# Drinfeld'sche Modulkurven und Modulformen über dem affinen Koordinatenring einer elliptischen Kurve

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von
Alice Keller

Saarbrücken
2005

| | |
|---|---|
| Tag des Kolloquiums: | 20. Juli 2005 |
| Dekan: | Prof. Dr. Jörg Eschmeier |
| Berichterstatter | Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler |
| | Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot-Ziemen |

# Summary

Drinfeld modules over global function fields are the analogue of elliptic curves over the complex numbers.
The theory of Drinfeld modules is highly developed. But there is only one standard example, namely Drinfeld modules (of rank 2) over the ring of polynomials $\mathbb{F}_q[T]$.
In this thesis we introduce an second class of examples: Drinfeld modules of rank 2 over the affine coordinate ring $A = \mathbb{F}_q[E]$ of an elliptic curve $E/\mathbb{F}_q$. Let $K = \mathrm{Quot}(A)$.
First we collect known results in this situation and introduce objects like the quotient $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\mathcal{T}$ of the Bruhat Tits tree $\mathcal{T}$ described by Takahashi.
Next we merge these results and develop our own. So we can explicitly give the 1-1-correspondence between the vertices of $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\mathcal{T}$ and the modular sheaves with trivial determinant of dimension 2 over the scheme of the elliptic curve.
We then consider constant field extensions and the connections between $\mathcal{T}$ and $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\mathcal{T}$ for various constant fields.
Another important result is the description of certain modular forms and functions. For the Eisenstein series of weight $q - 1$ and the canonical modular form $\Delta$ we give the first terms of the Laurent series all cusps. So we can prove that the $\mathrm{GL}(2, A)$-invariant Eisenstein series of the same weight are linearly independent. Moreover, we give a formula to calculate the dimension of the space of modular forms of weight $k$ and type $m$.
In addition we show that theta functions are $\mathrm{GL}(2, A)$-invariant. Therefore we define the $j$-invariants as theta functions. Later we present a power of a $j$-invariant as a quotient of certain modular forms and determine the first terms of the Laurent series of these invariants at the cusp at infinity.

# Zusammenfassung

Drinfeld-Moduln über globalen Funktionenkörpern sind das Analogon zu elliptischen Kurven über den komplexen Zahlen.

Die Theorie der Drinfeld-Moduln ist weit entwickelt. Aber es gibt im gewissen Sinne nur ein Referenzbeispiel, nämlich Drinfeld-Moduln (vom Rang 2) über dem Polynomring $\mathbb{F}_q[T]$. In dieser Arbeit stellen wir eine zweite Klasse von Beispielen vor: Drinfeld-Moduln vom Rang 2 über dem affinen Koordinatenring $A := \mathbb{F}_q[E]$ einer elliptischen Kurve. Seien $K = \mathrm{Quot}(A)$ und $\widehat{K}_\infty$ die Vervollständigung von $K$ an der Stelle Unendlich.

Zunächst stellen wir die bekannten Ergebnissse kurz vor, wie beispielsweise den Quotienten $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\mathcal{T}$ des Bruhat-Tits-Baumes $\mathcal{T}$ zur $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K}_\infty)$, der von Takahashi beschrieben wurde.

Danach verbinden wir diese Ergebnisse und entwickeln unsere eigenen. Auf diese Weise erhalten wir explizit die 1-1-Korrespondenz der Knoten von $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\mathcal{T}$ mit den Modulgarben über dem Schema der elliptischen Kurve, die Dimension 2 und eine affin trivale Determinante haben.

Hier untersuchen wir auch die Konstantenerweiterungen von $\mathbb{F}_q(E)$ und die Zusammenhänge zwischen $\mathcal{T}$ und $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\mathcal{T}$ für verschiedene Konstantenkörper.

Ein zweiter Schwerpunkt ist die Beschreibung von Modulformen. Sowohl für die Eisensteinreihen vom Gewicht $q - 1$ als auch für die kanonische Modulform $\Delta$ geben wir die ersten Terme der Laurentreihenentwicklung in allen Spitzen an. Daraus können wir dann die lineare Unabhängigkeit der $\mathrm{GL}(2, A)$-invarianten Eisensteinreihen gleichen Gewichtes ableiten.

Darüber hinaus geben wir eine Formel an, mit der sich die Dimension des Raumes der Modulformen vom Gewicht $k$ und Typ $m$ bestimmen läßt.

Zudem zeigen wir, daß die Thetareihen $\mathrm{GL}(2, A)$-invariant sind. Daher definieren wir die $j$-Invarianten als Thetafunktionen. Wir stellen die $(q-1)$-te Potenz einer $j$-Invariante als Quotient zweier Modulformen dar und bestimmen die ersten Terme der Laurentreihenentwicklung einer $j$-Invarianten in der Spitze Unendlich.

# Einleitung

Die klassische Zahlentheorie beschäftigt sich mit verschiedenen Konstruktionen über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und ihren zahlentheoretischen Eigenschaften oder Bedeutungen.
Ihnen gegenüber gestellt werden häufig Konstruktionen über globalen Funktionenkörpern. Dabei verstehen wir unter einem globalen Funktionenkörper $K$ eine endliche algebraische Erweiterung des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{F}_q(T)$ mit vollem Konstantenkörper $\mathbb{F}_q$.
Diese Gegenüberstellung führte zu einem fruchtbaren Wechselspiel. Einige offene Fragen der klassischen Zahlentheorie sind über Funktionenkörpern einfacher zu beantworten. Dies liefert häufig Hinweise auf die Struktur des Problems.
Umgekehrt gibt es durchaus Fragen, deren Antworten die klassische Theorie schon lange kennt, die aber für Funktionenkörper weiterhin offen sind.

In dieser Arbeit widmen wir uns einer speziellen Konstruktion in einer speziellen Situation, den Drinfeld-Moduln vom Rang 2 über dem affinen Koordinatenring einer elliptischen Kurve über $\mathbb{F}_q$.

Die von Drinfeld 1974 über globalen Funktionenkörpern konstruierten „elliptischen Moduln", wie er sie nannte, tragen heute seinen Namen. Er wählte die Bezeichnung, um die Analogie zu klassischen elliptischen Kurven zu betonen.

### Elliptische Kurven und klassische Modulformen

Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Jeder elliptischen Kurve $E$ über $\mathbb{C}$ läßt sich ein $\mathbb{Z}$-Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}$ mit $\omega \in \mathcal{H}$ zuordnen, so daß $\mathbb{C}/\Lambda$ bijektiv auf $E(\mathbb{C})$ abgebildet werden kann. Umgekehrt existiert zu jedem $\mathbb{Z}$-Gitter $\Lambda$ eine elliptische Kurve

$$E^\Lambda/\mathbb{C}: \qquad y^2 = x^3 + g_1(\omega)x + g_2(\omega) \ ,$$

bei der die Koeffizienten $g_1(\omega)$ und $g_2(\omega)$ von dem gewählten Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}$ abhängen.
Zur Lösung des Modulproblems „elliptische Kurven über $\mathbb{C}$" betrachtet man nun die obere Halbebene genauer.

Auf ihr operiert die Gruppe $\Gamma := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch Möbiustransformationen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ z \in \mathcal{H}\ .$$

Die Kompaktifizierung von $\mathcal{H}$ ist $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Die Elemente von $\overline{\mathcal{H}} - \mathcal{H}$ heißen Spitzen. Auf den Spitzen operiert $\Gamma$ transitiv; die einzige Bahn wird meist $\infty$ genannt.
Interessante Funktionen auf $\overline{\mathcal{H}}$ sind die Modulformen vom Gewicht $k$ für $\Gamma$. Dies sind auf $\mathcal{H}$ holomorphe Funktionen mit vorgegebenem Transformationsverhalten:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\ .$$

Ist eine Modulform holomorph (meromorph) in den Spitzen, so heißt sie holomorphe (meromorphe) Modulform.
Aus dem Transformationsverhalten ergibt sich $f(z+b) = f(z)$ für alle $b \in \mathbb{Z}$. Und da $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ nur aus einer Bahn besteht, erhält man zu jeder Modulform die Fourierentwicklung

$$f(z) = \widetilde{f}(q(z)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n$$

mit $q(z) = e^{2\pi i z}$. An dieser Reihenentwicklung lassen sich Null- bzw. Polstellenordnung wie üblich ablesen.

Zu den intensiv untersuchten Modulformen zählen die Eisensteinreihen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$:

$$E_k(z) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ (a,b)\neq(0,0)}} \frac{1}{(az+b)^k}\ .$$

Sie konvergieren lokal uniform und normal auf $\mathcal{H}$ und sind für $k \geq 3$ holomorph. Ihre exakte Fourierentwicklung ist bekannt.
Der Raum aller Modulformen ist das Algebrenerzeugnis von $E_4$ und $E_6$ über $\mathbb{C}$. Da auch $g_1(\omega)$ und $g_2(\omega)$ Modulformen sind, lassen sie sich als Ausdrücke in diesen Eisensteinreihen beschreiben:

$$g_1(\omega) = 60 \cdot E_4(\omega) \quad \text{und} \quad g_2(\omega) = 140 \cdot E_6(\omega)\ .$$

Mit $\Delta(\omega) := g_1(\omega)^3 - 27 g_2(\omega)^2$ erhalten wir die $j$-Invariante

$$j(\omega) := 1728 \frac{g_1(\omega)^3}{\Delta(\omega)}\ ,$$

die an $\infty$ einen einfachen Pol hat. Sie identifiziert $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ mit $\mathbb{C}$ und löst somit das Modulproblem.

### Drinfeld-Moduln und Drinfeld'sche Modulkurve über $\mathbb{F}_q(T)$

Zahlreiche Veröffentlichungen beschäftigen sich mit dem Analogon der elliptischen Kurven über dem rationalen Funktionenkörper.
In $K = \mathbb{F}_q(T)$ wird die Stelle mit der Uniformisierenden $\frac{1}{T}$ ausgezeichnet und $\infty$ genannt. Der zugehörige normalisierte Absolutbetrag wird mit $|.|$ bezeichnet.
Dann ist $A = \mathbb{F}_q[T]$ der Ring der außerhalb $\infty$ ganzen Elemente.
Dem Paar $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ entspricht nun das Paar $(A, K)$.
Der Körper $K$ wird bezüglich $|.|$ vervollständigt, der entstandene Körper $\widehat{K}_\infty$ wird algebraisch abgeschlossen und $|.|$ darauf fortgesetzt. Nachträgliches Vervollständigen führt auf den Körper $\mathbf{C}$, der das Analogon zu $\mathbb{C}$ ist. Im Unterschied zur klassischen Situation, dort ist $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ eine Erweiterung vom Grad 2, hat der algebraische Abschluß von $\widehat{K}_\infty$ den Grad $\infty$ über $\widehat{K}_\infty$. Dies ermöglicht es, $A$-Gitter beliebigen Ranges in $\mathbf{C}$ zu definieren.
Der komplexen oberen Halbebene entspricht die Drinfeld'sche obere Halbebene $\Omega := \mathbf{C} - \widehat{K}_\infty$. Ihre Kompaktifizierung ist $\overline{\Omega} = \Omega \cup \mathbb{P}^1(K)$.
Nun lassen sich $A$-Gitter in $\mathbf{C}$ vom Rang 2 definieren:

$$\Lambda := A\omega + A \quad \text{mit} \quad \omega \in \Omega \ .$$

Das Analogon zu den elliptischen Kurven sind die Drinfeld-Moduln $\phi$ vom Rang 2, die durch

$$\phi_T := T + g\tau + \Delta\tau^2 \in \mathbf{C}\{\tau\}$$

eindeutig bestimmt sind, wobei $\tau : z \mapsto z^q$ die Frobeniusabbildung ist. Vermöge dieser Vorschrift verleihen wir der additiven Gruppe $\mathbb{G}_a(\mathbf{C})$ eine $A$-Modulstruktur (dabei ist $\mathbf{C}\{\tau\}$ der getwistete Polynomring mit der Kommutatorregel $\tau c = c^q\tau$ für alle $c \in \mathbf{C}$).
Jedem Gitter $\Lambda := A\omega + A$ läßt sich ein Rang-2 Drinfeld-$A$-Modul $\phi^\Lambda$ zuordnen, der durch

$$\phi_T := T + g(\omega)\tau + \Delta(\omega)\tau^2$$

bestimmt ist. Umgekehrt existiert zu jedem Drinfeld-$A$-Modul vom Rang 2 ein $A$-Gitter in $\mathbf{C}$ vom Rang 2.

Neben der Drinfeld'schen oberen Halbebene existiert ein zweites Analogon zur klassischen oberen Halbebene $\mathcal{H}$, der Bruhat-Tits-Baum $\mathcal{T}$ zu $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K}_\infty)$.
Den Zusammenhang zwischen $\mathcal{T}$ und $\Omega$ beschreibt eine (geeignet definierte) Gebäudeabbildung $\lambda$. Deren Definition ist technisch aufwendig.
Sowohl auf $\mathcal{T}$ als auch auf $\overline{\Omega}$ operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(2, A)$ – auf $\Omega$ vermöge Möbiustransformationen –, und die Abbildung $\lambda$ ist verträglich mit der Quotientenbildung von $\mathcal{T}$ und $\overline{\Omega}$ nach $\mathrm{GL}(2, A)$.
Auf der Menge der Spitzen $\overline{\Omega} - \Omega$ operiert $\mathrm{GL}(2, A)$ transitiv, die Bahn von $\overline{\Omega} - \Omega$ nach $\mathrm{GL}(2, A)$ wird meist wiederum mit $\infty$ bezeichnet. Der Quotientengraph $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\mathcal{T}$ ist dementprechend eine Halbgerade.

Der komplexen Analysis auf $\overline{\mathcal{H}}$ entspricht die (nicht-archimedische) rigide Analysis auf $\overline{\Omega}$. Dazu wird auf $\overline{\Omega}$ ein geeigneter Abstandsbegriff eingeführt. Zudem werden nur „zulässige“ Überdeckungen betrachtet. Auf diese Weise ergeben sich dann geeignete Definitionen von Holomorphie und Meromorphie.

Nun lassen sich auch auf $\overline{\Omega}$ Modulformen definieren und zwar vom Gewicht $k$ und Typ $l$. Sie sind auf $\Omega$ holomorphe Funktionen $f$ mit dem Transformationsverhalten

$$f(\gamma z) = \frac{(cz+d)^k}{\det(\gamma)^l} f(z) \quad \text{mit} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, A) \ .$$

Daß hier die Determinante in das Transformationsverhalten eingeht, steht durchaus im Einklang mit der klassischen Theorie: bei dieser werden allerdings nur Matrizen mit Determinante 1 betrachtet.

Holomorphe bzw. meromorphe Modulformen sind nun wiederum solche, die holomorph bzw. meromorph in den Spitzen sind.
Analog zur klassischen Situation haben die Modulformen vom Typ 0 in der Spitze $\infty$ von $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\overline{\Omega}$ eine Laurentreihenentwicklung. Setzt man

$$e(z) := z \prod_{b \in A - \{0\}} \left(1 - \frac{z}{b}\right) \ ,$$

so ist $t^{q-1} := e^{1-q}(z)$ eine Uniformisierende.
Sollen Modulformen vom Typ $l > 0$ in dieser Spitze in eine Laurentreihe entwickelt werden, so ist dies allerdings nur noch für $t$, nicht mehr für die $(q-1)$-te Potenz $t^{q-1}$ möglich. Geometrisch gesprochen weicht man auf eine verzweigte Überlagerung der Modulkurve $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\overline{\Omega}$ aus.

Das wichtigste Beispiel für Modulformen sind hier wiederum die Eisensteinreihen vom Gewicht $k \equiv 0 \mod q-1$:

$$E_k(z) := \sum_{\substack{a,b \in A \\ (a,b) \neq (0,0)}} (az+b)^{-k} \ ,$$

die alle Typ 0 haben. Die Laurentreihenentwicklung dieser Eisensteinreihen ist in [Gek88] ausgeführt.
Der Raum aller Modulformen vom Typ 0 ist das Algebrenerzeugnis von $E_{q-1}$ und $E_{q^2-1}$ über $\mathbf{C}$.
Die Koeffizienten $g(\omega)$ und $\Delta(\omega)$ in $\phi_T^\Lambda$ mit $\Lambda = A\omega + A$ sind

$$\begin{aligned} g(\omega) &= (T^q - T) E_{q-1}(\omega) \\ \text{und} \quad \Delta(\omega) &= (T^{q^2} - T)(E_{q^2-1}(\omega) + E_{q-1}^{q+1}(\omega)) \ . \end{aligned}$$

Dabei entspricht die Modulform $\Delta$ in gewisser Weise der klassischen Diskriminante, aufgefaßt als Modulform. Sie wird zumeist kanonische Modulform genannt.

Die Funktion $j(\omega) := \frac{g^{q+1}(\omega)}{\Delta(\omega)}$ ist GL$(2, A)$-invariant und

$$j : \mathrm{GL}(2, A)\backslash\Omega \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}$$

ist ein Isomorphismus.
Somit hat das Modulproblem „Rang-2 Drinfeld-$A$-Moduln über **C**“ ebenfalls eine „schlichte“ Lösung.

### Allgemeine Situation

Startet man nun mit einem globalen Funktionenkörper $K$, der eine echte Erweiterung von $\mathbb{F}_q(T)$ ist, so finden sich in der Literatur noch sehr viele strukturelle Aussagen, aber wenige explizite Berechnungen.
Hier wählt man in $K$ eine Stelle, die wiederum $\infty$ genannt wird. Die Konstruktion der oberen Halbebene, des Bruhat-Tits-Baums und der Gebäudeabbildung lassen sich nun durchführen.
Nennt man den Ring der außerhalb $\infty$ ganzen Elemente $A$, so lassen sich ebenfalls $A$-Gitter in **C** und vom Rang 2 definieren, die Drinfeld-$A$-Moduln vom Rang 2 entsprechen, und umgekehrt.

Menge und Gestalt der Gitter und der (nicht isomorphen) Drinfeld-$A$-Moduln hängen aber stark von der Größe der Picardgruppe Pic$(A)$ ab. Nimmt diese Größe zu, erhält man immer komplexere Strukturen.
So hat beispielsweise die algebraische Kurve, die das Modulproblem beschreibt, #Pic$(A)$ viele irreduzible Komponenten.
Hier ist eine Drinfeld'sche Modulkurve die Kompaktifizierung einer dieser Komponenten, beispielsweise $\mathrm{GL}(2, A)\backslash\overline{\Omega}$.
Wie man das Geschlecht einer solchen Kurve berechnet, zeigt Gekeler in [Gek86, VI.5.8]. Dabei ergibt sich, daß das Geschlecht der Modulkurve vom Geschlecht des zugrunde liegenden Funktionenkörpers abhängt. Ist dieses größer als 1, so ist das Geschlecht der Modulkurve größer als 0.
Jede dieser Modulkurven hat ihrerseits #Pic$(A)$ viele Spitzen, die den Idealklassen entsprechen.
Infolgedessen sind analytische Berechnungen und geschlossene Aussagen nur noch in einem gewissen Rahmen möglich. In der Literatur ist daher auch die (naheliegende) Tendenz zu beobachten, sich mehr um strukturelle Aussagen und deren Verallgemeinerungen zu bemühen. Dies hat zu weitreichenden und tiefgehenden Theorien geführt wie der, die sich mit $T$-Motiven oder mit Shtukas beschäftigen.

### Über elliptischen Funktionenkörpern

Ein „Fall“ blieb bislang noch wenig beachtet, in dem konkrete Rechnungen noch möglich sind und zu umfassenden Resultaten führen.
Wählt man nämlich als globalen Funktionenkörper $K = \mathbb{F}_q(E)$, den Funktionenkörper einer elliptischen Kurve $E$ über $\mathbb{F}_q$ und darin eine $\infty$-Stelle vom Grad

1, so hat jede Drinfeld'sche Modulkurve (zur vollen Gruppe) das Geschlecht 0. Zudem ist der Quotient $\mathrm{GL}(2,A)\backslash\mathcal{T}$ ein Baum (hier ist $A = \mathbb{F}_q[E]$ der affine Koordinatenring). Daher ist es möglich, die für $K = \mathbb{F}_q(T)$ bewiesenen Aussagen teilweise für $K = \mathbb{F}_q(E)$ analog zu entwickeln.

Dazu greifen wir zahlreiche in der Literatur vorhandene Ergebnisse auf. Einige allgemeine Resultate zu Drinfeld-Moduln und Drinfeld'schen Modulkurven sowie zu gewissen Modulformen spezialisieren wir auf unsere Situation.
Andererseits übertragen wir einige Aussagen und Beweisstrukturen im Fall $K = \mathbb{F}_q(T)$ auf den Fall $K = \mathbb{F}_q(E)$. Insbesondere hier wird ein erheblicher technischer Mehraufwand notwendig sein, der seinerseits die Grenzen der Berechenbarkeit aufweist.

### Zusammenfassung und Einordnung der Arbeit

Dieser Arbeit liegen insbesondere der Lecture-Notes-Band [Gek86] und der Artikel [GR96] zugrunde. Dort werden für uns zentrale Begriffe und Aussagen für allgemeine globale Funktionenkörper ausgeführt und bewiesen.
Beide Arbeiten sind sehr umfassend und greifen viele der nachfolgenden Stichworte auf, auch wenn sie nicht jeweils explizit erwähnt werden.

Daneben enthält [Hay79] eine intensive Einführung in die Drinfeld-Moduln und ihre Isogenien. Hier entwickelt Hayes die Klassenkörpertheorie für globale Funktionenkörper. Er zeigt, daß der Hilbertklassenkörper der Koeffizientenkörper der Rang-1 Drinfeld-$A$-Moduln ist, die den Idealen des Ganzheitsrings $A$ zugeordnet sind.
Spezialisiert auf $A = \mathbb{F}_q[E]$ werden Vereinfachungen sichtbar, die in der Natur des Funktionenkörpers liegen.

Die verwendeten analytischen Aussagen sind in [FvdP81] und [GvdP80] umfaßend ausgeführt. In beiden Arbeiten wird auch die reine Überdeckung von $\overline{\Omega}$, die wir verwenden werden, angeführt. Daneben greifen zahlreiche weitere, hier nicht erwähnte Artikel diese Ausarbeitung auf.

Den Quotienten $\mathrm{GL}(2,A)\backslash\mathcal{T}$ mit $A = \mathbb{F}_q[E]$ bestimmt Takahashi in [Tak93] explizit, indem er jedem Knoten eine Matrix zuweist und die Kanten angibt. Darüber hinaus bestimmt er zu allen Knoten und Kanten die Stabilisatoren.
Die Menge der Knoten steht in 1-1-Korrespondenz zu (gewissen) Klassen von Modulgarben der Dimension 2 mit affin trivialer Determinante über dem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$, das zu der elliptischen Kurve assoziiert ist. (Im folgenden nennen wir diese Objekte Modulgarben.) In [Ser03] beschreibt Serre die Enden dieses Baumes explizit. Deren Knoten entsprechen zerlegbaren Modulgarben. Für den endlichen Anteil des Baumes gibt er eine Abschätzung über dessen Durchmesser.
In ihrer Dissertation [Til83] klärt Tillmann, welche unzerlegbaren Modulgarben es über $(X, \mathcal{O}_X)$ gibt. Dabei nutzt und erweitert sie intensiv die Arbeit [Ati57] von Atiyah, in der er dies für algebraisch abgeschlossene Konstantenkörper ausführt.

Wir bestimmen nun die Automorphismengruppen der unzerlegbaren Modulgarben. Dies führt zu einer vollständigen Zuordnung von Knoten und Modulgarben. Denn die Stabilisatoren der Knoten sind isomorph zu den Automorphismengruppen der entsprechenden Modulgarben.
Zugleich geben wir einen elementaren Beweis zur Bestimmung der Automorphismengruppen zerlegbarerer Modulgarben. Die Anregung dazu stammt aus der Arbeit von Tillmann.
Zudem betrachten wir (quadratische) Konstantenerweiterungen und zeigen, daß diese eine Einbettung von Bäumen, die mit der Quotientenbildung verträglich ist, zur Folge haben. Dies führt auch zu einer Klassifizierung der elliptischen Punkte.

Auf $\mathcal{T}$ lassen sich nun Flüsse definieren, die das Wachstumsverhalten von invertierbaren Funktionen auf $\overline{\Omega}$ beschreiben. Dieser Zusammenhang wurde von van der Put gezeigt.
Diese Flüsse werden unter Quotientenbildung zu gewichteten Flüssen. In [GR96], [Gek97a] und [Gek00b] führt Gekeler für allgemeine globale Funktionenkörper die Theorie der Thetafunktionen auf $\overline{\Omega}$ und $\mathrm{GL}(2,A)\backslash\overline{\Omega}$ ein und klärt den Zusammenhang mit den (gewichteten) Flüssen.
Wir werden zeigen, daß für $A = \mathbb{F}_q[E]$ die cuspidalen Thetafunktionen $\mathrm{GL}(2,A)$-invariant sind.
Damit begründet sich auch die Definition der $j$-Invarianten als spezielle Thetafunktionen. Wir finden nämlich $\#\mathrm{Pic}(A) - 1$ viele Thetafunktionen, die einen einfachen Pol in der Spitze $\infty$ von $\mathrm{GL}(2,A)\backslash\overline{\Omega}$ und eine einfache Nullstelle in einer anderen Spitze $\omega$ haben. Diese nennen wir $j$-Invariante $j_\omega$. Diese $j$-Invarianten geben eine analytische Parametrisierung von $\mathrm{G}(A)\backslash\Omega \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$

Wir werden die allgemeine Definition von Modulformen vom Gewicht $k$ und Typ $m$ aus [Gek86] übernehmen, ebenso wie die Definition von Eisensteinreihen.
In [Gek88] werden zu gegebenem $k \equiv 0 \mod q-1$ die ersten Terme der Laurentreihenentwicklung der Eisensteinreihe $E_k$ hergeleitet.
In unserer Situation ist die Anzahl der Eisensteinreihen für $\mathrm{GL}(2,A)$ die Klassenzahl $h(A) = \#\mathrm{Pic}(A)$. Zudem gibt es $h(A)$ viele Bahnen von Spitzen, in denen es zu einer Eisensteinreihe verschiedene Laurentreihenentwicklungen gibt.
Dennoch lassen sich die Arbeitsansätze aus [Gek88] übertragen, die Ausführung wird geeignet modifiziert.
Dabei führen wir auch Normierungsfaktoren ein, die die Rationalitätseigenschaften gewisser Terme verbessern. Für die vorliegende Arbeit ist dieses Vorgehen zwar nicht erforderlich; aber es erleichtert mögliche Fortführungen, die dieser Arbeit folgen könnten.
Als direktes Resutat erhalten wir die lineare Unabhängigkeit der Eisensteinreihen gleichen Gewichtes.

Eine entscheidende Rolle wird die kanonische Modulform $\Delta$ einnehmen, ebenso wie die Modulformen $\Delta_\mathfrak{n}$, wobei $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $A = \mathbb{F}_q[E]$ ist.

Im Falle eines beliebigen Funktionenkörpers entwickelt Gekeler in [Gek86] in einem beliebigen Punkt von $\overline{\Omega} - \Omega$ eine Produktdarstellung sowohl für $\Delta$ als auch für $\Delta_{\mathfrak{n}}$. Der technische Aufwand dieses Abschnittes ist sehr hoch. Maßgeblich für unsere Arbeit ist die Spezialisierung auf $A = \mathbb{F}_q[E]$.

In [Cor97] bestimmt Cornelissen für $A = \mathbb{F}_q[T]$ die Dimension des Raumes der Modulformen zu gegebenem Gewicht $k$ und Typ $l$. Dabei greift er eine Anregung aus [Gek86] auf. Die Ausführung nutzt wesentlich die Modulformen $E_{q-1}$ und $\Delta$. Die Vorgehensweise läßt sich auf den Fall $A = \mathbb{F}_q[E]$ übertragen. Im Beweis benutzen wir wesentlich die Laurentreihenentwicklung der entsprechenden Eisensteinreihe und von $\Delta$.
Dabei stellt sich heraus, daß der Raum der Modulformen vom Gewicht $q-1$ und Typ 0 die Dimension $h(A) + q^2 - 2q$ hat. Wir haben $h(A)$ viele Basiselemente berechnet, nämlich die $\mathrm{G}(A)$-invarianten Eisensteinreihen vom Gewicht $q-1$. Die noch fehlenden Basiselemente hängen zumindest ihrer Anzahl nach nur noch vom Körper $\mathbb{F}_q$ und nicht mehr von der gewählten elliptischen Kurve ab. Sich mit dieser „Lücke“ zu beschäftigen, wäre eine mögliche Fortführung der Arbeit.

Schließlich können wir die $(q-1)$-te Potenz der $j$-Invarianten $j_\omega$ als Quotient zweier Modulformen schreiben:

$$j_\omega^{q-1} = const(\omega)\,\frac{\Delta}{\Delta_{\mathfrak{p}}}\ ,$$

wobei das Ideal $\mathfrak{p}$ von der Wahl von $\omega$ abhängt (und umgekehrt). Die Konstante $const(\omega)$ bestimmen wir exakt.
Zu $j_\omega$ erhalten wir daraus in der Spitze $\infty$ von $\mathrm{GL}(2,A)\backslash\overline{\Omega}$ bis auf einen Vorfaktor die ersten Terme der Laurentreihenentwicklung.

**Kapitelüberblick**

Wir werden uns zu Anfang mit elliptischen Kurven über $\mathbb{F}_q$ beschäftigen. Die zahlreichen konkreten Rechnungen in den folgenden Kapiteln erfordern, daß wir die arithmetischen Eigenschaften der elliptischen Kurve gut kennen. So werden wir beispielsweise zu jedem Primideal vom Grad 1 eine Uniformisierende und das inverse Ideal bestimmen.

Kapitel 2 ist ein zweites einführendes Kapitel. Hier stellen wir die Fakten zur Drinfeld'schen oberen Halbebene, zu Drinfeld-Moduln und zu den Drinfeld'schen Modulkurven kurz vor. Wir geben eine spezielle (reine) Überdeckung an und ordnen ihr den Schnittgraphen zu, der dem ungerichteten Bruhat-Tits-Baum entspricht.

Zentrale Themen in Kapitel 3 sind Gitter und Modulgarben.
Zunächst bestimmen wir explizit Isomorphismen zwischen Gittern. Anschließend skizzieren wir die Ergebnisse von Tillmann. Im Abschnitt 3.3 geben wir eine kurze Einführung über den Zusammenhang des Bruhat-Tits-Baumes und $\mathcal{O}_\infty$-Gittern. Zudem zitieren wir die Aussagen von Takahashi.

Damit lassen sich nun die Modulgarben der Dimension 2 klassifizieren. Hier wiederum zitieren wir zunächst die Ergebnisse aus [Ser03]. In einer Folge kleinerer Lemmata berechnen wir nun die Automorphismengruppen der Modulgarben. Hierbei verwenden wir vornehmlich Mittel der linearen Algebra. Die Idee, in dieser Weise vorzugehen, haben wir bei Tillmann aufgegriffen. Sie zeigt auf diese Weise die Unzerlegbarkeit gewisser Modulgarben.

In Kapitel 4 stellen wir zunächst den Zusammenhang von $\overline{\Omega}$ und $\mathcal{T}$ dar. Dann gehen wir näher auf die Quotientenbildung $\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{GL}(2,A)\backslash\mathcal{T}$ ein. Mit diesem Wissen können wir nun die Auswirkung einer Konstantenerweiterung $\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q$, $d \in \mathbb{N}_{>1}$ betrachten. Seien $A'$, $K'$, $\Omega'$ und $\mathcal{T}'$ die Objekte, die wir nach Konstantenerweiterung erhalten. Die Einbettung $\mathrm{GL}(2,A)\backslash\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{GL}(2,A')\backslash\mathcal{T}'$ erhalten wir aus der Betrachtung der entsprechenden Modulgarben. Wir zeigen die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}' \arrow[d] \\ \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T} \arrow[r] & \mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}' \end{tikzcd}$$

und erhalten eine Verträglichkeit mit der Gebäudeabbildung.

Das umfangreichste Kapitel ist das fünfte. Zunächst definieren wir hier Modulformen. Anschließend untersuchen wir sowohl die Eisensteinreihen als auch die kanonische Modulform $\Delta$. Die Herleitung der ersten Terme der Laurentreihenentwicklung in den Spitzen ist vor allem technisch aufwendig und umfaßt sehr viele längliche Rechnungen, was nicht unerheblich zur Seitenzahl beiträgt.
Erst anschließend bestimmen wir allgemein den Divisorgrad einer Modulform von vorgegebenem Gewicht und Typ.
Der Beweis der Formel, mit der sich die Dimension des Raumes der Modulformen vom Gewicht $k$ und Typ $l$ berechnen läßt, beschäftigt uns in Abschnitt 5.4.
Der letzte Abschnitt ist der Interpretation von $j_\omega^{q-1}$ als Quotient von Modulformen gewidmet.

## Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. E.-U. Gekeler für das interessante Thema und die gute Betreuung. Ihm sowie Herrn Dr. Bodo Wack, Herrn Dr. Max Gebhardt und Frau Christine Wilk-Pitz danke ich für die intensive Zusammenarbeit und die hervorragende Atmosphäre in der Arbeitsgruppe.
Auch den Mitgliedern der AG Zahlentheorie möchte ich an dieser Stelle für die vielen anregenden und klärenden Diskussionen über die verschiedensten mathematischen Themen danken.
Darüber hinaus gilt mein besonderer Dank Frank Malburg, nicht nur für die vielen aufmunternden Worte.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 0

# Notationen

Im Vorfeld legen wir nun einige Notationen fest. Diese und alle weiteren kapitelübergreifenden sind der besseren Übersicht wegen noch einmal im Symbolverzeichnis am Ende der Arbeit aufgeführt.

Bijektionen machen wir durch $\xrightarrow{\sim}$ kenntlich, Isomorphismen durch $\xrightarrow{\simeq}$.
$\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen (ohne die 0).
$\mathbb{F}_q$ ist der Körper mit $q$ Elementen der Charakteristik $p$.
$\overline{\mathbb{F}}_q$ bezeichnet einen fixierten algebraischen Abschluß von $\mathbb{F}_q$.
$\mathbb{P}^n(K)$ ist der projektive Raum der Dimension $n+1$ über einem Körper $K$.
$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sind stets Ideale.

Nach Bourbaki [Bou65, 2.3.] können wir jedem Ideal $\mathfrak{a}$ eines Dedekindringes einen Divisor zuordnen, diesen bezeichnen wir mit $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$. Üblicherweise schreiben wir Divisoren als $D$, $P, \ldots$

**0.I. Bemerkung.** Bei der Zuordnung $\mathfrak{a} \mapsto \operatorname{div}(\mathfrak{a})$ gehen wir wie üblich von einer multiplikativen zu einer additiven Struktur über und betrachten dann die Ideale selbst auch als Divisoren, eine genauere Beschreibung dieser Zuordnung wird in (1.3.) für unsere spezielle Situation angeführt.

$\mathrm{G}(R) = \mathrm{Gl}(2, R)$ bezeichnet die Gruppe der regulären $(2 \times 2)$-Matrizen eines kommutativen Ringes $R$. Mit $Z(R)$ bezeichnen wir das Zentrum von $G(R)$.

Das Symbol $\mathrm{RS}(G/H)$ bezeichnet ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von $G$ modulo $H$. Elemente von $G/H$ bezeichnen wir mit $[g]$, wobei $g \in G$ ist.

Unter einem Graphen $G$ verstehen wir stets einen einfachen Graphen. Seine Knotenmenge bezeichnen wir mit $\mathrm{Vert}(G)$ und seine Kantenmenge mit $\mathrm{Edge}(G)$. Wir schreiben auch $G = (\mathrm{Vert}(G), \mathrm{Edge}(G))$. Sind die Kanten des Graphen orientiert, so schreiben wir $\mathrm{Edge}^{\pm}(G)$.
Kanten, auch ungerichtete, schreiben wir stets als geordnetes Tupel $e = (v, w)$, orientierte Kanten $\overrightarrow{e} = (v, w)$ haben den Ursprung $o(\overrightarrow{e}) = v$ und den Endknoten $t(\overrightarrow{e}) = w$.

De facto beschäftigen wir uns stets mit Bäumen. In Anlehnung an das Wort „Tree“ bezeichnen wir diese mit $T$ oder $\mathcal{T}$.

**0.II. Verweise.**
Interne Referenzen sind stets in der Weise zu verstehen:

(i) Mit $(x.)$ wird das Kapitel $x$ bezeichnet,
(ii) ein Abschnitt $y$ in Kapitel $x$ mit $(x.y.)$,
(iii) Definitionen, Sätze, Beispiele usw. haben eine dreistellige Nummer $(x.y.z)$, wobei auch hier $x$ das Kapitel und $y$ den Abschnitt bezeichnet, $z$ wird fortlaufend innerhalb eines Abschnittes gezählt.

Zusätzlich im Index aufgenommen sind die Stichpunkte „Standardbeispiel“ und „Vereinbarung“. In letzteren werden globale Notationen festgelegt. Diese sind auch im Symbolverzeichnis festgehalten.

# Kapitel 1

# Elliptische Kurven

Wir wollen in den folgenden Kapiteln Drinfeld-Moduln über elliptischen Grundringen betrachten. Daher gehen wir in diesem Kapitel auf die geometrische und zahlentheoretische Beschreibung von elliptischen Kurven über endlichen Körpern ein.
Eine elliptische Kurve ist eine projektive, vollständige, nichtsinguläre Kurve vom Geschlecht 1 mit Basispunkt, d.h. einem (ausgewählten) Punkt vom Grad 1.
Nach [Sil86, III.3.1.] ist jede elliptische Kurve isomorph zu einer in Weierstraßform gegebenen Kurve. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $L$ genügen die Punkte $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(L)$ einer solchen elliptischen Kurve einer Gleichung

$$f(X,Y,Z) = Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3 = 0$$

mit $a_1, \ldots, a_6 \in L$.
Die Bedingung der Nichtsingularität drückt sich nun darin aus, daß die Diskriminante

$$\begin{aligned}\mathrm{Disk}(a_1,\ldots,a_6) = {} & 288a_4a_2a_6 + a_1^5a_4a_3 + 144a_2a_1a_6a_3 - 64a_4^3 - 96a_4^2a_1a_3 \\ & + 72a_1^2a_6a_4 + 16a_2^2a_4^2 - 432a_6^2 - 27a_3^4 + a_1^4a_4^2 - 30a_4a_1^2a_3^2 \\ & + 8a_2a_4^2a_1^2 - a_1^6a_6 + 72a_2a_4a_3^2 - 216a_6a_3^2 - 64a_2^3a_6 + a_3^3a_1^3 \\ & - 16a_2^3a_3^2 + 36a_2a_3^3a_1 + 8a_2a_4a_3a_1^3 - a_2a_3^2a_1^4 + 16a_2^2a_4a_3a_1 \\ & - 8a_2^2a_3^2a_1^2 + 36a_6a_3a_1^3 - 48a_2^2a_6a_1^2 - 12a_1^4a_2a_6 \ ,\end{aligned}$$

ein isobares Polynom vom Grad 12 in den $a_i$, auf $a_1, \ldots, a_6$ nicht verschwindet.
In dieser Form hat die Kurve den Basispunkt $\infty := (0 : 1 : 0)$.
Üblicherweise ([Sil86, III.1]) beschreibt man eine elliptische Kurve jedoch durch eine affine Gleichung. In der obigen Gleichung setzen wir dazu $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$ und erhalten die (übliche) Weierstraßgleichung

$$f_E(x,y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0 \ . \qquad (1.0.1)$$

In den projektiven Raum werden die Lösungen dieser Gleichung vermöge

$$(x_1, x_2) \ \mapsto \ (x_1 : x_2 : 1)$$

eingebettet, das Symbol $\infty$ stellt auch hier den Basispunkt dar.
Nun können wir eine für diese Arbeit angemessene Definition einer elliptischen Kurve angeben.

**1.0.2 Definition.** *Eine* elliptische Kurve $E$ *über* $\mathbb{F}_q$ *ist gegeben durch die Punktmenge*

$$E := \{(x,y) \in \overline{\mathbb{F}}_q^2 \mid f_E(x,y) = 0\} \cup \{\infty\}\ ,$$

*wobei* $f_E$ *ein wie in* (1.0.1) *gegebenes, absolut irreduzibles Polynom mit Koeffizienten* $a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{F}_q$ *und* $\mathrm{Disk}(a_1, \dots a_6) \neq 0$ *ist. Häufig schreiben wir* $E/\mathbb{F}_q$*, um zu betonen, daß die Kurve über dem Körper* $\mathbb{F}_q$ *definiert ist.*

Für jeden Zwischenkörper $\mathbb{F}_q \subset F \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ ist eine elliptische Kurve $E/\mathbb{F}_q$ auch über $F$ definiert.

**1.0.3 Bemerkung.** Ist $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2, 3$, so können wir die elliptische Kurve auch durch

$$f_E(x,y) = y^2 - x^3 - Ax - B\ , \quad A, B \in \mathbb{F}_q\ ,$$

beschreiben, im weiteren setzen wir in solchen Fällen $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
Die Gleichung liefert genau dann eine elliptische Kurve, wenn das Polynom $x^3 + Ax + B$ keine doppelten Nullstellen hat.

**1.0.4 Vereinbarung.** *Mit* $E$ *bzw.* $E/\mathbb{F}_q$ *bezeichnen wir nun stets eine elliptische Kurve, die vermöge einer Weierstraßgleichung* (1.0.1)

$$f_E(x,y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0$$

*gegeben ist, wobei die* $a_1, \dots, a_6$ *in* $\mathbb{F}_q$ *liegen mit* $\mathrm{Disk}(a_1, \dots, a_6) \neq 0$ *und* $f_E(x,y)$ *absolut irreduzibel ist.*
*Durch geeignete Koordinatentransformation (vgl. [Sil86, III.1. und A.1.1.]) können verschiedene der Koeffizienten* $a_i$ *auf* 0 *oder* 1 *gesetzt werden. Wir brauchen deshalb nur die Fälle zu betrachten:*

*(a)* $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$*:*

$$f_E(x,y) = y^2 - g(x)\ , \quad \textit{wobei} \quad g(x) = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

*keine mehrfachen Nullstellen besitzt.*

*(b)* $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ *und* $j$*-Invariante* $j(E) = 0$*:*

$$f_E(x,y) = y^2 + a_3y + x^3 + a_4x + a_6 \quad \textit{mit } a_3 \neq 0\ .$$

*(c)* $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ *und* $j(E) \neq 0$*:*

$$f_E(x,y) = y^2 + xy + x^3 + a_2x^2 + a_6 \quad \textit{mit } a_6 \neq 0\ .$$

*Im folgenden nehmen wir stillschweigend an, daß einer dieser Fälle vorliegt.*

## 1.1 Arithmetik elliptischer Kurven

Sei nun $E/\mathbb{F}_q$ eine elliptische Kurve.
Da wir auf zahlentheoretischer Seite auch Konstantenerweiterungen betrachten wollen, definieren wir die verschiedenen Objekte in allgemeiner Form.
Für jeden Zwischenkörper $\mathbb{F}_q \subset F \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ setzen wir

$$E(F) := \{(x,y) \in F^2 \mid f_E(x,y) = 0\} \cup \{\infty\} \ . \tag{1.1.1}$$

Ist $F = \overline{\mathbb{F}}_q$, so ist dies die Punktmenge der elliptischen Kurve. Für $F \subsetneq \overline{\mathbb{F}}_q$ ist dies die Menge der *$F$-rationalen Punkte*.
Die Punktmenge $E(F)$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition, wie sie in (1.1.2) beschrieben ist. Das neutrale Element bezüglich dieser Verknüpfung ist der Basispunkt $\infty$. Ist $\mathbb{F}_q \subset F \subset F' \subset \overline{\mathbb{F}}_q$, dann ist $E(F)$ eine Untergruppe von $E(F')$ (vgl. [Sil86, III.3.6.]).

