieren zu lassen. Also weisen wir sie an, je nach Größe der Gruppe, beliebige Zahlen auf diese Eigenschaften zu testen und dann die relativen Häufigkeiten zu bilden. Mit entsprechender Ausstattung lässt sich das sehr bequem mit Computern ausführen. Die Programme sind mit entsprechender Software leicht zu schreiben, sodass man Stichproben in beliebigen Zahlenbereichen durchführen kann. In der Programmsprache von Matlab könnten die Programme so aussehen:

```
%Wahrscheinlichkeit für Teilerfremdheit zweier Zahlen innerhalb der
%Schranken m und n
disp('Schranke für m')
m=input('m=')             %Einlesen der Schranken für m und n
disp('Schranke für n')
n=input('n=')
u=0;                      %Laufvariable der absoluten Häufigkeit
for i=1:m;                %Durchlaufen aller Zahlenkombinationen
    for j=1:n;
        e=gcd(i,j);       %Berechnung des ggT
        if (e==1)         %Bei Teilerfremdheit wird u um 1 erhöht
            u=u+1;
        else
        end
    end
end
R=u/(m*n)                 %Berechnung der relativen Häufigkeit
```

```
%Wahrscheinlichkeit für Quadratfreiheit der Zahlen 1 bis k
disp('Obere Schranke')
k=input('k=')                 %Schranke festlegen
u=0;                          %Laufvariable der absoluten Häufigkeit
for n=1:k;                    %Durchlaufen aller Zahlen
p = factor(n);                %Faktorisierung
n = unique(p);                %Löschen doppelter Elemente
r = length(n)-length(p);      %Prüfen ob Längen von n
                              %und p gleich
if (r==0);                    %Erhöhung der Laufvariable
    u =u+ 1;                  %falls die Längen gleich sind
else
end;
end;
Q=u/k                         %Berechnung der relativen Häufigkeit
```

Immer wenn Computerprogramme eingesetzt werden, muss man auch die Effizienz dieser diskutieren. Die oben angegebenen Programmvorschläge sind sicher nicht optimal, weil alle Zahlbereiche komplett durchlaufen werden, erfüllen jedoch ihren Zweck. Im ersten Programm kann man sich beispielsweise überlegen, oder besser noch die Schüler überlegen lassen, inwiefern man den Zahlbereich geschickter durchlaufen kann, bzw. wel-

che Bereiche man überhaupt durchlaufen muss. Denn wenn $ggT(27,4) = 1$, dann ist auch $ggT(4,27) = 1$ und man kann sich die Rechnung einmal sparen. Das zweite Programm könnte man dahingehend verbessern, dass man nur Zahlen untersucht, die modulo 4 nicht 0 sind, was ein Viertel der Zahlen bereits vor der aufwendigen Faktorisierung als nicht quadratfrei einstuft. Nochmals verbessert wird dies durch eine zusätzliche Abfrage nach der Klasse modulo 9. Hier kann man ausprobieren, inwiefern solche Abfragen noch Laufzeitverbesserungen bringen. Z.B. kann ein Test modulo 49 bei jeder Zahl möglicherweise aufwendiger sein, als die damit ausgeschlossenen Zahlen zu durchlaufen.
Lässt man die beiden Programme nun Zahlenbereiche durchlaufen, so erhält man beispielsweise folgende Tabellen:

Tabelle 5.1: Wahrscheinlichkeit für Teilerfremdheit

Obere Grenze m	10	50	100	500	1000	1000
Obere Grenze n	10	10	50	100	500	1000
Relative Häufigkeit	0,63	0,626	0,6138	0,6088	0,6087	0,6084

Tabelle 5.2: Wahrscheinlichkeit für Quadratfreiheit

Obere Grenze	10	50	100	1000	10000	100000
Relative Häufigkeit	0,7	0,62	0,61	0,608	0,6083	0,6079

Betrachtet man nun die Ergebnisse, so erkennt man, dass beide relativen Häufigkeiten anscheinend gegen denselben Zahlenwert konvergieren. Es stellt sich automatisch die Frage danach, wieso das so ist und ob dieser Wert exakt bestimmbar ist. Hier bietet es sich an, auf die Einführung der mittleren Ordnung und asymptotischen Äquivalenz zu verzichten und heuristisch an das Problem heranzugehen, da dies für die Schüler anschaulicher ist. Auch wenden wir die Strategie des Rückwärtsarbeitens an, bei der wir nicht wie in Kapitel 1 auf das Problem hinarbeiten, sondern ausgehend vom Problem eine Lösung suchen. Dieses Vorgehen ist für die Schüler zum einen einfacher zu durchschauen, weil wir nicht gezwungen werden Bezeichnungen einzuführen, deren Sinn den Schülern erst später voll bewusst wird, zum anderen erkennen wir hier wesentlich besser, warum der Grenzwert, auf den wir stoßen, derselbe ist.

5.1.2 Heuristische Betrachtung von Teilerfremdheit und Quadratfreiheit

Wir interpretieren wie üblich $P(A)$ als die Wahrscheinlichkeit mit der das Ereignis A auftritt.

1. Eine beliebige natürliche Zahl m ist durch eine Primzahl p teilbar, falls $m \equiv 0 \mod p$ gilt. Dies träfe in $\frac{1}{p}$ der Fälle zu, wenn die Menge der betrachteten Zahlen endlich und ein Vielfaches von p wäre. Da die natürlichen Zahlen aber unbeschränkt sind, können wir dieses Konzept aus der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht anwenden, d.h. unsere Überlegungen sind nicht mathematisch exakt. Dies wird

darin deutlich, dass wir eine Gleichverteilung aller natürlichen Zahlen wegen der Unbeschränktheit nicht realisieren können und somit auf diesem Weg auch keine Wahrscheinlichkeiten zuordnen können. Heuristisch gesehen ist unsere Aussage, dass eine zufällige Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{p}$ durch p teilbar ist, jedoch gerechtfertigt, da wir hier einfach die Kongruenzklassen modulo p betrachten, welche wiederum endlich sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass m und eine weitere natürliche Zahl n durch p teilbar sind, ist, da m und n unabhängig voneinander gewählt werden, $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$. Mit Hilfe des Gegenereignisses erhalten wir also:

$$\begin{aligned} P(m, n \text{ sind nicht beide durch } p \text{ teilbar}) &= 1 - P(m, n \text{ sind durch } p \text{ teilbar}) \\ &= 1 - \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

2. Wir weiten nun unsere Überlegungen auf zwei verschiedene Primzahlen p und q aus. Hier stoßen wir auf dasselbe Problem wie in 1., da wir keinen mathematisch exakt definierten Wahrscheinlichkeitsraum zur Verfügung haben und deshalb nicht über die Unabhängigkeit der Ereignisse sprechen können. Heuristisch gesehen können wir jedoch, analog zu oben, unsere Betrachtungen auf die Kongruenzklassen modulo $p \cdot q$ beschränken. Weil p und q beide prim sind, liefert uns diese Betrachtung mit Hilfe des chinesischen Restsatzes, dass wir die Kongruenzen, und damit unsere Wahrscheinlichkeiten, getrennt betrachten können. Im Falle getrennter Betrachtungen für p und q multiplizieren sich die Wahrscheinlichkeiten aber einfach auf. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(m, n \text{ sind nicht beide durch } p \text{ und } q \text{ teilbar}) &= P(m, n \text{ sind nicht beide durch } p \text{ teilbar}) \\ &\quad \cdot P(m, n \text{ sind nicht beide durch } q \text{ teilbar}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{q^2}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für mehrere Primzahlen einfach aufmultiplizieren.

3. Die Zahlen m und n sind aber teilerfremd, wenn das Ergeignis „m und n sind nicht beide durch p teilbar“ für alle Primzahlen p aufritt.

$$\begin{aligned} P(m, n \text{ teilerfremd}) &= P(m, n \text{ sind für alle Primzahlen } p \text{ nicht beide durch } p \text{ teilbar}) \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \end{aligned}$$

Hier erkennen wir an Hand der Produktdarstellung bereits den Zusammenhang mit der Riemannschen Zeta-Funktion, welchen wir aber erst später zeigen.

Nun betrachten wir die Wahrscheinlichkeit für Quadratfreiheit. Eine natürliche Zahl n ist genau durch ein Quadrat q teilbar, wenn für alle Primzahlen p mit $p^2|q$ direkt $p^2|n$ folgt. Soll also n quadratfrei sein, so muss sie frei von Primzahlquadraten sein. Es folgt wie oben

$$P(n \text{ ist quadratfrei}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

da die Teilbarkeit durch verschiedene Primzahlen unabhängige Ereignisse sind.

Wir sehen also, wie eng der Zusammenhang zwischen den beiden Eigenschaften wirklich ist, denn die Wahrscheinlichkeiten gehen beide auf denselben Ausdruck zurück. Allerdings sind wir noch nicht in der Lage, dieses Produkt zu berechnen, da wir den Bezug zur Zeta-Funktion noch nicht kennen. Deswegen werden wir nun analog zu 3.1.2 versuchen, das Produkt umzuformen und danach $\zeta(2)$ ausrechnen. Hierbei ist es dem Lehrer überlassen, ob er die Zeta-Funktion mathematisch exakt definiert oder das Symbol $\zeta(2)$ nur als Abkürzung für $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ verwendet.

5.1.3 Die Produktdarstellung von $\zeta(2)$

Es gilt:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \zeta(2)^{-1}.$$

Beweis.
Wir verwenden hier einen anderen Beweis als in 3.1.2, weil wir diesmal etwas anschaulicher vorgehen wollen. Zunächst stellen wir fest, dass es genügt

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \zeta(2)$$

zu zeigen, da wir dieses Produkt problemlos invertieren können. Als nächstes wenden wir auf die linke Seite die geometrische Summenformel an und erhalten

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^{-2k}\right).$$

Da wir nun ein unendliches Produkt über unendliche Summen haben, beschränken wir uns zunächst auf folgenden Fall:
Sei $S_x := \{p \in \mathbb{P} | p \leq x\}$. Dann ist $S_x \subset \mathbb{P}$ und endlich. Betrachten wir nun

$$P_x := \prod_{p\in S_x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^{-2k}\right),$$

so erhalten wir beispielsweise für $x = 5$:

$$(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + \dots) \cdot (1 + 3^{-2} + 3^{-4} + \dots) \cdot (1 + 5^{-2} + 5^{-4} + \dots).$$

Wir sehen, dass wir durch geschicktes Auswählen von Einträgen in den Klammern, die miteinander multipliziert werden, das Inverse jeder Quadratzahl bilden können, die nur die Primfaktoren 2,3 und 5 enthält. Aufgrund der eindeutigen Primfaktorzerlegung (PFZ) wird jede dieser Quadratzahlen genau einmal durch die Multiplikation gebildet. Also können wir allgemein

$$P_x = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ hat PFZ} \\ \text{in } S_x}} \frac{1}{n^2}$$

schreiben. Offensichtlich ist P_x nicht negativ, monoton und durch $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ nach oben beschränkt. Deswegen existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} P_x$.
Weil für immer größer werdendes x die Menge S_x immer mehr Primfaktoren enthält, werden im Grenzübergang alle natürlichen Zahlen durchlaufen, da alle Primzahlen kleiner als unendlich sind. D.h. wir haben

$$\lim_{x \to \infty} P_x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}.$$

Andererseits gilt wegen $S_\infty = \{p \in \mathbb{P} | p \leq \infty\} = \mathbb{P}$ die folgende Gleichheit:

$$\lim_{x \to \infty} P_x = \prod_{p \in S_\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^{-2k} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^{-2k} \right).$$

Insgesamt bekommen wir also

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^{-2k} \right) = \lim_{x \to \infty} P_x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2},$$

was unsere Aussage beweist. □

Nun haben wir unser Problem auf ein anderes zurückgeführt und erhalten:

$$P(m, n \text{ teilerfremd}) = P(n \text{ ist quadratfrei}) = \zeta(2)^{-1}.$$

Jetzt stellt sich auch für die Schüler ganz automatisch die Frage, wie man $\zeta(2)$ am besten berechnen kann. Dies ist wichtig, da sie so selbst den Nutzen sehen, diese Reihe zu berechnen, was zu Beginn des Abschnitts keineswegs plausibel war. Wir haben allerdings in unserer Zielgruppe nur begrenzte Kenntnisse aus der Analysis, welche wir zu Problemlösung nutzen können. Im Folgenden werden wir deswegen einen alternativen Beweis für 2.1.2 angeben, der andere Voraussetzungen an Analysis und den komplexen Zahlen erfordert. Somit kann hier der Lehrer wählen, was er für geeigneter hält.

5.1.4 Der Wert von $\zeta(2)$
Es gilt:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Im folgenden Beweis orientieren wir uns an der Vorlage aus [AIGNER] Kap. 7.

5.1.5 Beweis von 5.1.4
Wir zeigen die Aussage in mehreren Schritten.

1. Zunächst beweisen wir:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Hierfür nutzen wir die elementare Relation

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = e^{(inx)} = (\cos(x) + i\sin(x))^n.$$

Betrachten wir hiervon den Imaginärteil so erhalten wir:

$$\operatorname{Im}(\cos(nx) + i\sin(nx)) = \sin(x) \qquad (1)$$

und

$$\operatorname{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \sin^{2k+1}(x)\cos^{n-2k-1}(x). \qquad (2)$$

Setzen wir nun $n = 2m+1$ und betrachten die m Werte $x = \frac{rx}{2m+1}$ mit $r = 1, 2, \ldots, m$, dann ist $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $nx = r\pi$, also $\sin(nx) = 0$. Weiterhin ist $\sin(x)$ für alle m positiv und die Werte sind paarweise verschieden, da der Sinus in diesem Bereich monoton ist. Setzen wir nun (1) und (2) gleich so erhalten wir:

$$0 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \sin^{2k+1}(x)\cos^{n-2k-1}(x).$$

Jetzt teilen wir durch $\sin^n(x)$ und bekommen:

$$0 = \binom{n}{1}\cot^{n-1}(x) - \binom{n}{3}\cot^{n-3}(x) + \ldots . \qquad (*)$$

Nun setzen wir unser oben gewähltes n ein:

$$0 = \binom{2m+1}{1}\cot^{2m}(x) - \binom{2m+1}{3}\cot^{2(m-1)}(x) + \dots.$$

Betrachten wir nun das Polynom $p(t)$ vom Grad m mit

$$p(t) := \binom{2m+1}{1}t^m - \binom{2m+1}{3}t^{m-1} + \dots + (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1},$$

so kennen wir aus $(*)$ die m verschiedenen Nullstellen a_r bereits, denn

$$a_r = \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) \quad \text{mit } r = 1, 2, \dots m.$$

Das Polynom

$$l(t) := \binom{2m+1}{1}\left(t - \cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)\right) \cdot \dots \cdot \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$

hat aber ebenso Grad m und dieselben Nullstellen wie $p(t)$, d.h. die Polynome müssen übereinstimmen. Insbesondere stimmen dann ihre Koeffizienten überein. Vergleichen wir die Koeffizienten von t^{m-1}, so erhalten wir:

$$-\binom{2m+1}{3} = -\binom{2m+1}{1}(\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \dots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right))$$

$$\text{d.h.} \quad a_1 + \dots + a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6},$$

was zu zeigen war.