**1.1.2 Algorithmus (Gruppengesetz).** (vgl. [Sil86, III.2.3]) Sei $P_0 = (x_0, y_0)$ ein Punkt der elliptischen Kurve $E/\mathbb{F}_q$. Dann ist

$$-P_0 = (x_0, -y_0 - a_1x_0 - a_3) \ .$$

Sei nun

$$P_1 + P_2 = P_3 \quad \text{mit } P_i = (x_i, y_i) \in E \ .$$

Für $x_1 = x_2$ und $y_1 + y_2 + a_1x_1 + a_3 = 0$ ist

$$P_1 + P_2 = \infty \ .$$

Für $x_1 = x_2$ und $y_1 + y_2 + a_1x_1 + a_3 \neq 0$ setzen wir

$$\lambda := \frac{3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_4 - a_1y_1}{2y_1 + a_1x_1 + a_3} \ , \qquad \nu := \frac{-x_1^3 + a_4x_1 + 2a_6 - a_3y_1}{2y_1 + a_1x_1 + a_3} \ ,$$

für $x_1 \neq x_2$

$$\lambda := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ , \quad \nu := \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} x_3 =& \lambda^2 + a_1\lambda - a_2 - x_1 - x_2 \ , \\ y_3 =& -(\lambda + a_1)x_3 - \nu - a_3 \ . \end{aligned}$$

**1.1.3 (2-Teilungspunkte).** Offensichtlich gilt unter Verwendung der Vereinbarung (1.0.4):

(a) für $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$

$$(\alpha, \beta) \text{ ist 2-Teilungspunkt} \ \Leftrightarrow \ -\beta = \beta \ \Leftrightarrow \ \beta = 0 \ ,$$

(b) für $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ und $j(E) = 0$

$$(\alpha, \beta) \text{ ist 2-Teilungspunkt} \quad \Leftrightarrow \; \beta + a_3 = \beta \; \Leftrightarrow \; a_3 = 0 \; ,$$

d.h. eine solche Kurve hat wegen $a_3 \neq 0$ keine nichttrivialen 2-Teilungspunkte,

(c) für $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ und $j(E) \neq 0$

$$(\alpha, \beta) \text{ ist 2-Teilungspunkt} \quad \Leftrightarrow \; \beta + \alpha = \beta \; \Leftrightarrow \; \alpha = 0 \; .$$

**1.1.4 Definition.** *Der Dedekindring $F[E] := F[x, y]/(f_E(x, y))$, wobei $f_E \in \mathbb{F}_q[x, y]$ als Polynom über $F$ betrachtet wird, heißt* affiner Koordinatenring *der elliptischen Kurve $E/F$, sein Quotientenkörper $F(E) := \mathrm{Quot}(F[E])$ der* Funktionenkörper *der elliptischen Kurve $E/F$.*

**1.1.5 Bemerkung.** (i) Ist $E$ über $F$ definiert, so ist $F$ der volle Konstantenkörper der Kurve ([Sti93, VI.1.3.]).

(ii) Für die affinen Koordinatenringe und ihre Quotientenkörper gilt (vgl. [Sti93, III.3] oder [Lor97, VII.4.16.])

$$F[E] = F \cdot \mathbb{F}_q[E] \quad \text{bzw.} \quad F(E) = F \cdot \mathbb{F}_q(E) \; .$$

Jeder endliche $F$-rationale Punkt $P = (\alpha, \beta) \in E(F) - \{\infty\}$ definiert eine Bewertung auf $F(E)$:

**1.1.6 Proposition.** *([Lor97, III.3.5]) Sei $(\alpha, \beta) \in E(F) - \{\infty\}$ ein $F$-rationaler Punkt. Dann ist das Ideal $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta) \subset F[E]$ maximal und definiert eine Bewertung $v_\mathfrak{p}$. Der Ring*

$$\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F) := \{h \in F(E) \mid v_\mathfrak{p}(h) \geq 0\}$$

*ist ein diskreter Bewertungsring bezüglich der Bewertung $v_\mathfrak{p}$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)$.*

**1.1.7 Lemma.** *Eine Uniformisierende zu $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)$ ist*

$$t_\mathfrak{p} := y - \beta \; .$$

*Zudem ist*

$$v_\mathfrak{p}(x - \alpha) = \begin{cases} 1 \; , & -(\alpha, \beta) \neq (\alpha, \beta) \\ 2 \; , & -(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) \end{cases} \; .$$

*Beweis.* Nach [Lor97, II.8.6] ist $x - \alpha$ oder $y - \beta$ eine Uniformisierende von $(x - \alpha, y - \beta)\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)$. Sei $-(\alpha, \beta) =: (\alpha, \beta')$, dann ist (vgl. (1.0.4))

(i) im Fall (a)

$$\begin{aligned}(y-\beta)\cdot(y-\beta') &= g(x)-g(\alpha)\\ &= x^3+a_2x^2+a_4x+a_6-\alpha^3-a_2\alpha^2-a_4\alpha-a_6\\ &= (x-\alpha)(x^2+(a_2+\alpha)x+\alpha^2+a_2\alpha+a_4)\ ,\end{aligned}$$

(ii) im Fall (b)

$$\begin{aligned}(y-\beta)\cdot(y-\beta') &= a_3y+x^3+a_4x+a_6+a_3\beta+\alpha^3+a_4x\alpha+a_6+a_3y+a_3\beta\\ &= (x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2+a_2\alpha+a_4)\ ,\end{aligned}$$

(iii) im Fall (c)

$$\begin{aligned}(y-\beta)\cdot(y-\beta') &= xy+x^3+a_2x^2+\alpha\beta+\alpha^3+a_2\alpha^2+\alpha y+\alpha\beta\\ &= (x-\alpha)(x^2+(a_2+\alpha)x+y+\alpha^2+a_2\alpha)\ .\end{aligned}$$

Allgemein ist also $(y-\beta)\cdot(y-\beta')=(x-\alpha)\cdot g_\alpha(x,y)$ mit

$$g_\alpha(x,y)=x^2+(a_2+\alpha)x+a_1y+\alpha^2+a_2\alpha+a_4\,.$$

Da die Kurve nichtsingulär ist, ist $v_\mathfrak{p}(g_\alpha(x,y))=0$.
Ist nun $\beta\neq\beta'$, so ist $v_\mathfrak{p}(y-\beta')=min\{v_\mathfrak{p}(y-\beta),v_\mathfrak{p}(\beta-\beta')\}=0$. Für $\beta=\beta'$ erhalten wir $v_\mathfrak{p}(x-\alpha)=2\cdot v_\mathfrak{p}(y-\beta)=2$. □

Der Zusammenhang zwischen beliebigen maximalen Idealen und Punkten der elliptischen Kurve ergibt sich aus den folgenden zwei Propositionen.

**1.1.8 Proposition.** *([Lor97, VII.2.5]) Sei $\mathfrak{p}\subset F[E]$ ein maximales Ideal. Dann existiert ein Punkt $(\mu,\nu)\in E(\overline{\mathbb{F}}_q)$, so daß gilt:*
*Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\psi_{(\mu,\nu)}:F[E] &\longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q\\ f(x,y) &\longmapsto f(\mu,\nu)\end{aligned}$$

*hat den Kern* $\ker(\psi_{(\mu,\nu)})=\mathfrak{p}$.

Für einen $F$-rationalen Punkt $(\alpha,\beta)$ ist $\ker(\psi_{(\alpha,\beta)})=(x-\alpha,y-\beta)$ (vgl. (1.1.6)).

**1.1.9 Proposition.** *([Lor97, VII.3]) Die Galoisgruppe* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/F)$ *operiert mit endlichen Bahnen auf der Menge der maximalen Ideale (bzw. der Bewertungen) von $\overline{\mathbb{F}}_q[E]$ (bzw. $\overline{\mathbb{F}}_q(E)$). Jeder Bahn $B$ von maximalen Idealen wird in wohlbestimmter Weise ein maximales Ideal $\mathfrak{p}\subset F[E]$ zugeordnet, nämlich $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap F[E]$, wobei $\mathfrak{P}\in B$ ein beliebiges Element ist. Umgekehrt gilt*

$$\mathfrak{p}\,\overline{\mathbb{F}}_q[E]=\prod_{\mathfrak{P}\in B}\mathfrak{P}\ .$$

*Anschaulich wird dies durch das folgende kommutative Diagramm beschrieben, wobei $\psi_{(\mu,\nu)}$ in (1.1.8) definiert ist:*

$$\begin{array}{ccc}
E(\overline{\mathbb{F}}_q) - \{\infty\} & \xrightarrow[(\mu,\nu)\mapsto(x-\mu,y-\nu)]{\sim} & \mathrm{Max}(\overline{\mathbb{F}}_q[E]) \\
\downarrow & & \downarrow \quad \begin{array}{c}\mathfrak{P}\\ \downarrow \\ \mathfrak{P}\cap F[E]\end{array} \\
(E(\overline{\mathbb{F}}_q) - \{\infty\})/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/F) & \xrightarrow[\text{Bahn von } (\mu,\nu)\mapsto\ker(\psi_{(\mu,\nu)})]{\sim} & \mathrm{Max}(F[E])
\end{array}$$

*Einer Bewertung von $F(E)$ mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ entspricht somit die Menge der Punkte, die zu den maximalen Idealen in der Zerlegung von $\mathfrak{p}\overline{\mathbb{F}}_q[E]$ korrespondieren.*

Somit haben wir nun alle „endlichen“ Bewertungen beschrieben. Dem Punkt $\infty$ entspricht ebenfalls eine Bewertung.

**1.1.10 Definition/Proposition.** *([Koc97, 5.8])*

*(i)* *Als Uniformisierende an $\infty$ wählen wir*

$$t := \frac{x}{y} ,$$

*die Bewertung an $\infty$ bezeichnen wir mit $v_\infty$. Dann ist*

$$v_\infty(x) = -2 \quad \text{und} \quad v_\infty(y) = -3 .$$

*(ii)* *Ähnlich wie im Fall des rationalen Funktionenkörpers fassen wir $v_\infty$ auch als „negative“ Gradfunktion auf: Zu $g \in F(E)$ ist*

$$\deg(g) := -v_\infty(g) .$$

**1.1.11 Bemerkung.** Aus $f_E(x, y) = 0$ ergibt sich für $y^2$ ein Ausdruck in $x$, $y$ und $xy$. Daher können wir jedes Element des Ringes $F[E]$ in eindeutiger Weise in eine Summe mit Termen geraden Grades und eine Summe mit Termen ungeraden Grades zerlegen. Dies erlaubt uns die Beschreibung

$$F[E] = F[x] \oplus yF[x] .$$

Ebenso ist es möglich die einzelnen Terme eines „Polynoms“ in $F[E]$ eindeutig dem Grade nach auf- oder absteigend zu sortieren, denn es ist

$$F[E] = F \oplus Fx \oplus Fy \oplus Fx^2 \oplus Fxy \oplus Fy^2 + \dots .$$

Der Grad eines Elementes läßt sich also leicht bestimmen. Insbesondere erhalten wir direkt, daß es in $F[E]$ kein Element des Grades 1 gibt.

Ebenso können wir die Elemente eines Primideals leicht dem Grade nach sortiert aufzählen:

**1.1.12 Lemma.** *Sei* $(\alpha, \beta) \in E(F) - \{\infty\}$*. Dann ist*

$$(x-\alpha, y-\beta) = (x-\alpha)F[x] \oplus (y-\beta)F[x] \ ,$$

*d.h. jedes Element* $f(x,y) \in \mathfrak{p}$ *besitzt eine eindeutige Darstellung*

$$f(x,y) = (x-\alpha)f_1(x) + (y-\beta)f_2(x) \quad \textit{mit } f_1, f_2 \in F[x] \ .$$

*Beweis.* Es ist $F[E] = F[x] + yF[x]$, und damit ist

$$\mathfrak{p} = (x-\alpha)F[x] + (x-\alpha)yF[x] + (y-\beta)F[x] + (y-\beta)yF[x] \ .$$

Aus dem Beweis zu (1.1.7) wissen wir, daß zu $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta') \in E(F) - \{\infty\}$

$$y^2 - (\beta + \beta')y + \beta\beta' = (y-\beta)(y-\beta') = (x-\alpha)g_\alpha(x,y)$$

ist, und somit ist

$$\begin{aligned}(y-\beta)y = y^2 - \beta y &= y^2 - \beta y - \beta' y + \beta\beta' + \beta' y - \beta\beta' \\ &= (x-\alpha)g_\alpha(x,y) + \beta'(y-\beta) \ .\end{aligned}$$

Also ist $(y-\beta)yF[x] \subset (x-\alpha)F[x] + (y-\beta)F[x]$.
Ist nun $h(x) \in F[x]$, dann ist

$$(x-\alpha)\, y\, h(x) = (x-\alpha)\beta h(x) + (y-\beta)(x-\alpha)h(x) \in (x-\alpha)F[x] + (y-\beta)F[x] \ .$$

Daraus ergibt sich $\mathfrak{p} = (x-\alpha)F[x] + (y-\beta)F[x]$.
Zudem ist $(x-\alpha)F[x] \cap (y-\beta)F[x] = \{0\}$. □

Schließlich benötigen wir hier noch einige Bezeichnungen, die in den beiden folgenden Definitionen festgelegt werden.

**1.1.13 Definition.** *(i) Zu jeder normierten diskreten Bewertung* $v_\mathfrak{p}$ *von* $F(E)$ *erhalten wir neben dem Bewertungsring* $\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)$ *und der* Stelle*, also dem maximalen Ideal* $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)$*, auch den* Rest(klassen)körper

$$\kappa(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F) \ .$$

*Häufig schreiben wir auch* $\kappa(P) = \kappa(\mathfrak{p})$*, falls* $P$ *zu dem maximalen Ideal* $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)$ *korrespondiert; dabei ist* $P$ *eine Bahn von Punkten der elliptischen Kurve unter der Operation von* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/F)$*.*

*Des weiteren setzen wir*

$$\deg(\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)) = \deg(\mathfrak{p}) = [\kappa(\mathfrak{p}) : F] \ .$$

*(ii) Die Menge aller Stellen von $F(E)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(F(E))$.*

**1.1.14 Vereinbarung.** *Die Elemente der Stellenmenge bezeichnen wir zumeist mit $\mathfrak{p}$. Dabei kann $\mathfrak{p} = \infty$ sein. Ist $\mathfrak{p} \neq \infty$, so erhalten wir jetzt eine Doppelbedeutung des Symbols $\mathfrak{p}$, das sowohl ein Primideal in $F[E]$ als auch eine Stelle, also ein maximales Ideal eines lokalen Ringes, bezeichnet. Zugleich aber besteht zwischen diesen beiden Objekten ein eineindeutiger Zusammenhang. Daher werden wir im folgenden endliche Stellen auch direkt mit den zugehörigen Primidealen aus $F[E]$ bezeichnen.*

**1.1.15 Definition.** *Seien $\mathbb{F}_q \subset F \subset F' \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ mit endlichem Grad $[F' : F]$ und $\mathfrak{a} \subset F'[E]$ ein Ideal. Dann definieren wir die* Norm *von $\mathfrak{a}$ in der Konstantenerweiterung $F'/F$ durch*

$$\mathrm{N}_F^{F'}(\mathfrak{a}) := \mathrm{N}_{F(E)}^{F'(E)}(\mathfrak{a}) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(F'/F)} \sigma(\mathfrak{a}) \ .$$

Wir werden viele Aussagen an einem „Standardbeispiel“[1] darstellen. Es bietet sich an, es an dieser Stelle einzuführen.

**1.1.16 Standardbeispiel.** Wir betrachten die elliptische Kurve

$$E/\mathbb{F}_3 : \qquad f_E(x,y) = y^2 - x^3 - x \ .$$

Nachrechnen liefert $E(\mathbb{F}_3) = \{(0,0),\ (2,1),\ (2,2),\ \infty\}$; dabei ist der Punkt $(0,0)$ in gewisser Weise ausgezeichnet, denn er ist der einzige 2-Teilungspunkt, d.h. $2 \cdot (0,0) = (0,0) + (0,0) = \infty$ (vgl. (1.1.3)).
Die Gruppenstruktur von $E(\mathbb{F}_3)$ ist somit bereits bestimmt: $E(\mathbb{F}_3) \cong C_4$, die zyklische Gruppe mit vier Elementen.
Einzig die Gleichung $f_E(1,y) = y^2 - 2 = 0$ hat keine Lösung über $\mathbb{F}_3$, da in diesem Körper 2 kein Quadrat ist.
Sei $\omega$ Nullstelle des Polynoms $T^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[T]$, dann ist $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\omega)$. Wir erhalten 16 $\mathbb{F}_9$-rationale Punkte, diese fassen wir als Bahnen unter $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3)$ zusammen:

$$\begin{aligned}
&\{(0,0)\},\ \{(2,1)\},\ \{(2,2)\},\ \{\infty\},\\
&\{(1,\omega),(1,2\omega)\},\ \{(\omega,0),(2\omega,0)\},\ \{(\omega+1,2\omega),(2\omega+1,\omega)\},\\
&\{(\omega+2,1),(2\omega+2,1)\},\ \{(\omega+2,2),(2\omega+2,2)\},\ \{(\omega+1,2\omega),(2\omega+1,\omega)\}\ .
\end{aligned}$$

Jede dieser Bahnen ist stabil unter $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_3/\mathbb{F}_9)$.
Betrachten wir nun speziell die Bahn $\{(\omega,0),(2\omega,0)\}$, so erhalten wir für die korrespondierenden maximalen Ideale

$$(x-\omega, y) \cap \mathbb{F}_3[E] = (x-2\omega, y) \cap \mathbb{F}_3[E] = (x^2+1, y) \ ,$$

ein maximales Ideal vom Grad 2 in $\mathbb{F}_3[E]$.

[1] als Stichwort im Index aufgenommen

Ehe wir die zahlentheoretische Betrachtung des Funktionenkörpers $F(E)$ fortsetzen, nutzen wir die obigen Aussagen, um das Schema zu einer elliptischen Kurve $E/F$ zu beschreiben.

## 1.2 Schema zu einer elliptischen Kurve

Eine Einführung in die Theorie der Schemata findet sich in [EH00]. Hartshorne widmet dem Schema zu einer elliptischen Kurve den Paragraphen [Har77, IV.4.].

Ein Schema ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, das aus einem topologischen Raum $X$ und einer Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ besteht.

Sei nun $E$ eine elliptische Kurve über $\mathbb{F}_q$, wie sie in (1.0.4) definiert ist, und $\mathbb{F}_q \subset F \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ ein Zwischenkörper. Da wir mit verschiedenen Konstantenkörpern arbeiten, berücksichtigen wir dies in unserer Notation und bezeichnen das $F$-Schema zu $E/F$ mit $(X/F, \mathcal{O}_{X/F})$.
Die Punkte des topologischen Raumes $X/F$ lassen sich nun auf verschiedene Weisen beschreiben.
Einerseits entspricht jeder abgeschlossene Punkt von $X/F$ genau einer Bahn von $E(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Diese Beschreibung wählt Lorenzini in [Lor97, VII.4.17].
Andererseits entsprechen die Bahnen von $E(\overline{\mathbb{F}}_q)$ in eineindeutiger Weise den Stellen von $F(E)$ und somit den maximalen Idealen von $F[E]$ zuzüglich des Ideals $\mathfrak{m}_\infty$.
Wir wählen hier nun die Beschreibung durch die Stellen, die uns eine in gewisser Weise glatte Benennung der Objekte erlaubt (wir benötigen keine Fallunterscheidungen) und zugleich der klassischen und intuitiven Beschreibung durch maximale Ideale sehr nahe kommt (vgl. (1.1.14)).

**1.2.1 (Topologischer Raum).** Der topologische Raum $X/F$ besteht aus

(i) dem generischen Punkt $\xi$, der der trivialen Bewertung entspricht, und

(ii) den Punkten $\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(F(E))$ die Menge der Stellen von $F(E)$ durchläuft.

Die zugrunde liegende Topologie ist die Zariski-Topologie mit den abgeschlossenen Mengen

$$\emptyset, \quad X/F, \quad A \subset X/F - \{\xi\} \text{ endlich };$$

die offenen Mengen sind die Komplemente der abgeschlossenen Mengen. Insbesondere enthält jede offene nichtleere Menge den generischen Punkt $\xi$, und der Abschluß des generischen Punktes ist der ganze Raum.

Die offene Teilmenge $\mathrm{Spec}(F[E]) = X/F - \{\infty\}$ ist der topologische Raum des affinen Schemas der elliptischen Kurve, das häufig selbst mit $\mathrm{Spec}(F[E])$ bezeichnet wird.

**1.2.2 (Strukturgarbe).** Die Halme der Strukturgarbe sind

(i) im generischen Punkt $\xi$ der Körper $F(E)$ und

(ii) in einem abgeschlossenen Punkt $\mathfrak{p}$ der diskrete Bewertungsring $\mathcal{O}_\mathfrak{p}(F)$.

Für jede offene Teilmenge $U \subset X/F$ ist

$$\mathcal{O}_{X/F}(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} \mathcal{O}_\mathfrak{p}(F) \ .$$

Sind $V \subset U \subset X/F$ offene Teilmengen, so ist die Restriktionsabbildung die Einschränkungsabbildung auf Ringen

$$\mathrm{res}_{U,V} : \mathcal{O}_{X/F}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X/F}(V) \ .$$

Wir erhalten nun beispielsweise $\mathcal{O}_{X/F}(X/F - \{\infty\}) = F[E]$.
Die Einschränkung $(X/F - \{\infty\}, \mathcal{O}_{X/F}|_{X/F-\{\infty\}})$ ist nun gerade das affine Schema von $E/F$.

Das Schema $(X/F, \mathcal{O}_{X/F})$ ist noethersch, reduziert, irreduzibel und integer, d.h. es existiert eine endliche offene Überdeckung durch affine Schemata, deren Strukturgarben aus noetherschen, nullteilerfreien Ringen bestehen.

**1.2.3 Bemerkung.** (i) Wir können jedes Element $g \in F(E)$ als „Funktion" auf einer offenen Teilmenge von $X/F - \{\xi\}$ betrachten. Dabei ordnen wir $g$ im Punkt $\mathfrak{p} \in X/F - \{\xi\}$ den Wert $g(\mathfrak{p}) \in \kappa(\mathfrak{p})$ zu. Die obigen Identifikationen sind dabei so zu verstehen, daß für jede offene, affine Teilmenge $U \subset X/F$ jedes Element $g \in \mathcal{O}_{X/F}(U)$ eine solche „Funktion" induziert, die allerdings von Punkt zu Punkt wechselnde Wertebereiche haben kann. Solche $g$ heißen *reguläre Funktionen* oder *Schnitte* auf $U$. Eine *global reguläre Funktion*, ein globaler Schnitt also, ist eine auf ganz $X/F$ reguläre Funktion.

(ii) Zu jedem Körperturm $\mathbb{F}_q \subset F \subset F' \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ läßt sich ein Morphismus

$$(X/F', \mathcal{O}_{X/F'}) \longrightarrow (X/F, \mathcal{O}_{X/F})$$

konstruieren.

**1.2.4 Standardbeispiel.** Für die Bezeichnungen verweisen wir auf (1.1.16). Abgeschlossene Punkte von $X/\mathbb{F}_3$ sind beispielsweise $\mathfrak{p} = (x, y)$ und $\mathfrak{q} = (x^2 + 1, y)$. Die Halme von $\mathcal{O}$ in diesen Punkten sind

$$\mathcal{O}_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{f}{h} \mid f, h \in F[E],\ h \notin \mathfrak{p} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{O}_\mathfrak{q} = \left\{ \frac{f}{h} \mid f, h \in F[E],\ h \notin \mathfrak{q} \right\} \ .$$

**1.2.5 Vereinbarung.** *Von nun an gehen wir davon aus, daß wir eine elliptische Kurve*

$$E/\mathbb{F}_q : \qquad f_E(x,y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0$$

*fest gewählt haben, wobei einer der Fälle (a), (b), (c) aus* (1.0.4) *vorliegt, und führen die abkürzenden Schreibweisen*

$$A := \mathbb{F}_q[E] \ , \qquad K := \mathbb{F}_q(E)$$

*ein. Zu einer Stelle* $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K)$ *bezeichnet* $\widehat{K}_\mathfrak{p}$ *die Vervollständigung von* $K$ *bezüglich der Bewertung* $v_\mathfrak{p}$. *Die Vervollständigung von* $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \subset \widehat{K}_\mathfrak{p}$ *bezeichnen wir mit* $\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$.
*Das* $\mathbb{F}_q$*-Schema zu* $E$ *bezeichnen wir mit* $(X, \mathcal{O}_X)$. *Insbesondere ist dann* $\mathcal{O}_X(\mathrm{Spec}(A)) = A$. *Wir führen die Notation* $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_X \mid_{\mathrm{Spec}(A)}$ *ein und bezeichnen häufig* $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_f)$ *als affinen oder endlichen Anteil des Schemas. Ebenso nutzen wir oft eine Zerlegung der Strukturgarbe in ihren endlichen und ihren unendlichen Anteil, was wir mit* $(\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_\infty)$ *bezeichnen.*

## 1.3 Zahlentheorie elliptischer Kurven

Nun setzen wir die Ausführung jener zahlentheoretischer Erkenntnisse über elliptische Kurven fort, die wir in dieser Arbeit nutzen werden.

### Die Idealklassengruppe

Eine zentrale Rolle in der Zahlentheorie nehmen die Idealklassengruppe $I(A)$ und die Divisorklassengruppe von $K$ ein.
In der Literatur werden beide Gruppen auch als Picardgruppen bezeichnet. Die verschiedenen Definitionen kann man in [Lor97, 7.3] (Zugang über Stellenmenge) und in [Sil86, II.3] (Zugang über Punktmenge der Kurve) nachlesen.
Wir werden nun den Zusammenhang zwischen den Punkten der Kurve, den Idealklassen und den Divisorklassen darstellen, da wir sowohl in Literaturverweisen als auch in konkreten Rechnungen davon Gebrauch machen werden.
Wir erinnern daran (vgl. (1.1)), daß jedem Punkt von $E - \{\infty\}$ sowohl eine Stelle von $\overline{\mathbb{F}}_q K$ als auch ein Primideal von $\overline{\mathbb{F}}_q A$ entspricht, dem Punkt $\infty$ wird die Stelle $\infty$ zugeordnet.

**1.3.1 Definition.** *Sei* $\mathbb{F}_q \subset F \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ *ein Zwischenkörper und* $L := FK$. *Dann ist die* Divisorgruppe $\mathrm{Div}(L)$ *die freie abelsche Gruppe, die von allen Stellen von* $L$ *erzeugt wird.*
*Der* Grad eines Divisors

$$D = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(L)} n_\mathfrak{p}\, \mathfrak{p} \qquad \textit{ist} \qquad \deg(D) := \sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(L)} n_\mathfrak{p} \deg(\mathfrak{p}) \ .$$

*Seine Bewertung an der Stelle* $\mathfrak{p}$ *ist definiert durch* $v_{\mathfrak{p}}(D) := n_{\mathfrak{p}}$.
*Die Hauptdivisoren*

$$(f) = \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(L)} v_{\mathfrak{p}}(f)\,\mathfrak{p} \quad \textit{mit } f \in L^*$$

*haben alle Grad* 0 *und bilden die Untergruppe* $P(L)$. *Die* Divisorklassengruppe *ist*

$$\mathrm{Cl}(L) := \mathrm{Div}(L)/P(L)\ .$$

*Sie enthält die Untergruppe*

$$\mathrm{Cl}^0(L) := \{[D] \in \mathrm{Cl}(L) \mid \deg(D) = 0\}$$

*der Grad*-0-*Divisorklassen.*

Für $\overline{\mathbb{F}}_q K$ ist die Divisorgruppe gleich der freien abelschen Gruppe, die von allen Punkten der elliptischen Kurve erzeugt wird.

**1.3.2 Proposition.** *([Sti93, III.63], [Ros02, 8.13]) Seien* $\mathbb{F}_q \subset F \subset F' \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ *endliche Zwischenkörper und* $[F' : F] = n$.

*(i) Die Erweiterung* $F'K/FK$ *ist in allen Stellen unverzweigt.*

*(ii) Sei* $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K)$. *In* $F'K$ *liegen über* $\mathfrak{p}$ *genau* $\mathrm{ggT}(n, \deg(\mathfrak{p})) = d$ *viele Stellen.*

*(iii) Sei* $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ *eine Stelle in* $F'K$, *die über* $\mathfrak{p}$ *liegt. Dann ist* $\deg(\mathfrak{P}) = \frac{1}{d}\deg(\mathfrak{p})$ *und* $[\kappa(\mathfrak{P}) : \kappa(\mathfrak{p})] = \frac{n}{d}$.

In unserer Situation ergibt sich

**1.3.3 Proposition.** *([Sil86, III.3.4, 3.5.1], [Sti93, VI.1] und [Lor97, VIII.9.1]) Seien* $\mathbb{F}_q \subset F \subset \overline{\mathbb{F}}_q$ *und* $L = FK$.
*Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \rho : & E(F) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Cl}^0(L) \\ & P & \mapsto & [P] - [\infty] \end{array}$$

*ist ein Isomorphismus von Gruppen.*
*Zudem haben wir die Bijektionen*

$$\begin{array}{rrcl} \sigma : & \{\text{Stellen vom Grad } 1\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Cl}^0(L) \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & [\mathfrak{p}] - [\infty] \\ \tau : & \{\text{endl. Stellen vom Grad } 1\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Klassen der ganzen Ideale} \\ & & & \quad \text{vom Grad 1 in } FA\} \\ & \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} & \mapsto & [\mathfrak{p}] \end{array}$$

*der Stellenmenge vom Grad* 1 *sowohl auf die Grad*-0-*Divisoren von* $FK$ *als auch auf die Grad*-1-*Idealklassen von* $FA$.
*Speziell für den affinen Koordinatenring einer elliptischen Kurve werden die nichttrivialen Idealklassen von den Primidealen vom Grad* 1 *repräsentiert, so daß sich die Abbildung* $\tau$ *wie folgt formulieren läßt:*

$$\begin{array}{rcl} \tau : \{\text{endl. Stellen vom Grad } 1\} & \xrightarrow{\sim} & I(FA) - \{(1)\} \\ \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} & \mapsto & [\mathfrak{p}] \ . \end{array}$$

*Insbesondere ergibt sich für endliche* $F$, *daß die Gruppen* $\mathrm{Cl}^0(L)$ *und* $I(FA)$ *endlich sind. Ihre Mächtigkeit ist die Klassenzahl*

$$h_L := \#E(F) = \#\mathrm{Cl}^0(L) = \#I(FA) \ .$$

Dies motiviert und begründet die

**1.3.4 Definition.** *Sei* $(E, A, K)$ *wie in* (1.2.5) *gegeben. Dann setzen wir*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Pic}(K) := \mathrm{Cl}(K) \ , & \\ \mathrm{Pic}(A) := I(A) \ , & \mathrm{RS}(I(A)) := \{\mathfrak{p} \subset A \mid \text{Primideal mit } \deg(\mathfrak{p}) = 1\} \cup \{(1)\} \end{array}$$

*und erhalten die bijektive Zuordnung von Idealklassen auf Divisorklassen*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div} : \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Cl}^0(K) - \{0\} \\ [\mathfrak{p}] & \longmapsto & [\mathfrak{p}] - [\infty] \ . \end{array}$$

**1.3.5 Lemma.** *Sei* $(E, A, K)$ *eine elliptische Kurve und* $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$ *das maximale Ideal zum* $\mathbb{F}_q$*-rationalen Punkt* $(\alpha, \beta)$. *Weiter sei* $-(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta')$. *Dann ist*

$$\mathfrak{p}^{-1} = \frac{1}{x - \alpha} \cdot (x - \alpha, y + \beta') \ .$$

*Beweis.* Aus den obigen Zuordnungen ist bereits klar, daß die Idealklassen $[\mathfrak{p}] = [(x - \alpha, y - \beta)]$ und $[\mathfrak{p}'] = [(x - \alpha, y - \beta')]$ invers zueinander sind. Um nun $\mathfrak{p}^{-1}$ zu berechnen, genügt es, $h \in K$ mit $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}' = (h)$ zu bestimmen, denn dann ist

$$\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}' \cdot (h)^{-1} \ .$$

Aus dem Beweis zu (1.1.7) wissen wir bereits, daß $(y - \beta)(y - \beta') = (x - \alpha) g_\alpha(x, y)$ für ein Polynom $g_\alpha(x, y) \in A$ ist, daher ist

$$\begin{aligned} &(x - \alpha, y - \beta)(x - \alpha, y - \beta') = \\ &\qquad ((x - \alpha)^2, (x - \alpha)(y - \beta), (x - \alpha)(y - \beta'), (x - \alpha) \cdot g_\alpha(x, y)) = (x - \alpha) \ . \end{aligned}$$

□

**1.3.6 Vereinbarung.** *Wir schreiben häufig* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A)$ *und verstehen darunter dann stets den Repräsentanten der Idealklasse, also das Primideal vom Grad* $1$ *oder das triviale Ideal* $(1)$*.*

**1.3.7 Standardbeispiel.** Seien die Bezeichnungen wie in (1.1.16) gewählt. Dann ist $(2,1)+(2,1)=(0,0)$ und $(2,1)+(2,2)=\infty$. Für die Idealklassen bedeutet dies $[(x-2,y-1)]\cdot[(x-2,y-1)]=[(x,y)]$ und $[(x-2,y-1)]\cdot[(x-2,y-2)]=[(1)]$.

Wir führen nun einige Aussagen an, die im Zusammenhang mit dem Satz von Riemann-Roch stehen.

**1.3.8 Definition/Proposition.** *Sei* $(E,A,K)$ *wie in* (1.2.5) *gegeben.*

*(i) Die kanonische (Divisor-)Klasse ist die Nulldivisorklasse ([Sti93, VI.1]).*

*(ii) Sei* $D \in \mathrm{Div}(K)$*. Dann ist der L-Raum zu* $D$ *der endlichdimensionale* $\mathbb{F}_q$*-Vektorraum*

$$L(D)=\{g \in K^* \mid (g) \geq -D\} \cup \{0\} \ ,$$

*also die Menge aller Elemente aus* $K^*$*, deren Bewertung an jeder Stelle größer oder gleich der Bewertung von* $-D$ *ist. Die Dimension* $l(D)$ *dieses Vektorraumes ist*

$$l(D)=\dim(L(D))=\begin{cases} 0, & \text{falls } \deg(D) \leq 0 \text{ und } D \neq 0 \\ 1, & \text{falls } D=0 \\ \deg(D), & \text{falls } \deg(D) \geq 1 \end{cases} .$$

*(iii) Für Divisoren* $D$ *und* $D'$ *mit* $[D]=[D']$ *gilt* $l(D)=l(D')$ *([Ros02, 5.2]).*

## Die Zeta-Funktion

Die Zeta-Funktion codiert für uns wichtige Größen der elliptischen Kurve, wie etwa die Zahl der $\mathbb{F}_{q^n}$-rationalen Punkte.
Wir fassen ihre Definition und einige ihrer Eigenschaften zusammen.

**1.3.9 Definition/Satz.** *(siehe [Sil86, V.2.]) Sei* $(E,A,K)$ *eine elliptische Kurve.*

*(i) Sei* $D \in \mathrm{Div}(K)$*. Dann setzen wir*

$$|D| := q^{\deg(D)} \ .$$

*(ii) Die Zeta-Funktion von $E/\mathbb{F}_q$ ist definiert durch*

$$\zeta_{E/\mathbb{F}_q}(s) := \sum_D |D|^{-s} ,$$

*wobei die Summe die Divisoren $D$ aus $\mathrm{Div}(K)$ durchläuft, für die $v_\mathfrak{p}(D) \geq 0$ ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K)$. Diese Summe konvergiert für alle komplexen $s$ mit einem Realteil größer 1 und hat eine Produktentwicklung*

$$\zeta_{E/\mathbb{F}_q}(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K)} \left(1 - |\mathfrak{p}|^{-s}\right)^{-1} .$$

*(iii) Es ist $\zeta_{E/\mathbb{F}_q}(s) = Z(E/\mathbb{F}_q, q^{-s})$ mit*

$$\begin{aligned} Z(E/\mathbb{F}_q, S) &:= \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\#E(\mathbb{F}_{q^n})) \frac{S^n}{n} \\ &= \prod_P (1 - S^{\deg(P)})^{-1} , \end{aligned}$$

*wobei $P$ ein Vertretersystem von $E(\overline{\mathbb{F}}_q)/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ durchläuft (vgl. [Lor97, VIII.5.]). Dies ist die rationale Funktion*

$$Z(E/\mathbb{F}_q, S) = \frac{1 - aS + qS^2}{(1-S)(1-qS)} ,$$

*wobei $a := 1 + q - h_K$ ist. Das Zählerpolynom $P(S) := 1 - aS + qS^2$ ausgewertet an der 1 liefert die Zahl $P(1) = h_K = \#E(\mathbb{F}_q)$ der $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkte.*

*(iv) Darüber hinaus existieren komplexe Zahlen $\omega, \overline{\omega} \in \mathbb{C}$ mit $|\omega| = |\overline{\omega}| = \sqrt{q}$ und $\omega\overline{\omega} = q$, für die*

$$1 - aS + qS^2 = (1 - \omega S)(1 - \overline{\omega} S) \quad \textit{d.h.} \quad a = \omega + \overline{\omega} \quad \textit{ist.}$$

*Für die Zahl der $\mathbb{F}_{q^n}$-rationalen Punkte ergibt sich daraus*

$$\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = 1 + q^n - \omega^n - \overline{\omega}^n .$$

Die Zahl $P(-1) = Z(E/\mathbb{F}_q, -1)$ ist die Klassenzahl des quadratischen Twists der elliptischen Kurve, und es gilt $h_K + h'_K = 2q + 2$ (siehe auch Kapitel (4), Seite 71 ff und [Gek86, V.4.]).

**1.3.10 Standardbeispiel.** (Bezeichnungen siehe (1.1.16))
Das Zählerpolynom der Zetafunktion von $E/\mathbb{F}_3$ ist wegen $a = 1 + 3 - 4 = 0$ gerade

$$P(S) = 1 + 3 \cdot S^2 = (1 + \sqrt{-3}S) \cdot (1 - \sqrt{-3}S) .$$

Für die Zahl der $\mathbb{F}_{3^n}$-rationalen Punkte ergibt sich

$$\#E(\mathbb{F}_{3^n}) = 1 + 3^n - \sqrt{-3}^n - (-\sqrt{-3})^n \ .$$

Daraus ergibt sich $\#E(\mathbb{F}_9) = 1 + 3^2 - \sqrt{-3}^2 - (-\sqrt{-3})^2 = 16$, und diese Zahl haben wir bereits in (1.1.16) ermittelt.

**1.3.11 (Partielle Zetafunktion).** ([Gek86, III.1,2.]) Analog zur Zetafunktion $\zeta_{E/\mathbb{F}_q}(s) = Z(E/\mathbb{F}_q, S)$ mit $S = q^{-s}$ können wir für ein ganzes Ideal $\mathfrak{n} \subset A$ und ein $a \in A$ die partiellen Zetafunktionen $\zeta_{[\mathfrak{n}]}(s)$ bzw. $\zeta_{a,\mathfrak{n}}(s)$ durch $Z_{[\mathfrak{n}]}(S)$ bzw. $Z_{a,\mathfrak{n}}(S)$ beschreiben:

$$\zeta_{[\mathfrak{a}]}(s) = Z_{[\mathfrak{a}]}(S) = \sum_{\mathfrak{a}\in[\mathfrak{n}]} |\mathfrak{a}|^{-s} \ ,$$

$$\zeta_{a,\mathfrak{n}}(s) = Z_{a,\mathfrak{n}}(S) = \sum_{\substack{b\in A \\ b\equiv a \bmod \mathfrak{n}}} |b|^{-s} = \sum_{\substack{b\in A \\ b\equiv a \bmod \mathfrak{n}}} S^{\deg(b)} \ .$$

Für diese gelten die Relationen

(i) $(q-1)Z_{[\mathfrak{n}^{-1}]}(S) = S^{-d}Z_{0,\mathfrak{n}}(S)$,

(ii) $Z_{a,\mathfrak{n}} = Z_{b,\mathfrak{n}}$, falls $a \equiv b \mod \mathfrak{n}$,

(iii) $Z_{ab,b\mathfrak{n}}(S) = S^{\deg(b)}Z_{a,\mathfrak{n}}(S)$ für alle $b \in A - \{0\}$,

(iv) $Z_{ca,\mathfrak{n}} = Z_{a,\mathfrak{n}}$ für alle $c \in \mathbb{F}_q^*$.

Insbesondere genügt es, Repräsentanten der Idealklassen zu untersuchen.

**1.3.12 (Spezielle Werte).** Wir können mit [Gek86, III.2] diese Funktion explizit bestimmen. Alle dort angeführten Größen lassen sich aus den uns gegebenen Daten leicht bestimmen, und man erhält

$$Z_{0,\mathfrak{n}}(S) = (q-1)S^{d+1} + (q-1)q \cdot \frac{S^{d+2}}{1-qS} = (q-1)\left(S^{d+1} + q \cdot \frac{S^{d+2}}{1-qS}\right) \ ,$$

wobei $d = \deg(\mathfrak{n})$ ist.

Für die von uns gewählten Repräsentanten der Picardgruppe, die Primideale $\mathfrak{p}$ vom Grad 1, ist

$$Z_{0,\mathfrak{p}}(S) = (q-1)\left(S^2 + q \cdot \frac{S^3}{1-qS}\right) \ .$$

Die Ableitung ist

$$Z'_{0,\mathfrak{n}}(S) = (q-1)\left((d+1)S^d + \frac{(d+2)S^{d+1} - (d+1)qS^{d+2}}{(1-qS)^2}\right) \ .$$

Somit ergeben sich

$$Z_{[\mathfrak{p}]}(S) = S + \frac{qS^2}{1-qS} \quad \text{und} \quad Z'_{[\mathfrak{p}]}(S) = 1 + q \cdot \frac{2S + qS^2}{1-qS} \ .$$

# Kapitel 2

# Drinfeld-Moduln

In diesem Kapitel werden wir Drinfeld-Moduln definieren und ihre Isomorphieklassen parametrisieren. Dazu führen wir zunächst die Drinfeld'sche obere Halbebene ein und klären ihre analytische Struktur.

Anschließend werden wir Gitter und deren $e$-Funktion sowie Drinfeld-Moduln selbst definieren und den Zusammenhang der Objekte darstellen, was uns schließlich die gewünschte Parametrisierung liefert.

Unsere Ausführungen folgen dabei [GR96, 1. und 2.] und [Gek86], wobei die in [Gek86] gemachten und bewiesenen Aussagen, die wir für den Fortgang benötigen, in [GR96] kurz zusammengefaßt sind.

Sei dazu $K$ wie in (1.2.5) der Funktionenkörper einer elliptischen Kurve.

**2.0.1 Bemerkung.** (i) Die in diesem Kapitel gemachten Aussagen gelten in gleicher Weise für den rationalen Funktionenkörper $\mathbb{F}_q(T)$. Als Uniformisierende an $\infty$ wählen wir hier $\frac{1}{T}$. Der entsprechende Ring außerhalb $\infty$ ganzer Funktionen ist der Polynomring $\mathbb{F}_q[T]$.

Berücksichtigen wir, daß die Klassenzahl von $\mathbb{F}_q[T]$ stets 1 ist, so erhalten wir in einigen Aussagen starke Vereinfachungen.

(ii) Die angeführten Aussagen gelten in ähnlicher Weise für beliebige globale Funktionenkörper.

Allerdings geht in viele der folgenden Aussagen der Grad der $\infty$-Stelle ein.

Für $\mathbb{F}_q(T)$ oder $K$ ist $\kappa(\infty) = \mathbb{F}_q$. Da wir hier vornehmlich den Fall $K$ beleuchten und einige Aussagen in dem „einfacheren Fall“ $\mathbb{F}_q(T)$ am Beispiel erläutern werden, verzichten wir auf Einbeziehung dieses Faktors. Der Deutlichkeit halber schreiben wir an geeigneten Stellen $\kappa(\infty)$ statt $\mathbb{F}_q$.

## 2.1 Drinfeld'sche obere Halbebene

Die $\infty$-Stelle von $K$ ist die „negative Gradbewertung", d.h. für $K = \mathbb{F}_q(E)$ ist die Unifomisierende $t = \frac{x}{y}$ (vgl. (1.1.10)).
Die Vervollständigung an $\infty$ wird mit $\widehat{K}_\infty$ bezeichnet (vgl. (1.2.5)). Wir definieren den *Absolutbetrag* $|.|$ bezüglich $\infty$ durch

$$|x| := q^{-v_\infty(x)} \qquad \text{für alle } x \in \widehat{K}_\infty \ .$$

Auf den algebraischen Abschluß $\overline{\widehat{K}_\infty}$ läßt sich $|.|$ bzw. $v_\infty$ eindeutig fortsetzen. Der Körper $\overline{\widehat{K}_\infty}$ ist allerdings nicht mehr vollständig bezüglich $|.|$. Komplettieren wir ihn nun, so erhalten wir einen Körper, den wir mit $\mathbf{C}$ bezeichnen. Dieser ist nicht nur vollständig bezüglich $|.|$, sondern auch algebraisch abgeschlossen ([BGR84, Prop. 3, S.146]).