2. Als nächstes benötigen wir noch eine Aussage desselben Typs. Wir zeigen

$$\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \dots + \csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6},$$

wobei $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ die Kosekans-Funktion ist. Es gilt nun

$$\csc^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \cot^2(x) + 1,$$

was uns mit Hilfe von 1. direkt das Ergebnis liefert:

$$
\begin{aligned}
&\csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\csc^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)+\cdots+\csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)\\
=&\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+1+\cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)+1+\cdots+\cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)+1\\
=&\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)+\cdots+\cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right)+m\\
\overset{1.}{=}&\frac{2m(2m-1)}{6}+m\\
=&\frac{4m^2-2m+6m}{6}\\
=&\frac{4m^2+4m}{6}\\
=&\frac{2m(2m+2)}{6}.
\end{aligned}
$$

3. Sei nun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, so gilt offensichtlich:

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x)$$

und wir erhalten durch Bilden der reziproken Werte

$$0 < \cot(x) < \frac{1}{x} < \csc(x).$$

Quadrieren liefert dann

$$\cot^2(x) < \frac{1}{x^2} < \csc^2(x).$$

Setzen wir nun für x die m Werte aus 1. ein und addieren die Ergebnisse, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\cdots+\cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) &< \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2\\
&< \csc^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\cdots+\csc^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right).
\end{aligned}
$$

Nutzen wir nun unsere Ergebnisse aus 1. und 2. so bekommen wir:

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6}$$

$$\text{und somit} \quad \frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right) < \frac{2m(2m+2)}{6},$$
$$\text{d.h.} \quad \frac{6}{\pi^2}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-1}{2m+1} < \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{6}{\pi^2}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m+2}{2m+1}.$$

Man sieht direkt, dass für $m \to \infty$ die linke und die rechte Seite gegen $\frac{\pi^2}{6}$ konvergieren, also ebenso der Ausdruck in der Mitte. Es ist also:

$$\zeta(2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Somit erhalten wir, dass

$$P(n \text{ quadratfrei}) = P(m, n \text{ teilerfremd}) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0,6079.$$

5.2 Der Primzahlsatz

Im zweiten Abschnitt des schulischen Teils wollen wir uns mit dem Primzahlsatz beschäftigen. Wie eben beginnen wir mit einer Motivation.

5.2.1 Motivation

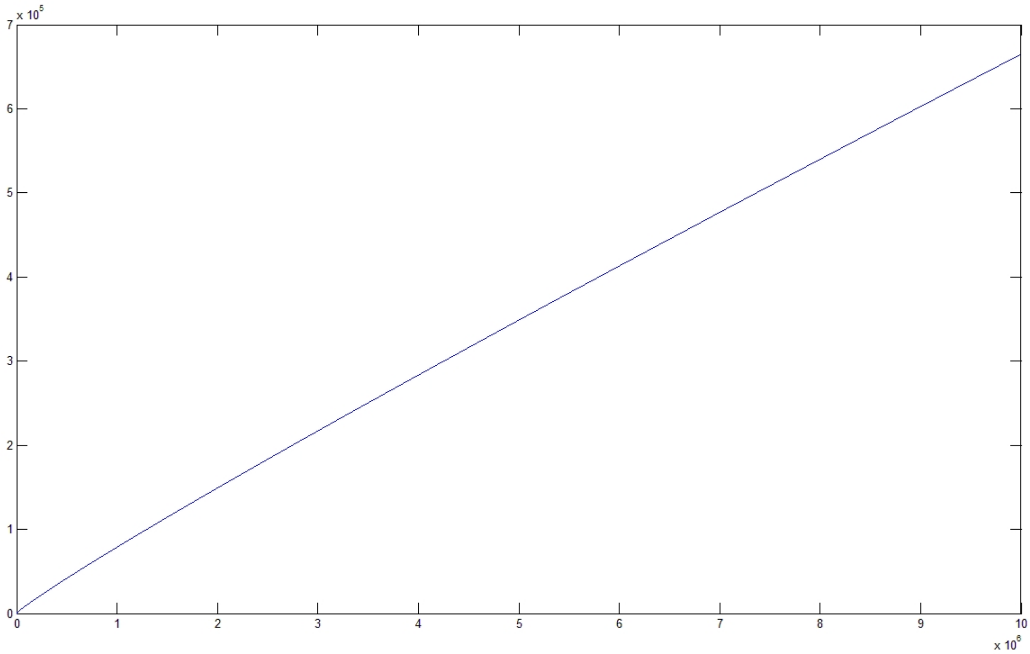
Die Anzahl aller Primzahlen unter einer Schranke war schon immer ein sehr interessantes Problem. Es war besonders einfach zu formulieren, jedoch war lange Zeit nicht klar, ob es überhaupt eine elementare Funktion gibt, die die Primzahlfunktion $\pi(x)$ annähert. Besonders interessant ist die Funktion, da man ausgehend von ihr Aussagen über die Primzahlverteilung machen kann, also etwa, ob die Dichte der Primzahlen konstant bleibt oder sich verändert.

Um den Schülern einen ersten Überblick zu geben, wie $\pi(x)$ aussieht, hilft es wieder, sich die Technik zu Nutze zu machen. Da viele Programme bereits Primzahltests implementiert haben, ist es auch für Schüler nicht schwer, die Primzahlfunktion bis zu einer beliebigen Schranke zu berechnen und ihren Verlauf graphisch darzustellen. In Matlab könnte dieses Programm so aussehen:

```
%Die Primzahlfunktion
disp('obere Schranke')  %Einlesen der oberen Schranke
n=input('n=')
```

```
k=1;                         %Hilfsvariable
for i=1:n;                   %Durchlauf der Zahlen bis n
    l=isprime(i);            %Test auf Primalität
    if (l==1);               %Falls l prim, Speicherung von i im k-ten
        u(k)=i;              %Eintrag des Vektors u
        k=k+1;
    else;
    end;
end;
%Stufenplot der Primzahlfunktion,
%length(u) ist die Anzahl an Primzahlen bis zur Schranke n
stairs([1 u n],[0 1:length(u) length(u)])
```

Auch hier ist es sinnvoll, die Frage der Effizienz in den Raum zu stellen. Denn je nach oberer Schranke kann es beispielsweise deutlich schneller gehen, mit dem Sieb des Eratosthenes zu operieren, um eine Primzahlliste zu erstellen. Auch könnte man von vornherein nur die ungeraden Zahlen durchlaufen und als weitere Verbesserung auch nur die, die zusätzlich nicht durch 3 teilbar sind. Dies würde eine erhebliche Verringerung der zu durchlaufenden Zahlen bedeuten, jedoch das Programm verlängern. Auch kommt es auf den verwendeten Primzahltest an, denn dieser benötigt besonders für große Zahlen sehr viel der verfügbaren Rechenleistung. Hier können Schüler sehr gut ihre Kreativität in die Unterrichtsgestaltung mit einfließen lassen und miteinander über die optimalen Abfragen in den Programmen diskutieren.
Setzen wir als obere Schranke $n = 1000000$, so erhalten wir folgenden Funktionsgraphen:



Es bietet sich nun an, die Schüler raten zu lassen, welche Funktion diesen Graphen gut annähern könnte. Hierbei kann man über den Graphen der Primzahlfunktion den

vorgeschlagenen Funktionsgraphen zeichnen, was mit Computerprogrammen und einem Beamer sehr gut funktioniert. So sehen die Schüler dann auch direkt, wo ihre vorgeschlagenen Funktionen gute und wo sie schlechte Annäherungen an die Primzahlfunktion sind. Allerdings sind die Schüler wahrscheinlich nicht in der Lage, auf die Funktion $\frac{x}{\log x}$ zu kommen, da sie mit dieser noch nie konfrontiert wurden.
Eine andere Möglichkeit, die Schüler anschaulich auf die Funktion zu bringen, wäre die Berechnung und Tabellierung von $\frac{x}{\pi(x)}$. Wir erhalten dabei z.B. folgende Tabelle:

Obere Schranke	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\frac{x}{\pi(x)}$	2,5	4	5,95	8,14	10,43	12,74

Hier fällt auf, dass die berechneten Werte nahezu linear mit dem Exponenten der oberen Schranke ansteigen. Da der Logarithmus in der Schule behandelt wird, ist es durchaus zu erwarten, dass die Schüler die Beziehung $\frac{x}{\pi(x)} \approx \log x$ aus der Tabelle herauslesen können. Es ist wie üblich dem Lehrer überlassen, wie viele Hinweise er gibt und welche Möglichkeiten er abhängig von den Vorkenntnissen der Schüler für geeignet hält.
Leider können wir den Primzahlsatz wie in Kapitel 3 nicht direkt beweisen. Dies setzt zu viel Vorwissen in funktionentheoretischen Sachverhalten vorraus, die man den Schülern auch nicht in angemessener Zeit vermitteln kann. Es gibt zwar noch andere Möglichkeiten, den Primzahlsatz zu zeigen, jedoch sind auch diese Beweise sehr kompliziert und im schulischen Rahmen nicht durchführbar. Deswegen ist es sinnvoll, an dieser Stelle nur eine Abschätzung nach oben und unten zu beweisen. Dies illustriert anschaulich, dass sich die Primzahlfunktion innerhalb eines elementar bestimmbaren Bereiches befindet.
Obwohl der Beweis mit schulischer Analysis durchführbar ist, benötigen wir zunächst einige Hilfssätze, die uns im eigentlichen Beweis nützlich sein werden. An dieser Stelle muss man den Schülern klar machen, dass diese Hilfssätze zunächst nichts mit dem eigentlichen Problem zu tun haben und wir sie nur benötigen, weil sie uns später Lücken im Beweis schließen. Wir orientieren uns in den Beweisen an der Vorgehensweise aus [SCHULZE-PILLOT] Kap. 10.

5.2.2 Hilfssatz (Ungleichung für Binomialkoeffizienten)
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$4^n < (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Beweis.
Zunächst formen wir die rechte Seite ein wenig um:

$$(2n+1)\binom{2n}{n} = (2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n+1)!(n+1)}{n!(n+1)!} = (n+1)\binom{2n+1}{n}.$$

Nun beweisen wir die Aussage durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang:
Für $n = 1$ gilt:

$$4^1 < 6 = 3 * 2 = (2 \cdot 1 + 1)\binom{2}{1}.$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1,\ n > 1$

Auf der linken Seite kommt ein Faktor 4 hinzu. Rechts erkennen wir durch

$$\begin{aligned}(n+2)\binom{2n+3}{n+1} &= (n+2)\frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)!}\\ &= \frac{(2n+3)!}{((n+1)!)^2}\\ &= \frac{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}{(n!)^2(n+1)^2}\\ &= (2n+1)\binom{2n}{n}\frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+1)^2},\end{aligned}$$

dass ein Faktor $\frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+1)^2}$ hinzukommt. Wegen

$$\frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+1)^2} > \frac{(2n+2)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)^2} = 4$$

und dem Induktionsanfang erhalten wir die gewünschte Ungleichung. $\square$

Nun können wir den folgenden Hilfssatz zeigen, der es uns erlaubt, später die obere Abschätzung für die Primzahlfunktion zu beweisen.

5.2.3 Hilfssatz (Primzahlschranke)
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathbb{P}}} p < 4^n.$$

Beweis.
Für $n = 1, 2$ ist die Aussage trivial. Für $n \geq 3$ verwenden wir Induktion und unterscheiden dabei, ob n gerade oder ungerade ist.

Induktionsschritt: $n - 1 \to n,\ n \geq 3$

1. Sei n gerade, dann ist n keine Primzahl und es gilt:

$$\prod_{\substack{p\leq n\\ p\in\mathbb{P}}} p = \prod_{\substack{p\leq n-1\\ p\in\mathbb{P}}} p \overset{IV}{\leq} 4^{n-1} < 4^n.$$

2. Sei n ungerade, d.h. $n = 2m+1$, so gilt:

$$\prod_{\substack{m+1<p\leq 2m+1\\ p\in\mathbb{P}}} p \;\Bigg|\; \binom{2m+1}{m} \overset{5.2.2}{<} 4^m.$$

   Also können wir schreiben:

$$\prod_{\substack{p\leq 2m+1\\ p\in\mathbb{P}}} p = \left(\prod_{\substack{p\leq m+1\\ p\in\mathbb{P}}} p\right) \cdot \left(\prod_{\substack{m+1<p\leq 2m+1\\ p\in\mathbb{P}}} p\right) \overset{IV}{<} 4^{m+1}4^m = 4^{2m+1}.$$

Die Behauptung ergibt sich direkt aus 1. und 2. □

Der letzte Hilfssatz, der eine Abschätzung für das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) liefert, ist notwendig, um die untere Schranke der Primzahlfunktion zu zeigen.

5.2.4 Hilfssatz (Abschätzung des kgV)
Sei $d_n := kgV(1, 2, \ldots, n), n \in \mathbb{N}$. *Dann ist für* $n \geq 7$ *stets* $d_n > 2^n$.

Beweis. Der Beweis beruht darauf, das Integral

$$I(m,n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx$$

zu berechnen, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$.

1. Wegen $(1-x)^{n-m} = \sum\limits_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j}(-1)^j x^j$ gilt:

$$I(m,n) = \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j} \int_0^1 x^{m-1+j}dx = \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^j \binom{n-m}{j} \frac{1}{m+j} \in \frac{1}{d_n}\mathbb{Z},$$

   denn d_n ist immer Hauptnenner der Summanden.

2. Um $I(m,n)$ auf eine zweite Art zu berechnen, berechnen wir das Integral

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{n-1} dx$$

mit $y \in [0,1)$ ebenso auf zwei Arten.

a) Für die erste Art nutzen wir die Darstellung durch Binomialkoeffizienten.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x+xy)^{n-1} dx &= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \int_0^1 (1-x)^{n-m-1}(xy)^m dx \\
&\overset{m\to m-1}{=} \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} \int_0^1 (1-x)^{n-m}(xy)^{m-1} dx \\
&= \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} y^{m-1} I(m,n).
\end{aligned}$$

b) Für die zweite Art rechnen wir das Integral einfach aus.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x+xy)^{n-1} dx &= \left[\frac{(1-x+xy)^n}{n(y-1)}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{y^n}{n(y-1)} - \frac{1}{n(y-1)} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{y^n-1}{y-1}\right) \\
&\overset{\text{geom. Summe}}{=} \frac{1}{n}(1+y+y^2+\cdots+y^{n-1}).
\end{aligned}$$

Da die Faktoren $1, y, y^2, \ldots$ linear unabhängig auf $[0,1)$ sind, können wir Koeffizientenvergleich auf a) und b) anwenden und erhalten

$$\binom{n-1}{m-1} I(m,n) = \frac{1}{n},$$

d.h. es gilt

$$I(m,n) = \frac{1}{n\binom{n-1}{m-1}} = \frac{1}{m\binom{n}{m}}.$$

3. Vergleichen wir nun 1. und 2. so bekommen wir, dass es eine ganze Zahl c gibt, sodass

$$\frac{1}{m\binom{n}{m}} = \frac{c}{d_n}$$

gilt. Formen wir dies um, so erhalten wir:

$$d_n = cm\binom{n}{m}, \text{ d.h. } m\binom{n}{m}|d_n.$$

4. Insbesondere gelten dann auch:

   - $$n\binom{2n}{n}|d_{2n}|d_{2n+1},$$

   - $$(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n} \overset{\text{Symm.}}{=} (n+1)\binom{2n+1}{n+1}|d_{2n+1}.$$

   Also haben wir wegen $ggT(n, 2n+1) = 1$

   $$n(2n+1)\binom{2n}{n}|d_{2n+1},$$

   und wegen 5.2.2 gilt

   $$d_{2n+1} > n4^n.$$

5. Folglich gilt:

   - für $n \geq 2$: $d_{2n+1} > 2 \cdot 4^n = 2^{2n+1}$,
   - für $n \geq 4$: $d_{2n+2} \geq d_{2n+1} \geq 4^{n+1} = 2^{2n+2}$.