**2.1.1 Definition.** *Die Drinfeld'sche (obere) Halbebene ist*

$$\Omega := \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) - \mathbb{P}^1(\widehat{K}_\infty) = \mathbf{C} - \widehat{K}_\infty \ .$$

**2.1.2 Bemerkung.** Der Körper $\mathbf{C}$ ist in einem gewissen Sinn unabhängig von der Wahl des globalen Funktionenkörpers. Hingegen ist die Struktur von $\Omega$, wie wir gleich sehen werden, abhängig von $\kappa(\infty)$, also sowohl vom Konstantenkörper als auch vom Grad der $\infty$-Stelle.

**2.1.3 Bemerkung.** Die Gruppe $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ operiert auf $\Omega$ durch Möbiustransformationen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty) \text{ und } z \in \Omega \ .$$

Wir wollen nun $\Omega$ als analytisches Gebilde beschreiben. Dazu benötigen wir zunächst einen geeigneten Abstandsbegriff.

**2.1.4 Definition.** *Wir definieren den* imaginären Absolutbetrag *auf* $\mathbf{C}$ *durch*

$$|z|_i := \inf\{|z-x| \mid x \in \widehat{K}_\infty\} \qquad \textit{für alle } z \in \mathbf{C} \ .$$

**2.1.5 Bemerkung.** (vgl. [Gek86, V.1.1. und 1.2]) Der imaginäre Absolutbetrag hat die folgenden Eigenschaften. Sei $z \in \mathbf{C}$.

(i) Ist $|z| \notin |\widehat{K}_\infty^*| = q^{\mathbb{Z}}$, so ist $|z|_i = |z|$.

(ii) Ist $|z| = 1$, und ist $[z] \in \overline{\kappa(\infty)} = \overline{\mathbb{F}}_q$ seine Restklasse, so ist

$$|z|_i = 1 \iff [z] \notin \kappa(\infty) = \mathbb{F}_q \ .$$

(iii) Es ist $|cz|_i = |c| \cdot |z|_i$ für alle $c \in \widehat{K}_\infty$.

(iv) Für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ und alle $z \in \Omega$ gilt

$$|\gamma z|_i = |\det(\gamma)| \cdot |cz+d|^{-2} \cdot |z|_i \ .$$

Wir nutzen nun einige Aussagen aus der rigiden Analysis. Eine ausführliche Beschreibung dazu findet man in [BGR84], [GvdP80] oder [FvdP81]. Eine genauere Beschreibung von $\Omega$ ist – neben den zu Anfang des Kapitels aufgeführten Quellen – auch in [Tei92] und [Rev92] zu finden.

Da $\mathbb{P}^1(\widehat{K}_\infty)$ kompakt ist, ist $\Omega$ ein rigid analytischer Raum. Insbesondere existiert eine zulässige Überdeckung durch affinoide Räume (in unserem Fall Kreisscheiben), die wir hier nun angeben (vgl. [FvdP81, III.3]).
Dazu benötigen wir zunächst eine geeignete Indexmenge, die auch in nachfolgenden Kapiteln Verwendung finden wird.

**2.1.6 Vereinbarung.** *Wir setzen* $\mathrm{RS}(\widehat{K}_\infty/t^{n+1}\widehat{\mathcal{O}}_\infty)$ *für den* $\mathbb{F}_q$*-Vektorraum, der von den* $t^i$ *mit* $i \le n$ *erzeugt wird. Dies ist ein Repräsentantensystem für* $\widehat{K}_\infty/t^{n+1}\widehat{\mathcal{O}}_\infty$*. Weiter sei*

$$\mathrm{Ind}_e := \{(n,s) \mid n \in \mathbb{Z},\ s \in \mathrm{RS}(\widehat{K}_\infty/t^{n+1}\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\} \ .$$

Damit erhalten wir

**2.1.7 Definition/Satz.** *([GR96, 1.2 und 1.5.5], [Rev92, 2.], [FvdP81, I.3.2])*

*(i) Für alle* $(n,s) \in \mathrm{Ind}_e$ *sei*

$$\begin{aligned} D(n,s) &:= \{z \in \mathbf{C} \mid q^{-(n+1)} \le |z-s| = |z-s|_i \le q^{-n}\} \ , \\ D^\circ(n,s) &:= \{z \in \mathbf{C} \mid q^{-(n+1)} < |z-s| = |z-s|_i < q^{-n}\} \ . \end{aligned}$$

*Dann ist*

$$\Omega = \bigcup_{(n,s)\in \mathrm{Ind}_e} D(n,s)$$

*und* $(D(n,s))_{\mathrm{Ind}_e}$ *eine (zulässige) Überdeckung von* $\Omega$.

*(ii) Eine Funktion* $f$ *auf* $D(n,s)$ *heißt* holomorph *(im rigid analytischen Sinn), wenn es eine Folge rationaler Funktionen auf* $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ *ohne Pole in* $D(n,s)$ *gibt, die auf* $D(n,s)$ *gleichmäßig gegen* $f$ *konvergiert. Eine holomorphe Funktion auf* $\Omega$ *ist eine Funktion, deren Einschränkungen auf die Mengen* $D(n,s)$ *holomorph sind (vgl. [FvdP81, V.]).*

*(iii) Die* $D(n,s)$ *sind affinoide Räume, ihre Algebren* $A(n,s)$ *holomorpher Funktionen bilden eine Garbe* $\mathcal{O}_\Omega$ *holomorpher Funktionen auf* $\Omega$ *mit* $\mathcal{O}_\Omega(D(n,s)) = A(n,s)$.

(iv) *Eine* meromorphe Funktion *auf $D(n,s)$ ist ein Element des Quotientenkörpers von $A(n,s)$. Entsprechend heißt eine Funktion $f$ auf $\Omega$ meromorph, wenn ihre Einschränkungen auf endlich viele der $D(n,s)$ meromorph und auf allen anderen $D(n,s)$ holomorph sind.*

**2.1.8 Bemerkung.** Die Überdeckung $(D(n,s))_{\mathrm{Ind}_e}$ ist eine *reine Überdeckung* (vgl. [GvdP80, III.2.10], [FvdP81, IV.4.]).

Wir wollen nun den *Schnittgraphen $T$* dieser Überdeckung bestimmen. Dabei ordnen wir jedem $D(n,s)$ eine Kante zu. Zwei Kanten treffen sich in einem Knoten genau dann, wenn die zugehörigen Räume nichttrivialen Durchschnitt haben.

**2.1.9 Proposition.** *([GR96, 1.2]) Sei $(n,s) \in \mathrm{Ind}_e$. Dann hat $D(n,s)$ nichttrivialen Durchschnitt mit genau den folgenden Mengen $D(n',s')$:*

(i) *$D(n,s) \cap D(n',s') = D(n,s)$ genau dann, wenn $(n,s) = (n',s')$ ist,*

(ii) *$D(n-1,s) \cap D(n,s) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-s| = |z-s|_i = q^{-n}\}$,*

(iii) *$D(n,s) \cap D(n+1, s+\varepsilon t^{n+1}) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-s| = |z-s|_i = q^{-(n+1)}\}$, wobei $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ ist.*

**2.1.10 Vereinbarung.** *Zur Indizierung der Durchschnitte wählen wir die Indexmenge*

$$\mathrm{Ind}_v := \{(n,s) \mid n \in \mathbb{Z},\ s \in RS(\widehat{K}_\infty / t^n \widehat{\mathcal{O}}_\infty)\} \ .$$

*Zu jedem Tupel $(n,s) \in \mathrm{Ind}_v$ setzen wir*

$$C(n,s) := D(n,s) \cap D(n-1,s) \ .$$

**2.1.11 Bemerkung.** (i) Anschaulich ist ein $C(n,s)$ eine „Riemannsche Zahlkugel“ mit $q+1$ Löchern bzw. eine Kreisscheibe mit $q$ Löchern. $D^0(n,s)$ ist ein Kreisring.

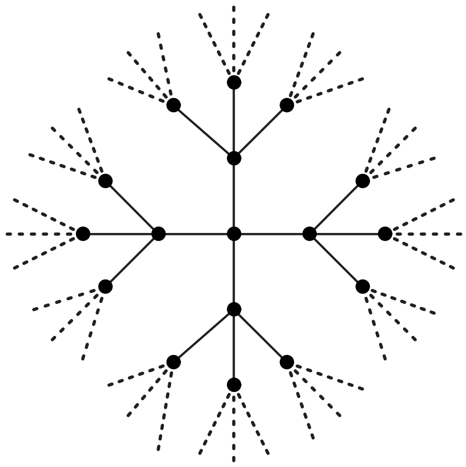
(ii) Die kanonische Abbildung von $\mathrm{Ind}_e$ nach $\mathrm{Ind}_v$ ordnet jeder Kante einen Endknoten zu und definiert also eine Orientierung auf $T$. Anschaulich entspricht diese Orientierung der Unterscheidung von „Innerem“ und „Äußerem“ eines Kreisrings.

**2.1.12 Proposition.** *(i) Es sei $T$ der Schnittgraph der reinen Überdeckung $(D(n,s))_{\mathrm{Ind}_e}$ von $\Omega$. Dann steht die Knotenmenge* $\mathrm{Vert}(T)$ *in Bijektion zu* $\mathrm{Ind}_v$ *und die Kantenmenge* $\mathrm{Edge}(T)$ *zu* $\mathrm{Ind}_e$.

(ii) *Der Graph $T$ ist wegen (2.1.9) ein $(q+1)$-wertiger Baum, d.h. in jedem Knoten treffen sich genau $q+1$ Kanten, und es gibt keine Zykel.*

(iii) *Die Gruppe $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ operiert auf $(D(n,s))_{\mathrm{Ind}_e}$ und auf der Menge der $C(n,s)$, und diese Operation ist verträglich mit der Schnittbildung. Also operiert sie auf dem Baum $T$.*

**2.1.13 Standardbeispiel.** Für $q = 3$ hat der Baum die graphische Darstellung:



In Kapitel 3 und 4 werden wir uns noch ausführlich mit diesem Baum beschäftigen.

## 2.2 Gitter und $e$-Funktionen

Wir werden nun $A$-Gitter in $\mathbf{C}$ definieren und diesen dann eine $e$-Funktion zuordnen.

**2.2.1 Erinnerung.** [Lan02, III.4.] Ein projektiver $A$-Modul $M$ ist ein $A$-Modul, der direkter Summand eines freien Moduls ist.
Äquivalent dazu ist, daß jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

von $A$-Moduln aufspaltet, oder (falls $M$ endlich erzeugt ist) daß $M$ torsionsfrei ist.

**2.2.2 Definition.** *(i) Ein $A$-*Gitter $Y$ vom Rang $r$ in $K^r$ *mit $r \in \mathbb{N}$ ist ein projektiver $A$-Untermodul von $K^r$ vom Rang $r$.*

*(ii) Die Gruppe* $\mathrm{GL}(r, K)$ *operiert von rechts auf dem Zeilenvektorraum $K^r$. Die größte Untergruppe von* $\mathrm{GL}(r, K)$*, die ein $A$-Gitter $Y \subset K^r$ festläßt, bezeichnen wir mit* $\mathrm{GL}(Y)$.

*(iii) Zwei $A$-Gitter $Y$ und $Y'$ in $K^r$ sind* isomorph *genau dann, wenn sie als $A$-Moduln isomorph sind.*

*Wir bezeichnen die Menge der Isomorphieklassen von Gittern vom Rang $r$ mit $\mathcal{P}_r(A)$.*

*(iv)* Ein $A$-Gitter $\Lambda$ in $\mathbf{C}$ vom Rang $r \in \mathbb{N}$ *ist ein projektiver $A$-Untermodul vom Rang $r$, der mit jedem Ball in $\mathbf{C}$, der endlichen Radius hat, einen endlichen Schnitt hat.*

*(v) Ein* Morphismus von $A$-Gittern $\Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ *in $\mathbf{C}$ ist die Null oder die Multiplikation mit einem Element $c \in \mathbf{C}^*$, so daß $c\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ ist.*

*(vi) Zwei $A$-Gitter $\Lambda$ und $\Lambda'$ in $\mathbf{C}$ vom Rang $r$ heißen* ähnlich *genau dann, wenn ein $c \in \mathbf{C}^*$ existiert mit $c \cdot \Lambda = \Lambda'$.*

**2.2.3 Bemerkung.** Zwei $A$-Gitter $Y$ und $Y'$ in $K^r$ sind isomorph als $A$-Moduln genau dann, wenn ein $\gamma \in \mathrm{GL}(r, K)$ existiert mit $Y\gamma = Y'$.

**2.2.4 Bemerkung.** Wir werden unsere Betrachtungen auf die Fälle $r = 1$ und $r = 2$ beschränken.
Jeder projektive Rang-1 $A$-Modul ist isomorph zu einem Ideal in $A$, jeder projektive Rang-2 $A$-Modul isomorph zu einem Gitter

$$Y = (1,0)\mathfrak{a} + (0,1)\mathfrak{b} \subset K^2 \ ,$$

wobei wir $K^2$ als *Zeilenvektorraum* auffassen und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in $A$ sind.

**2.2.5 Korollar.** *(vgl. [GR96, 2.5]) Für jedes $A$-Gitter $\Lambda$ in $\mathbf{C}$ vom Rang 2 existieren Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $A$, ein $c \in \mathbf{C}^*$ und ein $\mathrm{z} \in \Omega$, so daß vermöge der Einbettung*

$$i_{\mathrm{z}} : \widehat{K}^2_\infty \longrightarrow \mathbf{C}\,, \begin{cases} (1,0) & \mapsto \mathrm{z} \\ (0,1) & \mapsto 1 \end{cases}$$

*$\Lambda = c \cdot i_{\mathrm{z}}(Y)$ mit $Y \cong (1,0)\mathfrak{a} + (0,1)\mathfrak{b}$ ist.*
*Jede Ähnlichkeitsklasse von $A$-Gittern läßt sich also durch ein $Y_{\mathrm{z}} := i_{\mathrm{z}}(Y)$ repräsentieren, wobei $Y$ ein $A$-Gitter in $K^2$ ist.*

**2.2.6 Definition.** *Sei $\Lambda$ ein $A$-Gitter in $\mathbf{C}$ vom Rang $r$. Die $e$-*Funktion *zu $\Lambda$ ist*

$$e_\Lambda : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, \quad e_\Lambda(z) := z \cdot \prod_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \ .$$

Die folgenden Eigenschaften der $e$-Funktion sind leicht zu zeigen und in [GR96, 2.3], [Gek86, 2.2] sowie [Gos96, 4.2] zu finden.

**2.2.7 Proposition.** *(i) $e_\Lambda(z)$ konvergiert gleichmäßig auf allen beschränkten Teilmengen von $\mathbf{C}$. Die dadurch definierte Funktion $e_\Lambda$ ist ganz und $\Lambda$-periodisch.*

*(ii) $e_\Lambda$ ist $\mathbb{F}_q$-linear und surjektiv.*

*(iii) Für zwei ähnliche Gitter* $\Lambda' = c\Lambda$ *gilt*

$$e_{\Lambda'}(cz) = ce_\Lambda(z) \ .$$

*(iv) Die Ableitung* $e'_\Lambda(z) = 1$ *ist konstant. Daraus ergibt sich die Identität*

$$e_\Lambda^{-1}(z) = \frac{e'_\Lambda(z)}{e_\Lambda(z)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda}$$

*meromorpher Funktionen auf* $\mathbf{C}$.

*(v)* $e_\Lambda$ *induziert einen Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$\mathbf{C}/\Lambda \xrightarrow[e_\lambda]{\simeq} \mathbf{C} \ .$$

## 2.3 Drinfeld-Moduln und Gitter

Wir können nun die $e_\Lambda$-Funktion zu einem Gitter $\Lambda$ nutzen, um Drinfeld-Moduln zu konstruieren analog zur Konstruktion elliptischer Kurven zu gegebenen $\mathbb{Z}$-Gittern in $\mathbb{C}$ via der Weierstraß-Funktion. Zunächst jedoch geben wir eine algebraische Definition von Drinfeld-Moduln.

Sei $\mathbb{G}_a/\mathbf{C}$ das additive Gruppenschema über $\mathbf{C}$ und $\mathrm{End}_\mathbf{C}(\mathbb{G}_a)$ der Endomorphismenring von $\mathbb{G}_a$.
Diesen Endomorphismen entsprechen eineindeutig die (absolut) additiven Polynome. Dabei heißt ein Polynom $P(z)$ (absolut) additiv, falls für alle $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ gilt $P(z_1 + z_2) = P(z_1) + P(z_2)$.
Sind nun $P$ und $H$ additive Polynome, so auch $P(z) + H(z)$ und $P(H(z))$. Insbesondere ist die Menge der additiven Polynome mit den Verknüpfungen „+“ und „$\circ$“ ein (nicht kommutativer) Ring.
Wir setzen nun für die Frobeniusabbildung

$$\begin{array}{rcl} \tau_p : \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & z^p \end{array}$$

und charakterisieren $\mathrm{End}_\mathbf{C}(\mathbb{G}_a)$ als den getwisteten Polynomring

$$\mathbf{C}\{\tau_p\} := \left\{ \sum_{\text{endl.}} a_i \tau_p^i \mid a_i \in \mathbf{C} \right\} \ .$$

Die Multiplikation ist die Hintereinanderausführung von Endomorphismen. Die Kommutatorregel ist folglich

$$\tau_p \cdot c = c^p \cdot \tau_p \quad \text{für alle } c \in \mathbf{C}.$$

Der Ring ist sowohl Rechts- als auch Linkshauptidealring, insbesondere ist die Links- bzw. Rechtsdivision mit Rest eindeutig (vgl. [Gos96, 1.6]).
Der Ring $\mathbf{C}\{\tau_p\}$ enthält die $\mathbb{F}_q$-Algebra der $\mathbb{F}_q$-linearen Polynome $\mathbf{C}\{\tau\}$ mit $\tau = \tau_q = \tau_p^s$, wobei $q = p^s$ ist.

**2.3.1 Bemerkung.** Wir werden ein $f(\tau) = \sum b_i \tau^i \in \mathbf{C}\{\tau\}$ auch als ein Polynom in $z$ auffassen. Dabei schreiben wir leicht mißbräuchlich $f(z) = \sum b_i z^{q^i}$.

Da wir häufig Aussagen über die Koeffizienten eines Polynoms in $\mathbf{C}\{\tau\}$ machen werden, führen wir noch eine abkürzende Schreibweise ein.

**2.3.2 Definition.** *Sei $P(\tau) \in \mathbf{C}\{\tau\}$ ein Polynom mit $\deg_\tau(P(\tau)) = d$. Dann ist $\mathrm{coeff}(P, i)$ der $i$-te Koeffizient von $P$. Zudem setzen wir*

$$D(P) = \mathrm{coeff}(P, 0) \quad \textit{und} \quad l(P) = \mathrm{coeff}(P, d) \ .$$

**2.3.3 Definition.** *(i) Ein* Drinfeld-$A$-Modul *oder einfach ein* Drinfeld-Modul *$\phi$ über* $\mathbf{C}$ vom Rang $r$ *ist ein injektiver Homomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \phi : A & \longrightarrow & \mathbf{C}\{\tau\} \\ a & \mapsto & \phi_a \ , \end{array}$$

*so daß für alle $a \in A$ gilt:*

*(a)* $\deg_\tau(\phi_a) = r \cdot \deg(a)$, *wobei* $\deg_\tau$ *den Grad als Polynom in $\tau$ bezeichnet,*

*(b) der konstante Term für jedes $a \in A$ ist $D(\phi_a) = a$.*

*(ii) Ein* Morphismus *des Drinfeld-Moduls $\phi$ in den Drinfeld-Modul $\psi$ ist ein Element $\mu \in \mathbf{C}\{\tau\}$ mit*

$$\mu \circ \phi_a = \psi_a \circ \mu \quad \textit{für alle } a \in A \ .$$

*Nichttriviale Morphismen zwischen Drinfeld-Moduln heißen* Isogenien.

*(iii) Zwei Drinfeld-Moduln $\phi$ und $\psi$ heißen isomorph, wenn ein $c \in \mathbf{C}^*$ existiert mit*

$$c\phi_a = \psi_a c \quad \textit{für alle } a \in A \ .$$

**2.3.4 Bemerkung.** (i) Bei gegebenem Drinfeld-$A$-Modul $\phi$ wird das additive Gruppenschema $\mathbb{G}_a/\mathbf{C}$ auf diese Weise zu einem Schema in $A$-Moduln.

(ii) Häufig werden Drinfeld-Moduln statt über $\mathbf{C}$ über einem beliebigen $A$-Körper $L$ definiert. Statt der Einbettung $A \hookrightarrow \mathbf{C}$ wählt man dann einen

Homomorphismus $\gamma : A \to L$ von $\mathbb{F}_q$-Algebren. In diesem Fall wird dem Körper $L$ eine $A$-Charakteristik in der folgenden Weise zugeordnet

$$\mathrm{char}_A(L) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \gamma \text{ injektiv ist} \\ \ker\gamma, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wir werden allerdings nur im Fall $\mathrm{char}_A(\mathbf{C}) = \infty$, also im Fall generischer Charakteristik (vgl. [Gos96, 3.6.1]), arbeiten.

(iii) Isogenien existieren nur zwischen Drinfeld-Moduln gleichen Ranges.

(iv) Die Angabe der Isomorphie aus (2.3.3.iii) ist aufgrund der Kommutatorregel eine nichttriviale Relation:

$$\text{zu} \qquad \phi_a(\tau) = \sum_{0 \le i \le r\deg(a)} l_i \tau^i \qquad \text{ist} \qquad c\phi_a(\tau)c^{-1} = \sum_{0 \le i \le r\deg(a)} c^{1-q^i} l_i \tau^i \ .$$

(v) Wir werden im folgenden Drinfeld-Moduln vom Rang 1 zumeist mit $\rho$ bezeichnen.

**2.3.5 Beispiel.** Im Fall $\mathbb{F}_q[T]$ läßt sich jeder Drinfeld-Modul eindeutig durch Angabe von $\phi_T(\tau)$ charakterisieren (vgl. [Gek83, 1.2]). Für $r = 2$ erhalten wir dann beispielsweise

$$\phi_T(\tau) = T + g\tau + \Delta\tau^2$$

mit $g, \Delta \in \mathbf{C}$ und $\Delta \neq 0$.
Zahlreiche konkrete Beispiele zu verschiedenen $A$-Charakteristiken finden sich in [Geb03, 1.4].

**2.3.6 Bemerkung.** Im Fall $A = \mathbb{F}_q[E]$ ist ein Drinfeld-Modul durch

$$\begin{aligned} \phi_x(\tau) &= x + b_1\tau + \ldots + b_{2r}\tau^{2r} \ , \\ \phi_y(\tau) &= y + c_1\tau + \ldots + c_{3r}\tau^{3r} \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt. Die Koeffizienten $b_i, c_i$ sind jedoch nicht unabhängig voneinander. So müssen beispielsweise die Relation $\phi_x\phi_y = \phi_y\phi_x$ und die entsprechende Relation aus der Weierstraßgleichung erfüllt sein.
In konkreten Rechnungen führt dies auf ein aufwendiges Gleichungssystem, das schon im Fall $r = 1$ schwer zu lösen ist (vgl. (2.3.16) und (2.3.17)).

Nun können wir jedem $A$-Gitter in $\mathbf{C}$ einen Drinfeld-$A$-Modul zuordnen.

**2.3.7 Proposition.** *([Gos96, 4.36]) Zu einem $A$-Gitter $\Lambda$ des Ranges $r$ sei $\phi_a = \phi_a^\Lambda$ das Element von $\mathbf{C}\{\tau\}$, für welches das Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \mathbf{C} \arrow[r, "e_\Lambda"] \arrow[d, "a"] & \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi_a"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & \mathbf{C} \arrow[r, "e_\Lambda"] & \mathbf{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*kommutativ ist, d.h.* $e_\Lambda(az) = \phi_a(e_\Lambda(z))$. *Dabei ist*

$$\mathbf{C} \xleftarrow{\simeq} \mathbf{C}/\ker(e_\Lambda) = \mathbf{C}/\Lambda \ .$$

*Dann ist* $\phi^\Lambda : a \mapsto \phi_a^\Lambda$ *ein Drinfeld-Modul vom Rang* $r$.

Daraus ergibt sich sogar

**2.3.8 Satz (Drinfeld).** *(vgl. [Gos96, 4.3.5 und 4.6.9]) Die Zuordnung* $\Lambda \to \phi^\Lambda$ *definiert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der* $A$*-Gitter in* $\mathbf{C}$ *vom Rang* $r$ *und der Kategorie der Drinfeld-*$A$*-Moduln vom Rang* $r$.
*Seien sowohl die* $A$*-Gitter* $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbf{C}$ *als auch* $c \in \mathbf{C}$ *so gewählt, daß* $c\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ *ist. Vermöge der Isomorphismen*

$$e_{\Lambda_1} : \mathbf{C}/\Lambda_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C} \quad \textit{und} \quad e_{\Lambda_2} : \mathbf{C}/\Lambda_2 \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}$$

*korrespondiert das Element* $c$ *zu einem* $\mu_c(\tau) \in \mathbf{C}\{\tau\}$ *mit*

$$\mu_c \circ \phi_a^{\Lambda_1} = \phi_a^{\Lambda_2} \circ \mu_c \quad \textit{für alle } a \in A \ .$$

**2.3.9 Bemerkung.** (vgl. [Gek86, II.3]) Sei $\Lambda$ ein $A$-Gitter in $\mathbf{C}$. Setzen wir $\Lambda' = \mathfrak{a}^{-1}\Lambda$ für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$, dann ist $\Lambda \subset \Lambda'$. Seien $\phi$ bzw. $\phi'$ die zugehörigen Drinfeld-Moduln und $\mu : \phi \to \phi'$ der Morphismus mit Leitkoeffizienten $l(\mu)$. Dann entspricht in der Notation von Hayes in [Hay79] $l(\mu)^{-1}\mu$ dem Morphismus

$$\phi_{\mathfrak{a}}^\Lambda : \phi^\Lambda \longrightarrow \mathfrak{a} * \phi^\Lambda \ ,$$

wobei dort gezeigt wird, daß $\phi_{\mathfrak{a}}^\Lambda$ der Erzeuger des Linksideals $\{\phi_a^\Lambda \mid a \in \mathfrak{a}\} \subset \mathbf{C}\{\tau\}$ ist. In [Hay79, 5.14] wird zudem die Isomorphie gezeigt

$$\mathfrak{a} * \phi^\Lambda \cong \phi^{\mathfrak{a}^{-1}\Lambda}$$

gezeigt. Der $\tau$-Grad von $\phi_{\mathfrak{a}}^\Lambda$ ist $r \cdot \deg(\mathfrak{a})$, wobei $r$ der Rang des $A$-Gitters $\Lambda$ ist. Für $\mathfrak{a} = (x-\alpha, y-\beta)$ ist also beispielsweise $\phi_{\mathfrak{a}}^\Lambda = \mathrm{rggT}(\phi_x^\Lambda - \alpha, \phi_y^\Lambda - \beta)$, wobei hier der größte gemeinsame Teiler bezüglich der Division von rechts zu betrachten ist.

**2.3.10 Beispiel.** Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal vom Grad 1 und $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes Ideal. Weiter sei $\rho^{\mathfrak{b}}$ der Rang-1 Drinfeld-Modul zum Gitter $\mathfrak{b}$. Wir schreiben die $e$-Funktion zu einem Gitter $\Lambda$ als Potenzreihe $e_\Lambda(z) = \sum_{i\geq 0} \alpha(\Lambda, i) z^{q^i}$. Aus dem Obigen folgt

$$\begin{aligned} e_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}} &= D(\rho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})^{-1} \rho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(e_{\mathfrak{b}}) \ , \quad \text{d.h.} \\ \sum_{i\geq 0} \alpha(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, i) z^{q^i} &= \sum_{i\geq 0} \Big( \alpha(\mathfrak{b}, i) z^{q^i} + D(\rho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})^{-1} \alpha(\mathfrak{b}, i)^q z^{q^{i+1}} \Big) \ . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich der Potenz $z^q$ liefert nun

$$D(\rho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}) = (\alpha(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, 1) - \alpha(\mathfrak{b}, 1))^{-1}.$$

Somit ist

$$\rho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} = (\alpha(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, 1) - \alpha(\mathfrak{b}, 1))^{-1} + \tau$$

und die Abbildung $\mu = D(\rho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})^{-1}\rho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ in Übereinstimmung mit (2.3.9).

## Normalisierte Drinfeld-Moduln

Für jede Ähnlichkeitsklasse von Gittern des Rangs 1 suchen wir nun einen Drinfeld-Modul mit möglichst „einfachen" Koeffizienten als kanonischen Vertreter seiner Klasse. Dazu spezialisieren wir die Ergebnisse aus [Gek86, IV] für unsere Situation.

Den geeigneten Koeffizientenbereich leitet Hayes in [Hay79, 8] mit Mitteln der Klassenkörpertheorie her:
Sei $H$ der Hilbertklassenkörper von $K$ bezüglich $\infty$. Dann ist $H/K$ überall unverzweigt und voll zerlegt in $\infty$; die Galoisgruppe ist $\mathrm{Gal}(H/K) \cong \mathrm{Pic}(A)$. Weiter sei $B$ der ganze Abschluß von $A$ in $H$.

Das Kriterium „Einfachheit der Koeffizienten" wird durch eine (fest gewählte) *sgn*-Funktion formalisiert. Dies ist eine Funktion $sgn : \widehat{K}_\infty \longrightarrow \kappa(\infty)$ mit den Eigenschaften

(i) $sgn(xy) = sgn(x) \cdot sgn(y)$ für alle $x, y \in \widehat{K}_\infty$,
(ii) $sgn(x) = 1$, falls $x$ eine Einseinheit ist,
(iii) $sgn(x) = x$ für $x \in \kappa(\infty)$.

In unserer Situation ist durch die Wahl der Uniformisierenden $t$ an $\infty$ bereits eine *sgn*-Funktion ausgezeichnet.

**2.3.11 Vereinbarung.** *Wir fixieren die sgn-Funktion mit $sgn(t) = 1$. Da $\frac{t^2}{x} = \frac{x}{y^2}$ eine Einseinheit ist, sind $sgn(x) = 1$ und $sgn(y) = 1$. Für alle normierten Polynome $g \in A$ ist also $sgn(g) = 1$.*

**2.3.12 Definition.** *Ein Drinfeld-Modul $\phi$ heißt genau dann sgn-*normalisiert, *wenn die Abbildung $a \mapsto l(\phi_a)$ mit der sgn-Funktion zusammenfällt.*

**2.3.13 Satz.** *Jeder Drinfeld-Modul über* $\mathbf{C}$ *des Rangs* 1 *ist isomorph zu einem sgn-normalisierten Drinfeld-Modul mit Koeffizienten in $B$.*

*Beweis.* Der Satz entspricht [Gek86, IV.2.1], wenn wir beachten, daß der dort beschriebene Körper $\widetilde{H}$ in unserer Situation mit $H$ zusammenfällt. □

**2.3.14 Bemerkung.** Es gibt $h_K$ viele *sgn*-normalisierte Drinfeld-Moduln vom Rang 1 (vgl. [Hay92, 13.4]).

In [Hay91] gibt Hayes einen Algorithmus an, mit dem zu einer vorgegebenen elliptischen Kurve alle *sgn*-normalisierten Rang-1 Drinfeld-Moduln konstruiert werden können:

**2.3.15 (Berechnung der *sgn*-normalisierten Rang-1 Drinfeld-Moduln).** Sei $(E, A, K)$ eine elliptische Kurve. Dann ist jeder *sgn*-normalisierte Rang-1 Drinfeld-$A$-Modul $\rho$ durch

$$\begin{aligned}\rho_x &= x + a\tau + \tau^2 \ , \\ \rho_y &= y + c_1\tau + c_2\tau^2 + \tau^3\end{aligned}$$

mit $a, c_1, c_2 \in B$ eindeutig bestimmt.
Hayes vergleicht nun in $\rho_x\rho_y = \rho_y\rho_x$ (wobei die Koeffizienten $a, c_1, c_2$ als Unbestimmte angenommen werden) die Koeffizienten sowohl von $\tau^3$ als auch von $\tau^4$ auf beiden Seiten und erhält zwei Polynome in $A[a]$. Deren größter gemeinsamer Teiler in $A[a]$ ist ein irreduzibles Polynom vom Grad $h_K$. Jede Nullstelle dieses Polynoms repräsentiert nun einen *sgn*-normalisierten Rang-1 Drinfeld-Modul. Denn sei $a_0$ eine Nullstelle, dann lassen sich die Koeffizienten $c_1, c_2$ bestimmen durch

$$\begin{aligned}c_1 &= a_0 \cdot \frac{y^q - y}{x^q - x} \ , \\ c_2 &= \frac{y^{q^2} - y + a_0c_1^q - c_1a_0^q}{x^{q^2} - x} \ .\end{aligned}$$

Und auf diese Weise lassen sich alle *sgn*-normalisierten Rang-1 Drinfeld-Moduln zu $(E, A, K)$ berechnen.

**2.3.16 Beispiel.** (vgl. [Hay91, 2.1]) Wählen wir die elliptische Kurve

$$E/\mathbb{F}_2 : \quad y^2 + y = x^3 + x + 1 \ ,$$

so ist $h_K = 1$. Der *sgn*-normalisierte Rang-1 Drinfeld-Modul $\rho$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\rho_x &= x + (x^2 + x)\tau + \tau^2 \ , \\ \rho_y &= y + (y^2 + y)\tau + x(y^2 + y)\tau^2 + \tau^3 \ .\end{aligned}$$

Auch zu unserem Standardbeispiel berechnet Hayes die *sgn*-normalisierten Rang-1 Drinfeld-Moduln.

**2.3.17 Standardbeispiel.** Seien die Bezeichnungen wie in (1.1.16) gewählt.
Der in (2.3.15) beschriebene größte gemeinsame Teiler führt auf $a = (x - 1)b$, wobei $b$ die Gleichung

$$g(b) = b^4 - (x^2 + x - 1)yb^3 + x(x - 1)b^2 + xyb + x^2(x^3 + x^2 - x + 1) = 0$$

erfüllt. Damit ergeben sich $c_1 = \frac{(x^2-x-1)by}{x}$ sowie

$$c_2 = \frac{y}{x^3\,(x^8-1)} \cdot \begin{pmatrix} x^{14} + x^{12} + b^4x^9 + (1+2\,b^4)\,x^8 + b^4x^7 \\ +x^6 + 2\,b^4x^5 + b^4x^3 + 2\,x^2 + b^4x + b^4 \end{pmatrix} .$$

Die vier *sgn*-normalisierten Rang-1 Drinfeld-Moduln ergeben sich nun durch Einsetzen der verschiedenen Nullstellen von $g(b)$.

Die Auszeichnung gewisser Drinfeld-Moduln führt auch zur Auszeichnung der zugehörigen Gitter. Hier beschränken wir uns auf den Rang 1.

**2.3.18 Definition/Satz.** *Ein Rang-1 $A$-Gitter $\Lambda$ heißt* speziell *genau dann, wenn der assoziierte Rang-1 Drinfeld-Modul $\rho^\Lambda$ sgn-normalisiert ist.*
*Jede Ähnlichkeitsklasse von Rang-1 $A$-Gittern enthält genau ein spezielles Gitter. Zu einem Rang-1 Gitter $\Lambda$ existiert ein $\xi(\Lambda) \in \mathbf{C}$, so daß $\xi(\Lambda)\Lambda$ ein spezielles Gitter ist. $\xi(\Lambda)$ heißt* Gitterinvariante zu $\Lambda$ *und ist bis auf $(q-1)$-te Einheitswurzeln, d.h. Elemente aus $\mathbb{F}_q^*$, eindeutig bestimmt.*

**2.3.19 Beispiel.** (vgl. [Gek86, IV.1.4 und 1.5]) Wir betrachten $\mathbb{F}_q[T]$. Sei $\rho$ der Carlitz-Modul, also der Rang-1 Drinfeld-Modul, dessen Koeffizienten so einfach wie möglich sind:

$$\rho_T(\tau) = T\tau^0 + \tau \; .$$

Das zu $\rho$ assoziierte Gitter ist $\xi \cdot \mathbb{F}_q[T]$ mit

$$\begin{aligned} \xi &= (T - T^q) \left( \prod_{i \geq 1} \frac{1 - t^{(q-1)q^i}}{1 - t^{q^{i+1}-1}} \right)^{q-1} \\ &= (T^q - T) \sum_{g \in \mathbb{F}_q[T] - \{0\}} g^{1-q} \; . \end{aligned}$$

**2.3.20 Bemerkung.** Im allgemeinen läßt sich eine Gitterinvariante nur schwer konkret berechnen. In [Yu86] und [Yu85] wird gezeigt, daß $\xi(\Lambda)$ im allgemeinen transzendent ist.
In (5.2) werden wir einen Zusammenhang von $\xi(\mathfrak{b})$ mit den Bestimmungsgleichungen des Rang-1 Drinfeld-Moduls $\rho^\mathfrak{b}$ herleiten.

Betrachten wir nun ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{b}$ mit einer Gitterinvarianten $\xi(\mathfrak{b})$, so ist für $L = \xi(\mathfrak{b})\mathfrak{b}$

$$\xi(\mathfrak{b})e_\mathfrak{b}(z) = e_L(\xi(\mathfrak{b})z)$$

nach (2.2.7). Nun können wir die Isogenie $\rho_\mathfrak{a}^L$ für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ aus der Isogenie $\rho_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ unter Einbeziehung der Gitterinvarianten $\xi(\mathfrak{b})$ berechnen.

**2.3.21 Lemma.** *Seien die Bezeichnungen wie oben und in* (2.3.10) *gewählt. Der konstante Term von $\rho_\mathfrak{a}^L$ ist $D(\rho_\mathfrak{a}^L) = \xi(\mathfrak{b})^{q-1}(\alpha(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b},1) - \alpha(\mathfrak{b},1))^{-1}$.*
*Insbesondere ist $D(\rho_\mathfrak{a}^L)$ unabhängig von der Wahl von $\xi(\mathfrak{b})$.*

*Beweis.* Schreiben wir in

$$\begin{aligned}\xi(\mathfrak{b})e_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}(z) = e_{\mathfrak{a}^{-1}L}(\xi(\mathfrak{b})z) =& D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)^{-1}\rho_{\mathfrak{a}}^L(e_L(\xi(\mathfrak{b})z)) = D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)^{-1}\rho_{\mathfrak{a}}^L(\xi(\mathfrak{b})e_{\mathfrak{b}}(z))\\ =&\xi(\mathfrak{b})e_{\mathfrak{b}}(z) + D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)^{-1}\xi(\mathfrak{b})^q e_{\mathfrak{b}}^q(z)\end{aligned}$$

die $e$-Funktionen als Reihen in $z$, so ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten der Potenz $z^q$

$$\xi(\mathfrak{b})\alpha(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, 1) = \xi(\mathfrak{b})\alpha(\mathfrak{b}, 1) + D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)^{-1}\xi(\mathfrak{b})^q \ .$$

Da $\xi(\mathfrak{b})$ bis auf $(q-1)$-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt ist, ist $D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)$ hierdurch eindeutig bestimmt. □

## Drinfeld'sche Modulkurven

Man ist nun daran interessiert, die Isomorphieklassen von Drinfeld-Moduln zu parametrisieren. Dies führt auf das Modulproblem „Drinfeld-Moduln vom Rang $r$“, das in [Dri74, 5] und [Gek86, I.1] diskutiert wird.
Dort ergibt sich schließlich ein affines $A$-Schema $M_A^r$, das ein grobes Modulschema des Modulproblems „Drinfeld-$A$-Moduln vom Rang $r$“ ist.

**2.3.22 Satz (Drinfeld).** *$M_A^1$ ist das Spektrum des ganzen Abschlusses von $A$ in der maximalen abelschen Erweiterung von $K$, die an $\infty$ voll zerlegt ist.*

Wir untersuchen nun den Fall $r = 2$. Statt die Isomorphieklassen von Drinfeld-$A$-Moduln vom Rang 2 über $\mathbf{C}$ zu untersuchen, können wir auch die äquivalenten Objekte, die Ähnlichkeitsklassen von Rang-2 $A$-Gittern in $\mathbf{C}$ betrachten.

Jedes Rang-2 $A$-Gitter in $K^2$ ist isomorph zu einem Gitter der Form

$$(1,0)\mathfrak{a} + (0,1)A$$

mit einem Ideal $\mathfrak{a}$ von $A$ (vgl. auch (3.2.9)). Nach (1.3.3) kann die Idealklasse von $\mathfrak{a}$ durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ vom Grad 1 oder das triviale Ideal (1) repräsentiert werden.
Insbesondere gibt es genau $h_K$ nichtisomorphe $A$-Gitter in $K^2$.

Wir fixieren nun ein (beliebiges) $A$-Gitter $Y \subset K^2$ und bestimmen die Ähnlichkeitsklassen der Gitter in $\mathbf{C}$, die isomorph zu dem Gitter $Y$ sind, also die Bilder von $Y$ unter verschiedenen $i_{\mathrm{z}} : \widehat{K}_\infty^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ aus (2.2.5).
Dazu betrachten wir die Menge $S$ der Einbettungen von $\widehat{K}_\infty^2 \hookrightarrow \mathbf{C}$ , die wir mit $\{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}\,\text{und}\ \widehat{K}_\infty\text{-linear unabhängig}\}$ identifizieren (vgl. [Gek86, II.1.5 und II.1.6]).
Die Gruppe $\mathrm{G}(K)$ operiert von rechts auf $\widehat{K}_\infty^2$ und daher von links auf $S$.

Da $Y \otimes \widehat{K}_\infty \cong \widehat{K}_\infty^2$ und $\mathrm{GL}(Y)$ diskret in $\mathrm{GL}(Y \otimes \widehat{K}_\infty) = \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ ist, ist $\mathrm{GL}(Y)\backslash S/\mathbf{C}^*$ kanonisch isomorph zur Menge der Ähnlichkeitsklassen der Gitter, die zu $Y$ isomorph sind. Andererseits ist

$$\begin{array}{ccc} S/\mathbf{C}^* & \xrightarrow{\simeq} & \Omega \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto & \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \ . \end{array}$$

Somit haben wir die gewünschte Beschreibung gefunden.

**2.3.23 Bemerkung.** Die Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Ähnlichkeitsklassen von} \\ \text{Gittern isomorph zu } Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(Y)\backslash\Omega$$

hängt von der Wahl von $Y$ in seiner Klasse und von der Identifizierung $Y \otimes \widehat{K}_\infty = \widehat{K}_\infty^2$ ab.
Beschreibt man die Gitter jedoch über den Ring der Adele, so wird die Konstruktion unabhängig von diesen Wahlen (vgl. [Gek86, II.1]; auf die Ausführung wird hier verzichtet).

Insgesamt gilt nun

$$M_A^2(\mathbf{C}) \xleftarrow{\simeq} \coprod_{Y \in \mathcal{P}_2(A)} \mathrm{GL}(Y)\backslash\Omega \ . \tag{2.3.24}$$

Da es $h_K$ viele Isomorphieklassen von $A$-Gittern in $K^2$ gibt, hat $M_A^2 \times_A \mathbf{C}$ genau $h_K$ viele irreduzible Komponenten (vgl. [GR96, 2.5]).

### Der Fall $\mathbb{F}_q[T]$

Für den Moment betrachten wir den einfacheren Fall, in dem der Koeffizientenring $A$ durch $\mathbb{F}_q[T]$ ersetzt wird. Nach (2.3.5) ist jeder Drinfeld-Modul $\phi$ des Rangs 2 eindeutig bestimmt durch

$$\phi_T(\tau) = T + g\tau + \Delta\tau^2 \ .$$

Daher ist jeder Drinfeld-Modul $\phi$ durch $\phi = (g, \Delta)$ mit $g, \Delta \in \mathbf{C}$ und $\Delta \neq 0$ eindeutig bestimmt. Wir definieren nun die $j$-Invariante zu $\phi = (g, \Delta)$ durch

$$j(\phi) = \frac{g^{q+1}}{\Delta} \ .$$

Dann gilt

**2.3.25 Satz.** *(vgl. [Gek83, 4.]) Das Spektrum* $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[T][j])$*, wobei $j$ als Unbestimmte aufgefaßt wird, ist ein grobes Modulschema des Modulproblems „Rang-2 Drinfeld-*$\mathbb{F}_q[T]$*-Moduln“.*

Insbesondere ist $M^2_{\mathbb{F}_q[T]} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[T][j])$, und $M^2_{\mathbb{F}_q[T]} \times_{\mathbb{F}_q[T]} \mathbf{C}$ hat nur eine irreduzible Komponente.