   Somit haben wir die Behauptung gezeigt für gerade $n \geq 5$ und ungerade $n \geq 10$. Es bleibt der Fall $n = 8$ übrig, welchen wir schnell nachrechnen:

   $$d_8 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840 > 256 = 2^8.$$

   Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

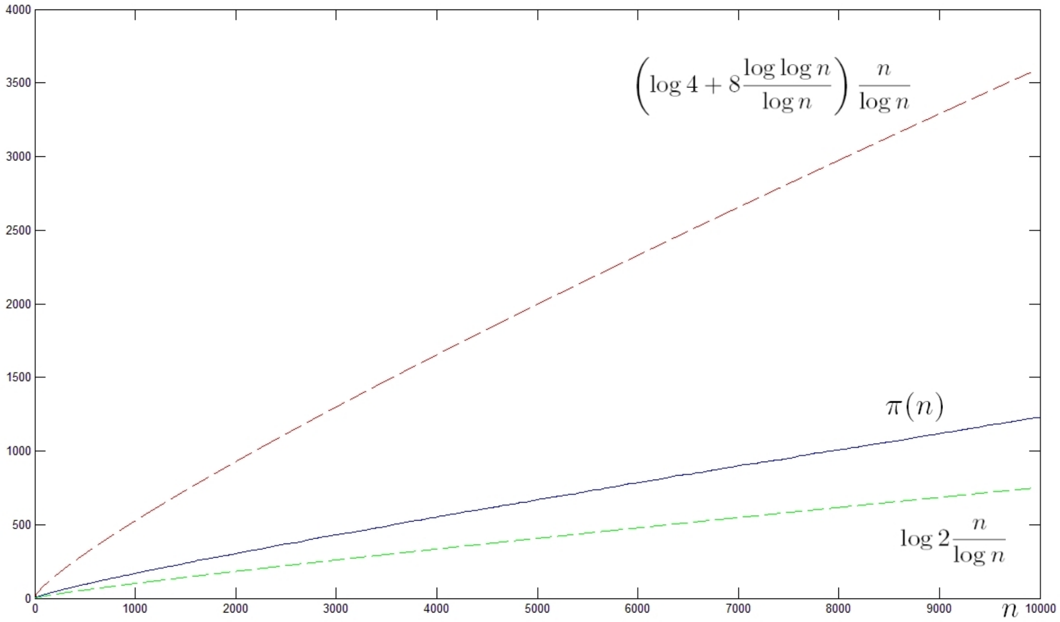
Jetzt können wir die Abschätzung formulieren, veranschaulichen jedoch vor dem Beweis die Bedeutung dieser Abschätzung mit Hilfe eines Graphen, in den wir $\pi(x)$ und die Abschätzungen eintragen. So können die Schüler sich besser vorstellen, wie genau diese Abschätzung ist und was diese leisten, bzw. nicht leisten kann. Zunächst geben wir die Abschätzung an:

5.2.5 Abschätzung der Primzahlfuntkion

Für alle $n \geq 4$ gelten die Ungleichungen:

$$\log 2 \frac{n}{\log n} \leq \pi(n) \leq \left(\log 4 + 8 \frac{\log \log n}{\log n}\right) \frac{n}{\log n}.$$

Das folgende Bild zeigt, dass die Abschätzung zwar richtig, aber keineswegs sehr gut ist:



5.2.6 Beweis der Abschätzung

Wir zeigen zunächst die erste Ungleichung:
Sei p ein Primteiler von d_n und $e \in \mathbb{N}$ so, dass $p^e | d_n$ und $p^{e+1} \nmid d_n$. Wir schreiben dafür auch $p^e || d_n$. Dann existiert eine natürliche Zahl $m \leq n$ mit $p^e || m$. Deshalb gilt:

$$d_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p^e || d_n \\ p \in \mathbb{P}}} p^e \leq \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathbb{P}}} n = n^{\pi(n)},$$

$$\text{d.h.} \qquad \log d_n \leq \pi(n) \log n.$$

Für $n \geq 7$ ist dies wegen 5.2.4 äquivalent zu:

$$\pi(n) \geq \frac{\log(2^n)}{\log n} = \log 2 \frac{n}{\log n}.$$

Die Fälle $n = 4, 5, 6$ gelten ebenfalls, wie man leicht nachrechnet:

n	$\log 2\frac{n}{\log n}$	$\pi(n)$
4	2	2
5	$2,15\ldots$	3
6	$2,32\ldots$	3

Also ist die erste Ungleichung bewiesen.

Die zweite Ungleichung ist nicht so leicht zu zeigen. Hierfür gehen wir in mehreren Schritten vor, die größtenteils einer Funktionsdiskussion in der Oberstufe entsprechen.

1. Sei $t \in [1, n)$. Es ist

$$\begin{aligned} & t^{\pi(n)-\pi(t)} \leq \prod_{\substack{t<p\leq n \\ p\in\mathbb{P}}} p \overset{5.2.3}{\leq} 4^n \\ \rightsquigarrow \quad & (\pi(n) - \pi(t)) \log t \leq n \log 4 \\ \rightsquigarrow \quad & \pi(n) \leq \log 4 \frac{n}{\log t} + \pi(t) \leq \log 4 \frac{n}{\log t} + t. \end{aligned}$$

2. Wir suchen nun das t, für das die Funktion auf der rechten Seite minimal wird, um die beste Abschätzung zu erhalten. Da wir dieses aber nicht elementar ausrechnen können, wählen wir stattdessen $t := \frac{n}{\log^2 n}$. Einsetzen in 1. liefert dann:

$$\pi(n) \leq \frac{n \log 4}{\log n - 2 \log\log n} + \frac{n}{\log^2 n} = \frac{n}{\log n} \left(\frac{\log 4}{1 - \frac{2\log\log n}{\log n}} + \frac{1}{\log n} \right).$$

Ein Vergleich mit der gesuchten Abschätzung zeigt uns nun, dass es genügt

$$\log 4 + 8 \frac{\log\log n}{\log n} \geq \frac{\log 4}{1 - \frac{2\log\log n}{\log n}} + \frac{1}{\log n} \qquad (*)$$

zu beweisen.

3. Um dies zu zeigen, setzen wir $L = L(x) := 2\frac{\log\log x}{\log x}$ für $x > 1$. Es gilt dann:

$$L(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \log\log x > 0 \;\Leftrightarrow\; \log x > 1 \;\Leftrightarrow\; x > e.$$

Ab jetzt sei immer $x > e$. Weiter ist $L'(x) = \frac{d}{dx}L(x) = 2\frac{1-\log\log x}{x \log^2 x}$ und es gilt:

$$L'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \log\log x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = e^e \approx 15,15\ldots.$$

Weiterhin bemerken wir, dass $L(x)$ ab $x = e^e$ monoton fallend ist und dass $L(e^e) = \frac{2}{e} < 1$ gilt. Dies wird im nächsten Schritt zusammen mit $L > 0$ bei $(**)$ ausgenutzt.

4. Nun beginnen wir die Ungleichung $(*)$ umzuformen und sie mit $L(x)$ in Verbindung zu bringen.

$$\begin{aligned}
& \frac{\log 4}{1-\frac{2\log\log n}{\log n}} + \frac{1}{\log n} \leq \log 4 + 8\frac{\log\log n}{\log n} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\log 4}{1-L} + \frac{1}{\log n} \leq \log 4 + 4L \\
\Leftrightarrow\quad & \log 4\left(\frac{1}{1-L} - 1\right) \leq \log 4 + 4L \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\log 4}{4}\left(\frac{L}{1-L}\right) \leq L - \frac{1}{4\log n} \\
\overset{(**)}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\log 4}{4} \leq 1 - L - \frac{1-L}{4L\log n} \\
\Leftrightarrow\quad & L \leq 1 - \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{4L\log n} + \frac{1}{4\log n} \\
\overset{L=L(n)}{\Leftrightarrow}\quad & L \leq 1 - \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{8\log\log n} + \frac{1}{4\log n} \qquad (\#)
\end{aligned}$$

5. Wir fassen nun beide Seiten von $(\#)$ als Funktion in x. Die Ableitung der linken Seite kennen wir, die der rechten Seite ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(1-\frac{\log 2}{2} - \frac{1}{8\log\log x} + \frac{1}{4\log x}\right) &= \frac{1}{8x(\log x)(\log\log x)^2} - \frac{1}{4x\log^2 x} \\
&= \frac{1}{4x\log x}\left(\frac{1}{2(\log\log x)^2} - \frac{1}{\log x}\right).
\end{aligned}$$

6. Als nächstes vergleichen wir die Ableitungen der beiden Seiten von $(\#)$, um eine Aussage über das Wachstum der beiden Funktionen machen zu können.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}L(x) \leq \frac{d}{dx}\left(1-\frac{\log 2}{2} - \frac{1}{8\log\log x} + \frac{1}{4\log x}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & 2\frac{1-\log\log x}{x\log^2 x} \leq \frac{1}{4x\log x}\left(\frac{1}{2(\log\log x)^2} - \frac{1}{\log x}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{8}{\log x}(1-\log\log x) \leq \left(\frac{1}{2(\log\log x)^2} - \frac{1}{\log x}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & 8 - 8\log\log x \leq \frac{\log x}{2(\log\log x)^2} - 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 9 \leq 8\log\log x + \frac{\log x}{2(\log\log x)^2}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Ungleichung auf jeden Fall für $x \geq e^e$ erfüllt ist, da die rechte Seite dort monoton steigend ist und $\log \log x \geq 1$ sowie $\frac{\log x}{2(\log \log x)^2} \geq \frac{e}{2}$ gelten.

7. Durch 6. erhalten wir, dass, wenn (#) für ein $x_0 \geq e^e$ erfüllt ist, die Ungleichung auch für alle $x \geq x_0$ erfüllt ist. Setzen wir $x_0 = 250$, so ist $L(x_0) = 0,618\ldots$ und die rechte Seite von (#) hat den Wert $0,625\ldots$ für x_0. Also ist die Ungleichung (#) für $x \geq 250$ und damit wegen 4. auch (∗) erfüllt. Für die verbleibenden $n \in \mathbb{N}$ zwischen 4 und 250 rechnet man die Ungleichung direkt nach. Damit ist auch die zweite Ungleichung bewiesen.

Nun ist es sinnvoll, den Schülern noch einen Ausblick zu geben, was in der analytischen Zahlentheorie möglich ist. Der eigentliche Primzahlsatz aus 3.3.3 kann verbessert werden durch $\pi(x) \approx \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x}$. Eine noch bessere Approximation ist jedoch die Funktion $li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log x} dx$. Diese Approximation ist nicht nur wesentlich besser, sondern lässt sich darüberhinaus interpretieren. Für große Zahlen hat nämlich die Primzahlfunktion ungefähr die Steigung $\frac{d}{dx}\pi(x) \approx \frac{d}{dx} li(x) = \frac{1}{\log x}$. D.h. die Wahrscheinlichkeit für eine Zahl in einem Bereich um $x \gg 0$ prim zu sein ist ungefähr $\frac{1}{\log x}$. Unter Annahme der Riemannschen Vermutung kann man sogar den Fehlerterm von $li(x)$ auf $\mathcal{O}(\sqrt{x} \log x)$ bestimmen. Um die Fortschritte in den Abschätzungen zu verdeutlichen, bietet es sich an, die Schüler mit Hilfe von Programmen Tabellen erstellen zu lassen, welche einen guten Überblick über die Abschätzungen bietet. Beispielsweise könnte eine Tabelle folgendermaßen aussehen, wobei der Lehrer die Werte der Größenordnungen angibt, in denen die Programme versagen:

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$li(x)$
10	4	4	6
10^2	25	22	30
10^3	168	145	178
10^4	1.229	1.086	1.246
10^5	9.592	8.686	9.630
10^6	78.498	72.382	78.628
10^7	664.579	620.421	664.918
10^8	5.761.455	5.428.681	5.762.209
10^9	50.847.534	48.254.942	50.849.235
10^{10}	455.052.511	434.294.482	455.055.615
10^{11}	4.118.054.813	3.948.131.654	4.118.066.401
10^{12}	37.607.912.018	36.191.206.825	37.607.950.281
10^{13}	346.065.536.839	334.072.678.387	346.065.645.810
10^{14}	3.204.941.750.802	3.102.103.442.166	3.204.942.065.692
10^{15}	29.844.570.422.669	28.952.965.460.217	29.844.571.475.288

10^{16}	279.238.341.033.925	271.434.051.189.532	279.238.344.248.557
10^{17}	2.623.557.157.654.233	2.554.673.422.960.305	2.623.557.165.610.822
10^{18}	24.739.954.287.740.860	24.127.471.216.847.324	24.739.954.309.690.415
10^{19}	234.057.667.276.344.607	228.576.043.106.974.646	234.057.667.376.222.382
10^{20}	2.220.819.602.560.918.840	2.171.472.409.516.259.138	2.220.819.602.783.663.484

Man erkennt hier sehr gut, dass der in 3.3.3 bewiesene Primzahlsatz wirklich nur als asymptotische Aussage anzusehen ist, da er selbst in der Größenordnung 10^{20} in der zweiten Stelle schon einen Fehler besitzt. Die $li(x)$-Funktion hingegen stimmt in den ersten 10 Stellen mit $\pi(x)$ überein, ist also wesentlich besser, jedoch selbst mit Computern aufwändiger zu berechnen. Es bleibt allerdings noch die Frage offen, wie man $\pi(10^{20})$ exakt bestimmt, da bei solch hohen Zahlen der Speicher der Computer nicht ausreichend für eine komplette Auflistung ist. Man kann mit Hilfe der Möbius-Transformation zeigen (siehe [BORWEIN]), dass

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} li\left(x^{\frac{1}{n}}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{\rho} li\left(x^{\frac{\rho}{n}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \int_{x^{\frac{1}{n}}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)t\log t} - \log 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

gilt, wobei die Summe über ρ alle nichttrivialen Nullstellen ρ der Riemannschen Zetafunktion durchläuft. Mit diesem Ausdruck ist es möglich $\pi(x)$ bis zu einer gewissen, von der Technik vorgegebenen Schranke exakt zu bestimmen, was wir aber hier nicht weiter verfolgen werden.

5.3 Die durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren

In unserem letzten Abschnitt suchen wir einen anderen Zugang zur Abschätzung der durchschnittlichen Anzahl an Primfaktoren als in Kapitel 4. Wir könnten zwar dieselbe Vorgehensweise benutzen, da die Beweise unter Anleitung eines Lehrers auch für Schüler verständlich sind, jedoch kann man hier mit experimentellen Mitteln wesentlich anschaulicher die Abschätzungen annähern. Zunächst motivieren wir das Thema.

5.3.1 Motivation

Da wir im eben das Verhalten der Primzahlfunktion untersucht haben, wissen wir nun, dass wir Grenzen angeben können, in denen die Primzahlfunktion verläuft. Die nächste natürliche Frage, die sich stellt, ist, wie sich die Anzahl an Primfaktoren verhält. Hier müssen wir jedoch unterscheiden, ob wir die Vielfachheiten berücksichtigen oder nicht. Auf Anhieb lässt sich nur sagen, dass wir, wenn wir die Vielfachheiten berücksichtigen, einen höheren durchschnittlichen Wert an Primfaktoren erwarten werden, als ohne Berücksichtigung der Vielfachheiten, was klar ist. Allerdings interessiert uns auch, wie stark sich die beiden Werte unterscheiden und wie wir das Wachstum abschätzen können.