**Der Fall** $A = \mathbb{F}_q[E]$

Für den Funktionenkörper $K$ einer elliptischen Kurve ist im allgemeinen $h_K > 1$. In diesem Fall wollen wir eine Komponente näher betrachten.
Sei $\mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}$ die affine zusammenhängende Kurve über $\mathbf{C}$, deren $\mathbf{C}$-wertige Punkte $\mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}(\mathbf{C}) = \mathrm{GL}(Y)\backslash\Omega$ sind.

**2.3.26 Definition.** *Die kanonische Kompaktifizierung* $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{GL}(Y)}$ *von* $\mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}$ *heißt* Drinfeld'sche Modulkurve *zu* $\mathrm{GL}(Y)$*.*
*Die* $\mathbf{C}$*-wertigen Punkte von* $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{GL}(Y)} - \mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}$ *heißen* Spitzen*.*

**2.3.27 Satz.** *([Gek86, 5.8, 5.9]) Das Geschlecht von* $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{GL}(Y)}$ *ist* $g(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{GL}(Y)}) = 0$*.*

Insbesondere können wir versuchen, auf einer solchen Komponente eine $j$-Invariante explizit zu bestimmen, also eine holomorphe Abbildung

$$j : \mathrm{GL}(Y)\backslash\Omega \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) ,$$

die sich bijektiv auf die Kompaktifizierung von $\mathrm{GL}(Y)\backslash\Omega$ fortsetzt.
Dazu müssen wir allerdings zunächst die Gitter näher untersuchen, was wir in den zwei folgenden Kapiteln tun werden.

# Kapitel 3

# Gitter

Ziel ist es nun, der Modulkurve $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$ ein kombinatorisches Modell zuzuordnen. Dazu werden die Ähnlichkeitsklassen der Gitter, die isomorph zu $Y = Ae_1 + Ae_2$ sind, bestimmt.
Zunächst werden wir die Isomorphien derjenigen Gitter berechnen, die in diesem Zusammenhang relevant sind.

Bislang haben wir Gitter stets als $A$-Moduln betrachtet. In diesem Kapitel werden wir auch die $\infty$-Stelle in unsere Betrachtung mit einbeziehen. Denn wir können aus den $A$-Moduln Modulgarben über $(X, \mathcal{O}_X)$ konstruieren (vgl.(1.2)). Folgen wir diesem Ansatz, so erhalten wir alle Modulgarben $\mathcal{M}$, deren affiner Anteil $\mathcal{M}(\mathrm{Spec}(A))$ isomorph zu dem Gitter $Y$ ist.

## 3.1 Isomorphien von Gittern

Sei $(E, A, K)$ eine elliptische Kurve und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal vom Grad 1. Zudem seien

$$Y = Ae_1 + Ae_2 \quad \text{und} \quad Y' = \mathfrak{p}\, e_1 + \mathfrak{p}^{-1}\, e_2 \ .$$

Daß diese Gitter isomorph sind, folgt auch aus (3.2.9). Wir werden nun eine Matrix $\vartheta \in G(K)$ bestimmen mit $Y\vartheta = Y'$ (vgl. (2.2.2)).

**3.1.1 Erinnerung.** (vgl. (1.0.4) und (1.1.7))

(i) Die elliptische Kurve $(E, A, K)$ liegt in einer der folgenden Formen vor

(a) $f_E(x, y) = y^2 - g(x)$ mit $g(x) = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ für $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2$,
(b) $f_E(x, y) = y^2 + a_3y + x^3 + a_4x + a_6$ für $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ und $j(E) = 0$,
(c) $f_E(x, y) = y^2 + xy + x^3 + a_2x^2 + a_6$ für $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ und $j(E) \neq 0$.

(ii) Zu dem $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkt $(\alpha, \beta)$ erhalten wir das maximale Ideal $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$, und es ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}^{-1} &= \frac{1}{x-\alpha}(x-\alpha, y+\beta) && \text{im Fall (a)} ,\\
\mathfrak{p}^{-1} &= \frac{1}{x+\alpha}(x+\alpha, y+\beta+a_3) && \text{im Fall (b)} ,\\
\mathfrak{p}^{-1} &= \frac{1}{x+\alpha}(x+\alpha, y+\beta+\alpha) && \text{im Fall (c)} .
\end{aligned}$$

Sind nun $Y$ und $Y'$ wie oben gegeben, so gilt für die Matrix

$$\vartheta = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(K) ,$$

daß die Einträge $h_1$, $h_3 \in \mathrm{Hom}_A(A, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ und $h_2, h_4 \in \mathrm{Hom}_A(A, \mathfrak{p}^{-1}) = \mathfrak{p}^{-1}$ erfüllen.
Die Matrix ist nicht eindeutig bestimmt, denn die Matrizen zu Automorphismen von $Y$ bzw. $Y'$ können von links bzw. rechts an $\vartheta$ multipliziert werden; das Ergebnis ist wieder eine Matrix zu einem Isomorphimus zwischen den Gittern $Y$ und $Y'$.
Wir wählen nun $h_1$ und $h_4$ so, daß sie

$$h_1 \in \begin{cases} \mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p} \\ \mathcal{O}_\mathfrak{q} \end{cases} \qquad \text{und} \quad h_4 \in \begin{cases} \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O}_\mathfrak{p} \\ \mathcal{O}_\mathfrak{q} \end{cases}$$

für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) - \{\mathfrak{p}\}$ erfüllen. Die Einträge $h_2$ und $h_3$ werden so ergänzt, daß $\det(\vartheta) = 1$ ist.
Insbesondere in die Erfüllung der letzten Forderung geht die Struktur der zugrunde liegenden elliptischen Kurve ein. Dies macht eine getrennte Betrachtung des Falles (c) notwendig.
Wir zeigen nun zunächst den Rechenweg auf und fassen die Ergebnisse am Ende zusammen. Sei nun $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ und $-(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta')$. Dann ist

$$\vartheta = \begin{pmatrix} b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) & c_1 + c_2\frac{y-\beta'}{x-\alpha} \\ d_1(x-\alpha) + d_2(y-\beta) & f_1 + f_2\frac{y-\beta'}{x-\alpha} \end{pmatrix}$$

mit $b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, f_2 \in A$ und hat die Determinante

$$\begin{aligned}
\det(\vartheta) =& (b_2f_2 - c_2d_2) \cdot \frac{(y-\beta)(y-\beta')}{x-\alpha} + (b_1f_2 - c_2d_1) \cdot (y-\beta') \\
&+ (b_2f_1 - c_1d_2) \cdot (y-\beta) + (b_1f_1 - c_1d_1) \cdot (x-\alpha) .
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Determinanten wollen wir nun die lineare Darstellung des ggT's von $x - \alpha$ und $g_\alpha(x, y) = \frac{(y-\beta)(y-\beta')}{x-\alpha}$ nutzen.

Im Beweis zu (1.1.7) hatten wir $g_\alpha$ bereits bestimmt:

$$g_\alpha(x,y) = \begin{cases} x^2+(a_2+\alpha)x+\alpha^2+a_2\alpha+a_4 & \text{im Fall (a)} \\ x^2+\alpha x+\alpha^2+a_2\alpha+a_4 & \text{im Fall (b)} \\ x^2+(a_2+\alpha)x+y+\alpha^2+a_2\alpha & \text{im Fall (c)} \end{cases} .$$

Wir untersuchen nun die Fälle (a) und (b) gemeinsam.
Da $g_\alpha$ und $x-\alpha$ teilerfremd sind, ist $\mathrm{ggT}(g_\alpha(x,y), x-\alpha) \in \mathbb{F}_q^*$. Aus

$$g_\alpha(x,y) = \underbrace{(x+2\alpha+a_2)}_{:=h_\alpha(x)} \cdot (x-\alpha) + \underbrace{3\alpha^2+2\alpha a_2+a_4}_{:=c_\alpha}$$

ergibt sich

$$1 = \frac{1}{c_\alpha} g_\alpha(x,y) - \frac{h_\alpha(x)}{c_\alpha}(x-\alpha) .$$

Um $\det(\vartheta)=1$ zu erreichen, können wir nun die folgenden Bedingungen stellen:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & b_2f_2-c_2d_2 & = & \frac{1}{c_\alpha} \\ \text{(II)} & b_1f_2-c_2d_1 & = & 0 \\ \text{(III)} & b_2f_1-c_1d_2 & = & 0 \\ \text{(IV)} & b_1f_1-c_1d_1 & = & -\frac{h_\alpha}{c_\alpha} \end{array} .$$

Um auf den Diagonalen Uniformisierende von $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ zu erhalten, setzen wir

$$b_1 = 0 , \qquad b_2 = \frac{1}{c_\alpha} , \qquad f_1 = 0 , \qquad f_2 = 1$$

und zur Lösung von (IV) $d_1 = \frac{1}{c_\alpha}$ sowie $c_1 = h_\alpha(x)$. Setzen wir zudem $c_2 = d_2 = 0$, so ergeben sich (II) und (III).

Für den Fall (c) ergibt Divison mit Rest

$$g_\alpha(x,y) = (x+\alpha)(x+a_2)+\alpha^2+y .$$

Nun verwenden wir $\mathrm{ggT}(g_\alpha(x,y), x+\alpha, y+\beta) \in \mathbb{F}_q^*$:

$$\begin{aligned} g_\alpha(x,y) &= (x+a_2)(x+\alpha)+\alpha^2+y \\ &= (x+a_2)(x+\alpha)+(y+\beta)+\alpha^2+\beta \end{aligned}$$

und damit

$$1 = \frac{1}{\alpha^2+\beta} g_\alpha(x,y) + \frac{1}{\alpha^2+\beta}(y+\beta) + \frac{x+a_2}{\alpha^2+\beta}(x+\alpha) .$$

Um Determinante $\det(\vartheta) = 1$ zu erfüllen, können wir also fordern

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & b_2 f_2 - c_2 d_2 & = & \frac{1}{\alpha^2+\beta} \\ \text{(II)} & b_1 f_2 - c_2 d_1 & = & 0 \\ \text{(III)} & b_2 f_1 - c_1 d_2 & = & \frac{1}{\alpha^2+\beta} \\ \text{(IV)} & b_1 f_1 - c_1 d_1 & = & \frac{x+a_2}{\alpha^2+\beta} \end{array} .$$

Setzen wir

$$b_1 = c_2 = f_1 = 0, \quad b_2 = c_1 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta}, \quad f_2 = d_2 = 1 \quad \text{und} \quad d_1 = x + a_2 \ ,$$

so sind die Gleichungen (I) bis (IV) wahr. Somit haben wir die folgende Proposition bewiesen.

**3.1.2 Proposition.** *(vgl.* (1.0.4)*) Sei $(E, A, K)$ eine elliptische Kurve, $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ ein $\mathbb{F}_q$-rationaler Punkt und $-(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta')$ sowie $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$.*

*(i) Seien im Fall (a) und (b)*

$$g_\alpha(x, y) = \frac{(y - \beta)(y - \beta')}{x - \alpha} = (x - \alpha)h_\alpha(x) + c_\alpha$$

*mit $c_\alpha \in \mathbb{F}_q^*$. Dann erfüllt*

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_\alpha}(y - \beta) & h_\alpha(x) \\ \frac{1}{c_\alpha}(x - \alpha) & \frac{y-\beta'}{x-\alpha} \end{pmatrix}$$

*die Bedingungen $(Ae_1 + Ae_2)\vartheta = \mathfrak{p}\, e_1 + \mathfrak{p}^{-1}\, e_2$ und $\det(\vartheta) = 1$.*

*(ii) Ist $\operatorname{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ mit $j(E) \neq 0$ und $f_E(x, y) = y^2 + xy + x^3 + a_2 x^2 + a_6$, dann ist*

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2+\beta}(y + \beta) & \frac{1}{\alpha^2+\beta} \\ (x + a_2)(x + \alpha) + y + \beta & \frac{y+\beta+\alpha}{x+\alpha} \end{pmatrix}$$

*ein Isomorphimus von Gittern*

$$Ae_1 + Ae_2 \xrightarrow[\vartheta]{\simeq} \mathfrak{p}\, e_1 + \mathfrak{p}^{-1}\, e_2 \ .$$

## 3.2 Modulgarben

Unsere Ausführungen beinhalten zahlreiche Aussagen, die in [Til83] angeführt sind. Diese Doktorarbeit blieb leider unveröffentlicht (sie ist nur über Fernleihe von der Bibliothek Göttingen zu beziehen). In [Ati57] sind die entsprechenden

Aussagen für algebraisch abgeschlossene Grundkörper bewiesen, in [AEJ92] wird die Arbeit von Tillmann verallgemeinert.
Wir werden an dieser Stelle keine Einführung in die Theorie der Modulgarben geben. Diese findet man in [EH00] sehr gut dargestellt. Ähnlich wie im ersten Kapitel werden wir uns auf die uns interessierenden Objekte beschränken, nämlich die kohärenten Garben, die sich gewissen Gittern zuordnen lassen. Diese Zuordnung werden wir ebenfalls darstellen und somit die verschiedenen Gitter mit ihren lokalen Daten versehen.

Sei $(E, A, K)$ eine elliptische Kurve und $(X, \mathcal{O}_X)$ das zugehörige $\mathbb{F}_q$-Schema (vgl. (1.2.5)).

**3.2.1 Definition.** *(i) Eine* kohärente Modulgarbe $\mathcal{M}$ *auf* $X$ *ist gegeben durch:*

- *(a) Für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist $\mathcal{M}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul. Für alle offenen Mengen $V \subset U \subset X$ ist die Restriktionsabbildung $\mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}(V)$ verträglich mit den Modulstrukturen vermöge des Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$.*
- *(b) Es existiert eine offene affine Überdeckung von $X$ durch $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$, so daß für jedes $i$ ein $A_i$-Modul $M_i$ existiert und $\mathcal{M}|_{U_i}$ die zu $M_i$ assoziierte Modulgarbe ist (vgl. [Har77, II.5]).*
- *(c) Für alle offenen Mengen $U \subset X$ ist $\mathcal{M}(U)$ als $\mathcal{O}_X$-Modul endlich erzeugt.*

*(ii) Eine* invertierbare Garbe *ist eine Modulgarbe $\mathcal{I}$ mit den Eigenschaften*

- *(a) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U\}$ von $X$, so daß für jedes Glied $U$ der Überdeckung $\mathcal{I}(U)$ ein freier $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist.*
- *(b) Der Rang aller Moduln $\mathcal{I}(U)$ ist 1.*

*(iii) Die triviale invertierbare Garbe $\mathcal{O}_X$ bezeichnen wir mit $\mathbb{1}$.*

**3.2.2 Bemerkung.** ([Har77, II.6.12]) Die Menge der Isomorphieklassen invertierbarer Garben ist eine abelsche Gruppe. Die Verknüpfung ist das Tensorprodukt, das neutrale Element ist $\mathbb{1}$.

**3.2.3 Definition.** *Sei $\mathfrak{p}$ eine Stelle von $K$ und $r \in \mathbb{N}$. Ein $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-*Gitter *$Y_\mathfrak{p}$ in $K^r$ ist ein freier $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-Untermodul von $K^r$ vom Rang $r$, der $K^r$ erzeugt.*

Im wesentlichen basiert der Zusammenhang auf dem folgenden Satz.

**3.2.4 Satz.** *([Til83, 1.10])*

*(i) Jedem abgeschlossenen Punkt $\mathfrak{p} \in X$ sei ein $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-Gitter $M(\mathfrak{p})$ zugeordnet.*

*Genau dann existiert eine Modulgarbe $\mathcal{M}$ mit Halmen $\mathcal{M}_\mathfrak{p} = M(\mathfrak{p})$ in jedem Punkt $\mathfrak{p} \in X$, wenn es eine $K$-Basis $b$ von $K^r$ gibt, so daß für fast alle $\mathfrak{p} \in X$ der Modul $M(\mathfrak{p})$ gleich dem von $b$ erzeugten $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-Gitter ist.*

(ii) *Die Vorgabe auf den Halmen bestimmt die Garbe eindeutig. Für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ gilt*

$$\mathcal{M}(U) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in U \\ abgeschl.}} \mathcal{M}_{\mathfrak{p}} \quad \text{in } K^r \ .$$

(iii) *Für alle $U' \subset U \subset X$ gilt*

$$\mathcal{M}(U') = \mathcal{O}_X(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{M}(U) \ .$$

*Aufgrund ihrer Konstruktion sind alle diese Modulgarben lokal frei und endlichdimensional, also kohärent (vgl. [Har77, II.5.4]).*

Dabei nennen wir $r$ auch die Dimension der Modulgarbe.

**3.2.5 Vereinbarung.** *Im folgenden betrachten wir ausschließlich lokal freie kohärente Modulgarben und nennen diese Modulgarben.*

Insbesondere können wir jedem $A$-Gitter $Y \subset K^r$ eine affine Modulgarbe $\mathcal{Y}_f$ zuordnen (dabei steht das Suffix $f$ hier für „finite", also den endlichen Anteil).

**3.2.6 Satz.** *([Har77, II.5.1, 5.2, 5.5])*

(i) *Die Halme $\mathcal{Y}_{f,\mathfrak{p}}$ sind isomorph zu den Lokalisierungen $Y_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.*

(ii) *Der Modul der globalen Schnitte ist $\mathcal{Y}_f(\mathrm{Spec}(A)) = Y$.*

(iii) *Die Zuordnung $Y \to \mathcal{Y}_f$ ist ein exakter und volltreuer Funktor zwischen den Kategorien der $A$-Moduln und der $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-Modulgarben.*

(iv) *Sie ist verträglich mit dem Tensorprodukt und der direkten Summe:*

*Die Garbe zu $Y \otimes Y'$ ist $\mathcal{Y}_f \otimes_{\mathrm{Spec}(A)} \mathcal{Y}'_f$, die Garbe zu $Y \oplus Y'$ ist $\mathcal{Y}_f \oplus \mathcal{Y}'_f$.*

**3.2.7 Bemerkung.** Wir zerlegen Modulgarben häufiger in ihren endlichen und ihren unendlichen Anteil und schreiben dann $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_f, \mathcal{M}_\infty)$.

Die Modulgarbe $\mathcal{Y}$ enthält also mehr Informationen als das $A$-Gitter $Y$, nämlich das zusätzliche Datum $\mathcal{Y}_\infty$. Selbst wenn wir $Y$ festhalten und nur die Modulgarben betrachten, deren affine Schnitte zu $Y$ gehören, erhalten wir eine reichhaltige Struktur.
Wir werden nun die für uns interessanten Modulgarben anführen und ihrer Gesamtheit im Anschluß einen Baum zuordnen, dessen Knoten zu diesen Modulgarben korrespondieren.
Zunächst benötigen wir jedoch den Begriff der Determinante eines Gitters bzw. einer Modulgarbe. Auch hier beschränken wir uns auf Rang $r = 2$, alle Aussagen lassen sich aber entsprechend verallgemeinern.

**3.2.8 Definition.** *(i) Sei $Y$ ein $A$-Gitter in $K^2$. Die* Determinante *von $Y$ ist*

$$\det(Y) := \bigwedge^2 Y \ ,$$

*die zweifache äußere Potenz von $Y$. Sie ist ein $A$-Gitter vom Rang 1.*

*(ii) Zu jeder Modulgarbe $\mathcal{M}$ der Dimension 2 definieren wir die* Determinante

$$\mathcal{D}et(\mathcal{M}) := \bigwedge^2 \mathcal{M} \ .$$

**3.2.9 Satz.** *Seien die Bezeichnungen wie in (3.2.8) gewählt.*

*(i) Zu jedem $A$-Gitter $Y$ in $K^2$ existieren eine Basis $(b_1, b_2)$ von $K^2$ und gebrochene Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, so daß $Y = \mathfrak{a}\, b_1 + \mathfrak{b}\, b_2$ ist. (Diese Darstellung ist nicht eindeutig.)*

*Für die Determinante gilt dann*

$$\det(Y) \cong \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}\mathfrak{b} \ .$$

*(ii) Zwei Rang-2 Gitter $Y$ und $Y'$ mit $\det(Y) \cong \mathfrak{c}$ und $\det(Y') \cong \mathfrak{d}$ sind genau dann isomorph, wenn gilt $[\mathfrak{c}] = [\mathfrak{d}]$.*

*(iii) Die Zuordnung von Isomorphieklassen von $A$-Gittern*

$$\det : \mathcal{P}_2(A) \longrightarrow \mathcal{P}_1(A) \cong \mathrm{Pic}(A) \ ,$$

*die von $Y \longmapsto \det(Y)$ induziert wird, ist bijektiv ([Bou65, 4.10.24]).*

*(iv) Nach Auswahl einer (geeigneten) Basis $b = (b_1, b_2)$ von $K^2$ ist für alle offenen Mengen $U \subsetneq X$ der Modul $\mathcal{D}et(\mathcal{M})(U)$ das von*

$$\{a_1 \cdot a_2 \mid a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \in \mathcal{M}(U),\ a_1, a_2 \in K\}$$

*erzeugte gebrochene Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$. Wir erhalten also eine invertierbare Garbe; die zugehörige Divisorklasse (vgl. (3.2.12)) ist unabhängig von der Wahl der Basis (vgl. [Til83, 1.17]). Der* Determinantengrad *einer Modulgarbe ist der Grad des zugehörigen Divisors.*

*(v) Ist $M = \mathcal{M}(\mathrm{Spec}(A))$, dann ist*

$$\det(M) = \mathcal{D}et(\mathcal{M})(\mathrm{Spec}(A)) \ .$$

**3.2.10 Bemerkung.** Der Isomorphismus $\det(Y) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ hängt von der Wahl der Basis $b$ ab: Seien $c_1, c_2 \in \mathfrak{a}$ und $c_3, c_4 \in \mathfrak{b}$, dann ist

$$(c_1 b_1 + c_2 b_2) \wedge (c_3 b_1 + c_4 b_2) = (c_1 c_4 - c_2 c_3)(b_1 \wedge b_2) \mapsto c_1 \otimes c_4 - c_2 \otimes c_3 \ .$$

**3.2.11 Vereinbarung.** *Von nun an hat jede Modulgarbe, wenn nichts anderes bestimmt wird, Dimension 2. (Modulgarben der Dimension 1 sind für uns stets invertierbare Garben.)*

Modulgarben der Dimension 2 können unzerlegbar oder zerlegbar sein. Im letzteren Fall sind sie direkte Summe zweier invertierbarer Garben.

## Invertierbare Garben

Die Notationen in diesem Abschnitt entsprechen denen in der Literatur, z.B. [Har77], [EH00] oder [Ati57]. Insbesondere unterscheidet sich die Definition der invertierbaren Garbe zu einem Divisor um ein Vorzeichen von der bei Tillmann.

Die Isomorphieklassen von Rang-1 $A$-Gittern in $K^2$ werden repräsentiert von den Primidealen vom Grad 1 und von $A$ selbst. Sie entsprechen dem affinen Anteil gewisser invertierbarer Garben.
Statt nun einem Ideal direkt eine Garbe zuzuordnen, wählen wir den Weg über den Zusammenhang von Idealklassen und Divisorklassen.

**3.2.12 Definition.** *Sei $D$ ein Divisor. Für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ setzen wir*

$$\mathcal{L}(D)(U) := \{g \in K^* \mid v_\mathfrak{p}(g) \geq -v_\mathfrak{p}(D) \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U\} \cup \{0\}$$

*und erhalten die invertierbare Garbe $\mathcal{L}(D)$.*
*Der Grad einer invertierbaren Garbe ist der Grad des zugehörigen Divisors.*

Global ist $\mathcal{L}(D)(X) = L(D)$ der $L$-Raum zu $D$ (vgl. (1.3.8)).

**3.2.13 Satz.** *([Har77, II.6.13, 6.16]) Seien $D_1$ und $D_2$ zwei Divisoren von $K$. Dann gilt:*

*(i)* $\mathcal{L}(D)^{-1} \cong \mathcal{H}om(\mathcal{L}(D), \mathcal{O}_X)$.

*(ii)* $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$. *Insbesondere ist das Tensorprodukt zweier invertierbarer Garben wieder eine invertierbare Garbe.*

*(iii) Genau dann liegen $D_1$ und $D_2$ in derselben Klasse, wenn $\mathcal{L}(D_1)$ als abstrakte invertierbare Garbe isomorph zu $\mathcal{L}(D_2)$ ist.*

*(iv) Die Zuordnung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cl}(K) & \longrightarrow & \{\textit{Isomorphieklassen invertierbarer Garben}\} \\ D & \longmapsto & \mathcal{L}(D) \end{array}$$

*ist ein Isomorphismus von Gruppen, wobei die Gruppenstruktur rechts vom Tensorprodukt induziert wird.*

Nun können wir jedem ausgewählten nichttrivialen Repräsentanten der Picardgruppe von $A$ eine invertierbare Garbe zuordnen und ebenso der $\infty$-Stelle.

**3.2.14 Definition.** *(i) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal vom Grad 1. Dann ist die* zu $\mathfrak{p}$ assoziierte invertierbare Garbe

$$\mathcal{F}(\mathfrak{p}) := \mathcal{L}(-\mathrm{div}(\mathfrak{p})) \ .$$

*(ii) Dem Divisor* $\infty$ *wird die invertierbare Garbe*

$$\mathcal{I} := \mathcal{L}(\infty)$$

*zugeordnet (vgl. [Ser03, II.2.1]).*

Das folgende Korollar verdeutlicht, weshalb wir dem Ideal $\mathfrak{p}$ die Garbe $\mathcal{F}(-\mathrm{div}(\mathfrak{p}))$ zuordnen. In (3.4.6) werden wir diese invertierbaren Garben aufgreifen und aus ihnen zerlegbare Modulgarben konstruieren, deren affiner Anteil $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}^{-1}$ entsprechen soll.

**3.2.15 Korollar.** *Seien* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal vom Grad* 1 *und* $\mathfrak{q} \in X$ *. Dann ist*

$$\mathcal{F}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}, & \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \\ t^{-1}\mathcal{O}_{\infty}, & \mathfrak{q} = \infty \\ \mathcal{O}_{\mathfrak{q}}, & \textit{sonst} \end{cases}$$

*und* $\mathcal{F}(\mathfrak{p})(\mathrm{Spec}(A)) = \mathfrak{p}$*. Die Halme der Garbe* $\mathcal{I}$ *sind*

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} t^{-1}\mathcal{O}_{\infty}, & \mathfrak{q} = \infty \\ \mathcal{O}_{\mathfrak{q}}, & \textit{sonst} \end{cases} .$$

*Somit ist* $\mathcal{I}(\mathrm{Spec}(A)) = A$*.*

*Beweis.* Nach (1.3.4) ist $\mathrm{div}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} - \infty$ und nach (1.3.8) ist

$$\begin{aligned} L(-\mathrm{div}(\mathfrak{p})) &= \{g \in K \mid (g) \geq \mathrm{div}(\mathfrak{p})\} \\ &= \{g \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(g) \geq 1,\ v_{\infty}(g) \geq -1,\ v_{\mathfrak{q}}(g) \geq 0 \text{ für } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \infty\} . \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{L}(\infty)_{\mathfrak{q}} = L(\infty)_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} t^{-1}\mathcal{O}_{\infty} , & \mathfrak{q} = \infty \\ \mathcal{O}_{\mathfrak{q}} , & \text{sonst} \end{cases} .$$

Insbesondere sind

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathfrak{p})(\mathrm{Spec}(A)) &= \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(K) - \{\infty\}} \mathcal{F}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p} , \\ \mathcal{I}(\mathrm{Spec}(A)) &= \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(K) - \{\infty\}} \mathcal{I}_{\mathfrak{q}} = A . \end{aligned}$$

$\square$

## Unzerlegbare Modulgarben

Da $X$ ein Schema über einem vollkommenen, aber nicht algebraisch abgeschlossenen Körper ist, gibt es hier zwei Begriffe der Unzerlegbarkeit.

**3.2.16 Definition.** *(i) Eine Modulgarbe $\mathcal{M}$ heißt* unzerlegbar*, wenn eine Zerlegung von $\mathcal{M}$ in eine direkte Summe von Untermodulgarben $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über dem Schema $(X, \mathcal{O}_X) = (X/\mathbb{F}_q, \mathcal{O}_{X/\mathbb{F}_q})$ nur für $\mathcal{M}_1 = 0$ oder $\mathcal{M}_2 = 0$ möglich ist.*

*(ii) Eine Modulgarbe $\mathcal{M}$ von $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt* absolut unzerlegbar*, wenn sie als $\mathcal{O}_{X/\overline{\mathbb{F}}_q}$-Modulgarbe unzerlegbar ist.*

Zur Bestimmung gewisser unzerlegbarer Modulgarben, die nicht absolut unzerlegbar sind, wird das folgende Lemma hilfreich sein, dessen Inhalt bekannt ist oder sich leicht nachrechnen läßt (siehe (1.1) und (4.3)).

**3.2.17 Lemma.** *Sei $(E, A, K)$ eine elliptische Kurve wie in* (1.2.5) *festgelegt. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{F}_q$ so gewählt, daß $f_E(\alpha, \delta) \neq 0$ für alle $\delta \in \mathbb{F}_q$ ist, d.h. $\alpha$ ist nicht $x$-Koordinate eines $\mathbb{F}_q$-rationalen Punktes. Dann ist*

$$f_E(\alpha, y) = y^2 + a_1\alpha y + a_3 y - \alpha^3 - a_2\alpha^2 - a_4\alpha - a_6$$

*ein über $\mathbb{F}_q$ irreduzibles quadratisches Polynom in $y$. Ist nun $\beta \in \overline{\mathbb{F}}_q$ eine Nullstelle dieses Polynoms, so ist $\mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{F}_q(\beta)$.*
*Das Ideal $\mathfrak{P} = (x - \alpha, y - \beta) \subset A\mathbb{F}_{q^2}$ ist ein Primideal vom Grad 1, für das gilt*

$$[N_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_{q^2}}(\mathfrak{P})] = [(1)] \ .$$

Die Klassifizierung aller absolut unzerlegbaren Modulgarben der Dimension $r \geq 1$ ist von Atiyah in [Ati57] vorgenommen worden; die explizite Darstellung für $\mathcal{M}_2$ habe ich [Til83] entnommen.

**3.2.18 Satz.** *(i) ([Ati57, Part II, Theorem 5 (i)] und [Til83, 6.1]) Sei $(e_1, e_2)$ die Standardbasis von $K^2$. Die Garbe $\mathcal{M}_2$, die auf den Halmen durch*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{2,\mathfrak{p}} &= \mathcal{O}_\mathfrak{p} e_1 + \mathcal{O}_\mathfrak{p} e_2 \qquad && \text{für alle } \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \ , \\ \mathcal{M}_{2,\infty} &= \mathcal{O}_\infty e_1 + \mathcal{O}_\infty(t^{-1}e_1 + e_2) && \end{aligned}$$

*definiert ist, ist eine absolut unzerlegbare Modulgarbe, die eine triviale Determinante und einen nichttrivialen globalen Schnitt hat. Sie ist bis auf Isomorphie durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.*

*(ii) ([Ati57, Part II, Theorem 5 (ii)]) Jede absolut unzerlegbare Modulgarbe der Dimension 2 mit Determinantengrad 0 ist isomorph zu $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}_2$ für eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ vom Grad 0.*

(iii) *Die Modulgarbe $\mathcal{H}$, die gegeben ist durch*

$$\mathcal{H}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_\mathfrak{p} e_1 + \mathcal{O}_\mathfrak{p} e_2 \qquad \textit{für alle } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \ ,$$
$$\mathcal{H}_\infty = \mathcal{O}_\infty t e_1 + \mathcal{O}_\infty (t^{-1} e_1 + e_2) \ ,$$

*ist eine absolut unzerlegbare Modulgarbe.*

(iv) *([Til83, Satz 2.5, Paragraph 3]) Sei $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_{q^2}) - E(\mathbb{F}_q)$. Dann ist $\mathcal{F}((x-\alpha, y-\beta))$ eine invertierbare Garbe über dem Schema $X/\mathbb{F}_{q^2}$. Durch Einschränkung der Konstanten können wir sie als Modulgarbe über $X/\mathbb{F}_q$ betrachten: dies liefert eine unzerlegbare Modulgarbe der Dimension 2, die wir mit $\mathcal{G}_\alpha$ bezeichnen.*

**3.2.19 Bemerkung.** (i) Die Wahl der Basis in (i) und (iii) ist unerheblich für qualitative Aussagen. Dadurch, daß wir die Standardbasis wählen, vereinfachen sich jedoch zahlreiche Rechnungen.

(ii) Die Garbe $\mathcal{M}_2$ heißt in der Literatur häufig nichttriviale Erweiterung von $\mathbb{1}$ durch $\mathbb{1}$. Die Garbe $\mathcal{H}$ ist eine nichttriviale Erweiterung von $\mathcal{I}$ durch $\mathbb{1}$.

(iii) Mit Modulgarben der Form $\mathcal{G}_\alpha$ aus (iv) werden wir uns in (4.3) noch intensiver beschäftigen.

(iv) Wir haben in (3.2.18) nur jene unzerlegbaren Modulgarben angeführt, an denen wir im folgenden interessiert sind.

In [Til83, Paragraph 6] zeigt Tillmann: zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $d \in \mathbb{Z}$ gibt es einen Isomorphismus zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer Modulgarben der Dimension $n$ vom Determinantengrad $d$ und der Menge

$$\{\mathfrak{p} \in X \mid \deg(\mathfrak{p}) \text{ teilt } n\} \ .$$

**3.2.20 Lemma.** *Mit den Bezeichnungen von* (3.2.18) *gilt*

$$\mathcal{D}et(\mathcal{M}_2) = \mathbb{1} \quad \textit{und} \quad \mathcal{D}et(\mathcal{H}) = \mathcal{I} \ .$$

*Insbesondere hat $\mathcal{H}$ den Determinantengrad* 1*.*

*Beweis.* Nach ihrer Definition gilt für beide Garben, daß sie affin trivial sind. Betrachten müssen wir also nur noch den Halm an $\infty$.

(i) Für $\mathcal{M}_2$ müssen wir also berechnen

$$\mathcal{D}et(\mathcal{M}_2)_\infty = \{g_1 g_2 \mid g_1 e_1 + g_2 e_2 \in \mathcal{M}_{2,\infty}\} \ .$$

Ein Element aus $\mathcal{M}_{2,\infty}$ hat die Form

$$h_1 e_1 + h_2(t^{-1} e_1 + e_2) = (h_1 + h_2 t^{-1}) e_1 + h_2 e_2$$

mit $h_1$, $h_2 \in \mathcal{O}_\infty$. Damit ergibt sich direkt, daß $\mathcal{D}et(\mathcal{M}_2)_\infty = \mathcal{O}_\infty$ ist und damit $\mathcal{D}et(\mathcal{M}_2) = (\mathbb{1}_f, \mathcal{O}_\infty) = \mathbb{1}$.

(ii) Eine ähnliche Rechnung läßt sich nun auch für $\mathcal{D}et(\mathcal{H})_\infty$ anstellen. Aus

$$h_1 t e_1 + h_2(t^{-1}e_1 + e_2) = (h_1 t + h_2 t^{-1})e_1 + h_2 e_2$$

mit $h_1,\ h_2 \in \mathcal{O}_\infty$ ergibt sich $\mathcal{D}et(\mathcal{H}) = (\mathbb{1}_f, t^{-1}\mathcal{O}_\infty) = \mathcal{I}$ (vgl. (3.2.15)).

□

**3.2.21 (Strategie der Klassifizierung).** Unser Ziel ist nun die Klassifizierung der Modulgarben mit affin trivialer Determinante. (Die genauen Definitionen der hier angeführten Objekte erfolgen weiter unten.)
Konstruiert man nun den Bruhat-Tits-Baum $\mathcal{T}$ zur $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K}_\infty)$ und faßt die Knoten des Baumes als $\mathcal{O}_\infty$-Gitterklassen auf, so erhält man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Modulgarben mit affin trivialer Determinante und den Knoten des Quotientengraphen $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$.
Takahashi betrachtet in [Tak93] sowohl $\mathcal{T}$ als auch $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ als Graphen zu der $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K}_\infty)$. Serre hingegen interpretiert die Knoten als $\mathcal{O}_\infty$-Gitter. Zur Verbindung beider Objektmengen nutzen wir die in [GR96] beschriebene Definition der Operation von $\mathrm{GL}(2, \widehat{K}_\infty)$ auf der Menge der $\mathcal{O}_\infty$-Gitter.
Auf die Eigenschaften von $\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ werden wir im nächsten Kapitel näher eingehen, ebenso wie auf den Zusammenhang von $\mathcal{T}$ mit der Drinfeld'schen Halbebene.
Die Beschreibung aller Knoten und Kanten von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ sowie ihrer Stabilisatoren genügt uns, um gewissen Klassen von Modulgarben eineindeutig den Knoten zuzuordnen. Diese Zuordnung wird explizit sein und den Rest des Kapitels umfassen.

## 3.3 Der Bruhat-Tits-Baum zu $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K}_\infty)$

Die Ähnlichkeitsklassen von $\mathcal{O}_\infty$-Gittern in $K^2$ lassen sich durch den Bruhat-Tits-Baum zu $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K}_\infty)$ beschreiben. Hier nutzen wir

**3.3.1 Satz.** *[Ser03, II.1.1] Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \{\mathcal{O}_\infty\text{-}\mathit{Gitter\ in}\ K^2\} & \longrightarrow & \{\widehat{\mathcal{O}}_\infty\text{-}\mathit{Gitter\ in}\ \widehat{K}_\infty^2\} \\ Y_\infty & \longmapsto & Y_\infty \otimes_{\mathcal{O}_\infty} \widehat{\mathcal{O}}_\infty \end{array}$$

*ist eine Bijektion.*

**3.3.2 Definition.** *Der Graph* $\mathcal{T} = (\mathrm{Vert}(\mathcal{T}), \mathrm{Edge}(\mathcal{T}))$ *ist gegeben durch:*

*(i) Die Knoten entsprechen eineindeutig den* $\mathcal{O}_\infty$*-Gitterklassen in* $K^2$*.*

*(ii) Zwei* $\mathcal{O}_\infty$*-Gitterklassen* $[Y_\infty]$ *und* $[Y'_\infty]$ *heißen genau dann benachbart, wenn ein* $\mathcal{O}_\infty$*-Gitter* $Y''_\infty \in [Y'_\infty]$ *existiert, so daß* $Y''_\infty \subset Y_\infty$ *ist und* $Y_\infty/Y''_\infty$ *als* $\mathcal{O}_\infty$*-Modul die Länge* $1$ *hat.*

*Wir erhalten eine* orientierte Kante $\overrightarrow{e} = ([Y_\infty],[Y'_\infty])$ *und ihre Inverse* $-\overrightarrow{e} = ([Y'_\infty],[Y_\infty])$.

*Die Menge der orientierten Kanten bezeichnen wir mit* $\mathrm{Edge}^{\pm}(\mathcal{T})$.

*(iii) Sei* $([Y_\infty],[Y'_\infty])$ *eine orientierte Kante. Die Menge*

$$e := \{([Y_\infty],[Y'_\infty]),([Y'_\infty],[Y_\infty])\}$$

*ist eine* nicht-orientierte Kante *von* $\mathcal{T}$.

*Die Menge aller nicht-orientierten Kanten nennen wir* $\mathrm{Edge}(\mathcal{T})$.

*(iv) Auch nicht-orientierte Kanten schreiben wir als geordnete Tupel, d.h. zu* $\overrightarrow{e} = ([Y_\infty],[Y'_\infty])$ *ist*

$$e = ([Y_\infty],[Y'_\infty]) = ([Y'_\infty],[Y_\infty]) \ .$$

*Wir werden jeweils vermerken, ob wir mit* $([Y_\infty],[Y'_\infty])$ *eine orientierte oder eine nicht-orientierte Kante benennen.*

*Wir verwenden auch* $\mathcal{T} = (\mathrm{Vert}(\mathcal{T}),\mathrm{Edge}^{\pm}(\mathcal{T}))$. *Aus dem Zusammenhang wird stets ersichtlich, ob wir die orientierten oder die nicht-orientierten Kanten von* $\mathcal{T}$ *betrachten.*

**3.3.3 Beispiel.** Setzen wir $Y_{\infty,i} := \mathcal{O}_\infty t^i e_1 + \mathcal{O}_\infty e_2$ mit $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, so erhalten wir eine Folge von ineinander enthaltenen Gittern, deren Klassen benachbart sind.

$$[Y_{\infty,0}] \;\text{———}\; [Y_{\infty,1}] \;\text{———}\; [Y_{\infty,2}] \;\text{———}\; [Y_{\infty,3}] \;\text{———}\; [Y_{\infty,4}] \;\text{———}\; \dots$$

**3.3.4 Satz.** *([Ser03, II.1]) Der Graph* $\mathcal{T}$ *ist ein* $(q+1)$*-wertiger Baum.*

Betrachten wir statt der $\mathcal{O}_\infty$-Gitterklassen in $K^2$ die $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$-Gitterklassen in $\widehat{K}^2_\infty$, so ergibt sich ebenfalls ein Baum, der zu $\mathcal{T}$ isomorph ist. Dies folgt aus der Aussage (3.3.1) von Serre. Im folgenden identifizieren wir beide Bäume miteinander.

Die Gruppe $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ operiert von rechts auf dem Zeilenvektorraum $\widehat{K}^2_\infty$. Auf der Menge der $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$-Gitter definieren wir die Linksoperation $*$ durch

$$\gamma * Y_\infty := Y_\infty \gamma^{-1} \ .$$

Diese Operation ist transitiv.
Wir setzen nun

**3.3.5 Definition.** *Die Gruppe*

$$I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathcal{O}}_\infty) \middle| v_\infty(c) > 0 \right\}$$

*heißt* Iwahori-Gruppe. *Der Normalisator von $I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)$ ist*

$$N(I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)) := I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty) \cup I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty)\left(\begin{smallmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \ .$$

Mit diesen beiden Gruppen können wir nun die Menge der Knoten sowie die Mengen der orientierten und der nicht-orientierten Kanten des Baumes $\mathcal{T}$ durch Matrizengruppen beschreiben.

**3.3.6 Proposition.** *([GR96, 1.3.2]) Seien die Bezeichnungen wie in* (3.3.3) *gewählt.*

*(i) Die Zuordnungen*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)/\mathrm{G}(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Vert}(\mathcal{T}) \\ \gamma & \mapsto & \gamma * [Y_{\infty,0}] \\ G(\widehat{K}_\infty)/I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Edge}^{\pm}(\mathcal{T}) \\ \gamma & \mapsto & \gamma * ([Y_{\infty,1}], [Y_{\infty,0}]) \\ G(\widehat{K}_\infty)/N(I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Edge}\mathcal{T} \\ \gamma & \mapsto & \gamma * ([Y_{\infty,1}], [Y_{\infty,0}]) \end{array}$$

*sind bijektiv.*

*(ii) Unter diesen Identifikationen entspricht die kanonische Abbildung*

$$G(\widehat{K}_\infty)/I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty) \longrightarrow \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)/\mathrm{G}(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty)$$

*der Abbildung $\overrightarrow{e} \mapsto t(\overrightarrow{e})$.*

*(iii) Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} G(\widehat{K}_\infty)/I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty) & \longrightarrow & \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)/I(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty) \\ \gamma & \mapsto & \gamma\left(\begin{smallmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

*entspricht der Zuordnung $\overrightarrow{e} \mapsto -\overrightarrow{e}$.*

## Der Quotientenbaum $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$

Die diskrete Untergruppe $\mathrm{G}(A)$ von $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ operiert auf den Mengen der Knoten, Kanten und orientierten Kanten von $\mathcal{T}$, und diese Operationen sind mit den Inzidenzrelationen verträglich. Deshalb gibt es einen Graphen $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ mit Knotenmenge $\mathrm{G}(A)\backslash\mathrm{Vert}(\mathcal{T})$ und Kantenmenge $\mathrm{G}(A)\backslash\mathrm{Edge}(\mathcal{T})$.
In [Tak93] zeigt Takahashi, daß dieser Quotientengraph ein (kombinatorischer) Baum ist. Wir zitieren nun diese Arbeit. Takahashis Ergebnisse verknüpfen wir im folgenden Abschnitt mit den Aussagen aus [Ser03].
In der Zusammenfassung am Ende des Abschnittes (3.4) geben wir eine explizite Beschreibung der Knoten, Kanten und Stabilisatoren des Quotientenbaumes.