Wie üblich bei zahlentheoretischen Problemen ist es sinnvoll, sich die Verteilungen mit einem Computer visuell darstellen zu lassen. Wir benutzen im Folgenden die Darstellungen $\overline{\Omega(n)}$ bzw. $\overline{\omega(n)}$ für die durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren mit bzw. ohne Berücksichtigung der Vielfachheiten bis zur Schranke $n \in \mathbb{N}$. Zur Berechnung von $\overline{\Omega(n)}$ greifen wir auf das Matlab Programm

```
%Durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren mit Vielfachheiten
disp('Obere Schranke eingeben') %Schranke festlegen
n=input('n=');
u=0;                            %Absolute Anzahl an Primfaktoren
for i=1:n;
    p=factor(i);                %Faktorisierung
    u=u+length(p);              %Erhöhung der Laufvariablen um
                                %die Anzahl der Primfaktoren von i
end
M=u/n                           %Berechnung des Durchschnittswertes
```

zurück und zur Bestimmung von $\overline{\omega(n)}$ auf das Programm:

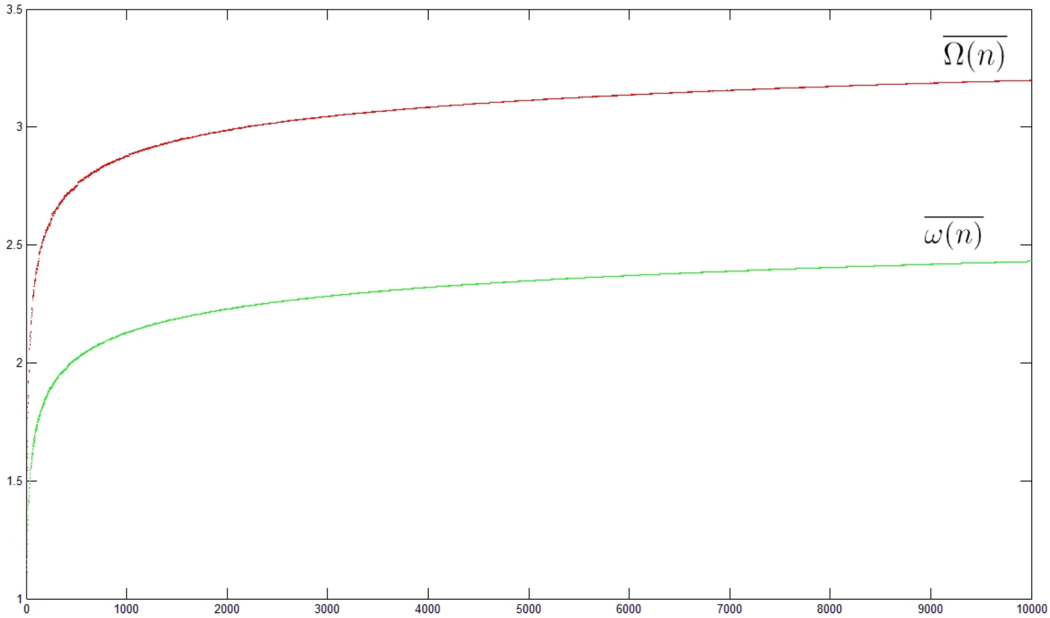
```
%Durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren ohne Vielfachheiten
disp('Obere Schranke eingeben') %Obere Schranke festlegen
n=input('n=');
u=0;                            %Laufvariable
for i=1:n;
    p=factor(i);                %Faktorisierung
    k=unique(p);                %Löschen doppelter Einträge
    u=u+length(k);              %Erhöhung der Laufvariablen um
                                %die Anzahl an verschiedenen Primfaktoren
end
O=u/n                           %Berechnung des Durchschnittswertes
```

Natürlich sollte hier wieder die Effizienz der Programme eine große Rolle spielen, so wäre es sicher geschickt, beide Programme zu verknüpfen, um nur einmal Faktorisieren zu müssen. Erneut ist es dem Lehrer überlassen, ob er selbst bessere Programme vorschlägt oder das Problem als Knobelaufgabe an die Schüler weitergibt.
Nun betrachten wir wie bereits bei den vorherigen Problemstellungen verschiedenen Zahlbereiche und stellen $\overline{\Omega(n)}$ und $\overline{\omega(n)}$ gegenüber. Es ergibt sich folgende Tabelle:

Tabelle 5.4: Durchschnittliche Anzahl an Primfaktoren bis zur Schranke n

Schranke n	10	100	1000	10000	100000	1000000
$\overline{\Omega(n)}$	1,6	2,4	2,8780	3,1986	3,4362	3,6266
$\overline{\omega(n)}$	1,2	1,72	2,1270	2,4301	2,6640	2,8537

In dieser Darstellung erkennen wir an der Tabelle nur, dass die Durchschnittswerte sehr langsam ansteigen. Nun wird von den Schülern sicher der Vorschlag kommen, sich die beiden Funktionen zeichnen zu lassen. Dies ist eine hervoragende Idee, wie wir gleich sehen werden. Setzen wir als obere Schranke 10000, so erhalten wir folgende Funktionsgraphen:

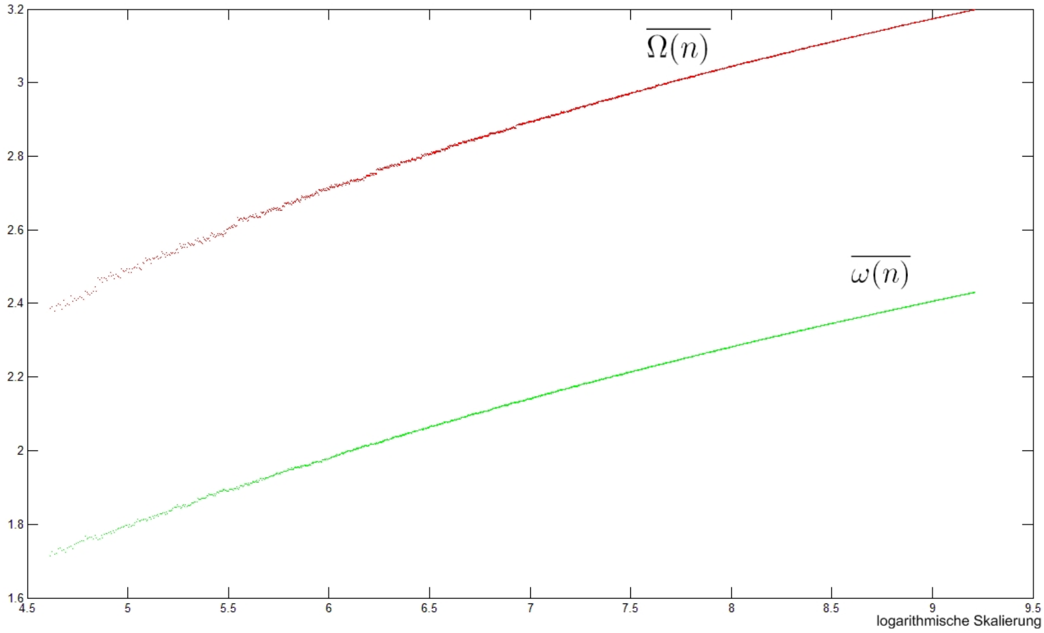


Hier erkennen wir und insbesondere die Schüler schon viel eher, wie die beiden Funktionen zusammenhängen, denn die Steigungen scheinen für große Zahlenwerte nahezu identisch zu sein, was den parallelen Verlauf erklärt. Betrachten wir dazu noch die Differenz $\overline{\Omega(n)} - \overline{\omega(n)}$, so erhalten wir:

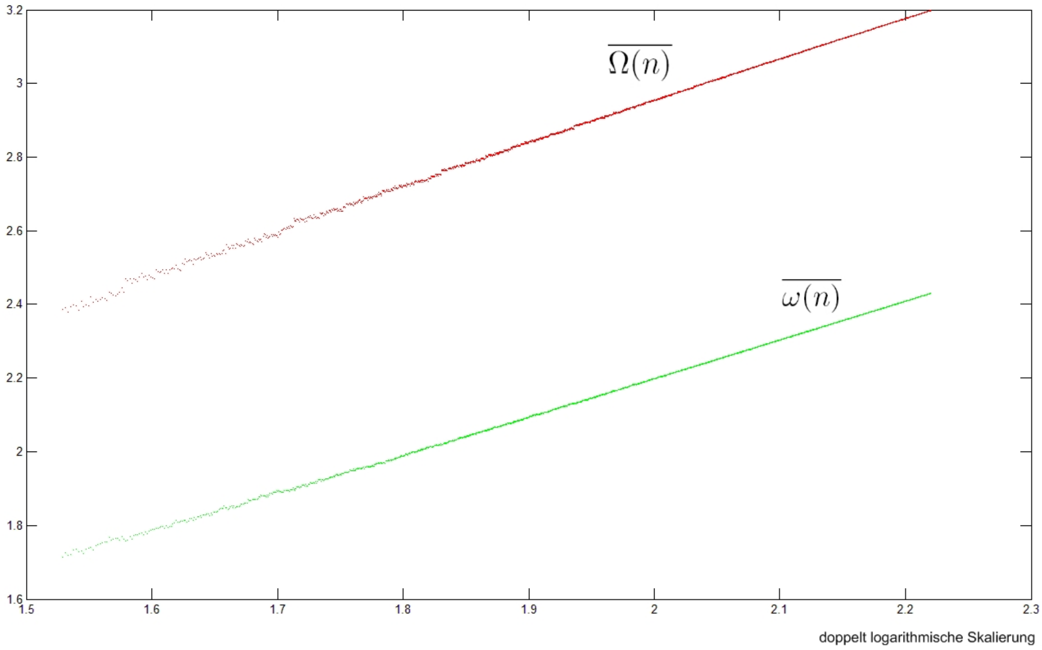
Tabelle 5.5: Differenz von $\overline{\Omega(n)}$und $\overline{\omega(n)}$

Schranke n	10	100	1000	10000	100000	1000000
$\overline{\Omega(n)} - \overline{\omega(n)}$	0,4	0,7	0,751	0,7685	0,7722	0,7729

Man sieht hier, dass die Differenz zu konvergieren scheint, was unsere Vermutung der identischen Steigung bestätigt. Tatsächlich ist der Grenzwert dieser Differenz die Differenz der beiden Konstanten C_1 und C_2 aus Abschnitt 4.2 für die $C_2 - C_1 \approx 0,7731$ gilt. Als Nächstes versuchen wir mehr über die Funktionen herauszufinden. Da wir ein sehr langsames Wachstum, z.B. ein logarithmisches, vermuten, benutzen wir eine logarithmische Skalierung und erhalten:



Offensichtlich reicht die logarithmische Skalierung nicht aus, denn der Graph ist immernoch sichtbar gekrümmt. Deswegen skalieren wir nochmals logarithmisch, um dann folgenden Graph zu bekommen:



In dieser Skalierung können wir nun einen nahezu linearen Zusammenhang beobachten. Also können wir nun für große n folgende approximierende Funktionen annehmen:

$$\overline{\omega(n)} \approx \log\log(a_1 n) + b_1,$$
$$\overline{\Omega(n)} \approx \log\log(a_2 n) + b_2.$$

Hierbei sind a_1, a_2, b_1, b_2 reelle Konstanten, welche es nun zu bestimmen gilt. Aufgrund der Linearität bei einer doppelt logarithmischen Skalierung können wir a_1 und a_2 als Steigungen der Geraden auffassen. Diese lassen sich mit mit Hilfe eines Steigungsdreiecks approximieren, eine den Schülern gut bekannte Methode. Wir erhalten dann für hinreichend große Zahlen:

$$a_1 = \frac{\overline{\omega(100000)} - \overline{\omega(50000)}}{\log\log(100000) - \log\log(50000)} = \frac{2,6640 - 2,5991}{0,0621} \approx 1,045 \approx 1,$$
$$a_2 = \frac{\overline{\Omega(100000)} - \overline{\Omega(50000)}}{\log\log(100000) - \log\log(50000)} = \frac{3,4362 - 3,3706}{0,0621} \approx 1,056 \approx 1.$$

Somit bekommen wir relativ gute Abschätzungen für a_1 und a_2, welche nah am realen Wert 1 liegen. Es bleibt nun noch übrig die Konstanten b_1 und b_2 zu bestimmen. Dies bewerkstelligen wir mit einfachem Einsetzen einer möglichst großen Zahl in unsere Funktion und Vergleichen mit dem berechneten Wert aus unserem Programm.

$$b_1 = \overline{\omega(100000)} - \log\log(100000) \approx 2,6640 - 2,4435 \approx 0,2205,$$
$$b_2 = \overline{\Omega(100000)} - \log\log(100000) \approx 3,4362 - 2,4435 \approx 0,9927.$$

Auch hier erhalten wir im Rahmen unserer Mittel gute Abschätzungen, denn die Fehler $|b_1 - C_1| \approx |0,2205 - 0,2615| = 0,041$ und $|b_2 - C_2| \approx |0,9927 - 1,0347| = 0,042$ sind klein und können je nach gewünschter Genauigkeit mit erhöhtem Rechenaufwand weiter reduziert werden. D.h. wir konnten mit einfachen numerischen Methoden die in Kapitel 4 hergeleiteten Ausdrücke annähern, ohne Kenntnisse der höheren Mathematik vorauszusetzen. Dies ist gerade für Schüler interessant, die sich für alternative Problemlösungen interessieren und eine gute Abwechslung zu den Methoden in 5.1 und 5.2.

Symbolverzeichnis

Literaturverzeichnis

[AIGNER] Aigner M. & Ziegler G. 2004, Das Buch der Beweise 2. Auflage, Springer - Berlin

[BORWEIN] Borwein J. M., Bradley D. M. & Crandall R. E. 2000, Computational Strategies for the Riemann Zeta Function, Journal of Computational and Applied Mathematics Vol. 121 S. 247-296

[EDWARDS] Edwards H. M. 2001, Riemann's Zeta Function, Dover Pubns - Dover

[FREITAG] Freitag E. & Busam Rolf 2006, Funktionentheorie 1, Springer - Berlin

[GEKELER] Unkorrigierte Vorlesungsmitschrift aus der Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“aus dem Jahr 2003, gehalten von Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler an der Universität des Saarlandes

[HARDY] Hardy G. H. & Wright E. M. 2008, An Introduction To The Theory Of Numbers, Oxford University Press - Oxford

[HAVIL] Havil J. 2003, Gamma: Exploring Euler's Constant, Princeton University Press - Princeton

[HEUSER] Heuser Harro 2009, Lehrbuch der Analysis Teil 1, 17. Auflage, Vieweg+Teubner - Wiesbaden

[JAENICH] Jänich, K. 2004, Funktionentheorie 6. Auflage, Springer - Berlin

[NEWMAN] Newman D. J. 1980, Simple Analytic Proof Of The Prime Number Theorem, The American Mathematical Monthly Vol. 87 No. 7, Mathematical Association of America - Washington DC

[SCHULZE-PILLOT] Schulze-Pillot R. 2007, Elementare Algebra und Zahlentheorie, Springer - Berlin

[ZAGIER] Zagier D. 1997, Newman's Short Proof Of The Prime Number Theorem, The American Mathematical Monthly Vol. 104 No. 8, Mathematical Association of America - Washington DC