**3.3.7 Satz.** *([Tak93])*

*(i) Der Quotientengraph* $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ *ist ein Baum.*

*(ii) Die Knoten von* $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ *werden repräsentiert durch*

- *(a) einen Ursprung $o$,*
- *(b) einen Knoten $v(\alpha)$ zu jedem $\alpha \in \mathbb{F}_q$ und zudem einen Knoten $v(\infty)$,*
- *(c) zu jedem 2-Teilungspunkt $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ und $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta)$ sowie für $\mathfrak{p} = \infty$ einen Knoten $e(\mathfrak{p})$,*
- *(d) zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ vom Grad 1 sowie für $\mathfrak{p} = \infty$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Knoten $c(\mathfrak{p}, n)$.*

*(iii) Die Folgen $c(\mathfrak{p}, n)$ bilden Enden im Baum, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir eine Kante $(c(\mathfrak{p}, n), c(\mathfrak{p}, n+1))$, und die Knoten $c(\mathfrak{p}, n)$ mit $n \geq 2$ gehören zu genau zwei Kanten.*

*Wir nennen $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) := (c(\mathfrak{p}, n))_{n\in\mathbb{N}}$ die* Spitze zu $\mathfrak{p}$.

*Insbesondere erhalten wir $h_K$ viele Spitzen.*

*(iv) (Vgl. auch [Ser03, II.2.3, Prop. 8]) Der Baum $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ ist die Vereinigung eines endlichen Teilbaumes $\mathcal{S}$ mit den $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$, wobei gilt:*

- *(a) Für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A)$ sowie $\mathfrak{p} = \infty$ ist $\mathrm{Vert}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mathfrak{p})) = \{c(\mathfrak{p}, 1)\}$ und $\mathrm{Edge}(\mathcal{S}) \cap \mathrm{Edge}(\mathcal{S}(\mathfrak{p})) = \emptyset$.*
- *(b) Jeder Knoten in $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ hat einen Abstand $\leq 3$ von wenigstens einer der Spitzen.*

**3.3.8 (Kanten im endlichen Anteil).** Wir geben zu den Knoten des endlichen Anteils alle Nachbarn an. (Die Aufzählung enthält Redundanzen.)

(i) Der Knoten $o$ hat $q+1$ Nachbarn, nämlich die $v(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{F}_q$ und $v(\infty)$.

(ii) Ist $\alpha \in \mathbb{F}_q$ nicht $x$-Koordinate eines $\mathbb{F}_q$-rationalen Punktes, so hat $v(\alpha)$ nur den Nachbarn $o$.

(iii) Sei $\alpha \in \mathbb{F}_q$ die $x$-Koordinate eines 2-Teilungspunktes $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ und $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$.
- $v(\alpha)$ hat die Nachbarn $o$ und $c(\mathfrak{p}, 1)$,
- $c(\mathfrak{p}, 1)$ hat die Nachbarn $v(\alpha)$, $e(\mathfrak{p})$ und $c(\mathfrak{p}, 2)$,
- $e(\mathfrak{p})$ hat den Nachbarn $c(\mathfrak{p}, 1)$.

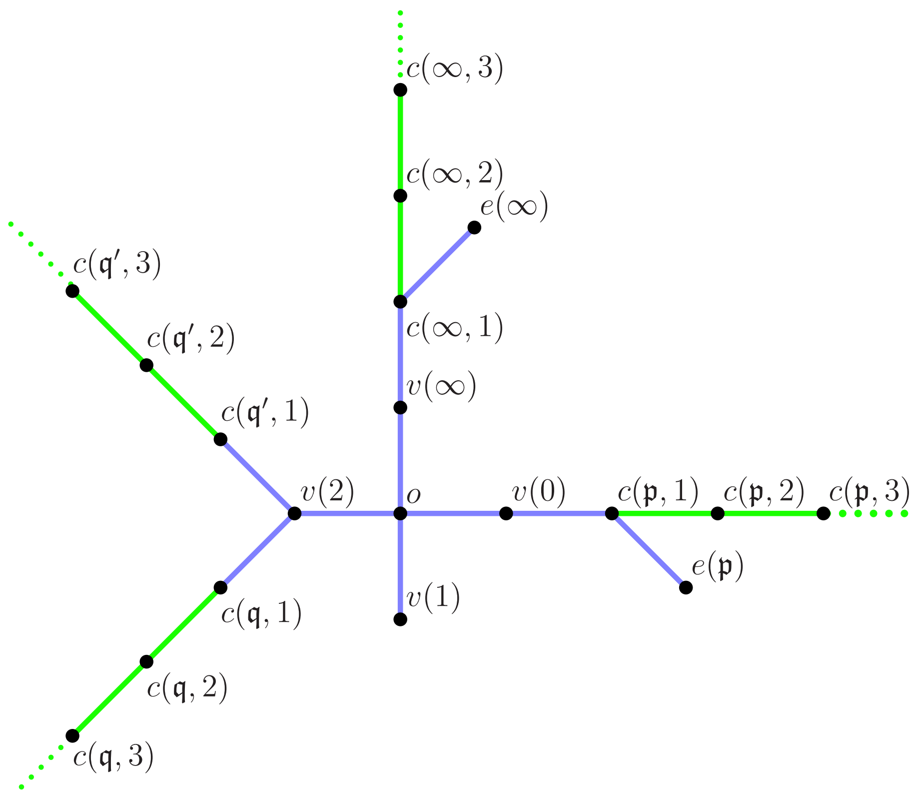
(iv) Existieren zu $\alpha \in \mathbb{F}_q$ Elemente $\beta \neq \beta' \in \mathbb{F}_q$, so daß $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta') \in E(\mathbb{F}_q)$ sind, dann hat
- $v(\alpha)$ die Nachbarn $o$, $c((x - \alpha, y - \beta), 1)$ und $c((x - \alpha, y - \beta'), 1)$,
- $c((x - \alpha, y - \beta), 1)$ die Nachbarn $v(\alpha)$ und $c((x - \alpha, y - \beta), 2)$,
- $c((x - \alpha, y - \beta'), 1)$ die Nachbarn $v(\alpha)$ und $c((x - \alpha, y - \beta'), 2)$.

(v) Für die Stelle $\infty$ ergibt sich
- $v(\infty)$ hat die Nachbarn $o$ und $c(\infty, 1)$,
- $c(\infty, 1)$ hat die Nachbarn $v(\infty)$, $e(\infty)$ und $c(\infty, 2)$,
- $e(\infty)$ hat den Nachbarn $c(\infty, 1)$.

**3.3.9 Standardbeispiel.** Betrachten wir nun die in (1.1.16) definierte elliptische Kurve

$$E/\mathbb{F}_3 : \quad f_E(x, y) = y^2 - x^3 - x \ .$$

Sie hat die $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkte $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ und $\infty$. Die Primideale vom Grad 1 sind daher $\mathfrak{p} := (x, y)$, $\mathfrak{q} := (x - 2, y - 1)$ und $\mathfrak{q}' := (x - 2, y - 2)$.
Für $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ erhalten wir damit die graphische Darstellung



Dabei gehören die blauen Kanten zum endlichen Unterbaum $\mathcal{S}$ und die grünen sind Kanten der Spitzen.

Takahashi beschreibt die Stabilisatoren der Knoten und Kanten explizit als Matrizengruppen. Allerdings ist diese Beschreibung sehr undurchsichtig, da sie technisch recht aufwendig ist. Uns genügen (weitgehend) die strukturellen Eigenschaften, die er durch Isomorphismen von Gruppen angibt. Dazu legen wir zunächst ein semidirektes Produkt fest.

**3.3.10 Definition.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist das semidirekte Produkt*

$$\mathbb{F}_q^n \rtimes_\varsigma \mathbb{F}_q^*$$

*von $\mathbb{F}_q^n$ und $\mathbb{F}_q^*$ definiert durch $\varsigma : \mathbb{F}_q^* \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q^n)$ mit*

$$\varsigma(\alpha)((\beta_1, \ldots, \beta_n)) = (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_n) \ .$$

Um die Stabilisatoren der Kanten beschreiben zu können, benötigen wir noch die Nachfolgerrelation für Knoten.

**3.3.11 Definition.** *Seien $v$ und $w$ benachbarte Knoten. Genau dann heißt $v$* Nachfolger von *$w$, wenn auf dem Pfad $o = v_0, v_1, \ldots, v_n = v$ der Knoten $w = v_{n-1}$ ist.*

**3.3.12 Satz.** *([Tak93, Theorem 4 und 5])*

*(i) Die Stabilisatoren der Knoten sind isomorph zu*

| *Knoten* | *Stabilisator* | *Bedingung* |
|---|---|---|
| $o$ | $\mathbb{F}_q^*$ | |
| $v(\infty)$ | $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^*$ | |
| $v(\alpha)$ | $\mathbb{F}_{q^2}^*$ | $(\alpha, .) \notin E(\mathbb{F}_q)$ |
| | $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^*$ | $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$ |
| | $\mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^*$ | $[\mathfrak{p}^2] \neq [(1)]$ |
| $e(\infty)$ | $G(\mathbb{F}_q)$ | |
| $e(\mathfrak{p})$ | $G(\mathbb{F}_q)$ | |
| $c(\infty, n)$ | $(\mathbb{F}_q^n \rtimes_\varsigma \mathbb{F}_q^*) \times \mathbb{F}_q^*$ | $\forall n \in \mathbb{N}$ |
| $c(\mathfrak{p}, n)$ | $(\mathbb{F}_q^n \rtimes_\varsigma \mathbb{F}_q^*) \times \mathbb{F}_q^*$ | $\forall n \in \mathbb{N}$ |

*Dabei enthält die letzte Spalte Bedingungen an die Argumente der ersten Spalte. In den Zeilen, in denen sowohl $\mathfrak{p}$ als auch $\alpha$ vorkommen, ist stets $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ mit geeignetem $\beta \in \mathbb{F}_q$ und $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$.*

*(ii) Seien $v$ und $w$ zwei Knoten und $v$ der Nachfolger von $w$. Dann hat die Kante $e = (w, v)$ den Stabilisator $\mathrm{G}(A)_e = \mathrm{G}(A)_v \cap \mathrm{G}(A)_w = \mathrm{G}(A)_w$.*

**3.3.13 Bemerkung.** Die letzte Aussage ist von Takahashi bewiesen. Sie folgt auch aus (3.4.15).

## 3.4 Klassifizierung von Modulgarben

Der Strategie folgend, die wir in (3.2.21) beschrieben haben, ordnen wir den Knoten von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ gewisse Klassen von Modulgarben über $X$ mit affin trivialer Determinante zu.
Dazu benötigen wir eine geeignete Äquivalenzrelation.

**3.4.1 Definition.** *Zwei Modulgarben $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ heißen* $\mathcal{I}$-äquivalent *genau dann, wenn ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $\mathcal{M}' \cong \mathcal{I}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}$.*

**3.4.2 Proposition.** *([Ser03, II.2.1, Lemma 5])*

*(i) Für eine Modulgarbe $\mathcal{M}$ der Dimension 2 sind äquivalent:*

*(a) Die Einschränkung von $\mathcal{M}$ auf $\mathrm{Spec}(A)$ ist trivial, es ist also $\mathcal{M}|_{\mathrm{Spec}(A)} \cong \mathcal{O}_f \oplus \mathcal{O}_f$.*
*(b) Die Einschränkung von $\mathcal{D}et(\mathcal{M})$ auf $\mathrm{Spec}(A)$ ist trivial.*
*(c) Es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $\mathcal{D}et(\mathcal{M}) \cong \mathcal{I}^{\otimes n}$ ist.*

*Eine Modulgarbe, die eine der drei Bedingungen erfüllt, nennen wir* affin trivial.

*(ii) Es ist $\mathcal{D}et(\mathcal{I}^{\otimes m} \otimes \mathcal{M}) \cong \mathcal{I}^{\otimes 2m} \otimes \mathcal{D}et(\mathcal{M})$.*

Für jede affin triviale Modulgarbe $\mathcal{Y}$ existiert daher eine ganze Zahl $m$, so daß $\mathcal{D}et(\mathcal{I}^{\otimes m} \otimes \mathcal{Y})$ isomorph zu $\mathbb{1}$ oder $\mathcal{I}$ ist.

**3.4.3 Satz.** *([Ser03, II.2.1, Prop. 4 und 5]) Es sei $\mathcal{Y}_f$ eine triviale Modulgarbe der Dimension 2 über $\mathrm{Spec}(A)$. Die Zuordnung*

$$\textit{Knoten } [Y_\infty] \leftarrow\!\shortmid Y_\infty \mapsto \mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_f, \mathcal{Y}_\infty) = (\mathcal{Y}_f, Y_\infty)$$

*induziert eine Bijektion von $\mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ auf die Menge der $\mathcal{I}$-Klassen von Modulgarben der Dimension 2 über $X$, die affin trivial sind.*
*Die Automorphismengruppe einer Modulgarbe entspricht dem Stabilisator des zugeordneten Knotens.*

**3.4.4 Proposition.** *([Ser03, II.2.1 und II.1.2 Prop. 1] Seien $Y_\infty$ ein $\mathcal{O}_\infty$-Gitter und $\gamma \in \mathrm{G}(K)$ so gewählt, daß $\mathcal{O}_\infty^2\gamma = Y_\infty$ ist. Weiter sei dem Gitter $Y_\infty$ die Garbe $\mathcal{Y}$ zugeordnet vermöge des Isomorphismus aus* (3.4.3)*. Dann ist*

$$\mathcal{D}et(\mathcal{Y}) = \mathcal{I}^{\otimes n} \quad mit \quad n = v_\infty(\det(\gamma)) \ .$$

Wir werden nun sukzessive den Knoten Modulgarben zuordnen. In [Ser03, II.2] klassifiziert Serre die Spitzen genau. Für den endlichen Anteil gibt er Abschätzungen über den Durchmesser an. Kombinieren wir Serres Beschreibung der Spitzen und die Aussagen über die Stabilisatoren von Takahashi, so erhalten wir eine vollständige Zuordnung zwischen Knoten und affin trivialen Modulgarben.

**3.4.5 Bemerkung.** Eine wesentliche Methode ist dabei, daß wir die Automorphismengruppen der Modulgarben explizit bestimmen. Statt dies nun in abstrakter Weise zu tun, werden wir sie elementar berechnen.
Dazu betrachten wir die Automorphismen auf den Halmen der Modulgarben.
Ist $\mathcal{M}$ eine Modulgarbe, so ist nach Auswahl einer Basis $b = (b_1, b_2)$ von $K^2$

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_\xi = K^2 && \text{und} \\ &\mathcal{M}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_\mathfrak{p} b_1 + \mathcal{O}_\mathfrak{p} b_2 && \text{für fast alle abgeschlossenen } \mathfrak{p} \in X \ . \end{aligned}$$

Für einen Automorphismus von $\mathcal{M}$ gilt nun: Es existiert eine Matrix $M_b \in \mathrm{G}(K)$, so daß über dem generischen Punkt der Automorphismus die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \longrightarrow & K^2 \\ g_1 b_1 + g_2 b_2 & \mapsto & (g_1 b_1 + g_2 b_2) M_b \end{array}$$

ist. In allen abgeschlossenen Punkten $\mathfrak{p} \in X$, für die $\mathcal{M}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_\mathfrak{p} b_1 + \mathcal{O}_\mathfrak{p} b_2$ ist, ist $M_b \in \mathrm{G}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$; der Automorphimus in diesem Halm ist

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathcal{M}_\mathfrak{p} \\ g_1 b_1 + g_2 b_2 & \mapsto & (g_1 b_1 + g_2 b_2) M_b \ . \end{array}$$

Eventuell müssen wir an endlich vielen abgeschlossenen Punkten $\mathfrak{q} \in X$ eine andere Basis $b' = (b_1', b_2')$ wählen (die Basis hängt von $\mathfrak{q}$ ab). Dann erhalten wir eine Matrix $M_{b'} \in \mathrm{G}(\mathcal{O}_\mathfrak{q})$ und für den Automorphimus die Darstellung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\mathfrak{q} & \longrightarrow & \mathcal{M}_\mathfrak{q} \\ g_1 b_1' + g_2 b_2' & \mapsto & (g_1 b_1' + g_2 b_2') M_b' \ . \end{array}$$

Die Matrix $M_{b'}$, aufgefaßt als Element von $\mathrm{G}(K)$, ist konjugiert zur Matrix $M_b$, denn die beiden Matrizen unterscheiden sich nur um einen Basiswechsel.

Beginnen wir zunächst mit den Aussagen von Serre.

**Zerlegbare Modulgarben**

**3.4.6 Satz.** *[Ser03, II.2.2] Alle zerlegbaren Modulgarben, die affin trivial sind, sind bis auf $\mathcal{I}$-Äquivalenz von der Form*

$$\mathcal{E}(\infty,n) = \mathbb{1} \oplus \left(\mathbb{1} \otimes \mathcal{I}^{\otimes n}\right) = \mathbb{1} \oplus \mathcal{I}^{\otimes n} \quad \textit{oder}$$
$$\mathcal{E}(\mathfrak{p},n) = \mathcal{F}(\mathfrak{p}) \oplus \left(\mathcal{F}(\mathfrak{p})^{-1} \otimes \mathcal{I}^{\otimes n}\right) \ ,$$

*wobei $\mathfrak{p} \in \mathrm{RS}(\mathrm{Pic}(A))$ ein Primideal vom Grad 1 und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist. Die $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)$ und $\mathcal{E}(\mathfrak{q},m)$ mit $(\mathfrak{p},n) \neq (\mathfrak{q},m)$ sind verschieden.*
*Für alle $n \geq 0$ ist $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)$ in $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n+1)$ enthalten, und jede Folge von $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)_{n\geq 1}$ bildet eine Spitze (dabei ist $\mathfrak{p} = \infty$ zulässig).*

Die letzte Aussage des Satzes ergibt sich direkt aus der kanonischen Einbettung $\mathcal{I}^{\otimes n} \hookrightarrow \mathcal{I}^{\otimes n+1}$.

**3.4.7 Lemma.** *Die Automorphismengruppe der Modulgarbe $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)$ ist*

*(i)* $\mathcal{A}ut(\mathcal{E}(\mathfrak{p},0)) = \mathrm{G}(\mathbb{F}_q)$, *falls $\mathfrak{p} = \infty$ oder $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$ ist, und*

*(ii)* $\mathcal{A}ut(\mathcal{E}(\mathfrak{p},0)) = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & 0\\ 0 & \nu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu,\nu \in \mathbb{F}_q^*\right\}$ *für alle anderen $\mathfrak{p}$,*

*(iii) für $n \geq 1$*

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{E}(\infty,n)) = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & b\\ 0 & \nu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu,\nu \in \mathbb{F}_q^*,\ b \in A \textit{ und } v_\infty(b) \geq -n\right\} \ ,$$

*(iv) für $n \geq 1$ und alle $\mathfrak{p} \in (\mathrm{Pic}(A) - \{(1)\})$*

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)) = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & b\\ 0 & \nu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu,\nu \in \mathbb{F}_q^*,\ b \in \mathfrak{p}^{-2} \textit{ und } v_\infty(b) \geq -n\right\} \ .$$

*Beweis.* (a) Ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ eine zerlegbare Modulgarbe, dann existiert eine geordnete Basis $b := (b_1, b_2)$ von $K^2$, so daß

$$\mathcal{M}_\mathfrak{p} = \mathcal{M}_{1,\mathfrak{p}} b_1 + \mathcal{M}_{2,\mathfrak{p}} b_2 \quad \text{für alle } \mathfrak{p} \in X$$

ist. Sei nun $f \in \mathcal{A}ut(\mathcal{M})$, dann entspricht $f$ eine Vektorraumabbildung mit Darstellungsmatrix

$$M_b = \begin{pmatrix} h_1 & h_2\\ h_3 & h_4\end{pmatrix} \in G(K)$$

bezüglich der Basis $b$. Wegen

$$g_1 b_1 M_b = g_1 h_1 b_1 + g_1 h_2 b_2$$
$$g_2 b_2 M_b = g_2 h_3 b_1 + g_2 h_4 b_2$$

$(g_1, g_2 \in \mathcal{O}_\mathfrak{p})$ gilt für die Einträge der Matrix $M_b$

$$h_1 \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}(\mathcal{M}_{1,\mathfrak{p}}) \ , \quad h_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}(\mathcal{M}_{1,\mathfrak{p}}, \mathcal{M}_{2,\mathfrak{p}}) \ ,$$
$$h_4 \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}(\mathcal{M}_{2,\mathfrak{p}}) \ , \quad h_3 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}(\mathcal{M}_{2,\mathfrak{p}}, \mathcal{M}_{1,\mathfrak{p}}) \ .$$

(b) Wir betrachten zunächst $\mathcal{E}(\infty, n) = \mathbb{1} \oplus (\mathbb{1} \otimes \mathcal{I}^{\otimes n})$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Da

$$\mathcal{E}(\infty, n)(\mathrm{Spec}(A)) = Ab_1 + Ab_2$$

ist, sind alle $h_i \in A$. Im Halm über $\infty \in X$ erhalten wir

$$\mathcal{E}(\infty, n)_\infty = \mathcal{O}_\infty b_1 + t^{-n}\mathcal{O}_\infty b_2 \ ,$$

und daher muß für die $h_i$ gelten

$$\begin{aligned} h_1 &\in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\infty}(\mathcal{O}_\infty) = \mathcal{O}_\infty \ , \quad & h_2 &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\infty}(\mathcal{O}_\infty, t^{-n}\mathcal{O}_\infty) = t^{-n}\mathcal{O}_\infty \ , \\ h_4 &\in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_\infty}(t^{-n}\mathcal{O}_\infty) = \mathcal{O}_\infty \ , \quad & h_3 &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\infty}(t^{-n}\mathcal{O}_\infty, \mathcal{O}_\infty) = t^{n}\mathcal{O}_\infty \ . \end{aligned}$$

Sei nun zunächst $n \geq 1$. Dann ergeben die Bedingungen

$$h_3 \in t^n\mathcal{O}_\infty \cap A = \{0\} \ .$$

Somit erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix. Die Einträge auf der Diagonalen müssen invertierbar sein und in $\mathcal{O}_\infty \cap A = \mathbb{F}_q$ liegen, also sind $h_1, h_4 \in \mathbb{F}_q^*$.

Der Eintrag $h_2$ muß in $A$ liegen und einen Grad $\deg(h_2) \leq n$ haben.

(c) Sei nun $n = 0$. Dann ergibt sich aus (b), daß alle Einträge $h_j$ in $\mathbb{F}_q$ liegen, und wegen

$$\mathrm{G}(K) \cap \mathrm{Mat}(2, \mathbb{F}_q) = \mathrm{G}(\mathbb{F}_q)$$

ergibt sich die erste Behauptung des Lemmas für $\mathfrak{p} = \infty$.

(d) Sei nun $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$. Dann ist

$$\mathcal{E}(\mathfrak{p}, n) = \mathcal{F}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{E}(\infty, n) \quad \text{für alle } n \geq 0 \ ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}ut(\mathcal{E}(\mathfrak{p}, 0)) = \mathrm{G}(\mathbb{F}_q) \ , \\ &\mathcal{A}ut(\mathcal{E}(\mathfrak{p}, n)) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ 0 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \mid h_1,\, h_4 \in \mathbb{F}_q^*,\, h_2 \in \mathfrak{p}^{-2} \text{ mit } \deg(h_2) \leq n \right\} \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

(e) Sei nun $[\mathfrak{p}^2] \neq [(1)]$. Dann ist

$$\mathcal{F}(\mathfrak{p})^{-1} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}(-\mathfrak{p} + \infty), \mathcal{O}_X) \ .$$

Deren Halme sind also

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\mathfrak{p})^{-1})_\mathfrak{p} &= \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O}_\mathfrak{p} \\ (\mathcal{F}(\mathfrak{p})^{-1})_\infty &= t\mathcal{O}_\infty \\ (\mathcal{F}(\mathfrak{p})^{-1})_\mathfrak{q} &= \mathcal{O}_\mathfrak{q} \qquad \text{für alle } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \infty \ . \end{aligned}$$

(f) (Weiter ist $[\mathfrak{p}^2] \neq [(1)]$.) Daher hat die Garbe

$$\mathcal{E}(\mathfrak{p}, n) = \mathcal{F}(\mathfrak{p}) \oplus (\mathcal{F}(\mathfrak{p})^{-1} \otimes \mathcal{I}^{\otimes n})$$

die Halme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathfrak{p}, n)_{\mathfrak{p}} &= \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} b_1 + \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} b_2 \ , \\ \mathcal{E}(\mathfrak{p}, n)_{\infty} &= \mathcal{O}_{\infty} t^{-1} b_1 + \mathcal{O}_{\infty} t^{-(n+1)} b_2 \ , \\ \mathcal{E}(\mathfrak{p}, n)_{\mathfrak{q}} &= \mathcal{O}_{\mathfrak{q}} b_1 + \mathcal{O}_{\mathfrak{q}} b_2 \qquad \text{für alle } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \infty \ . \end{aligned}$$

Also gilt für die Diagonaleinträge der Matrix $M_b$

$$h_1, h_4 \in \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(K)} \mathcal{O}_{\mathfrak{q}} = \mathbb{F}_q \ .$$

Für die Einträge auf der Nebendiagonalen müssen wir nun die entsprechenden Homomorphismengruppen von Moduln betrachten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) &= \{g \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(g) \geq -2\} \ , \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) &= \{g \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(g) \geq 2\} \ , \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\infty}}(t^{-1}\mathcal{O}_{\infty}, t^{-(n+1)}\mathcal{O}_{\infty}) &= t^{-n}\mathcal{O}_{\infty} \ , \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\infty}}(t^{-(n+1)}\mathcal{O}_{\infty}, t^{-1}\mathcal{O}_{\infty}) &= t^{n}\mathcal{O}_{\infty} \ . \end{aligned}$$

Dies liefert nun die Bedingungen

$$\begin{aligned} h_2 \in &\{g \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(g) \geq -2,\ v_{\mathfrak{p}^{-1}}(g) \geq 1,\ v_{\infty}(g) \geq -n \text{ und } v_{\mathfrak{q}}(g) \geq 0 \text{ sonst}\} \\ &= L(2\mathfrak{p} + n\infty) \ , \\ h_3 \in &\{g \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(g) \geq 2,\ v_{\mathfrak{p}^{-1}}(g) \geq -1,\ v_{\infty}(g) \geq n \text{ und } v_{\mathfrak{q}}(g) \geq 0 \text{ sonst}\} \\ &= L(-2\mathfrak{p} - n\infty) = \{0\} \ . \end{aligned}$$

Aus $v_{\mathfrak{p}}(h_2) \geq -2$ und $v_{\mathfrak{q}}(h_2) \geq 0$ für alle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \infty$ folgt, daß $h_2$ in $\mathfrak{p}^{-2}$ liegt.

Speziell für $n = 0$ ist $L(-2\mathfrak{p}) = \{0\}$ nach dem Satz von Riemann-Roch. Somit ist dann $h_3 = 0$.

Für die Diagonalelemente folgt für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wiederum, daß ihr Produkt von 0 verschieden sein muß.

Damit ist das Lemma gezeigt.

□

**Die Garbe $\mathcal{H}$**

Die in (3.2.18) definierte absolut unzerlegbare Modulgarbe $\mathcal{H}$ ist affin trivial und auf dem Halm über $\infty$ gegeben durch

$$\mathcal{H}_{\infty} = \mathcal{O}_{\infty} t e_1 + \mathcal{O}_{\infty}(t^{-1}e_1 + e_2) \ .$$

**3.4.8 Lemma.** *Die Automorphismengruppe von $\mathcal{H}$ ist $\mathbb{F}_q^*$.*

*Beweis.* Ein Automorphismus von $\mathcal{H}$ hat auf Spec$(A)$ eine (einzige) Darstellungsmatrix

$$M_e = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix $M_b$ zum Halm $\infty$ erhalten wir durch Basiswechsel. Sei dazu $B$ die Basiswechselmatrix von der Standardbasis zur Basis von $\mathcal{H}_\infty$, dann ist

$$\begin{aligned} M_b = BM_eB^{-1} &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{pmatrix} M_e \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ -t^{-2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_1 - g_2 t^{-1} & g_2 t \\ g_1 t^{-2} + g_3 t^{-1} - g_2 t^{-3} - g_4 t^{-2} & g_2 t^{-1} + g_4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Nun müssen $g_1, g_2 \in A$ und $g_1 - g_2 t^{-1} \in \mathcal{O}_\infty$ liegen; in $A - \mathbb{F}_q$ existiert kein Element $a$ mit $v_\infty(a) \geq -1$, daher ist $g_2 = 0$ und $g_1 \in \mathcal{O}_\infty \cap A = \mathbb{F}_q$ sowie $g_2 t^{-1} + g_4 = g_4 \in \mathbb{F}_q$. Da die Determinante der Matrix ungleich 0 sein muß, gilt sogar $g_1, g_4 \in \mathbb{F}_q^*$. Für den Term $(g_1 - g_4)t^{-2} + g_3 t^{-1}$ folgt nun, da $(g_1 - g_4) \in \mathbb{F}_q$ ist, daß $g_3 = 0$ und $g_1 = g_4$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{F}_q^* \right\} .$$

□

Nun hat $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ nur einen Knoten mit einer Automorphismengruppe isomorph zu $\mathbb{F}_q^*$, und dies ist der Knoten $o$.

### Die Garben $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{F}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{M}_2$

Auch für $\mathcal{M}_2$ werden wir erst einmal die Automorphismengruppe bestimmen.

**3.4.9 Lemma.** *Es ist*

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{M}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{F}_q^* \text{ und } \nu \in \mathbb{F}_q \right\} .$$

*Beweis.* Bezeichnen wir wie im Beweis zu (3.4.8) die Darstellungsmatrix eines Automorphismus auf Spec$(A)$ mit $M_e = \left(\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{smallmatrix}\right)$ und auf dem Halm $\infty$ mit $M_b$ sowie die Basiswechselmatrix mit $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann erhalten wir

$$M_b = BM_eB^{-1} = \begin{pmatrix} g_1 - g_2 t^{-1} & g_2 \\ g_1 t^{-1} + g_3 - g_2 t^{-2} - g_4 t^{-1} & g_2 t^{-1} + g_4 \end{pmatrix} .$$

Nun muß wieder $g_2 \in \mathbb{F}_q$ gelten, und da $A - \mathbb{F}_q$ kein Element mit Bewertung $\geq -1$ an $\infty$ hat, ist $g_1 - g_2 t^{-1} \in \mathcal{O}_\infty$ nur für $g_2 = 0$ möglich. Somit sind $g_1, g_4 \in \mathbb{F}_q^*$. Schließlich ist der Term der zweiten Zeile und ersten Spalte $(g_1 - g_4)t^{-1} + g_3 \in \mathcal{O}_\infty$ genau dann, wenn $g_1 = g_4$ und $g_3 \in A \cap \mathcal{O}_\infty = \mathbb{F}_q$ ist. □

Nun bestimmt diese Angabe den Knoten nicht eindeutig, denn es gibt mehrere Stabilisatoren von Knoten, die isomorph sind zu $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^*$. Die Eindeutigkeit folgt allerdings aus

**3.4.10 Lemma.** *Die Garbe $\mathcal{M}_2$ ist benachbart zu $\mathcal{E}(\infty, 1)$.*

*Beweis.* Wegen $\mathcal{M}_2(\mathrm{Spec}(A)) = \mathcal{E}(\infty,1)(\mathrm{Spec}(A)) = Ae_1 + Ae_2$ müssen wir die Behauptung nur noch am Halm $\infty$ überprüfen. Sei $g = g_1e_1 + g_2(t^{-1}e_1 + e_2) \in \mathcal{M}_\infty$, d.h. $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_\infty$. Genau dann liegt $g$ in $\mathcal{E}(\infty,1)_\infty$, also

$$g = (g_1 + g_2t^{-1})e_1 + g_2e_2 \in \mathcal{O}_\infty t^{-1}e_1 + \mathcal{O}_\infty e_2 \ ,$$

wenn $g_1$ und $g_2$ in $\mathcal{O}_\infty$ liegen.
Also ist $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{E}(\infty,1)$. Die Automorphismengruppen der beiden Modulgarben ergeben nun direkt die Nachbarschaft. □

**3.4.11 Korollar.** *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$. Die Modulgarbe $\mathcal{F}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{M}_2$ hat die Automorphismengruppe*

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{F}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{M}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{F}_q^* \ \textit{und} \ \nu \in \mathbb{F}_q \right\}$$

*und ist benachbart zu $\mathcal{E}(\mathfrak{p},1) = \mathcal{F}(\mathfrak{p}) \otimes (\mathbb{1} \oplus \mathcal{I})$.*

**Folgerungen**

**3.4.12 Korollar.** *Ist $\alpha$ nicht $x$-Koordinate eines $\mathbb{F}_q$-rationalen Punktes und $\mathcal{G}_\alpha$ die in* (3.2.18) *definierte Garbe, dann ist*

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{G}_\alpha) \cong \mathbb{F}_{q^2}^* \ ,$$

*und der Knoten, der dieser Garbe entspricht, ist $v(\alpha)$.*

*Beweis.* Die einzigen Knoten, denen noch keine Modulgarben zugeordnet sind, sind diese $v(\alpha)$. Daß $\mathcal{G}_\alpha$ genau dem Knoten $v(\alpha)$ (und keinem Knoten $v(\alpha')$ mit $\alpha \neq \alpha'$) zugeordnet wird, ergibt sich aus der Proposition (4.3.8), die wir unabhänigig von dieser Aussage im Abschnitt (4.3) zeigen werden. □

**3.4.13 Proposition.** *Für $n \geq 1$ entsprechen die $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)$ den Knoten $c(\mathfrak{p},n)$. Für $n = 0$ wird $\mathcal{E}(\mathfrak{p},0)$ dem Knoten $e(\mathfrak{p})$ zugeordnet, falls $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$ oder $\mathfrak{p} = \infty$ ist, und sonst dem Knoten $v(\alpha)$ für $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta)$.*

*Beweis.* Da die $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)$ für $n \geq 1$ eine Spitze bilden und ihre Automorphismengruppen den Stabilisatoren der Knoten entsprechen müssen, ist die Zuordnung der $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)$ zu einem $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ zwingend. Aus der Enthaltensbedingung von $\mathcal{M}_2$ bzw. $\mathcal{F}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{M}_2$ für $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$ folgt die Zuordnung. □

**3.4.14 Korollar.** *Alle affin trivialen, absolut unzerlegbaren Modulgarben mit ungeradem Determinantengrad sind $\mathcal{I}$-äquivalent zu $\mathcal{H}$.*

**3.4.15 (Zusammenfassung).** Zum Abschluß des Kapitels stellen wir alle Knoten, $\mathcal{I}$-Klassen von Modulgarben mit affin trivialer Determinante und die zugehörigen Gruppen zusammen. Schließlich geben wir noch eine Basis für einen Repräsentanten der entsprechenden $\mathcal{O}_\infty$-Gitterklasse an.

| Knoten | Garbe | Gitterbasis | Stabilisator | Bedingung |
|---|---|---|---|---|
| $o$ | $\mathcal{H}$ | $(t,0),\ (t^{-1},1)$ | $\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & 0\\ 0 & \mu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \mathbb{F}_q^*\}$ | |
| $v(\infty)$ | $\mathcal{M}_2$ | $(1,0),\ (t^{-1},1)$ | $\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & \nu\\ 0 & \mu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \mathbb{F}_q^*,\ \nu \in \mathbb{F}_q\}$ | |
| $v(\alpha)$ | $\mathcal{G}_\alpha$ | $(t,0),$ $(t^{-2}+\alpha,\, t^{-1})$ | $\cong \mathbb{F}_{q^2}^*$ | $(\alpha,.) \notin E(\mathbb{F}_q)$ |
| | $\mathcal{F}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{M}_2$ | | $\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & \nu\\ 0 & \mu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \mathbb{F}_q^*,\ \nu \in \mathbb{F}_q\}$ | $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$ |
| | $\mathcal{E}(\mathfrak{p},0)$ | | $\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & 0\\ 0 & \nu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu,\nu \in \mathbb{F}_q^*\}$ | $[\mathfrak{p}^2] \neq [(1)]$ |
| $e(\infty)$ | $\mathcal{E}(\infty,0)$ | $(1,0),\ (0,1)$ | $G(\mathbb{F}_q)$ | |
| $e(\mathfrak{p})$ | $\mathcal{E}(\mathfrak{p},0)$ | $(t^3,0),$ $(\frac{y-\beta}{x-\alpha}t^{-1},\ \frac{f_y(\alpha,\beta)}{y-\beta}t^{-1})$ | $G(\mathbb{F}_q)$ | $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$ |
| $c(\infty,n)$ | $\mathcal{E}(\infty,n)$ | $(t^{-n},0),\ (0,1)$ | $\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & b\\ 0 & \nu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu,\nu \in \mathbb{F}_q^*,\ b \in A,\ v_\infty(b) \geq -n\}$ | $\forall n \in \mathbb{N}$ |
| $c(\mathfrak{p},n)$ | $\mathcal{E}(\mathfrak{p},n)$ | $(t^{n+1},0),$ $(\frac{y-\beta}{x-\alpha}t^{-1},\ t^{-1})$ | $\{\left(\begin{smallmatrix}\mu & b\\ 0 & \nu\end{smallmatrix}\right) \mid \mu,\nu \in \mathbb{F}_q^*,\ b \in \mathfrak{p}^{-2},\ v_\infty(b) \geq -n\}$ | $\forall n \in \mathbb{N}$ |

# Kapitel 4

# Bäume und Thetafunktionen

Der Bruhat-Tits-Baum $\mathcal{T}$ kann als ungerichteter Graph in direkten Zusammenhang mit der Drinfeld'schen oberen Halbebene $\Omega$ und dem Schnittgraphen $T$ gebracht werden.
Nachdem wir diesen Zusammenhang hergleitet haben, werden wir auf die Quotienten $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ und $\mathrm{G}(A)\backslash\Omega$ näher eingehen.
Interessant sind für uns auch die Auswirkungen von Konstantenerweiterungen auf $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$. Hier werden wir uns insbesondere mit quadratischen Erweiterungen beschäftigen.
Aus der Quotientenbildung erhalten wir eine Gewichtung der Kanten von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$. Nun lassen sich gewichtete Flüsse auf dem Quotientenbaum definieren und eine Basis des freien $\mathbb{Z}$-Moduls der Flüsse angeben.
Den gewichteten Flüssen können wir cuspidale Thetafunktionen zuordnen. Diese werden wir als $j$-Invarianten von $\mathrm{G}(A)\backslash\Omega$ interpretieren.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit einer genaueren Beschreibung von $\mathcal{T}$ selbst. Dazu geben wir die Ergebnisse aus [GR96, 1.3.5] an.

**4.0.1 Definition.** *Eine* Halbgerade *von $\mathcal{T}$ ist ein Teilgraph, der isomorph zu* ●———●———●——— ………… *ist. Zwei Halbgeraden heißen* äquivalent*, wenn sie sich nur um einen endlichen Teilgraphen unterscheiden. Ein* Ende *von $\mathcal{T}$ ist eine Äquivalenzklasse von Halbgeraden.*
*Die Knoten eines Endes werden repräsentiert durch eine absteigende Folge von ineinander mit Index $q$ enthaltenen Gittern. Diese konvergiert gegen ein eindimensionales Gitter $\widehat{\mathcal{O}}_\infty(ue_1 + ve_2)$.*

**4.0.2 Proposition.** *Sei $Y_\infty$ ein $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$-Gitter in $\widehat{K}_\infty^2$ und $[Y_\infty]$ der zugehörige Knoten von $\mathcal{T}$.*

*(i) Die Kanten, die einen Endknoten $[Y_\infty]$ haben, korrespondieren zu den Punkten von $\mathbb{P}(Y_\infty/tY_\infty) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$, die Pfade (ohne Rücksetzen) der Länge $l$ zu den Punkten von $\mathbb{P}(Y_\infty/t^lY_\infty) \cong \mathbb{P}^1(\widehat{\mathcal{O}}_\infty/t^l\widehat{\mathcal{O}}_\infty)$.*

*(ii) Es existieren kanonische Bijektionen*

$$\begin{array}{ccccc} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Halbgeraden mit} \\ \textit{Ursprung in } [Y_\infty] \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \{\textit{Enden von } \mathcal{T}\} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{P}^1(\widehat{K}_\infty) \\ ([Y_{\infty,i}])_i & & \longmapsto & & \widehat{K}_\infty \cap Y_{\infty,i} \end{array} .$$

Konvergiert die Gitterfolge $(Y_{\infty,i})$ gegen das Rang-1 Gitter $\widehat{\mathcal{O}}_\infty(ue_1 + ve_2)$, so wird $([Y_{\infty,i}])_i$ unter dieser Bijektion das Element $(u : v)$ zugeordnet.
Leider ist dies nicht mit der Gruppenoperation verträglich. Daher verknüpfen wir die Bijektion mit einer geeigneten linearen Abbildung:
Auf $\mathbb{P}^1(\widehat{K}_\infty)$ operiert $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ durch Möbiustransformationen. Mit $W := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir daher

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1(\widehat{K}_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\widehat{K}_\infty) \\ (u : v) & \mapsto & W(u : v) = (-v : u) \ . \end{array}$$

Da nun $W^{-1}\gamma W = \frac{1}{\det(\gamma)}(\gamma^{-1})^T$ ist, ergibt sich (mit den obigen Bezeichnungen)

$$([\gamma * Y_{\infty,i}])_i = ([Y_{\infty,i}\gamma^{-1}])_i \mapsto W(\gamma^{-1})^T(u : v) = \gamma(-v : u) \ .$$

**4.0.3 Definition.** *Sei $([Y_{\infty,i}])_i$ ein Ende und $\widehat{\mathcal{O}}_\infty(ue_1 + ve_2)$ das* 1-*Gitter, gegen das die Gitterfolge $(Y_{\infty,i})_i$ konvergiert. Dann heißt $(-v : u) \in \mathbb{P}^1(\widehat{K}_\infty)$ die* Koordinate des Endes*.*

**4.0.4 Beispiel.** (vgl. (3.3.3)) Die Folge $Y_{\infty,i} := \widehat{\mathcal{O}}_\infty t^i e_1 + \widehat{\mathcal{O}}_\infty e_2$ von Gittern konvergiert gegen $(1 : 0)$.

## 4.1 Zusammenhang von $\Omega$ und $\mathcal{T}$

**4.1.1 Definition.** *Die* Realisierung $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ *von $\mathcal{T}$ ist ein topologischer Raum, der gegeben ist durch:*

*(i) Jeder nicht orientierten Kante wird ein Einheitsintervall zugeordnet.*
*(ii) Entsprechend der Inzidenzrelation von $\mathcal{T}$ werden diese Intervalle miteinander verklebt.*

*Dabei bezeichnen wir mit $e(\mathbb{R})$ bzw. $e(\mathbb{R})^0$ die zugehörige abgeschlossene bzw. offne Kante von $\mathcal{T}(\mathbb{R})$.*

Diese Realisierung steht in engem Zusammenhang mit den nichtarchimedischen Normen auf $\widehat{K}_\infty^2$.

**4.1.2 Erinnerung.** Eine nichtarchimedische Norm auf $\widehat{K}_\infty^2$ ist eine Abbildung

$$\nu : \widehat{K}_\infty^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

die den Bedingungen genügt: Für alle $v, w \in \widehat{K}_\infty^2$ und $x \in \widehat{K}_\infty$ ist

(i) $\nu(v) \geq 0$ und $\nu(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$,

(ii) $\nu(xv) = |x| \cdot \nu(v)$,

(iii) $\nu(v + w) \leq \sup\{\nu(v), \nu(w)\}$.

Zwei Normen heißen ähnlich, wenn sie sich nur um eine Konstante unterscheiden. Die Ähnlichkeitsklasse einer Norm $\nu$ bezeichnen wir mit $[\nu]$.
Die Gruppe $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$ operiert von links auf der Menge der Normen durch

$$(\gamma\nu)(v) = \nu(v\gamma) \quad \text{für alle } \gamma \in \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)\ .$$

**4.1.3 Satz (Goldmann, Iwahori).** *([GI63] und [DH87]) Zwischen $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ und der Menge der Ähnlichkeitsklassen nichtarchimedischer Normen auf $\widehat{K}^2_\infty$ gibt es eine kanonische $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$-äquivariante Bijektion.*

Diese Bijektion werden wir nun angeben. Seien $Y_\infty$ und $Y'_\infty$ zwei $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$-Gitter, die benachbart sind.
Zu dem Knoten $[Y_\infty] \in \mathrm{Vert}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\mathbb{Z})$ assoziieren wir die Ähnlichkeitsklasse von Normen $[\nu_{Y_\infty}]$, wobei $\nu_{Y_\infty}$ den Einheitsball $Y_\infty$ hat:

$$\nu_{Y_\infty}(v) = \inf\{|x| \ \mid x \in \widehat{K}_\infty, v \in xY_\infty\}\ . \tag{4.1.4}$$

Sei $0 \leq t \leq 1$ und $P = (1-t)[Y_\infty] + t[Y'_\infty] \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$ ein Punkt auf der Kante $([Y_\infty], [Y'_\infty])$; dann ordnen wir $P$ die Klasse $[\nu_P]$ zu mit

$$\nu_P(v) = \sup\{\nu_{Y_\infty}(v), q^t\nu_{Y'_\infty}(v)\}\ .$$

Die Äquivarianz ist in [GR96, 1.4.6] gezeigt.

**4.1.5 Definition.** *Die* Gebäudeabbildung $\lambda : \Omega \longrightarrow \mathcal{T}(\mathbb{R})$ *assoziiert zu jedem $\omega \in \Omega$ die Ähnlichkeitsklasse der Norm $[\nu_\omega]$ auf $\widehat{K}^2_\infty$, wobei wir setzen:*

$$\nu_\omega(ue_1 + ve_2) := |u\omega + v|\ .$$

Die Wertegruppe von $|.|$ ist $q^{\mathbb{Q}}$, daher ist $\lambda(\Omega) = \mathcal{T}(\mathbb{Q})$.
Aus der Definition ergibt sich direkt, daß ein $\omega \in \Omega$ genau dann auf einen Knoten abgebildet wird, wenn $[\nu_\omega]$ die Form (4.1.4) hat.

**4.1.6 Proposition.** *Die Gebäudeabbildung ist äquivariant.*

*Beweis.* Wir geben hier den in [GR96, 1.5.3] geführten Beweis wieder.
Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$, $\omega \in \Omega$ und $ue_1 + ve_2 \in \widehat{K}^2_\infty$. Dann ist $\gamma\omega = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$ und

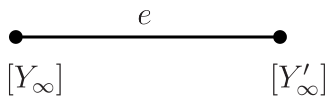
$$\begin{aligned}\nu_{\gamma\omega}((u,v)) &= \left|\frac{a\omega+b}{c\omega+d}u + v\right| \\ &= |c\omega+d|^{-1}|(a\omega+b)u + (c\omega+d)v| = |c\omega+d|^{-1}\nu_\omega((u,v)\gamma)\end{aligned}$$

und

$$\lambda(\gamma\omega) = [\nu_{\gamma\omega}] = [\nu_\omega((.)\gamma)] = [\gamma\nu_\omega] = \gamma\lambda(\omega)\ .$$

□

**4.1.7 (Identifikation von $T$ und $\mathcal{T}$).** (Die Bezeichnungen sind hier wie oben und in (2.1.7) gewählt). Die Gebäudeabbildung liefert uns nun auch die Identifikation von $T$ und $\mathcal{T}$. Wir betrachten:




Hier ergeben sich für ein geeignetes $(n,s) \in \mathrm{Ind}_e$ die Urbilder

$$\lambda^{-1}(e(\mathbb{R})) = D(n,s) \qquad \lambda^{-1}(e(\mathbb{R})^\circ) = D(n,s)^\circ$$

und entweder
Fall (a): $\lambda^{-1}([Y_\infty]) = C(n,s)$ und $\lambda^{-1}([Y'_\infty]) = C(n+1,s)$
oder
Fall (b): $\lambda^{-1}([Y_\infty]) = C(n+1,s)$ und $\lambda^{-1}([Y'_\infty]) = C(n,s)$ (vgl. [GR96, 1.5.9]).
Umgekehrt gehört zu einem Knoten $C(n,s)$ das Gitter

$$\widehat{\mathcal{O}}_\infty t^{-n}(e_1 - e_2 s) + \widehat{\mathcal{O}}_\infty e_2 = Y_{\infty,0}\gamma^{-1} \text{ mit } \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} t^{-n} & -st^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(vgl.[Rev92, 3.]) und $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} t^n & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein geeigneter Repräsentant für den Knoten von $\mathcal{T}$, dem der Knoten $(n,s) \in \mathrm{Ind}_v$ zugeordnet wird.

**4.1.8 Beispiel.** Mit den Bezeichnungen aus (4.0.4) ist das Urbild der Kante $([Y_{\infty,0}],[Y_{\infty,1}])$ die Umgebung $D(0,0) = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 \le |z| \le q\}$.

**4.1.9 Vereinbarung.** *Im folgenden werden wir den Schnittgraphen $T$ und den Bruhat-Tits-Baum $\mathcal{T}$ miteinander identifizieren.*

**4.1.10 Proposition.** *([GR96, 1.6]) Sei $(z_n)_{n\ge0}$ eine Folge aus $\Omega$, die gegen $(u:v)$ konvergiert und die $\lambda(z_n) = [Y_{\infty,n}]$ erfüllt.*

*(i)* $|z_n|_i \to \infty \;\Leftrightarrow\; (u:v) = (1:0)$.

*(ii)* $(\lambda(z_n))_{n\ge0}$ *ist das Ende mit den Koordinaten* $(u:v)$.

*(iii)* $(\lambda(\gamma z_n))_{n\ge0}$ *bestimmt das Ende mit den Koordinaten* $\gamma(u:v)$.

Setzen wir nun log als den Logarithmus bezüglich der Basis $q = \#\kappa(\infty)$ und definieren die Metrik $d(u,v)$ auf $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ so, daß benachbarte Knoten den Abstand 1 haben, dann erhalten wir

**4.1.11 Proposition.** *([Gek86, V.1.7]) Seien $Y_{\infty,0} = \widehat{\mathcal{O}}_\infty e_1 + \widehat{\mathcal{O}}_\infty e_2$ und $z \in \Omega$. Dann ist*

$$d(\lambda(z),[Y_{\infty,0}]) = \begin{cases} -\log(|z|_i), & |z| \le 1 \\ -\log(|z^{-1}|_i), & |z| \ge 1 \end{cases}.$$

*Insbesondere ist die Metrik linear auf den Kanten.*

## 4.2 Quotientenbildung

Welche Kanten des Baumes $\mathcal{T}$ bei der Reduktion auf $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ zusammenfallen, läßt sich direkt aus [Tak93, Theorem 4] ableiten. Wir geben zunächst diese Ergebnisse an.
Danach werden wir die Quotientenbildung explizit für einige der Mengen der Überdeckung von $\Omega$ aus (2.1.7) an unserem Standardbeispiel bestimmen.

**4.2.1 Definition.** *Sei $V$ ein Graph und $v \in \mathrm{Vert}(V)$ ein Knoten. Die* Nachbarschaft von $v$ *ist der Untergraph von $V$, der aus allen Nachbarknoten von $v$ und allen Kanten, die in $v$ enden, besteht.*

Sind nun $v \in \mathrm{Vert}(\mathcal{T})$ und $w \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$, so daß $v$ unter der Reduktionsabbildung $\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ auf $w$ abgebildet wird, dann ist

$$\mathrm{G}(A)_v\backslash\{\text{Nachbarschaft von } v\} \longrightarrow \{\text{Nachbarschaft von } w\}$$

bijektiv sowohl auf der Menge der Knoten als auch auf der Menge der Kanten.
A priori kann dieser Graph Schleifen und Mehrfachkanten besitzen, was aber in unserer Situation wegen (3.3.7) nicht vorkommt.

Wir gehen nun stets von einem Knoten $w \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ aus. Zu diesem wählen wir ein Urbild $v \in \mathrm{Vert}(\mathcal{T})$. Dann konzentrieren wir uns auf die Nachbarschaften von $v$ und von $w$. Wir benennen zu

$$\{\text{Nachbarschaft von } v\} \longrightarrow \{\text{Nachbarschaft von } w\}$$

die Zuordnung der einzelnen Kanten explizit, d.h. wir führen [Tak93, Theorem 3.4] aus. Diese Zuordnung läßt sich aus den Bahnen ablesen, die wir unter der Operation von $\mathrm{G}(A)_v$ auf der Menge der Kanten in der Nachbarschaft von $v$ erhalten.

**4.2.2 (Bahnen der Kanten).** (Bezeichnungen wie in (3.3.7))

(i) Sei $v$ ein Urbild von $o$. Die Kanten der Nachbarschaft von $v$ sind Fixpunkte unter der Operation von $\mathrm{G}(A)_v$. Daher ist

$$\{e \in \mathcal{T} \mid t(e) = v\} \hookrightarrow \{e \in \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T} \mid t(e) = o\}$$

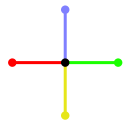
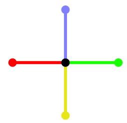
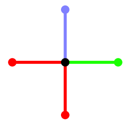
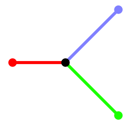
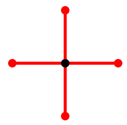
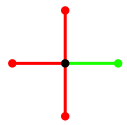
eine Einbettung.

(ii) Sei $v$ Urbild des Knotens $c(\infty, 1)$, $c(\mathfrak{q}, 1)$ oder $v(\alpha)$ für $[\mathfrak{q}^2] = [(1)]$ und $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta') \in E(\mathbb{F}_q)$ mit $\beta \neq \beta'$. Die Menge der Kanten aus der Nachbarschaft von $v$ hat unter der Operation von $\mathrm{G}(A)_v$ zwei Fixpunkte, nämlich die Kanten zu den Nachbarn (der Nachbarschaft), die Urbilder von $e(\infty)$ und $c(\infty, 2)$ bzw. $e(\mathfrak{q})$ und $c(\mathfrak{q}, 2)$ bzw. $c((x-\alpha, y-\beta), 1)$ und $c((x-\alpha, y-\beta'), 1)$ sind. Die übrigen Kanten bilden eine Bahn und werden unter der Reduktionsabbildung auf die Kante im Quotientenbaum abgebildet, zu der noch kein Urbild bestimmt ist.

(iii) Sei $v$ Urbild des Knotens $e(\infty)$, $e(\mathfrak{q})$ oder $v(\alpha)$, wobei $[\mathfrak{q}^2] = [(1)]$ und $\alpha$ nicht $x$-Koordinate eines $\mathbb{F}_q$-rationalen Punktes ist. Dann bilden die Kanten der Nachbarschaft genau eine Bahn. Sie werden (je nach Wahl des Knotens) auf die Kante $(e(\infty), c(\infty, 1))$, $(e(\mathfrak{q}), c(\mathfrak{q}), 1)$ bzw. $(v(\alpha), o)$ abgebildet.

(iv) Ist $v$ Urbild des Knotens $v(\alpha)$, $c(\infty, m)$, $c(\mathfrak{q}, m)$ oder $c(\mathfrak{p}, n)$ für $m \geq 2$, $n \geq 1$ und $[\mathfrak{q}^2] = [(1)] \neq [\mathfrak{p}^2]$ sowie $(\alpha, \beta)$ ein 2-Teilungspunkt, dann hat die Menge der zugehörigen Kanten einen Fixpunkt, nämlich die Kante, deren Bild ein Ende in dem Knoten $c((x - \alpha, y - \beta), 1)$ bzw. $c(\infty, m + 1)$ bzw. $c(\mathfrak{q}, m + 1)$ bzw. $c(\mathfrak{p}, n + 1)$.

**4.2.3 Standardbeispiel.** Wir verdeutlichen uns diese Aussagen an unserem Standardbeispiel (Bezeichnungen wie in (1.1.16) und (3.3.9)).
In dieser Tabelle vermerken wir links den Knoten $v$ als Bild $[v]$ unter der Reduktionsabbildung. Die zweite und dritte Spalte enthalten die Nachbarschaften. Dabei ist der zentrale Knoten, dessen Nachbarschaft betrachtet wird, stets schwarz. Knoten bzw. Kanten aus derselbsen Bahn unter der G$(A)$ haben dieselbe Farbe. Ab der zweiten Zeile spielt die Orientierung im Baum G$(A)\backslash\mathcal{T}$ eine Rolle.
Für die Knoten verwenden wir die Bezeichnungen aus (4.2.2)

| Knoten | in $\mathcal{T}$ | in G$(A)\backslash\mathcal{T}$ |
|---|---|---|
| $[v] = o$ |  |  |
| Richtung: | | $o$ <······ |
| $[v] = \begin{cases} v(2) \\ c(\mathfrak{p}, 1) \\ c(\infty, 1) \end{cases}$ |  |  |
| $[v] = \begin{cases} v(1) \\ e(\infty) \\ e(\mathfrak{p}) \end{cases}$ |  |  |
| $[v] = \begin{cases} v(0), v(\infty) \\ c(\mathfrak{q}, n), c(\mathfrak{q}', n),\ n \geq 1 \\ c(\infty, m), c(\mathfrak{p}, m),\ m \geq 2 \end{cases}$ |  |  |

Üblicherweise ist der Ausgangspunkt aller Überlegungen das triviale Gitter bzw. die triviale Modulgarbe $\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$. Die Beschreibung von Takahashi hingegen rückt den Knoten $o$ in den Mittelpunkt der Betrachtungen.

Insbesondere wenn wir uns orientierten Kanten und Konstantenerweiterungen zuwenden, ist es notwendig, eine klare Vorstellung beider Sichtweisen und ihrer Unterschiede zu haben. Deshalb führen wir nun für die Elemente der reinen Überdeckung den Pfad von $e(\infty)$ nach $o$ explizit aus.
Wir beschränken uns allerdings dabei auf das Standardbeispiel. Es ist einerseits so allgemein, daß strukturelle Aussagen sofort sichtbar sind, andererseits ermöglicht es uns eine kurze Benennung aller vorkommenden Objekte.

**4.2.4 Erinnerung.** (vgl. (2.1.6) bis (2.1.13)) Der Graph $T$ hat die Knoten- bzw. Kantenmenge

$$\begin{aligned}\mathrm{Vert}(T) &= \{v(n,s) \mid n \in \mathbb{Z},\ s \in \mathrm{RS}(\widehat{K}_\infty/t^n\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\}\ ,\\ \mathrm{Edge}(T) &= \{e(n,s) \mid n \in \mathbb{Z},\ s \in \mathrm{RS}(\widehat{K}_\infty/t^{n+1}\widehat{\mathcal{O}}_\infty)\}\ .\end{aligned}$$

In einem Knoten $v(n,s)$ treffen sich die Kanten

$$\begin{aligned}e(n-1,s) &= (v(n,s), v(n-1,s))\ ,\\ e(n, s+\varepsilon t^n) &= (v(n,s), v(n+1, s+\varepsilon t^n)) \quad \text{für alle } \varepsilon \in \mathbb{F}_q\ .\end{aligned}$$

Wir werden nun angeben, welche Kanten unter $\mathrm{G}(A)$ zusammenfallen. Dazu beschreiben wir, welche Knoten aus der Nachbarschaft des jeweiligen Ausgangsknotens unter der Reduktionsabbildung auf denselben Knoten abgebildet werden.

**4.2.5 Standardbeispiel.** Dem Knoten $e(\infty)$ entspricht $C(0,0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = |z|_i = 1\}$. Die benachbarten Knoten sind $v(-1,0)$ und $v(1,\varepsilon t)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$. Wegen

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{G}(A)}\begin{pmatrix}t^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}t^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{G}(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty)} = \begin{pmatrix}t & \varepsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

fallen alle Kanten, die in $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ in $v(0,0)$ enden, bei der Reduktion zusammen. Wir wählen nun $v(-1,0)$ als Repräsentanten der Bahn der Knoten. Diesem entspricht der Knoten $c(\infty,1) \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$. In der Nachbarschaft von $v(-1,0)$ sind außer $v(0,0)$ die Knoten $v(0,t^{-1})$, $v(0,-t^{-1})$ und $v(-2,0)$.
Letzterer läßt sich durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix}t^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ repräsentieren und entspricht $c(\infty,2)$. Die Kanten $e(0,t^{-1})$ und $e(0,-t^{-1})$ fallen wegen

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{G}(A)}\begin{pmatrix}1 & t^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{G}(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty)} = \begin{pmatrix}1 & -t^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

zusammen. Im Quotientenbaum $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ entspricht diese Bahn der Kante $(c(\infty,1), v(\infty))$.

Wir wählen den Knoten $v(0, t^{-1})$ als Repräsentanten und müssen nun die Kanten $e(0, t^{-1}+\varepsilon)$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_3$ betrachten. Diese haben ein Ende in den $v(1, t^{-1}+\varepsilon)$. Wegen

$$\begin{pmatrix} t & t^{-1} \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fallen diese wiederum zusammen und entsprechen dem Knoten $o$ in $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$.
Da die Matrizen

$$\begin{pmatrix} t^2 & t^{-1}+t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 & t^{-1}-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alle in verschiedenen Doppelnebenklassen von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)/\mathrm{G}(\widehat{\mathcal{O}}_\infty)Z(\widehat{K}_\infty)$ liegen, sind die entsprechenden Knoten von $T$ paarweise inäquivalent.

**4.2.6 Bemerkung.** (i) Es ist nun klar, wie wir aus der Gebäudeabbildung

$$\lambda_{\mathrm{G}(A)} : \mathrm{G}(A)\backslash\Omega \longrightarrow \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$$

eine zulässige offene Überdeckung von $\mathrm{G}(A)\backslash\Omega$ gewinnen können. Dazu müssen wir nur die in [Tak93] angegebenen Matrizenrepräsentanten der Knoten von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ betrachten:

| Knoten | Matrix |
|---|---|
| $o$ | $\begin{pmatrix} t & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $v(\infty)$ | $\begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $v(\alpha)$ | $\begin{pmatrix} t^2 & t^{-1}+\alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $e(\infty)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $e(\mathfrak{p})$ | $\begin{pmatrix} t^4 & \frac{y-\beta}{x-\alpha}+\frac{f_y(\alpha,\beta)}{y-\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $c(\infty, n)$ | $\begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $c(\mathfrak{p}, n)$ | $\begin{pmatrix} t^{n+2} & \frac{y-\beta}{x-\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

(ii) Wir erhalten die Bijektionen (vgl. (2.3.26))

$$\overline{M}_{\mathrm{G}(A)} - M_{\mathrm{G}(A)} \xrightarrow{\sim} \{\text{Spitzen von } \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}\}\ .$$

Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung „Spitze“ für $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ aus (3.3.7).

(iii) Zudem ist (vgl. [Gek86, V.2.4.])

$$\begin{array}{ccccc} \{\text{Spitzen von } \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}\} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{G}(A)\backslash\mathbb{P}^1(K) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}(A) \\ \mathcal{S}(\mathfrak{p}) & \mapsto & [s_{\mathfrak{p}}] & \mapsto & [\mathfrak{p}] \\ \mathcal{S}(\infty) & \mapsto & [\infty] & \mapsto & [(1)] \end{array} .$$

$\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta)$ wird von einer Folge von Gittern repräsentiert, die gegen $\widehat{\mathcal{O}}_\infty(\frac{y-\beta}{x-\alpha}e_1+e_2)$ konvergieren. Deshalb wird $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ durch die Koordinate

$$s_{\mathfrak{p}} = (-(x-\alpha) : y-\beta)$$

repräsentiert (vgl. (4.0.1)).

(iv) Sprechen wir nun von einer Spitze, so wählen wir meist zu ihrer Benennung den entsprechenden Repräsentanten $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}$ oder $\infty$ und identifizieren $\mathrm{G}(A)\backslash\mathbb{P}^1(K) = \overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)} - \mathrm{M}_{\mathrm{G}(A)}$. Unter $s_{\mathfrak{p}}$ verstehen wir stets die explizite Koordinate von $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$. Die Bahn von $s_{\mathfrak{p}}$ in $\mathbb{P}^1(K)$ unter $\mathrm{G}(A)$ bezeichnen wir wieder mit $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$.

## 4.3 Konstantenerweiterung

Die Idee, sich mit der Auswirkung von Konstantenerweiterungen zu beschäftigen, ergab sich aus der Betrachtung von Modulgarben der Form $\mathcal{G}_\alpha$. Es zeigte sich, daß insbesondere quadratische Konstantenerweiterungen für das Verständnis von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ und $\lambda_{\mathrm{G}(A)} : \mathrm{G}(A)\backslash\Omega \longrightarrow \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ hilfreich sind.
Wir geben zunächst einen kurzen Überblick über allgemeine Konstantenerweiterungen. Eine umfangreiche Ausarbeitung findet sich in [Til83, Paragraph 3].
Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen

$$A' := \mathbb{F}_{q^m}A,\ K' := \mathbb{F}_{q^m}K,\ \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m}, (X', \mathcal{O}'_{X'}) := (X/\mathbb{F}_{q^m}, \mathcal{O}_{X/\mathbb{F}_{q^m}}),$$

somit ergibt sich $\Omega' = \mathbf{C} - \widehat{K}'_\infty$. Des weiteren sei $\mathcal{T}'$ der Bruhat-Tits-Baum zur $\mathrm{PGL}(2, \widehat{K}'_\infty)$. Wir wählen eine Einbettung $\mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^m}$ und fassen $\mathbb{F}_q$ als Unterkörper von $\mathbb{F}_{q^m}$ auf.

**4.3.1 Proposition.** *Zu einem $\mathcal{O}_\infty$-Gitter $Y_\infty$ sei $Y'_\infty := \mathbb{F}_q \otimes Y_\infty$. Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vert}(\mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathrm{Vert}(\mathcal{T}') \\ [Y_\infty] & \mapsto & [Y'_\infty] \end{array}$$

*ist wohldefiniert und injektiv. Ihre Fortsetzung auf den Kanten*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Edge}(\mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathrm{Edge}(\mathcal{T}') \\ ([Y_\infty], [\tilde{Y}_\infty] & \mapsto & ([Y'_\infty], [\tilde{Y}'_\infty]) \end{array}$$

*ist wiederum wohldefiniert und injektiv. Wir erhalten einen Morphismus $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ von Bäumen, der eine Einbettung ist.*

*Beweis.* Die Aussagen folgen direkt aus (3.3.6). □

Wir wollen nun $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ in $\mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}'$ einbetten. Dazu betrachten wir Konstantenerweiterungen auf den Modulgarben. Zunächst führen wir in loser Folge einige Bezeichnungen ein.

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{M}$ heißt eingebettet, wenn der Halm $\mathcal{M}_\xi$ im generischen Punkt $\xi$ mit $K^2$ übereinstimmt.

Zu einer Menge $U \subset X$ sei $U' := \{\mathfrak{P} \in X' \mid \mathfrak{P} \cap K \in U\}$ die Menge aller Primstellen von $K'$, die eine Primstelle von $K$ fortsetzen.

Wir können eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{M}$ auf $(X, \mathcal{O}_X)$ zu einer $\mathcal{O}'_{X'}$-Modulgarbe $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \otimes \mathbb{F}_{q^m}$ auf $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ liften vermöge

$$\mathcal{M}'(U') := \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m} \ .$$

Sei $\mathcal{M}'$ eine eingebettete Modulgarbe über $(X', \mathcal{O}'_{X'})$. Die Modulgarbe $\mathcal{M}' \cap K^2$ über $(X, \mathcal{O}_X)$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{M}' \cap K^2)(U) = \mathcal{M}'(U') \cap K^2$$

für alle offenen Mengen $U \subset X$.

**4.3.2 Satz.** *([Til83, 3.12]): Sei* $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q)$ *die Galoisgruppe der Konstantenerweiterung. Weiter sei* $\mathcal{M}'$ *eine eingebettete* $\mathcal{O}'_X$*-Modulgarbe. Genau dann ist*

$$\mathcal{M}' = (\mathcal{M}' \cap K^2)' \ ,$$

*wenn für alle Elemente* $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q)$ *gilt*

$$\sigma(\mathcal{M}') = \mathcal{M}' \ ,$$

*d.h.* $\sigma(\mathcal{M}')(V) = \{\sigma(g) \mid g \in \mathcal{M}'(V)\} = \mathcal{M}'(V)$ *gilt für alle offenen* $V \subset X'$.

**4.3.3 (Einbettungen der Modulgarben aus** (3.4)**).** (i) Da die Modulgarben $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{H}$ absolut unzerlegbar sind, sind $\mathcal{M}'_2$ und $\mathcal{H}'$ die nichttrivialen Erweiterungen von $\mathbb{1}$ bzw. $\mathcal{I}$ durch $\mathbb{1}$ in $(X', \mathcal{O}'_{X'})$.

(ii) Entsprechend sind für die Primideale vom Grad 1 aus $\mathrm{Pic}(A)$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{p}, n)' = \mathcal{E}(\mathfrak{P}, n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ ,$$

wobei $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ in $A'$ ist.

(iii) Zudem ist

$$\mathcal{E}(\infty, n)' = \mathcal{E}(\infty', n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

für die Fortsetzung $\infty'$ von $\infty$.

Somit haben wir – abgesehen von Modulgarben der Form $\mathcal{G}_\alpha$, die wir gesondert betrachten – die Liftungen aller Modulgarben über $(X, \mathcal{O}_X)$, die uns interessieren, bestimmt.

## Quadratische Konstantenerweiterungen

Sei nun $m = 2$ fest. Neben der tieferen Erkenntnis über Modulgarben der Form $\mathcal{G}_\alpha$ ergibt die quadratische Konstantenerweiterung auch die Zuordnung elliptischer Punkte von $\Omega$ auf den Baum $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$.

**4.3.4 Definition.** *Ein* $\omega \in \Omega$ *heißt* elliptischer Punkt von $\mathrm{G}(A)$*, falls der Stabilisator* $\mathrm{G}(A)_\omega \supsetneq \mathbb{F}_q^*$ *echt größer als* $\mathbb{F}_q^*$ *ist. Sei* $\mathbf{E}$ *die Menge aller elliptischen Punkte auf* $\Omega$ *und* $\mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A)) := \mathrm{G}(A)\backslash\mathbf{E}$.
*Wir bezeichnen die Elemente aus* $\mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))$ *ebenfalls als elliptische Punkte.*

In [Gek86, V.4.] werden die elliptischen Punkte von $\Omega$ wie folgt charakterisiert.

**4.3.5 Proposition.** *(i) Ein elliptischer Punkt* $\omega \in \Omega$ *erfüllt eine quadratische Gleichung*

$$c\omega^2 + (d - a)\omega - b = 0 \ ,$$

*wobei* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(A)_\omega$ *ein Element des Stabilisators von* $\omega$ *ist, und es ist* $K(\omega) = \mathbb{F}_{q^2}K$*.*

*(ii) Die Menge* $\mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))$ *korrespondiert zu den Klassen der Ideale* $\mathfrak{a}' \in A'$*, die als* $A$*-Moduln isomorph zu* $Ae_1 + Ae_2$ *sind.*

*(iii) Sei* $P(S) := 1 - aS + qS^2$ *das Zählerpolynom der Zeta-Funktion der elliptischen Kurve (vgl.* (1.3.9)*). Dann gibt es* $P(-1)$ *viele* $\mathrm{G}(A)$*-Klassen elliptischer Punkte.*

*(iv) Der Stabilisator eines elliptischen Punktes ist isomorph zu* $\mathbb{F}_{q^2}^*$*.*

Die Bedingung (ii) ist äquivalent dazu, daß die Norm $[\mathrm{N}_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_{q^m}}(\mathfrak{a})] = [(1)]$ erfüllt, $\mathfrak{a}$ also im Kern der Normabbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{N}_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_{q^m}} : \mathrm{Pic}(A') & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(A) \\ {[\mathfrak{P}]} & \mapsto & [\mathfrak{P} \cdot \sigma(\mathfrak{P})] \end{array}$$

liegt, wobei $\sigma \in \mathrm{Gal}(K'/K)$ den nichttrivialen Galoisautomorphismus bezeichnet. Der Kern der Norm enthält nun aber genau jene Idealklassen aus $\mathrm{Pic}(A')$, deren invertierbare Garben unter Konstanteneinschränkung zu Rang-2-Modulgarben über $X$ mit affin trivialer Determinante werden. Betrachten wir diesen Kern nun genauer.
Sei $\mathfrak{P} = (x - \alpha, y - \beta) \in \mathrm{Pic}(A')$.
Genau dann ist $\mathfrak{P} \in \ker(\mathrm{N}_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_{q^m}})$, wenn $(\alpha, \beta) + \sigma(\alpha, \beta) = \infty$ bezüglich des Gruppengesetzes auf $E(\mathbb{F}_{q^2})$ ist.
Somit ist $\sigma(\alpha) = \alpha$ und $\sigma(\beta) = -a_1\alpha - a_3 - \beta$ (vgl. (1.0.1) und (1.1.2)). Insbesondere ist nun entweder $\sigma(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$ und $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ ein 2-Teilungspunkt oder $\sigma(\beta) \neq \beta$ und $(\alpha, \beta), (\alpha, \sigma(\beta)) \in E(\mathbb{F}_{q^2}) - E(\mathbb{F}_q)$.
Daraus erhalten wir direkt die Aussagen (4.3.6) bis (4.3.8).

**4.3.6 Proposition.** *Die Bezeichnungen sind wie oben und in* (3.4) *gewählt. Sei* $\mathfrak{P} \in \ker(\mathrm{N}_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_{q^m}})$.

*(i)* *Ist* $(\alpha, \beta)$ *ein* 2*-Teilungspunkt, dann ist* $\sigma(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$ *und* $(x-\alpha, y-\beta) = \mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A)$ *sowie* $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$.

*(ii)* *Sei* $(\alpha, \beta) \notin E(\mathbb{F}_q)$. *Für die Modulgarbe* $\mathcal{F}(\mathfrak{P})$ *zu* $\mathfrak{P}$ *über* $(X', \mathcal{O}'_{X'})$ *ist*

$$\mathcal{F}(\mathfrak{P}) \cap K^2 = \mathcal{F}(\sigma(\mathfrak{P})) \cap K^2 = \mathcal{G}_\alpha \ .$$

Da die Klassen der elliptischen Punkte von $\Omega$ genau den Idealklassen mit trivialer Norm entsprechen, haben wir nun auch diese klassifiziert.

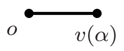
**4.3.7 Proposition.** *Über Knoten, die Garben* $\mathcal{G}_\alpha$ *entsprechen, liegen zwei Klassen elliptischer Punkte, über den Knoten* $e(\mathfrak{p})$ *bzw.* $e(\infty)$ *jeweils eine Klasse.*

Zugleich erhalten wir den Zusammenhang von $v(\alpha)$ als Knoten von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ und als Knoten von $\mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}'$.

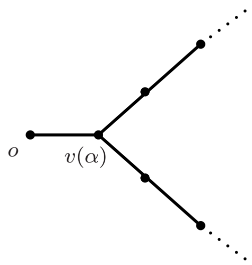
**4.3.8 Proposition.** *Sei* $\alpha \in \mathbb{F}_q$ *und* $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_{q^2}) - E(\mathbb{F}_q)$ *sowie* $\mathfrak{P}$ *das von* $x - \alpha, y - \beta$ *in* $A'$ *erzeugte Ideal.*
*Der Knoten* $v(\alpha) \in \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ *wird auf den Knoten* $v(\alpha)$ *in* $\mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}'$ *abgebildet und somit* $\mathcal{G}_\alpha$ *nach*

$$\mathcal{F}(\mathfrak{P}) \oplus \sigma(\mathcal{F}(\mathfrak{P})) = \mathcal{F}(\mathfrak{P}) \oplus \mathcal{F}(\mathfrak{P})^{-1} \ ,$$

*wobei* $\sigma$ *das nichttriviale Element von* $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ *ist.*
*Graphisch entspricht dies:*




*wird abgebildet auf*




,

*d.h an die Endkante* $(o, v(\alpha)) \in \mathrm{Edge}(\mathcal{T})$ *werden unter Konstantenerweiterung zwei Spitzen angefügt.*
*Aus*

$$\mathcal{F}(\mathfrak{P}) \oplus \mathcal{F}(\mathfrak{P})^{-1} = \mathcal{G}_\alpha \otimes \mathbb{F}_{q^2}$$

*folgt*

$$\mathbb{F}_{q^2}^* \cong \mathcal{A}ut(\mathcal{G}_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{A}ut(\mathcal{F}(\mathfrak{P}) \oplus \mathcal{F}(\mathfrak{P})^{-1}) \cong \mathbb{F}_{q^2}^* \times \mathbb{F}_{q^2}^*$$

*und damit für die Stabilisatoren der Knoten* $v = v(\alpha) \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ *und* $v' = v(\alpha) \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}')$ *die (kanonische) Abbildung*

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{G}_\alpha) = \mathrm{G}(A)_v \hookrightarrow \mathrm{G}(A')_{v'} = \mathcal{A}ut(\mathcal{F}(\mathfrak{P}) \oplus \mathcal{F}(\mathfrak{P})^{-1}) \ .$$

Alle übrigen Einbettungen von Stabilisatoren der Knoten und Kanten ergeben sich aus der Einbettung $\mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^2}$.
Mit (4.3.3) und (4.3.6) ist die Einbettung der Knoten

$$\mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}) \hookrightarrow \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}')$$

vollständig bestimmt. Die Einbettung der Kanten

$$\mathrm{Edge}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}) \hookrightarrow \mathrm{Edge}(\mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}')\ .$$

ergibt sich daraus unmittelbar (vgl. (4.3.3) und (4.3.8)). Wir halten fest:

**4.3.9 Proposition.** *Die Einbettung $i : \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}'$ induziert einen Morphismus*

$$\bar{i} : \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}'$$

*von Bäumen, der eine Einbettung ist; d.h. das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\ i\ } & \mathcal{T}' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T} & \xrightarrow{\ \bar{i}\ } & \mathrm{G}(A')\backslash\mathcal{T}' \end{array}$$

*ist kommutativ. Aus der Einbettung $\mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_{q^2}$ und aus* (4.3.8) *ergeben sich zu jeder Zuordnung $v \mapsto v'$ von Knoten bzw. $e \mapsto e'$ von Kanten die Zuordnungen*

$$\mathrm{G}(A)_v \hookrightarrow \mathrm{G}(A')_{v'} \quad bzw. \quad \mathrm{G}(A)_e \hookrightarrow \mathrm{G}(A')_{e'}$$

*der Stabilisatoren der Knoten bzw. Kanten.*

Der Zusammenhang mit der kanonischen Einbettung $\Omega' \hookrightarrow \Omega$ ergibt sich aus der Betrachtung der Normen, die Elemente aus $\Omega$ bzw. $\Omega'$ auf $\widehat{K}^2_\infty$ bzw. $(\widehat{K}'_\infty)^2$ definieren.
Ein $\omega \in \Omega$, das eine Norm $\nu_\omega$ auf $\widehat{K}^2_\infty$ definiert, definiert genau dann eine Norm auf $(\widehat{K}'_\infty)^2$, wenn $\omega \notin \widehat{K}'_\infty$ liegt (vgl. [Gek86, V.1.5]).
Gilt nun $\nu_\omega = \nu_{Y_\infty}$ für ein $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$-Gitter $Y_\infty$ und ist $\omega \notin \widehat{K}'_\infty$, dann hat $\nu_\omega$ den Einheitsball $Y_\infty$. Liften wir $\nu_\omega$ zu einer Norm $\nu'_\omega$ auf $(\widehat{K}'_\infty)^2$, indem wir $|.|$ zu $|.|'$, dem Absolutbetrag der Fortsetzung $\infty'$ von $\infty$, fortsetzen und $\nu'_\omega(ue_1 + ve_2) := |u\omega + v|'$ setzen, dann hat $\nu'_\omega$ den Einheitsball $Y'_\infty = Y_\infty \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2}$.
Analog können wir die Urbilder von Kantenpunkten aus $e(\mathbb{R})$ zu Normen auf $(\widehat{K}'_\infty)^2$ liften.
Mit der Gebäudeabbildung $\lambda' : \Omega' \longrightarrow \mathcal{T}'$ ergibt sich das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longleftarrow & \Omega' \\ {\scriptstyle\lambda}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\lambda'} \\ \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}' \end{array} \quad .$$

## 4.4 Spitzen der Modulkurve

In (2.3.26) haben wir die Spitzen einer Drinfeld'schen Modulkurve $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{GL}(Y)}$ definiert, wobei $Y$ ein $A$-Gitter vom Rang 2 in $K^2$ ist. Den Zusammenhang der Spitzen von $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$ und $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ haben wir in (4.2.6) geklärt.
Nun wollen wir Funktionen auf $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)} = \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ untersuchen. Dazu ist es notwendig, Uniformiserende in den Spitzen zu bestimmen. Wir folgen hier [Gek86, V.2] bzw. [GR96, 2.7], spezialisieren die Aussagen aber auf unsere Situation. Zunächst rekapitulieren wir die vorangegangenen Aussagen.

Die Komponenten von

$$\coprod_{Y\in\mathcal{P}_2(A)} \mathrm{GL}(Y)\backslash\Omega$$

lassen sich durch die Elemente der Picardgruppe repräsentieren:
Sei $[\mathfrak{d}] \in \mathrm{Pic}(A)$ ein Element der Picardgruppe, dann sind die Gitter, deren Determinanten in der Klasse $[\mathfrak{d}]$ liegen, zueinander isomorph. Deren Ähnlichkeitsklassen wiederum lassen sich repräsentieren von Gittern der Form

$$\mathfrak{d}\mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2 ,$$

wobei $\mathfrak{p} \in \mathrm{RS}(\mathrm{Pic}(A))$ das Repräsentantensystem der Picardgruppe durchläuft. Die Menge aller Spitzen steht daher in Bijektion zu $\mathrm{Pic}(A) \times \mathrm{Pic}(A)$. Vorübergehend bezeichnen wir eine solche Spitze mit $s([\mathfrak{e}],[\mathfrak{f}])$. (In dieser Notation ist $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) = s([\mathfrak{p}],[\mathfrak{p}^{-1}])$.)
Zu einem gegebenen Gitter $Y = \mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2$ wird die Spitze $s([\mathfrak{a}],[\mathfrak{b}])$ in $\mathrm{GL}(Y)\backslash\overline{\Omega}$ von $\infty = (1:0) \in \mathbb{P}^1(K)$ repräsentiert. Und dieser Punkt hat (in unserer Situation) den Stabilisator

$$\mathrm{GL}(Y)_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \middle| \, \mu,\nu \in \mathbb{F}_q^*,\ b \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} \right\} .$$

Wir beschränken nun unsere Betrachtungen auf $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$. Denn einerseits lassen sich mit der obigen Beschreibung die Aussagen leicht auf eine andere Komponente übertragen. Andererseits werden wir genau mit dieser Komponente weiterarbeiten. Zu diesem Zweck haben wir in den vorangegangenen Kapiteln Notationen eingeführt, die hier eine prägnante Bezeichnung aller Objekte erlauben.

### Spitzen von $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$

In (3.3.7) haben wir die Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ als $\mathcal{S}(\infty) = (c(\infty,n))_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. In (3.4.13) haben wir diesen Knoten die Modulgarben $\mathcal{E}(\infty,n)$ zugeordnet. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge der affinen Schnitte einer solchen Garbe $Y := Ae_1 + Ae_2$.

Als Repräsentanten von $\mathcal{S}(\infty)$ wählen wir nach Bemerkung (4.2.6) das Element $\infty = (1:0) \in \mathbb{P}^1(K)$. Der Stabilisator von $\infty$ in $\mathrm{G}(A)$ ist

$$\mathrm{G}(A)_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \middle| \mu, \nu \in \mathbb{F}_q^* \text{ und } b \in A \right\} .$$

Sei nun $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q) - \{\infty\}$ ein $\mathbb{F}_q$-rationaler Punkt und $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta)$ das zugehörige Primideal. Die Knoten der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ stehen in Korrespondenz zu Modulgarben $\mathcal{E}(\mathfrak{p}, n)$ (vgl. (3.4.6)). Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge der affinen Schnitte der Garbe $Y' := \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$.
Die Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ wird von dem eindimensionalen Gitter $\mathcal{O}_\infty(\frac{y-\beta}{x-\alpha}t^{-1}, t^{-1})$ repräsentiert und damit von

$$s_\mathfrak{p} = (t^{-1} : -\frac{y-\beta}{x-\alpha}t^{-1}) = (-\frac{x-\alpha}{y-\beta} : 1) .$$

Die beiden Gitter sind offensichtlich isomorph. Daher sind $\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega} = \mathrm{GL}(Y)\backslash\overline{\Omega}$ und $\mathrm{GL}(Y')\backslash\overline{\Omega}$ in gewisser Weise gleich: sie unterscheiden sich nur um einen Koordinatenwechsel.
Ist nämlich $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ die Matrix aus (3.1.2) mit $Y\vartheta = Y'$, so sind

$$\begin{aligned} \vartheta(\infty) &= s_\mathfrak{p} \qquad\qquad \text{und} \\ \mathrm{GL}(Y') &= \vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)\vartheta . \end{aligned}$$

In $\mathrm{GL}(Y')\backslash\overline{\Omega}$ wird die Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ von $\infty = (1:0) \in \mathbb{P}^1(K)$ repräsentiert. Der Stabilisator von $\infty$ bezüglich der Operation von $\mathrm{GL}(Y')$

$$\mathrm{GL}(Y')_\infty = (\vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)\vartheta)_\infty = \vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)_{s_\mathfrak{p}}\vartheta$$

ist der induktive Limes der Stabilisatoren der Knoten der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$:

$$\mathrm{GL}(Y')_\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}ut(\mathcal{E}(\mathfrak{p}, n)) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \mu & b \\ 0 & \nu \end{smallmatrix}\right) \middle| \mu, \nu \in \mathbb{F}_q, \text{ und } b \in \mathfrak{p}^{-2} \right\} .$$

Gehen wir nun wie in [Gek86, V.2.5.] von den Elementen von $\overline{\Omega} - \Omega$ aus, lösen wir uns von diesen speziellen Koordinaten.
Um einem Element $s \in \mathbb{P}^1(K) = \overline{\Omega} - \Omega$ eine Uniformisierende zuzuordnen, wählen wir zunächst eine Matrix $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ mit $\vartheta(\infty) = s$. Die Gruppe $\vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)\vartheta$ operiert auf $\overline{\Omega}$, und $(\vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)\vartheta)\backslash\overline{\Omega}$ unterscheidet sich von $\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ durch Koordinatentransformation innerhalb der Komponenten $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$.
Bezüglich dieser neuen Koordinaten ist der Stabilisator von $\infty$

$$(\vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)\vartheta)_\infty = \vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)_s\vartheta$$

mit dem Stabilisator $\mathrm{G}(A)_s$ von $s$ unter der Operation von $\mathrm{G}(A)$.

**Bestimmung von Uniformisierenden**

Vorübergehend nennen wir die Gruppe $\Gamma := \vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)\vartheta$. Der Stabilisator von $\infty$ enthält die maximale Untergruppe der Form

$$\Gamma_\infty^u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathfrak{b} \right\}$$

für ein geeignet gewähltes gebrochenes Ideal $\mathfrak{b}$.
Diese Gruppe operiert durch Translationen $z \mapsto z + b$ auf $\Omega$ und stabilisiert

$$\Omega_c := \{ z \in \Omega \mid |z|_i \geq c \} \quad \text{für alle} \quad c \in q^{\mathbb{Q}}$$

($|.|_i$ ist der imaginäre Absolutbetrag auf $\Omega$ und $q^{\mathbb{Q}}$ der Wertebereich von $|.|$).
Wir setzen nun

**4.4.1 Definition.**

$$e_{\mathfrak{b}}(z) := z \prod_{0 \neq b \in \mathfrak{b}} \left( 1 - \frac{z}{b} \right) \quad \textit{und} \quad t(\vartheta, \mathrm{G}(A)) := e_{\mathfrak{b}}^{-1} \, .$$

Dabei ist $e_{\mathfrak{b}}$ eine $e$-Funktion im Sinne von (2.2.6). Sie ist $\mathfrak{b}$-invariant und daher eine auf $\mathfrak{b}\backslash\Omega = \Gamma_\infty^u \backslash \Omega$ nichtverschwindende Funktion.
Es existieren ein $r(c) \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein punktierter Ball

$$B_{r(c)} - \{0\} := \{ z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leq r(c) \} \, ,$$

so daß $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$ nun $\mathfrak{b}\backslash\Omega$ mit $B_{r(c)} - \{0\}$ identifiziert.
(Wäre nun $\Gamma_\infty = \Gamma_\infty^u$, dann wäre $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$ eine Uniformisierende der Spitze in $\Gamma\backslash\overline{\Omega}$, die von $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$ repräsentiert wird.)
Nach [GR96, 2.7.4] existiert eine Konstante $c_0 > 0$, so daß für alle $c \geq c_0$ und alle $\gamma \in \Gamma$ gilt: Ist $\Omega_c \cap \gamma(\Omega_c) \neq \emptyset$, dann ist $\gamma \in \Gamma_\infty$. Für solche $c$ ist

$$\begin{tikzcd} \Gamma_\infty \backslash \Omega \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & \Gamma\backslash\Omega \\ B_{r'}(0) - \{0\} & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} z \\ \downarrow \\ t^{q-1}(z) \end{array}$$

eine offene Einbettung von analytischen Räumen. Hierbei sind $r' = r(c)^{q-1}$ und $t = t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$. Daraus läßt sich nun eine geeignete Definition von Holomorphie einer Funktion in einer Spitze ableiten.

**4.4.2 Definition.** *(i) Eine Funktion $f$ auf $\Gamma\backslash\Omega$ ist* holomorph in der Spitze, *die von $\infty$ repräsentiert wird, genau dann, wenn sie eine Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i \, t(\vartheta, \mathrm{G}(A))^{(q-1)i}(z) \quad \textit{mit } a_i \in \mathbf{C}$$

*mit einem strikt positiven Konvergenzradius hat. In ähnlicher Weise lassen sich Meromorphie sowie Null- und Polstellenordnung definieren.*

*(ii) Seien* $[s] \in \mathrm{G}(A)\backslash\mathbb{P}^1(K)$ *und* $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ *mit* $\vartheta(\infty) = s$. *Hat eine Funktion* $f$ *auf* $\Omega$ *eine Laurentreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{i \geq n}^{\infty} a_i t(\vartheta, \mathrm{G}(A))^i \quad \textit{mit } n \in \mathbb{Z} \textit{ und } a_i \in \mathbf{C},\ a_n \neq 0$$

*mit strikt positivem Konvergenzradius bezüglich des Parameters* $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$, *so bezeichnen wir mit* $\mathrm{ord}_{[s]}(f)$ *die Ordnung von* $f$ *bezüglich dieses Parameters* $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$.

Wenn wir nun eine Funktion $f$ in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ von $\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ untersuchen wollen, und dazu $f$ in einem Repräsentanten $s \in \mathbb{P}^1(K)$ untersuchen müßten, so wählen wir stattdessen eine Matrix $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ und betrachten die Funktion $f \circ \vartheta$ auf $(\vartheta^{-1}\mathrm{G}(A)\vartheta)\backslash\overline{\Omega}$. Diese untersuchen wir dann in $\infty$.
Allerdings sind weder die Wahl des Repräsentanten aus $s \in \mathbb{P}^1(K)$ zu einer Spitze noch die Wahl von $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ eindeutig. Daher sind zwar Holomorphie bzw. Meromorphie sowie Null- und Polstellenordnung von $f$ und seiner Ableitungen an $f \circ \vartheta$ und dessen Ableitungen abzulesen (diese Eigenschaften sind unabhängig von den getroffenen Wahlen), nicht aber die Koeffizienten der Laurentreihenentwicklungen.

**4.4.3 Bemerkung.** Aus dem Blickwinkel der Geometrie der Riemannschen Flächen ist $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))^{q-1}$ der „richtige" Parameter. Allerdings sind die Modulformen, die wir in Kapitel 5 definieren werden, nicht notwendig bezüglich dieses Parameters entwickelbar, daher werden wir häufig $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$ verwenden. Geometrisch gesprochen weichen wir dabei auf eine verzweigte Überlagerung vom Grad $q-1$ aus.
Den Begriff „Spitze" werden wir in Anlehnung an [GR96] und an die klassische Literatur beibehalten, uns in konkreten Rechnungen aber auf das Element in $\overline{\Omega} - \Omega = \mathbb{P}^1(K)$ beziehen, nicht auf die Klasse unter $\mathrm{GL}(Y)$ die von ihm repräsentiert wird.
Nun ist insbesondere zu beachten: in [Gek86], [Gek97a] und [Gek00b] wird als Parameter stets $t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))^{q-1}$ gewählt, in [GR96], [Gek88], [Gek85], [Gek97b] und in [Cor97] hingegen $t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))$.

Erst in Abschnitt [Gek86, VI.1] erfolgt die für uns endgültige Festlegung der Uniformisierenden. Um bessere Rationalitätseigenschaften zu erhalten, müssen Normierungsfaktoren eingeführt werden. Daher definieren wir nun

**4.4.4 Definition.** *Seien* $Y = \mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2$ *ein* $A$*-Gitter in* $K^2$ *und* $\xi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})$ *eine Gitterinvariante von* $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$. *Wir setzen*

$$t_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}} := \xi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) e_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}} \ .$$

*Wir nennen* $t_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}^{q-1}$ *eine* Uniformisiernde der Spitze $s(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *von* $\mathrm{GL}(Y)\backslash\overline{\Omega}$.

**4.4.5 Korollar.** *Sind* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Pic}(A)$ *ein Standardrepräsentant und* $\xi(\mathfrak{p}^{-2})$ *eine Gitterinvariante zu* $\mathfrak{p}^{-2}$ *sowie* $Y = \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$, *dann ist* $t_{\mathfrak{p}^{-2}}^{q-1}$ *eine Uniformisierende der Spitze* $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ *in* $\mathrm{GL}(Y)\backslash\overline{\Omega}$.

## 4.5 Thetafunktionen

Die auf $\Omega$ invertierbaren Funktionen stehen in engem Zusammenhang mit den harmonischen Koketten auf $\mathcal{T}$.
Eine Klasse invertierbarer Funktionen sind cuspidale Thetafunktionen bezüglich $\mathrm{G}(A)$. Dies sind Funktionen, die für alle Elemente aus $\mathrm{G}(A)$ eine Funktionalgleichung erfüllen und die in den Spitzen meromorph sind.
Wir werden zeigen, daß diese Thetafunktionen in unserem Fall sogar $\mathrm{G}(A)$-invariant sind. Damit können wir sie als Funktionen auf $\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ betrachten. Ihr strukturelles Verhalten bestimmt sich vollständig aus den gewichteten Flüssen auf $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$.

### Koketten und invertierbare Funktionen

Sei $B = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder unser Körper $\mathbf{C}$ der „komplexen Zahlen der Charakteristik $p$“. Auf $\mathcal{T}$ lassen sich $B$-wertige Funktionen definieren, die *harmonischen Koketten* oder *currents*, wie sie van der Put in [vdP92] bezeichnet. Dies sind Funktionen

$$\begin{array}{lll} & \varphi : \mathcal{T} \longrightarrow B & \\ \text{mit} & \varphi(-\overrightarrow{e}) = -\varphi(\overrightarrow{e}) & \text{für alle } \overrightarrow{e} \in \mathrm{Edge}^{\pm}(\mathcal{T}) \\ \text{und} & \displaystyle\sum_{t(\overrightarrow{e})=v} \varphi(\overrightarrow{e}) = 0 & \text{für alle } v \in \mathrm{Vert}(\mathcal{T}) \ . \end{array}$$

Die Menge aller $B$-wertigen harmonischen Koketten $\underline{H}(\mathcal{T}, B)$ bildet einen Rechts-$\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$-Modul vermöge

$$(\varphi\vartheta)([\overrightarrow{e}]) = \varphi([\vartheta * \overrightarrow{e}]) \quad \text{für alle } \varphi \in \underline{H}(\mathcal{T}, B),\ \vartheta \in \mathrm{G}(\widehat{K}_\infty) \text{ und } \overrightarrow{e} \in \mathrm{Edge}^{\pm}(\mathcal{T})$$

(vgl. [Gek97a, 1.3] und (3.3.6)).

Die Strukturgarbe auf $\Omega$ ist $\mathcal{O}_\Omega$ (vgl. (2.1.7)), eine invertierbare Funktion $f$ auf $\Omega$ ist also eine nirgends verschwindende holomorphe Funktion im Sinne von (2.1.7). Aus der nicht-archimedischen Funktionentheorie ist bekannt, daß der Absolutbetrag $|f(z)|$ für solche Funktionen $f$ über die Gebäudeabbildung $\lambda$ faktorisiert ([Gek00a, 3.6]).
Zu einer invertierbaren Funktion $f$ definieren wir daher

$$\begin{array}{rcl} r(f) : \mathrm{Edge}(\overrightarrow{\mathcal{T}}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{e} = (u, v) & \longmapsto & r(f)(\overrightarrow{e}) = \log \dfrac{|f(\omega_1)|}{|f(\omega_2)|} \ , \end{array}$$

wobei $\omega_1$ bzw. $\omega_2$ im Urbild unter $\lambda$ von $v$ bzw. $w$ liegt.

**4.5.1 Satz.** *([FvdP81, I.8.8]) Mit den Bezeichnungen von oben gilt:*

*(i)* $r(f) \in \underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Z})$.

*(ii) Die Abbildung* $r : f \mapsto r(f)$ *induziert eine kurze exakte Sequenz von* $\mathrm{G}(\widehat{K}_\infty)$*-Moduln*

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^* \xrightarrow{r} \underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0\ .$$

Eine genauere Beschreibung der Abbildung $r$ liefert [GR96, 1.7.3]:
Da $f \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^*$ keine Nullstellen hat, finden wir zu jeder Kante $e$, der die Teilmenge $D(n,s) = \lambda^{-1}(e(\mathbb{R}))$ von $\Omega$ entspricht (vgl. (4.1.7)), ein $c \in \mathbf{C}^*$, ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $g \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^*$, so daß auf $D(n,s)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= c \cdot (z-s)^k g(z) \text{ und} \\ |g(z)| &= 1\ . \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen aus (4.1.7) ist dann

$$r(f)(\overrightarrow{e}) = \begin{cases} k\ , & \text{im Fall (a)} \\ -k\ , & \text{im Fall (b)} \end{cases}\ .$$

In dieser Arbeit beschreiben Gekeler und Reversat auch den Zusammenhang der Abbildung $r$ mit den Residuen global holomorpher Differentialformen.
Setzen wir $s_1 = t^{-n}(z-s)$ und $s_2 = t^{n+1}(z-s)^{-1}$, so erhalten wir für jede global holomorphe Differentialform $\omega$ auf $\Omega$ die Reihenentwicklung auf $D(n,s)^\circ$

$$\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k\, s_1^k\, ds_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k\, s_2^k\, ds_2$$

mit $a_k, b_k \in \mathbf{C}$. Das Residuum von $\omega$ ist

$$\mathrm{res}(\omega, \overrightarrow{e}) = \begin{cases} a_{-1}\ , & \text{im Fall (a)} \\ b_{-1}\ , & \text{im Fall (b)} \end{cases}\ .$$

Insbesondere ist $\mathrm{res}(\omega, \overrightarrow{e}) = -\mathrm{res}(\omega, -\overrightarrow{e})$.

**4.5.2 Proposition.** *(vgl. [GR96, 1.8.5 bis 1.8.7])*

*(i) Sei* $\omega$ *eine holomorphe Differentialform auf* $\Omega$*. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{res}(\omega) : \mathrm{Edge}(\overrightarrow{\mathcal{T}}) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \overrightarrow{e} &\longmapsto \mathrm{res}(\omega, \overrightarrow{e}) \end{aligned}$$

*eine* $\mathbf{C}$*-wertige harmonische Kokette, also* $\mathrm{res}(\omega, .) \in \underline{H}(\mathcal{T}, \mathbf{C})$.

*(ii) Ist $\omega$ eine holomorphe Differentialform der Form $\frac{df}{f}$ mit invertierbarem $f$, dann ist*

$$r(f)(\overrightarrow{e}) \equiv \mathrm{res}(\omega, \overrightarrow{e}) \bmod p \ ,$$

*und das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^* & \xrightarrow{r} & \underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Z}) \\ {\scriptstyle \mathrm{dlog}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bmod p} \\ \left\{ \begin{array}{l} \textit{holomorphe Differen-} \\ \textit{tialformen auf } \Omega \end{array} \right\} & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \underline{H}(\mathcal{T}, \mathbf{C}) \end{array}$$

*ist kommutativ (es ist* $\mathrm{dlog} : f \mapsto \frac{df}{f}$*).*

## Gewichtete Flüsse

Die Quotientenbildung induziert eine Gewichtung der Kanten von $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$. Dabei ist es notwendig, gerichtete Kanten zu betrachten.

Sei nun $B := \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$.

**4.5.3 Definition.** *Sei* $[\overrightarrow{e}] = ([v], [w]) \in \mathrm{Edge}^{\pm}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ *eine gerichtete Kante. Das* Gewicht von $[\overrightarrow{e}]$ *ist*

$$m([\overrightarrow{e}]) := [\mathrm{G}(A)_v : \mathrm{G}(A)_e] \ ,$$

*und das ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von* $[\overrightarrow{e}] = ([v], [w])$*.*

**4.5.4 Bemerkung.** Seien die Bezeichnungen wie in (4.5.3) gewählt.

(i) Es ist $m([-\overrightarrow{e}]) = [\mathrm{G}(A)_{[w]} : \mathrm{G}(A)_{[e]}]$.

(ii) Die Größen $[\mathrm{G}(A)_{[v]}]$ mit $[v] \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ können wir der Tabelle aus Satz (3.3.12) entnehmen.

(iii) Aus diesem Satz ergibt sich auch: Ist $[w]$ ein Nachfolger von $[v]$, dann ist $m([\overrightarrow{e}]) = 1$.

(iv) Im allgemeinen ist $m([\overrightarrow{e}]) \neq m([-\overrightarrow{e}])$.

(v) Für alle Knoten $[v] \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ gilt

$$\sum_{t([\overrightarrow{e}])=[v]} m([\overrightarrow{e}]) = q + 1 \ .$$

**4.5.5 Standardbeispiel.** (vgl. (3.3.9)) In unserem Standardbeispiel hat der Knoten $v(2)$ drei Kanten. Als orientierte Kanten erhalten diese die Gewichte

| $[\overrightarrow{e}]$ | $[(o, v(2))]$ | $[(v(2), c(\mathfrak{q}))]$ | $[(v(2), c(\mathfrak{q}'))]$ |
|---|---|---|---|
| $m([\overrightarrow{e}])$ | 1 | 1 | 1 |
| $m([-\overrightarrow{e}])$ | 2 | 3 | 3 |

Wir setzen nun

$$\underline{H}(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)} := \{\varphi \in \underline{H}(\mathcal{T}, B) \mid \varphi(\gamma \overrightarrow{e}) = \varphi(\overrightarrow{e}) \; \forall \gamma \in \mathrm{G}(A)\} \; .$$

**4.5.6 Proposition.** *([Gek00b, 1.4]) Sei $B = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$.*

*(i) $\underline{H}(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)}$ ist ein freier $B$-Modul vom Rang $h_K - 1$ (zur Erinnerung: $h_K$ ist die Klassenzahl von $K$).*

*(ii) Es gilt*

$$\underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Q})^{\mathrm{G}(A)} = \underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\mathrm{G}(A)} \otimes \mathbb{Q} \; .$$

Die Gruppe $\underline{H}(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)}$ kann als Funktionenraum auf $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ betrachtet werden.
Genau dann ist eine alternierende Funktion $\varphi$ auf $\mathrm{Edge}^{\pm}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ eine Element von $\underline{H}(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)}$, wenn für alle $[v] \in \mathrm{Vert}(\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T})$ gilt

$$\sum_{t([\overrightarrow{e}])=[v]} m([\overrightarrow{e}])\varphi([\overrightarrow{e}]) = 0 \; . \tag{4.5.7}$$

Diese notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich aus der Definition der harmonischen Koketten auf $\mathcal{T}$ (vgl. [GR96, 3.1]).

**4.5.8 Definition.** *Ein Element aus $\underline{H}(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)}$ heißt ein* (gewichteter) Fluß *auf* $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$.

Nun werden wir eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\mathrm{G}(A)}$ konstruieren und gehen dabei wie folgt vor.
Wir starten in $o$ und gehen in Richtung einer Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$, weisen der ersten Kante auf diesem Weg den Wert 1 zu und der Kante $(o, v(\infty))$ den Wert $-1$. Auf dem endlichen Anteil des Baumes gibt es (genau) einen Pfad zwischen den Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ und $\mathcal{S}(\infty)$. Allen Kanten außerhalb der Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ und $\mathcal{S}(\infty)$ sowie dieses Pfades weisen wir den Wert 0 zu. Die restlichen Zuweisungen ergeben sich dann aus den Bedingungen (4.5.7) an einen gewichteten Fluß.
Bei diesem Konstruktionsverfahren müssen wir unterscheiden, ob $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$ ist oder nicht; dies liefert die beiden unterschiedlichen Fälle in (4.5.9).
Auf diese Weise werden wir $h_K - 1$ linear unabhängige Elemente von $\underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Q})^{\mathrm{G}(A)}$ erhalten, also eine Vektorraumbasis.

**4.5.9 Definition/Satz.** *Der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\underline{H}(\mathcal{T},\mathbb{Q})^{\mathrm{G}(A)}$ hat eine Basis*

$$\{\varphi_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}\}\ ,$$

*die auch eine $\mathbb{Z}$-Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls $\underline{H}(\mathcal{T},\mathbb{Z})^{\mathrm{G}(A)}$ ist.*
*Dabei sind die $\varphi_{\mathfrak{p}}$ wie folgt definiert:*

*(i) Sei $(\alpha,\beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ ein 2-Teilungspunkt und $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta)$. Dann ist*

$$\varphi_{\mathfrak{p}}([\overrightarrow{e}]) := \begin{cases} 1\ , & [\overrightarrow{e}] = (o, v((\alpha)) \\ -1\ , & [\overrightarrow{e}] = (o, v(\infty)) \\ q\ , & [\overrightarrow{e}] = (v(\alpha), c(\mathfrak{p},1)) \\ -q\ , & [\overrightarrow{e}] = (v(\infty), c(\infty,1)) \\ (q-1)\cdot q^n\ , & [\overrightarrow{e}] = (c(\mathfrak{p},n), c(\mathfrak{p},n+1)),\ n \geq 1 \\ -(q-1)\cdot q^n\ , & [\overrightarrow{e}] = (c(\infty,n), c(\infty,n+1)),\ n \geq 1 \end{cases}$$

*sowie $\varphi_{\mathfrak{p}}(-[\overrightarrow{e}]) = -\varphi_{\mathfrak{p}}([\overrightarrow{e}])$ und $\varphi_{\mathfrak{p}}([\overrightarrow{e}]) = 0$, falls $[\overrightarrow{e}]$ nicht in den Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$, $\mathcal{S}(\infty)$ oder auf dem Pfad zwischen diesen liegt.*

*(ii) Sei $(\alpha,\beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ kein 2-Teilungspunkt und $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta)$. Dann ist*

$$\varphi_{\mathfrak{p}}([\overrightarrow{e}]) := \begin{cases} 1\ , & [\overrightarrow{e}] = (o, v(\alpha)) \\ -1\ , & [\overrightarrow{e}] = (o, v(\infty)) \\ q-1\ , & [\overrightarrow{e}] = (v(\alpha), c(\mathfrak{p},1)) \\ -q\ , & [\overrightarrow{e}] = (v(\infty), c(\infty,1)) \\ (q-1)\cdot q^n\ , & [\overrightarrow{e}] = (c(\mathfrak{p},n), c(\mathfrak{p},n+1)),\ n \geq 1 \\ -(q-1)\cdot q^n\ , & [\overrightarrow{e}] = (c(\infty,n), c(\infty,n+1)),\ n \geq 1 \end{cases}$$

*sowie $\varphi_{\mathfrak{p}}(-[\overrightarrow{e}]) = -\varphi_{\mathfrak{p}}([\overrightarrow{e}])$ und $\varphi_{\mathfrak{p}}([\overrightarrow{e}]) = 0$, falls $[\overrightarrow{e}]$ nicht in den Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$, $\mathcal{S}(\infty)$ oder auf dem Pfad zwischen diesen liegt.*

*Beweis.* Ist $h_K = 1$, dann hat $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ nur eine Spitze. Daher gibt es dann auf $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$ nur den trivialen Fluß.

Sei nun $h_K > 1$.
Es ist $B = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$. Wir betrachten $\underline{H}(\mathcal{T},B)^{\mathrm{G}(A)}$ als Funktionenraum auf $\mathrm{G}(A)\backslash\mathcal{T}$.
Daß die $\varphi_{\mathfrak{p}}$ in $\underline{H}(\mathcal{T},B)^{\mathrm{G}(A)}$ liegen, läßt sich leicht nachrechnen.

So ist beispielsweise für $2 \cdot (\alpha, \beta) = \infty$ und $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$

$$\begin{aligned}\sum_{t([\overrightarrow{e}])=c(\mathfrak{q},1)} m(\overrightarrow{e})\varphi(\overrightarrow{e}) &= \underbrace{m(-(v(\alpha), c(\mathfrak{p},1)))}_{=q-1}\underbrace{\varphi(-(v(\alpha), c(\mathfrak{p},1)))}_{=-q} \\ &\quad + \underbrace{m(c(\mathfrak{p},1), e(\mathfrak{p}))}_{=1}\underbrace{\varphi(c(\mathfrak{p},1), e(\mathfrak{p}))}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{m(c(\mathfrak{p},1), c(\mathfrak{p},2))}_{=1}\underbrace{\varphi(c(\mathfrak{p},1), c(\mathfrak{p},2))}_{=q(q-1)} \\ &= (q-1)\cdot(-q) + 1\cdot 0 + 1 \cdot q(q-1) \qquad = 0\ .\end{aligned}$$

Die anderen Rechnungen sind analog zu führen.
Die lineare Unabhängigkeit ist offensichtlich. Somit bilden diese Elemente eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis.
Sei nun $\mu \in \underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{\mathrm{G}(A)}$. Als Element von $\underline{H}(\mathcal{T}, \mathbb{Q})^{\mathrm{G}(A)}$ ist $\mu$ eine Linearkombination der Basiselemente

$$\mu = \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Pic}(A)} a_{\mathfrak{p}}\varphi_{\mathfrak{p}} \quad \text{mit } a_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Q}\ .$$

Zu jedem $\mathfrak{p}$ existiert eine Kante $[\overrightarrow{e}]$ mit $\varphi_{\mathfrak{q}}([\overrightarrow{e}]) = 0$ für alle $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ und $\varphi_{\mathfrak{p}}([\overrightarrow{e}]) = 1$. Also liegt $a_{\mathfrak{p}}$ in $\mathbb{Z}$. □

**4.5.10 Bemerkung.** In [GR96] wird die Gruppe

$$\underline{H}_!(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)} := \left\{ \varphi \in \underline{H}(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ hat kompakten} \\ \text{Träger modulo } \mathrm{G}(A) \end{array} \right\}$$

als Gruppe der $B$-wertigen Spitzen-Koketten für $\mathrm{G}(A)$ definiert. Ihr Rang ist $g(\overline{M}_{\mathrm{G}(A)})$, daher ist sie in unserem Fall trivial. Zahlreiche Aussagen in [GR96], die wir im folgenden nutzen werden, hängen von der Größe von $\underline{H}_!(\mathcal{T}, B)^{\mathrm{G}(A)}$ ab.

## Cuspidale Thetafunktionen

**4.5.11 Definition.** *(i) Eine* Thetafunktion (zu $\mathrm{G}(A)$) *ist eine meromorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbf{C}$ mit den Eigenschaften:*

*(a) Für jede Matrix $\gamma \in \mathrm{G}(A)$ exitsiert ein $c_f(\gamma) \in \mathbf{C}^*$, so daß die Funktionalgleichung*

$$f(\gamma z) = c_f(\gamma) f(z)$$

*für alle $z \in \Omega$ erfüllt ist.*

*(b) $f$ ist meromorph in den Spitzen (vgl.* (4.4.2)*).*

*(ii) Eine* holomorphe Thetafunktion *ist auf $\Omega$ holomorph und invertierbar und in den Spitzen holomorph.*

(iii) *Eine* meromorphe Thetafunktion *ist meromorph auf* $\Omega$ *und holomorph in den Spitzen.*

(iv) *Eine* cuspidale Thetafunktion *ist invertierbar und holomorph auf* $\Omega$ *und meromorph in den Spitzen.*

In [Gek97a] nennt Gekeler die cuspidalen Thetafunktionen auch Thetafunktionen mit degenerierten Parametern. Dieser Arbeit folgend geben wir nun ein Erzeugendensystem für die Gruppe der cuspidalen Thetafunktionen.
Zunächst stellen wir das wichtigste Konstruktionsverfahren für Thetafunktionen vor. Dazu definieren wir

$$\widetilde{\Gamma} := \mathrm{G}(A)/Z(\mathbb{F}_q) \ .$$

Diese Gruppe operiert effektiv auf $\Omega$.

**4.5.12 Definition.** *Für alle* $\omega, \eta \in \overline{\Omega}$ *und* $z \in \Omega$ *setzen wir*

$$F(\omega,\eta,z) := \begin{cases} \frac{z-\omega}{z-\eta} \ , & \omega \neq \infty \neq \eta \\ (1-\frac{z}{\eta})^{-1} \ , & \omega = \infty,\ \eta \neq 0,\infty \\ 1-\frac{z}{\omega} \ , & \eta = \infty,\ \omega \neq 0,\infty \\ z^{-1} \ , & \omega = \infty, \eta = 0 \\ z \ , & \eta = \infty,\ \omega = 0 \\ 1 \ , & \omega = \eta = \infty \end{cases}$$

*und definieren die Thetafunktion für* $\mathrm{G}(A)$

$$\theta(\omega,\eta,z) := \prod_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} F(\gamma\omega, \gamma\eta, z) \ .$$

Für Funktionen dieser Art gilt

**4.5.13 Proposition.** *([Gek00b, 2.3 und 2.6])*

(i) $\theta(\omega,\eta,z)$ *konvergiert lokal uniform für alle* $z \in \Omega$ *und definiert auf* $\Omega$ *eine meromorphe Funktion.*

(ii) *Für alle* $\omega, \eta \in \overline{\Omega}$ *ist* $\theta(\omega,\eta,.)$ *eine Thetafunktion.*

(iii) *Sind* $\omega, \eta \in \mathbb{P}^1(K)$ *oder ist* $\mathrm{G}(A)\omega = \mathrm{G}(A)\eta$*, dann ist* $\theta(\omega,\eta,.)$ *auf* $\Omega$ *invertierbar.*

(iv) *Für* $\omega, \eta \in \Omega$ *mit* $\mathrm{G}(A)\omega \neq \mathrm{G}(A)\eta$ *hat* $\theta(\omega,\eta,.)$ *Nullstellen der Ordnung* $\#\widetilde{\Gamma}_\omega$ *in* $\mathrm{G}(A)\omega$*, Pole der Ordnung* $\#\widetilde{\Gamma}_\eta$ *in* $\mathrm{G}(A)\eta$ *und keine weiteren Null- oder Polstellen.*

(v) *Bezüglich der Uniformisierenden* $t_s^{q-1}$ *in der Spitze* $[s]$ *von* $\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ *hat* $\theta(\omega,\eta,.)$

   (a) *eine einfache Nullstelle, falls* $s \in \mathrm{G}(A)\omega \neq \mathrm{G}(A)\eta$ *ist,*

   (b) *einen einfachen Pol, falls* $s \in \mathrm{G}(A)\eta \neq \mathrm{G}(A)\omega$ *ist.*

   *Ist* $\mathrm{G}(A)\omega = \mathrm{G}(A)\eta$*, so ist* $\theta(\omega,\eta,.)$ *in allen Spitzen invertierbar.*

(vi) *Seien* $\omega \in \mathbb{P}^1(K)$ *und* $\eta \in \Omega$.

   (a) $\theta(\omega,\eta,.)$ *hat in der Spitze* $[s]$ *mit* $s \in \mathrm{G}(A)\omega$ *bezüglich der Uniformsierenden* $t_s^{q-1}$ *eine einfache Nullstelle, in den Punkten* $\mathrm{G}(A)\eta$ *Pole der Ordnung* $\#\widetilde{\Gamma}_\eta$ *und keine weiteren Nullstellen oder Pole.*

   (b) $\theta(\eta,\omega,.)$ *hat in den Punkten* $\mathrm{G}(A)\eta$ *Nullstellen der Ordnung* $\#\widetilde{\Gamma}_\eta$*, einen einfachen Pol bezüglich der Uniformisierenden* $t_s^{q-1}$ *in der Spitze* $[s]$ *mit* $s \in \mathrm{G}(A)\omega$ *und keine weiteren Nullstellen oder Pole.*

**4.5.14 Proposition.** *Für alle* $\gamma \in \mathrm{G}(A)$ *und alle* $\omega,\eta \in \overline{\Omega}$ *gilt*

$$\theta(\omega,\eta,\gamma z) = \theta(\omega,\eta,z) \ ,$$

*d.h. der Faktor* $c_\theta(\gamma) =: c(\omega,\eta,\gamma)$ *ist* 1 *für alle Thetafunktionen dieser Form, und diese sind somit* $\mathrm{G}(A)$*-invariant.*

*Beweis.* Der Faktor $c(\omega,\eta,\gamma)$ hängt nach [GR96, 5.4.1] nur von der Klasse von $\gamma$ in $\overline{\mathrm{G}(A)} = \mathrm{G}(A)^{ab}/\{\text{Torsion}\}$ ab. Nach [GR96, 3.2.] ist $\overline{\mathrm{G}(A)} = \{1\}$, weil $\overline{\mathrm{G}(A)}$ den Rang $g(\overline{M}_{\mathrm{G}(A)})$ hat. Also ist $c(\omega,\eta,.)$ auf ganz $\mathrm{G}(A)$ gleich. Aus $\theta(\omega,\eta,\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) z) = \theta(\omega,\eta,z)$ folgt $c(\omega,\eta,.) = 1$. □

**4.5.15 Bemerkung.** (i) Die in [Gek00b] definierte Gruppe $\Theta'_c(\mathrm{G}(A))$ fällt in unserer Situation mit der Gruppe der cuspidalen Thetafunktionen $\Theta_c(\mathrm{G}(A))$ zusammen.

(ii) Jede cuspidale Thetafunktion hat in einer Spitze $[s]$ eine Entwicklung bezüglich $t(\vartheta,\mathrm{G}(A))^{q-1}$ für ein $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ mit $\vartheta(\infty) = s$.

Damit ergibt sich auch

**4.5.16 Proposition.** *(i) Die Gruppe der holomorphen Thetafunktionen* $\Theta_h(\mathrm{G}(A))$ *ist* $\mathbf{C}^*$.

*(ii) Die Gruppe der cuspidalen Thetafunktionen* $\Theta_c(\mathrm{G}(A))$ *wird von* $\mathbf{C}^*$ *und den* $h_K - 1$ *Thetafunktionen*

$$\theta(\omega,\infty,.)$$

*erzeugt, wobei* $\omega$ *ein Repräsentantensystem von* $\mathrm{G}(A)\backslash(\mathbb{P}^1(K) - \mathrm{G}(A)\infty)$ *durchläuft.*

*Beweis.* Nach [Gek00b, 3.4] induziert die Abbildung $r$ die Bijektionen

$$\Theta_h(\mathrm{G}(A))/\mathbf{C}^* \xrightarrow{\sim} \underline{H}_!(\mathcal{T},\mathbb{Z})^{\mathrm{G}(A)} \quad \text{und} \quad \Theta'_c(\mathrm{G}(A))/\mathbf{C}^* \xrightarrow{\sim} \underline{H}(\mathcal{T},\mathbb{Z})^{\mathrm{G}(A)} .$$

Da nach (4.5.10) die Gruppe $\underline{H}_!(\mathcal{T},B)^{\mathrm{G}(A)}$ trivial ist, sind alle holomorphen Thetafunktionen konstant.
Die Funktionen $\theta(\omega,\infty,.)$ haben für die verschiedenen Repräsentanten von $\mathrm{G}(A)\backslash(\mathbb{P}^1(K)-\mathrm{G}(A)\infty)$ lauter verschiedene Nullstellen, können also nicht multiplikativ auseinander erzeugt werden. Da es $h_K-1$ viele sind, die wir als Erzeuger außer $\mathbf{C}^*$ benötigen, haben wir sogar ein minimales Erzeugendensystem gefunden. □

Nun ist auch die folgende Definition gerechtfertigt.

**4.5.17 Definition ($j$-Invariante).** *(i) Sei* $\mathrm{Pic}(A)\neq\{(1)\}$*. Dann definieren wir die $j$-Invarianten von* $\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ *vermöge*

$$\begin{array}{rcl} j_\omega : \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \theta(\omega,\infty,z) \end{array} ,$$

*wobei $\omega$ ein Repräsentantensystem von* $\mathrm{G}(A)\backslash(\mathbb{P}^1(K)-\mathrm{G}(A)\infty)$ *durchläuft.*

*(ii) Ist* $\mathrm{Pic}(A)=\{1\}$*, dann existieren $P(-1)\geq 1$ viele Klassen elliptischer Punkte. Für alle elliptischen Punkte $\alpha$ setzen wir*

$$j_\alpha(z)=\theta(\infty,\alpha,z) .$$

*Zu beachten ist, daß $j_\alpha$ eine meromorphe, aber keine cuspidale Thetafunktion ist.*

Den Zusammenhang mit den gewichteten Flüssen erhalten wir über die Abbildung $r$ und mit der folgenden Definition.

**4.5.18 Definition.** *Die Gruppe der Spitzendivisoren bezeichnen wir mit* $\mathrm{Div}(\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega})_\infty$*. Sie enthält die Untergruppe* $\mathrm{Div}(\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega})^0_\infty$ *der Spitzendivisoren von Grad* 0.

Für ein $f\in\Theta_c(\mathrm{G}(A))$ ist der Spitzendivisor von $f$ gleich dem Divisor von $f$, denn $f$ ist ja auf $\Omega$ invertierbar. Damit ist

$$\mathrm{div}(f)=\sum_{[s]\in\mathrm{G}(A)\backslash\mathbb{P}^1(K)}\frac{\mathrm{ord}_{[s]}(f)}{q-1}\cdot[s]\in\mathrm{Div}(\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega})_\infty .$$

**4.5.19 Satz.** *Die Abbildung* $f\mapsto\mathrm{div}(f)$ *induziert einen Isomorphismus*

$$r(\Theta_c(\mathrm{G}(A)))\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Div}(\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega})^0_\infty .$$

*Beweis.* Die Aussage folgt aus [Gek97a, 3.8] angewandt auf unsere Situation. □

# Kapitel 5

# Modulformen

Drinfeld'sche Modulformen sind holomorphe Funktionen (vgl. (2.1.7)) mit einem vorgeschriebenen Transformationsverhalten unter $\mathrm{GL}(Y)$ und vorgegebenen Regularitätsbedingungen ($Y$ ist ein $A$-Gitter).
Der Raum der Modulformen ist ein graduierter Ring, dessen Summanden endlichdimensionale $\mathbf{C}$-Vektorräume sind. Diese Dimensionen werden wir bestimmen und dabei strukturell der Herleitung der Formel für $\mathbb{F}_q[T]$ von Cornelissen in [Cor97] folgen.
Zudem werden wir das Verhalten einiger Modulformen in den Spitzen untersuchen und so in einigen Fällen lineare Unabhängigkeit nachweisen können.

Wir haben wie stets eine elliptische Kurve $(E, A, K)$ fest gewählt.

## 5.1 Definition und Beispiele

Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebrochene Ideale sowie $Y = \mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2$. Von einer Modulform $f$ werden wir zu vorgegebenen $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ verlangen

$$f(\gamma z) = \frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)^m} f(z) \qquad \text{für alle } \gamma = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(Y) \ . \tag{5.1.1}$$

Wir fixieren nun $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und beginnen mit einer technischen Vorüberlegung, die die Erläuterung zu [Gek86, V.3.1] näher ausführt.

**5.1.2 Definition.** *Ist $f$ eine meromorphe Funktion auf $\Omega$, dann definieren wir für alle $\vartheta = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(K)$*

$$f_{[\vartheta]}(z) := f_{[\vartheta],k,m}(z) := \frac{\det(\vartheta)^m}{(h_3 z + h_4)^k} f(\vartheta z) \ .$$

**5.1.3 Lemma.** *(i) Die Zuordnung $(f, \vartheta) \mapsto f_{[\vartheta]}$ definiert eine Rechtsoperation von $\mathrm{G}(K)$ auf der Menge der meromorphen Funktionen $f : \Omega \to \mathbf{C}$.*

*(ii) Erfüllt $f$ die Bedingung* (5.1.1)*, so gilt:*

*(a) Für $\gamma \in \mathrm{GL}(Y)$ ist $f_{[\gamma]}(z) = f(z)$.*
*(b) $f_{[\vartheta]}$ ist fix unter $\vartheta^{-1}\mathrm{GL}(Y)\vartheta$ bezüglich der Operation aus* (i)*.*
*(c) $f_{[\vartheta]}(z)$ ist invariant unter $z \mapsto z+b$, falls $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \vartheta^{-1}\mathrm{GL}(Y)\vartheta$ ist.*

*Beweis.* Wir definieren (vorübergehend)

$$\psi(\vartheta, z) := h_3 z + h_4 \qquad \text{für alle } \vartheta = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{G}(K) \ .$$

Dann gilt für $\vartheta$ wie oben und $\vartheta' = \left(\begin{smallmatrix} h'_1 & h'_2 \\ h'_3 & h'_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(K)$

$$\begin{aligned} \psi(\vartheta, \vartheta' z) &= h_3(\vartheta' z) + h_4 = h_3 \frac{h'_1 z + h'_2}{h'_3 z + h'_4} + h_4 \\ &= \frac{1}{h'_3 z + h'_4}\left((h_3 h'_1 + h_4 h'_3)\, z + (h_3 h'_2 + h_4 h'_4)\right) \\ &= \frac{\psi(\vartheta\vartheta', z)}{\psi(\vartheta', z)} \ . \end{aligned}$$

In dieser Notation ist

$$\begin{aligned} (f_{[\vartheta]})_{[\vartheta']}(z) = \frac{\det(\vartheta')^m}{\psi(\vartheta', z)^k} f_{[\vartheta]}(\vartheta' z) &= \frac{\det(\vartheta')^m}{\psi(\vartheta', z)^k} \frac{\det(\vartheta)^m}{\psi(\vartheta, \vartheta' z)^k} f(\vartheta\vartheta' z) \\ &= \frac{\det(\vartheta\vartheta')^m}{\psi(\vartheta\vartheta', z)^k} f(\vartheta\vartheta' z) = f_{[\vartheta\vartheta']}(z) \ . \end{aligned}$$

Ist $\gamma \in \mathrm{GL}(Y)$, so ist offensichtlich $f_{[\gamma]}(z) = f(z)$.
Wählen wir nun $\vartheta' = \vartheta^{-1}\gamma\vartheta$ mit $\gamma \in \mathrm{GL}(Y)$, dann ist

$$f_{[\vartheta][\vartheta^{-1}\gamma\vartheta]}(z) = f_{[\gamma\vartheta]}(z) = f_{[\gamma][\vartheta]}(z) = f_{[\vartheta]}(z) \ .$$

Zum Beweis von *(ii)(c)* betrachten wir

$$\begin{aligned} f_{[\vartheta]}(\vartheta' z) &= \frac{\det(\vartheta)^m}{\psi(\vartheta, \vartheta' z)^k} f(\gamma\vartheta z) \\ &= \frac{\det(\vartheta)^m}{\psi(\vartheta, \vartheta' z)^k} \frac{\psi(\gamma, \vartheta z)^k}{\det(\gamma)^m} f(\vartheta z) \\ &= \frac{\det(\vartheta)^m}{\det(\gamma)^m} \cdot \left( \frac{\psi(\vartheta', z)}{\psi(\vartheta\vartheta', z)} \cdot \frac{\psi(\gamma\vartheta, z)}{\psi(\vartheta, z)} \right)^k f(\vartheta z) \\ &= \frac{\psi(\vartheta', z)^k}{\det(\vartheta')^m} f_{[\vartheta]}(z) \ . \end{aligned}$$

Somit ist $f_{[\vartheta]}(z)$ genau dann invariant unter $z \mapsto \vartheta' z$, wenn $\frac{\psi(\vartheta', z)^k}{\det(\vartheta')^m} = 1$ ist.
Wählen wir nun $\vartheta'$ wie im Lemma angegeben, so ist diese Bedingung sicherlich erfüllt. $\square$

**5.1.4 Korollar.** *Sei* $f : \Omega \to \mathbf{C}$ *eine meromorphe Funktion, die* (5.1.1) *erfüllt. Dann hat* $f$ *eine Laurentreihenentwicklung bezüglich* $e^{-1}_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}} = t(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \mathrm{GL}(Y))$ *und* $f_{[\vartheta]}$ *eine Laurentreihenentwicklung bezüglich der Uniformisierenden* $t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))$ *aus* (4.4.1).

Mit dieser Vorüberlegung lassen sich nun Modulformen definieren.

**5.1.5 Definition.** *Seien* $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Eine* holomorphe (Drinfeld'sche) Modulform für $\mathrm{GL}(Y)$ vom Gewicht $k$ und Typ $m$ *ist eine Funktion*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \ ,$$

*die die Bedingungen erfüllt:*

*(i)* $f(\gamma z) = \frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)^m} f(z)$ *für alle* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(Y)$.

*(ii)* $f$ *ist rigid holomorph.*

*(iii)* $f$ *ist holomorph in den Spitzen, d.h.*

*(a) in der Spitze* $\infty$: $f$ *hat bezüglich* $t_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}$ *eine Potenzreihenentwicklung mit strikt positivem Konvergenzradius;*

*(b) in der Spitze* $s$ *mit* $\vartheta(\infty) = s$: *Hier hat* $f_{[\vartheta]}$ *bezüglich der Uniformisierenden* $t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))$ *(vgl.* (4.4.1)*) eine Potenzreihenentwicklung mit strikt positivem Konvergenzradius.*

*Die Menge der holomorphen Modulformen vom Gewicht* $k$ *und Typ* $m$ *bezeichnen wir mit* $M_{k,m}(\mathrm{GL}(Y))$. *Zudem setzen wir* $M_k(\mathrm{GL}(Y)) := M_{k,0}(\mathrm{GL}(Y))$.

**5.1.6 Bemerkung.** (i) Eine getrennte Definition von Holomorphie in der Spitze $\infty$ dient nur der Veranschaulichung, notwendig ist sie nicht. Wir können ebenso eine Matrix $\vartheta$ mit $\vartheta(\infty) = \infty$ wählen und die Definition aus Teil *(b)* verwenden.

(ii) Analog lassen sich meromorphe Modulformen definieren, ebenso Null- und Polstellenordnung.

(iii) $M_{k,m}(\mathrm{GL}(Y))$ ist ein $\mathbf{C}$-Vektorraum.

(iv) Es genügt, den Typ $m$ zwischen 0 und $q-2$ zu wählen.

(v) Ist $k \not\equiv 2m \mod q-1$, so ist $M_{k,m}(\mathrm{GL}(Y)) = \{0\}$.

Letzteres begründet sich wie folgt: Ist $\mu \in \mathbb{F}_q^*$ und $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$, dann ist

$$f(z) = f(\gamma z) = \frac{\mu^k}{\mu^{2m}} f(z) \ .$$

Sei nun $k \equiv 2m \mod q-1$. Sind $\mu, \nu \in \mathbb{F}_q^*$, so liegt $\left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{smallmatrix}\right)$ im Stabilisator von $\infty$. Wegen

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{smallmatrix}\right) z\right) = \frac{\nu^k}{(\mu\nu)^m} f(z) = \mu^{-m} f(z)$$

ist $f(z)$ im allgemeinen nicht invariant unter $\mathrm{GL}(Y)_\infty$. Daher hat eine Modulform im allgemeinen nur eine Potenzreihenentwicklung bezüglich des Parameters $t_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}$, nicht jedoch bezüglich $t_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}^{q-1}$.
Wir nennen eine Modulform eine Spitzenform oder cuspidal, wenn sie in allen Spitzen von $\mathrm{GL}(Y)$ verschwindet. Ist in allen Spitzen die Verschwindungsordnung der Modulform $f$ bezüglich des Paramters $t(*, \mathrm{GL}(Y))$ größer oder gleich $i$, so nennen wir $f$ eine $i$-fache Spitzenform oder $i$-fach cuspidal.
Den Unterraum der $i$-fachen Spitzenformen bezeichnen wir mit $M_{k,m}^i(\mathrm{GL}(Y))$.
Für die Gesamtheit aller Modulformen gilt

**5.1.7 Proposition.** *([GR96, 2.8.5])*

*(i) Alle $M_{k,m}(\mathrm{GL}(Y))$ sind endlichdimensional.*

*(ii) Es ist*

$$M_{k',m'}(\mathrm{GL}(Y)) \cap \left( \sum_{(k,m)\neq(k',m')} M_{k,m}(\mathrm{GL}(Y)) \right) = \{0\} \ ,$$

*wobei $m$ die Klassen modulo $q-1$ durchläuft (vgl. (5.1.6)). D.h. die $M_{k,m}(\mathrm{GL}(Y))$ sind linear unabhängig. Deshalb können wir den graduierten Ring*

$$M(\mathrm{GL}(Y)) := \bigoplus_{k,m} M_{k,m}(\mathrm{GL}(Y))$$

*bilden.*

## Logarithmische Ableitung von Thetafunktionen

Die im letzten Kapitel definierten Thetafunktionen $\theta(\omega, \eta, z)$ mit $\omega, \eta \in \overline{\Omega}$ sind als Funktionen auf $\overline{\Omega}$ invariant unter $\mathrm{G}(A)$.

**5.1.8 Proposition.** *Seien $\omega, \eta \in \mathbb{P}^1(K)$. Dann ist die logarithmische Ableitung*

$$\frac{\theta'(\omega, \eta, z)}{\theta(\omega, \eta, z)} \in M_{2,1}^1(\mathrm{G}(A))$$

*eine einfache Spitzenform.*

Für das Transformationsverhalten von $\frac{d}{dz} f(\gamma z)$ entscheidend ist das Verhalten der inneren Ableitung, das wir noch häufiger benötigen. Zur Betrachtung der Null- und Polstellenordnung benötigen wir zudem die Ableitungen von $t(*, \mathrm{GL}(Y))^k$. Daher halten wir fest

**5.1.9 Lemma.** *Sei $Y$ ein $A$-Gitter in $K^2$ vom Rang 2.*

*(i) Zu $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(K)$ ist*

$$\frac{d}{dz}\gamma(z) = \frac{\det(\gamma)}{(h_3 z + h_4)^2} \ .$$

*(ii) Sei $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und $t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))$ der Parameter zu $s \in \mathbb{P}^1(K)$. Dann ist*

$$\frac{d}{dz} t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))^k = -k\, t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))^{k+1} \ .$$

*Beweis.* (i) Einfaches Nachrechnen

$$\frac{d}{dz}\gamma(z) = \frac{d}{dz}\frac{h_1 z + h_2}{h_3 z + h_4} = \frac{h_1(h_3 z + h_4) - h_3(h_1 z + h_2)}{(h_3 z + h_4)^2}$$

ergibt die Aussage.

(ii) Sei $t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))(z) = e_{\mathfrak{b}}^{-1}(z)$ für ein geeignetes gebrochenes Ideal $\mathfrak{b}$. Dann ist $\frac{d}{dz} e_{\mathfrak{b}}(z) = 1$ und deshalb

$$\frac{d}{dz} t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))^k = \frac{d}{dz} e_{\mathfrak{b}}^{-k}(z) = -k e_{\mathfrak{b}}^{-(k+1)}(z) = -k\, t(\vartheta, \mathrm{GL}(Y))^{k+1} \ .$$

□

*Beweis von* (5.1.8). Das Transformationsverhalten ist nun leicht nachzuweisen, denn für die Ableitung gilt

$$\frac{d}{dz}\theta(\omega, \eta, z) = \frac{d}{dz}\theta(\omega, \eta, \gamma z) = \theta'(\omega, \eta, \gamma z) \cdot \frac{d}{dz}\gamma(z) = \frac{\det(\gamma)}{(h_3 z + h_4)^2}\theta'(\omega, \eta, \gamma z) \ ,$$

wobei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(A)$ ist. Der Nachweis der Holomorphie von $\frac{\theta'}{\theta}$ in den Spitzen erfordert etwas mehr Sorgfalt.
Wir bezeichnen hier nun zu einem $s \in \mathbb{P}^1(K)$ mit $\vartheta(\infty) = s$ und fest gewähltem $\vartheta$ die Uniformisierende mit $t_s := t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$.
Wir müssen zwei Fälle unterscheiden. Liegen $\omega$ und $\eta$ in verschiedenen Bahnen unter $\mathrm{GL}(Y)$, dann hat $\theta(\omega, \eta, .)$ nach (4.5.13) bezüglich der Uniformisierenden der Spitzen die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \theta(\omega, \eta, t_\omega) &= \sum_{i \geq 1} a_i t_\omega^{i(q-1)} \ , \qquad a_1 \neq 0 \\ \theta(\omega, \eta, t_\eta) &= \sum_{i \geq -1} b_i t_\eta^{i(q-1)} \ , \quad b_{-1} \neq 0 \\ \theta(\omega, \eta, t_\delta) &= \sum_{i \geq 0} c_i t_\delta^{i(q-1)} \ , \qquad c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

mit $\delta \notin \mathrm{G}(A)\omega \cup \mathrm{G}(A)\eta$ und $a_i, b_i, c_i \in \mathbf{C}$.
Andererseits sind $\frac{d}{dz}t_s^{q-1}(z) = -t_s^q(z)$ und $\frac{d}{dz}t_s^{1-q}(z) = t_s^{2-q}(z)$. Dies ergibt für die logarithmischen Ableitungen

$$\frac{\theta'(\omega,\eta,t_\omega)}{\theta(\omega,\eta,t_\omega)} = \frac{-a_1 t_\omega^q(z) + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}}{a_1 t_\omega^{q-1}(z) + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}}$$

und damit einfache Nullstellen in allen Punkten aus $[\omega] = \mathrm{G}(A)\omega$;

$$\frac{\theta'(\omega,\eta,t_\eta)}{\theta(\omega,\eta,t_\eta)} = \frac{b_{-1} t_\eta^{-q+2}(z) + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}}{b_{-1} t_\eta^{-q+1}(z) + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}}$$

und damit einfache Nullstellen in allen Punkten aus $[\eta]$;

$$\frac{\theta'(\omega,\eta,t_\delta)}{\theta(\omega,\eta,t_\delta)} = \frac{c_1 t_\delta^q(z) + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}}{c_0 \quad + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}}$$

und mindestens $q$-fache Nullstellen in $\mathbb{P}^1(K) - (\mathrm{G}(A)\omega \cup \mathrm{G}(A)\eta)$.
Wenn $\omega$ und $\eta$ in derselben Bahn unter $\mathrm{GL}(Y)$ liegen, dann ist nach (4.5.13) die Funktion $\theta(\omega,\eta,t_\eta)$ in allen Spitzen invertierbar. Nach Definition (4.5.11) ist $\theta(\omega,\eta,z)$ also eine holomorphe Thetafunktion. Diese sind nach (4.5.16) konstant.
$\square$

## 5.2 Eisensteinreihen

Die wohl prominentesten Modulformen sind Eisensteinreihen. Sie werden zu einem vorgegebenen Gitter $\Lambda$ konstruiert, und sowohl die Koeffizienten der $e$-Funktion $e_\Lambda$ als auch die der Polynome $\phi_a^\Lambda$ mit $a \in A$ (vgl. (2)) sind Ausdrücke in Eisensteinreihen.
Da sie einerseits als Funktionen, andererseits aber auch als Konstanten Verwendung finden, ist es nicht einfach, eine geeignete Notation zu finden.

**5.2.1 Definition.** *Sei $k \in \mathbb{N}$. Weiter seien $Y = \mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2$ ein $A$-Gitter in $K^2$ und $\Lambda$ ein $A$-Gitter in $\mathbf{C}$ vom Rang 1 oder 2.*

*(i) Mit $\sum'_{m\in M}$ bezeichnen wir die Summation über alle nichttrivialen Elemente aus $M$, z.B. hat $\sum'_{\lambda\in\Lambda}$ die Indexmenge $\Lambda - \{(0,0)\}$.*

*(ii) Die Eisensteinreihe vom Gewicht $k$ zu $\Lambda$ ist*

$$E^{(k)}(\Lambda) := \sum_{\lambda\in\Lambda}{}' \lambda^{-k} .$$

*(iii) Für alle $z \in \Omega$ definieren wir*

$$E_Y^{(k)}(z) := \sum_{a\in\mathfrak{a}, b\in\mathfrak{b}}{}' \frac{1}{(az+b)^k} \ .$$

*(iv) Wir setzen $E_Y^{(0)}(z) = -1$.*

Ist nun $\Lambda = Y_{\mathrm{z}} = i_{\mathrm{z}}(Y)$, so ist $E^{(k)}(\Lambda) = E_Y^{(k)}(\mathrm{z})$ (vgl. (2.2.5)).

**5.2.2 Proposition.** *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $Y$ ein $A$-Gitter in $K^2$. Die Eisensteinreihe $E_Y^{(k)}(z)$ ist eine Modulform vom Gewicht $k$ und Typ $0$. Sie hat in jeder Spitze eine Entwicklung bezüglich des Parameters $t(*, \mathrm{GL}(Y))^{q-1}$.*

*Beweis.* Sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(Y)$, dann ist

$$a\gamma z + b = \frac{1}{h_3 z + h_4}((ah_1 + bh_3)z + ah_2 + bh_4) \ ,$$

und da $Y\gamma = \{(ah_1 + bh_3)e_1 + (ah_2 + bh_4)e_2 \mid ae_1 + be_2 \in Y\} = Y$ ist, erhalten wir

$$E_Y^{(k)}(\gamma z) = (h_3 z + h_4)^k E_Y^{(k)}(z) \ .$$

Daß eine Eisensteinreihe holomorph auf $\Omega$ ist, ist klar (vgl. (2.1.7)). Die Holomorphie in den Spitzen zeigt Goss in [Gos80, Theorem 2.19].
Da $E_Y^{(k)}(z)$ vom Typ 0 ist, hat sie eine Entwicklung bezüglich $t(*, \mathrm{GL}(Y))^{q-1}$. $\square$

Sind die $A$-Gitter $\Lambda$ und $\Lambda'$ in $\mathbf{C}$ ähnlich, existiert also ein $c \in \mathbf{C}^*$ mit $\Lambda' = c\Lambda$, so ist $E^{(k)}(\Lambda') = c^{-k} E^{(k)}(\Lambda)$. Eisensteinreihen zu isomorphen $A$-Gittern in $K^2$ lassen sich ebenfalls ineinander überführen.

**5.2.3 Lemma.** *Seien $Y = \mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2$ und $Y' = \mathfrak{a}\mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{b}\mathfrak{p}^{-1}e_2$, wobei $\mathfrak{p}$ ein Primideal vom Grad 1 ist, sowie $\vartheta = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(K)$ eine Matrix mit $Y\vartheta = Y'$ bezüglich der Basis $(e_1, e_2)$. Dann gilt für die Eisensteinreihen vom Gewicht $k$*

$$E_{Y'}^{(k)}(z) = E_{Y,[\vartheta]}^{(k)}(z) = (h_3 z + h_4)^{-k} E_Y^{(k)}(\vartheta z) \ .$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} E_Y^{(k)}(\vartheta z) &= \sum_{a\in\mathfrak{a},\, b\in\mathfrak{b}}{}' (a\vartheta z + b)^{-k} \\ &= (h_3 z + h_4)^k \underbrace{\sum_{a\in\mathfrak{a},\, b\in\mathfrak{b}}{}' ((ah_1 + bh_3)z + ah_2 + bh_4)^{-k}}_{E_{Y\vartheta}^{(k)}(z)} \end{aligned}$$

$\square$

Betrachten wir nun mit den Bezeichnungen des Lemmas zu $E_Y^{(k)}$ die Entwicklung in einer Spitze $s_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{GL}(Y)\backslash\mathbb{P}^1(K)$, so untersuchen wir $E_{Y'}^{(k)}$ in der Spitze $\infty$ von $\mathrm{GL}(Y')\backslash\mathbb{P}^1(K)$. Dies ist aber nur eine Koordinatentransformation von $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{GL}(Y)} - \mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}$ (vgl. Abschnitt (4.4)).

## Zusammenhang mit Drinfeld-Moduln

Zu einem gegebenen $A$-Gitter $\Lambda$ in $\mathbf{C}$ hatten wir in (2.2) die $e$-Funktion $e_\Lambda$ und in (2.3) den Drinfeld-Modul $\phi^\Lambda$ definiert.
In [Gek86, II.2] werden die Zusammenhänge zwischen $e$-Funktion, Koeffizientenfunktionen von $\phi^\Lambda$ und den Eisensteinreihen hergeleitet. Diese Aussagen sind für uns von Interesse.

**5.2.4 Proposition.** *Sei $\Lambda$ ein $A$-Gitter in $\mathbf{C}$.*

*(i)* $\frac{z}{e_\Lambda(z)} = 1 - \sum_{k\geq 1} E^{(k)}(\Lambda) z^k = -\sum_{k\geq 0} E^{(k)}(\Lambda) z^k.$

*(ii) Sei $a \in A$ und $\phi_a^\Lambda = \sum_{i=0}^{2\deg(a)} l_i \tau^i$. Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$aE^{(q^k-1)}(\Lambda) = \sum_{i+j=k} E^{(q^i-1)}(\Lambda) l_j^{q^i} \ .$$

*(iii) Wählen wir nun $Y \subset K^2$ fest und variieren $i_z$ (vgl. (2.2.5)), so erhalten wir die Koeffizientenfunktionen*

$$\operatorname{coeff}(Y, a, i, z) := \operatorname{coeff}(\phi_a^{Y_z}, i)$$

*und somit*

$$aE_Y^{(q^k-1)}(z) = \sum_{i+j=k} E_Y^{(q^i-1)}(z) \operatorname{coeff}(Y, a, j, z)^{q^i} \ .$$

*(iv) Die Funktionen $\operatorname{coeff}(Y, a, i, z)$ sind Modulformen vom Gewicht $q^i - 1$ und Typ $0$ für $\mathrm{GL}(Y)$.*

Insbesondere sind die Koeffizientenfunktionen linear abhängig von den Eisensteinreihen und umgekehrt.

**5.2.5 Vereinbarung.** *Zu einem fixierten $A$-Gitter $Y \subset K^2$ wollen wir die Einbettungen $i_z : \widehat{K}_\infty^2 \hookrightarrow \mathbf{C}$ variieren. Um einige Schreibweisen zu vereinfachen, schreiben wir nun häufig $\phi_a^Y$ mit $a \in A$ und meinen damit das Tupel der Koeffizientenfunktionen*

$$\operatorname{coeff}(Y, a, i, z) \quad \text{für alle } 0 \leq i \leq 2\deg(a) \ ,$$

*die wir in (5.2.4) definiert haben.*

### Der Funktionenkörper von $\mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}$

Meromorphe Modulformen vom Gewicht 0 und Typ 0 sind $\mathrm{GL}(Y)$-invariant. Wir nennen sie *modulare Funktionen*. Wie wir bereits gesehen haben, sind die cuspidalen Thetafunktionen modulare Funktionen für $\mathrm{G}(A)$.
Der folgende Satz besagt, daß sich modulare Funktionen als rationale Ausdrücke in Modulformen schreiben lassen.
Für eine Menge $M$ meromorpher Modulformen bezeichnen wir mit $\mathbf{C}(M)_0$ die Elemente vom Gewicht und Typ 0 in $\mathbf{C}(M)$. Dann gilt

**5.2.6 Satz.** *[Gek86, VII.1] Sei $a \in A$ mit $\deg(a) = d$.*

*(i) Der Funktionenkörper von $\mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}$ ist*

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}) &= \mathbf{C}(E_Y^{(q^i-1)} \mid 1 \leq i \leq 2d)_0 \\ &= \mathbf{C}(\mathrm{coeff}(Y, a, i, .) \mid 1 \leq i \leq 2d)_0 \ .\end{aligned}$$

*(ii) Der Funktionenkörper des groben Modulschemas $M_A^2$ ist*

$$K(M_A^2) = K(\mathrm{coeff}(Y, a, i, z) \mid 1 \leq i \leq 2d)_0 \ .$$

*(iii) Der algebraische Abschluß von $K$ in $K(M_A^2)$ ist der Hilbertklassenkörper $H$ von $K$ bezüglich $\infty$.*

Wie wir im ersten Kapitel bereits festgestellt haben, hat $A$ kein Element vom Grad 1. Da jedoch $\deg(x) = 2$ ist, erhalten wir als direkte Folgerung

$$\mathbf{C}(\mathrm{M}_{\mathrm{GL}(Y)}) = \mathbf{C}(E_Y^{(q^i-1)} \mid 0 \leq i \leq 4)_0 \ .$$

### Isogenien von Rang-1 Drinfeld-Moduln

Nun lassen sich auch die Koeffzienten der $e_\Lambda$-Funktion als Ausdrücke in den Eisensteinreihen $E^{(k)}(\Lambda)$ beschreiben.

**5.2.7 Lemma.** *Sei $\Lambda$ ein $A$-Gitter in $\mathbf{C}$ (beliebigen Ranges). Die in* (2.2.6) *definierte e-Funktion zu diesem Gitter schreiben wir als Potenzreihe*

$$e_\Lambda(z) = \sum_{i \geq 0} \alpha(\Lambda, i) z^{q^i} \ .$$

*Dann sind die $\alpha(\Lambda, i)$ Polynome in den Eisensteinreihen $E^{(k)}(\Lambda)$ mit $k \leq q^i$. Insbesondere sind $\alpha(\Lambda, 1) = E^{(q-1)}(\Lambda)$ und*

$$\alpha(\Lambda, 2) = E^{(q^2-1)}(\Lambda) + E^{(q-1)}(\Lambda)^{q+1} \ .$$

*Beweis.* Für den Koeffizientenvergleich in

$$\begin{aligned} z &= \left(-\sum_{k\geq 0} E^{(k)}(\Lambda)z^k\right)\left(\sum_{i\geq 0}\alpha(\Lambda,i)z^{q^i}\right) \\ &= \sum_{j\geq 1}\sum_{q^i+k=j} -E^{(k)}(\Lambda)\,\alpha(\Lambda,i)z^j \end{aligned}$$

müssen wir zu einem gegebenen $j$ alle $i,k$ ermitteln mit $q^i+k=j$. Sei $i_{max}$ mit $q^{i_{max}} \leq j < q^{i_{max}+1}$, dann ist

$$\{(i,k) \mid q^i+k=j\} = \{(i,j-q^i) \mid 0 \leq i \leq i_{max}\} \ .$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} z =& \sum_{l\geq 0}\sum_{j=q^l}^{q^{l+1}-1}\sum_{i=0}^{l} -E^{(j-q^i)}(\Lambda)\,\alpha(\Lambda,i)z^j \\ =& \sum_{j=1}^{q-1} -E^{(j-1)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,0)z^j + \sum_{j=q}^{q^2-1}\left(-E^{(j-1)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,0) - E^{(j-q)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,1)\right)z^j \\ &+ \sum_{q^2}^{q^3-1}\left(-E^{(j-1)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,0) - E^{(j-q)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,1) - E^{(j-q^2)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,2)\right)z^j + \ldots \end{aligned}$$

Da der Koeffizient von $z$ gleich 1 ist und von $z^j$ für $j>1$ gleich 0, erhalten wir

$$\begin{aligned} -E^{(0)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,0) = \alpha(\Lambda,0) = 1 \ , \\ -E^{(q-1)}(\Lambda) - E^{(0)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,1) = -E^{(q-1)}(\Lambda) + \alpha(\Lambda,1) = 0 \end{aligned}$$

und damit $\alpha(\Lambda,1) = E^{(q-1)}(\Lambda)$. Aus

$$-E^{(q^2-1)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,0) - E^{(q^2-q)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,1) - E^{(0)}(\Lambda)\alpha(\Lambda,2) = 0$$

und $E^{(q^2-q)}(\Lambda) = E^{(q-1)}(\Lambda)^q$ folgt

$$\alpha(\Lambda,2) = E^{(q^2-1)}(\Lambda) + E^{(q-1)}(\Lambda)^{q+1} \ .$$

□

Wir wenden nun das Lemma auf Rang-1 $A$-Gitter an.

**5.2.8 Korollar.** *Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Ideale, $\mathfrak{a} \subset A$ und $L = \xi(\mathfrak{b})\mathfrak{b}$ ein spezielles Gitter zu $\mathfrak{b}$ (vgl.* (2.3.18)*). Dann ist der konstante Term der Isogenie $\rho_{\mathfrak{a}}^L$*

$$D(\rho_{\mathfrak{a}}^L) = \xi(\mathfrak{b})^{q-1}(E^{(q-1)}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) - E^{(q-1)}(\mathfrak{b}))^{-1} \ ,$$

*und dieser ist unabhängig von der Wahl der Gitterinvarianten.*

*Beweis.* Die Aussage folgt aus (2.3.21) und dem obigen Lemma. □

**Gitterinvarianten**

Auch die in (2.3.18) eingeführten Gitterinvarianten lassen sich als Ausdrücke in Eisensteinreihen zu Rang-1 Gittern auffassen. Dabei bestimmen wir hier konkret die $(q-1)$-te Potenz der Invarianten.
Sei $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes Ideal, $\xi(\mathfrak{b})$ eine Gitterinvariante und $L = \xi(\mathfrak{b})\mathfrak{b}$ ein spezielles Gitter.
Dann ist der zugehörige Rang-1 Drinfeld-Modul *sgn*-normalisiert (vgl. (2.3.12)); ist also $f$ ein normiertes Polynom, so ist $l(\rho_f^L) = 1$.
Andererseits können wir die Koeffizienten der $\tau$-Potenzen mit (5.2.4) bestimmen. Wegen $\deg(x) = 2$ ist

$$\rho_x^L = x + \mathrm{coeff}(\rho_x^L, 1)\tau + \mathrm{coeff}(\rho_x^L, 2)\tau^2 \ ,$$

und aus (5.2.4) folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{coeff}(\rho_x^L, 1) &= (x^q - x)E^{(q-1)}(L) \ , \\ 1 = \mathrm{coeff}(\rho_x^L, 2) &= (x^{q^2} - x)E^{(q^2-1)}(L) + (x^{q^2} - x^q)E^{(q-1)}(L)^{q+1} \\ &= \xi(\mathfrak{b})^{1-q^2}\left((x^{q^2} - x)E^{(q^2-1)}(\mathfrak{b}) + (x^{q^2} - x^q)E^{(q-1)}(\mathfrak{b})^{q+1}\right) \ . \end{aligned}$$

Analog erhalten wir aus der Betrachtung von $1 = l(\rho_y^L)$ die Potenz $\xi(\mathfrak{b})^{q^3-1}$.

**5.2.9 Korollar.** *Sei $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes Ideal. Dann gilt für alle Gitterinvarianten*

$$\begin{aligned} \xi(\mathfrak{b})^{q^2-1} =& (x^{q^2} - x)E^{(q^2-1)}(\mathfrak{b}) + (x^{q^2} - x^q)E^{(q-1)}(\mathfrak{b})^{q+1} \ , \\ \xi(\mathfrak{b})^{q^3-1} =& (y^{q^3} - y)E^{(q^3-1)}(\mathfrak{b}) + (y^{q^3} - y^q)E^{(q-1)}(\mathfrak{b})E^{(q^3-q)}(\mathfrak{b}) \\ &+ (y^{q^3} - y^{q^2})(E^{(q-1)}(\mathfrak{b})^{q^2+q+1} + E^{(q^2-1)}(\mathfrak{b})E^{(q^3-q^2)}(\mathfrak{b})) \ , \end{aligned}$$

*und $\xi(\mathfrak{b})^{q-1} = \xi(\mathfrak{b})^{q^3-1}(\xi(\mathfrak{b})^{(q^2-1)})^{-q}$ ist ein rationaler Ausdruck in Eisensteinreihen.*

Ebenso läßt sich nun der Zusammenhang zwischen den Gitterinvarianten $\xi(\mathfrak{b})$ und $\xi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})$ für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ bestimmen.
Nach [Gek86, IV.5] ist der Rang-1 Drinfeld-Modul $\mathfrak{a} * \rho^L$ *sgn*-normalisiert und $\mathfrak{a} * \rho^L \cong \rho^M$ mit $M := \xi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$, d. h. es existiert ein $c \in \mathbf{C}^*$ mit

$$c \cdot (\mathfrak{a} * \rho^L) = \rho^M \cdot c \ .$$

Nach [Hay79] ist das Gitter zu $\mathfrak{a} * \rho^L$

$$N := D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)\mathfrak{a}^{-1}L = D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)\xi(\mathfrak{b})\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} \ .$$

Da nun $cN = M$ ist mit dem oben gewählten $c$, ergibt sich

$$c = \xi(\mathfrak{b})^{-1}\xi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)^{-1} \ .$$

Werten wir nun $c(\mathfrak{a} * \rho^L)_x = \rho_x^M c$ aus, so erhalten wir wegen der Normalisierung $c = c^{q^2}$, und dies liefert

$$\xi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{q^2-1} = \xi(\mathfrak{b})^{q^2-1} D(\rho_{\mathfrak{a}}^L)^{q^2-1} \ .$$

Da nach (5.2.8) der konstante Term der Isogenie $D(\rho_{\mathfrak{a}}^L) = \xi(\mathfrak{b})^{q-1}(E^{(q-1)}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) - E^{(q-1)}(\mathfrak{b}))^{-1}$ ist, gilt

**5.2.10 Korollar.** *Mit den obigen Bezeichnungen ist*

$$\xi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{q^2-1} = \xi(\mathfrak{b})^{q(q^2-1)}(E^{(q-1)}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) - E^{(q-1)}(\mathfrak{b}))^{1-q^2} \ .$$

## Entwicklung in den Spitzen

Ein zentrales Mittel zur Beschreibung von Modulformen sind deren Entwicklungen in den Spitzen. Wir werden ein Verfahren angeben, mit dem alle Eisensteinreihen $E_Y^{(k)}$ für $\mathrm{G}(A)$-stabile Gitter $Y$ und $k = q^j - 1$ mit $j \in \mathbb{N}$ entwickelt werden können. Daraus gewinnen wir für einige Fälle die ersten Terme der Entwicklung explizit und Gradabschätzungen für die höheren Terme. Dies ermöglicht es uns dann, Aussagen über lineare Unabhängigkeiten zu treffen.
Wir folgen dabei den Ideen aus [Gek88], müssen sie aber unserer Situation anpassen. In [Gek88] ist der zugrunde liegende Ring stets ein Hauptidealring, so daß dort die Idealklassengruppe trivial ist.
Der Übergang zu dem affinen Koordinatenring einer elliptischen Kurve führt zu einem erheblichen, vor allem technischen Mehraufwand in allen Rechnungen.
Das Ergebnis, das wir erhalten werden, spiegelt aber auch die zunehmende Komplexität des Raumes von Modulformen wider. In (5.4) werden wir feststellen, daß wir allein mit Eisensteinreihen vom Gewicht $k$ keine Basis des Raumes der Modulformen vom Gewicht $k$ und Typ 0 konstruieren können.
Aus den Rechnungen wird ersichtlich, daß wir ebenso die Eisensteinreihen zu einem beliebigen Stabilisator $\mathrm{GL}(Y)$ eines Gitters $Y$ berechnen können. Allerdings macht dies die Einführung zusätzlicher Faktoren und neuer Bezeichner notwendig. Aus Gründen der Überschaubarkeit konzentrieren wir uns daher auf die Eisensteinreihen zu $\mathrm{G}(A)$.
Wir führen diese und alle weiteren Entwicklungen bezüglich der normierten Uniformisierenden (vgl. (4.4.4)) durch. Damit gleichen wir unsere Notationen den aus [Gek86, VI ff.], [Gek88] und [Cor97] an, weichen aber von denen in [Gek97a] ab (vgl. auch (5.5)).

### Eisensteinreihen zu $\mathrm{G}(A)$

Eine Eisensteinreihe zu einem gegebenen Gitter $Y$ ist genau dann Modulform für $\mathrm{G}(A)$, wenn das zugehörige Gitter $Y$ invariant unter $\mathrm{G}(A)$ ist.

**5.2.11 Lemma.** *Sei $Y$ ein $A$-Gitter vom Rang 2 in $K^2$, das $G(A)$-invariant ist. Dann existiert ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{c}$, so daß gilt:*

$$Y = \mathfrak{c}\, e_1 + \mathfrak{c}\, e_2\ .$$

*Beweis.* Zu jedem $A$-Gitter $Y$ in $K^2$ existieren eine Basis $(b_1, b_2)$ und gebrochene Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, so daß $Y = \mathfrak{a}\, b_1 + \mathfrak{b}\, b_2$ ist. Diese Darstellung ist allerdings nicht eindeutig.
Wir schneiden nun $Y$ mit der Richtung $Ke_1$; dabei existiert ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{c}$, so daß $Y \cap Ke_1 = \mathfrak{c}e_1$ ist. Nun existiert ein Untermodul $T$ in $Y$, so daß $Y = T \oplus \mathfrak{c}e_1$ ist (vgl. [CR62, II.22]). Dieser ist gegeben durch ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{g}$ und einen Vektor $d \in K^2$, also $T = \mathfrak{g}d$, wobei Ideal und Vektor nicht eindeutig bestimmt sind. Wir wählen beide nun so, daß $d = d_1e_1 + d_2e_2$ ist sowie $d_1, d_2$ in $A$ liegen und teilerfremd sind (gegebenenfalls müssen wir dazu das Ideal $\mathfrak{g}$ entsprechend abändern).
Nun existieren $h_1, h_2 \in A$ mit $h_1d_1 + h_2d_2 = 1$. Die Matrix

$$\gamma = \begin{pmatrix} h_1 & -d_2 \\ h_2 & d_1 \end{pmatrix}$$

hat nur Einträge in $A$ und Determinante 1, ist also in $\mathrm{G}(A)$. Es ist nun

$$(d_1, d_2)\gamma = (h_1d_1 + h_2d_2, 0) = (1, 0)\ .$$

Da $Y$ $\mathrm{G}(A)$-invariant ist, erhalten wir $(\mathfrak{g}d)\gamma = \mathfrak{g}e_1 \subset \mathfrak{c}e_1$. Aus dem gleichen Grund ist $(\mathfrak{c}e_1)\gamma^{-1} = \mathfrak{c}d \subset \mathfrak{g}e_1$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}$ und $Y = \mathfrak{c}d + \mathfrak{c}e_1$.
Genauer ist

$$\begin{aligned} Y =& \{c_1(d_1e_1 + d_2e_2) + c_2e_1 \mid c_1, c_2 \in \mathfrak{c}\} \\ =& \{(c_1d_1 + c_2)e_1 + c_1d_2e_2 \mid c_1, c_2 \in \mathfrak{c}\} \end{aligned}$$

Für alle $c \in \mathfrak{c}$ ist $cd_1e_1 \in Y$ und $cd_1e_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = cd_1e_2 \in Y$. Daher ist $\mathfrak{c}d_1 \subset \mathfrak{c}d_2$. Da aber $d_1$ und $d_2$ in $A$ liegen und teilerfremd sind, folgt $d_2 \in \mathbb{F}_q^*$.
Wir können das Gitter also auch beschreiben durch

$$Y = \{c_1(d_1e_1 + e_2) + c_2e_1 \mid c_1, c_2 \in \mathfrak{c}\} = \{(c_1d_1 + c_2)e_1 + c_1e_2 \mid c_1, c_2 \in \mathfrak{c}\}\ .$$

Damit ist $\mathfrak{c}e_1 + \mathfrak{c}e_2 \subset Y$. Offensichtlich ist aber auch $Y \subset \mathfrak{c}e_1 + \mathfrak{c}e_2$. Und damit folgt die Behauptung. □

Nach (1.3) können wir jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{c}$ schreiben als $\mathfrak{c} = c \cdot \mathfrak{q}$, wobei $\mathfrak{q}$ ein Primideal vom Grad 1 oder das triviale Ideal (1) und $c$ ein Element aus $K$ ist. Nach den obigen Ausführungen unterscheiden sich die Eisensteinreihen zu $\mathfrak{c}e_1 + \mathfrak{c}e_2$ und $\mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{q}e_2$ nur um einen (konstanten) Faktor.

**5.2.12 Korollar.** *Sei* $Y(\mathfrak{q}) := \mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{q}e_2$. *Die Eisensteinreihen zu* $\mathrm{G}(A)$ *sind bis auf konstante Faktoren aus* $K^*$ *gegeben durch* $E^{(k)}_{Y(\mathfrak{q})}$, *wobei* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)$ *das Standardrepräsentantensystem der Idealklassen durchläuft.*

Wollen wir nun für ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)$ die Eisensteinreihe $E^{(k)}_{Y(\mathfrak{q})}$ in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ entwickeln, so wählen wir eine Matrix $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ mit

$$Y(\mathfrak{q})\vartheta = \mathfrak{q}\mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}e_2 =: \tilde{Y}$$

nach (5.2.3). Dazu können wir die in (3.1.2) bestimmte Matrix wählen, um einen eventuell notwendigen Automorphismus von $\mathfrak{p}e_1+\mathfrak{p}^{-1}e_2$ ergänzt. Nun müssen wir $E^{(k)}_{\tilde{Y}}$ bezüglich $t_{\mathfrak{p}^{-2}}$ entwickeln.
Da ein $c \in K^*$ und ein $\mathfrak{r} \in \mathrm{Pic}(A)$ existieren, so daß $c\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{r}$ ist, und sich die Eisensteinreihen zu $\mathfrak{q}\mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}$ und $\mathfrak{r}e_1 + c\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}$ nur um den Faktor $c^{-k}$ unterscheiden, können wir nun für den Rest dieses Abschnittes annehmen:

**5.2.13 (Annahme).** Bis zum Ende dieses Abschnittes bezeichnen wir mit $\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)$ das triviale Ideal (1) oder ein Primideal vom Grad 1, mit $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes Ideal und mit $Y$ das Gitter

$$Y = \mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{b}e_2 \ .$$

Weiter fixieren wir eine Gitterinvariante $\xi(\mathfrak{b})$ zu $\mathfrak{b}$ und $L := \xi(\mathfrak{b})\mathfrak{b}$.

### Goss-Polynome

Goss beobachtete, daß die Gittersummen $S_{\Lambda,k}(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(z+\lambda)^{-k}$ Polynome vom Grad $k$ in $S_{\Lambda,1}(z)$ sind. Gekeler nennt diese Polynome in [Gek88] Goss-Polynome. Statt der formalen Definition geben wir hier eine konstruktive Beschreibung dieser Polynome.

**5.2.14 Definition.** *([Gek88, 3.4., 3.10.]) Zu einem A-Gitter* $\Lambda \subset \mathbf{C}$ *definieren wir die* Goss-Polynome $G_{\Lambda,k}$ *rekursiv durch*

*(i) Für* $1 \le k \le q$ *ist* $G_{\Lambda,k}(X) = X^k$,

*(ii) für alle* $k \ge 0$ *ist* $G_{\Lambda,k}(0) = 0$, *insbesondere ist* $G_{\Lambda,0} \equiv 0$,

*(iii) für* $p = \mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ *ist* $G_{\Lambda,pk}(X) = G_{\Lambda,k}(X)^p$,

*(iv) mit* $e_\Lambda(z) = \sum_{i\ge 0} \alpha(\Lambda,i)z^{q^i}$ *ergibt sich rekursiv für jedes* $k > 0$

$$G_{\Lambda,k}(X) = X \cdot \sum_{\substack{i\ge 0\\ k\ge q^i}} \alpha(\Lambda,i)G_{\Lambda,k-q^i}(X) \ .$$

Diese Rekursion ist überbestimmt. Die Bedingungen sind jedoch miteinander verträglich.

**5.2.15 Beispiel.** (i) $G_{\Lambda,q-1}(X) = X^{q-1} = G_{\Lambda,1}(X)^{q-1}$.

(ii) Für $k = q^2$ erhalten wir

$$G_{\Lambda,q^2}(X) = X^{q^2} = X(G_{\Lambda,q^2-1}(X) + \alpha(\Lambda,1)G_{\Lambda,q^2-q}(X)) \; ,$$

und somit ist

$$G_{\Lambda,q^2-1}(X) = X^{q^2-1} - \alpha(\Lambda,1)X^{q(q-1)} \; .$$

(iii) Entsprechend ist

$$G_{\Lambda,q^3-1}(X) = X^{q^3-1} - \alpha(\Lambda,1)X^{q(q^2-1)} + (\alpha(\Lambda,1)^{q+1} - \alpha(\Lambda,2))X^{q^2(q-1)} \; .$$

Induktiv folgt

**5.2.16 Korollar.** *Sei $j > 0$ und $G_{\Lambda,q^j-1}(X) = \sum_{i\geq 0} b_i X^i$. Ist $b_i \neq 0$, so ist $i \equiv 0, q-1 \mod q(q-1)$.*

Die Goss-Polynome entsprechen den Newton-Formeln für Potenzsummen von Nullstellen von Polynomen und sind die Koeffizienten der erzeugenden Funktion

$$G_\Lambda(X,Z) = \frac{XZ}{1 - Xe_\Lambda(Z)} = \sum_{k\geq 0} G_{\Lambda,k}(X)Z^k \; .$$

Schließlich ergibt sich für $k = q^j - 1$ mit $j \geq 0$

$$G_{\Lambda,k}(e_\Lambda^{-1}(z)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (z-\lambda)^{-k} \; . \tag{5.2.17}$$

**5.2.18 (Annahme).** Sei nun stets $k = q^j - 1$ für ein $j \in \mathbb{N}$.

Analog zu [Gek88] können wir nun die Eisensteinreihe $E_Y^{(k)}(z)$ durch Goss-Polynome in $t_\mathfrak{b}$ ausdrücken.
Nach (1.1.11) bzw. (1.1.12) ist für jedes Element aus $\mathfrak{q}$ der Term höchsten Grades eindeutig bestimmt.
Zu einem Element $g \in A$ existiert ein eindeutig bestimmtes Paar $(i_1, i_2)$ nicht negativer Zahlen mit

$$\deg(g) = 2i_1 + 3i_2 \quad \text{und} \quad i_2 \in \{0,1\} \; ,$$

und $g$ ist genau dann normiert, wenn gilt

$$g(x,y) = x^{i_1}y^{i_2} + h(x,y) \quad \text{mit } h \in A \text{ und } \deg(h) < \deg(g) \; .$$

Ist nun $(\alpha,\beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ und $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$ sowie $g \in \mathfrak{q}$, so existieren eindeutig bestimmte Polynome $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{F}_q[x] \subset \mathbb{F}_q[x,y]$ mit

$$g(x,y) = (x-\alpha)g_1(x) + (y-\beta)g_2(x) \; .$$

Ist $g$ normiert, so ist, falls $\deg(g)$ gerade bzw. ungerade ist, $g_1$ bzw. $g_2$ normiert. Betrachten wir nun zudem $E_Y^{(k)}(z)$, wenn wir $z$ gegen $\infty$ gehen lassen, so erhalten wir den konstanten Term der Eisensteinreihe. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} E_Y^{(k)}(z) &= \sum_{\substack{a\in\mathfrak{q}\\ b\in\mathfrak{b}}}{}' (az+b)^{-k} \\ &= \sum_{b\in\mathfrak{b}}{}' b^{-k} - \sum_{a\in\mathfrak{q}\,\text{norm.}} \sum_{b\in\mathfrak{b}} (az+b)^{-k} \end{aligned}$$

und ergänzt um die Gitterinvariante

$$= \xi(\mathfrak{b})^k \left( E^{(k)}(L) - \sum_{a\in\mathfrak{q}\,\text{norm.}} \sum_{b\in L} (\xi(\mathfrak{b})az+b)^{-k} \right) .$$

Nach (4.4.4) ist $t_{\mathfrak{b}(z)} = (\xi(\mathfrak{b})e_{\mathfrak{b}}(z))^{-1} = e_L^{-1}(\xi(\mathfrak{b})z)$ und nach (5.2.17) ist

$$G_{L,k}(t_{\mathfrak{b}}(az)) = \sum_{b\in L} (\xi(\mathfrak{b})az+b)^{-k}$$

für alle $a \in \mathfrak{q}$. Damit erhalten wir die Entwicklung

$$E_Y^{(k)}(z) = \xi(\mathfrak{b})^k \left( E^{(k)}(L) - \sum_{a\in\mathfrak{q},\ \text{norm.}} G_{L,k}(t_{\mathfrak{b}}(az)) \right) . \tag{5.2.19}$$

Nun stellen sich zwei Probleme.
Zunächst einmal müssen wir $t_{\mathfrak{b}}(az)$ in einen Ausdruck in $t_{\mathfrak{b}}(z)$ überführen. Aus der Entwicklung bezüglich $t_{\mathfrak{b}}(z)$ wollen wir dann eine Entwicklung bezüglich des „richtigen“ Parameters $t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}(z)$ erhalten. Hierzu müssen wir einerseits den Drinfeld-Modul $\rho^L$ und andererseits die Isogenie $\rho^L_{\mathfrak{q}}$ heranziehen.
Die einzelnen Schritte werden wir nun nacheinander abarbeiten und in den letzten zwei Unterabschnitten unsere Ergebnisse zusammenfassen.

### Auswertung von Uniformisierenden mit transformiertem Argument

**5.2.20 Definition.** *Seien $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes Ideal und $L := \xi(\mathfrak{b})\mathfrak{b}$ ein spezielles Gitter in der Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{b}$ sowie $\rho^L$ der sgn-normalisierte Drinfeld-Modul vom Rang 1 zum Gitter $L$. Weiter seien $\mathfrak{a} \subset A$ ein ganzes Ideal und $a \in A$ ein Polynom. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(X) &:= \rho_{\mathfrak{a}}^L(X^{-1})X^{q^{\deg(\mathfrak{a})}} \qquad \textit{und} \\ R_a^{\mathfrak{b}}(X) &:= \rho_a^L(X^{-1})X^{q^{\deg(a)}} . \end{aligned}$$

*Dabei heißt $R_a^{\mathfrak{b}}(X)$ das $a$-te* Kreisteilungspolynom *aus $A[X]$.*

**5.2.21 Lemma.** *Es gelten*

*(i)* $R^{\mathfrak{b}}_{(a)}(X) = sgn(a)^{-1} R^{\mathfrak{b}}_{a}(X)$.

*(ii)* $R^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(X)$ *ist ein Polynom vom Grad* $q^{\deg(\mathfrak{a})} - 1$.

*(iii)* $R^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(X)$ *ist ein Polynom in* $X^{q-1}$, *die auftretenden Exponenten sind von der Form* $q^{\deg(\mathfrak{a})} - q^i$ *mit* $0 \le i \le \deg(\mathfrak{a})$.

*(iv)* $R^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(0) = 1$.

*(v)* $R^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(X)$ *ist unabhängig von der Wahl der Gitterinvarianten.*

*Beweis.* Zu zeigen ist nur die letzte Aussage, und diese folgt aus (2.3.18) und (5.2.4). Der Rest ergibt sich aus der Definition. □

**5.2.22 Beispiel.** (i) Ist $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$, so ist $R^{\mathfrak{b}}_{\varepsilon}(X) = \varepsilon \rho^L_1(X^{-1}) X^{q^0} = \varepsilon$.

(ii) Für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ ist

$$R^{\mathfrak{b}}_{x+\varepsilon}(X) = 1 + \mathrm{coeff}(\rho^L_x, 1) X^{q^2-q} + (x+\varepsilon) X^{q^2-1} \; .$$

(iii) Sind $f, g \in A$ mit $\deg(f) = d_1 > \deg(g) = d_2$, dann ist

$$R^{\mathfrak{b}}_{f+g}(X) = R^{\mathfrak{b}}_{f}(X) + X^{q^{d_1} - q^{d_2}} R^{\mathfrak{b}}_{g}(X) \; .$$

**5.2.23 Lemma.** *Für alle* $a \in A$ *gilt*

$$t_{\mathfrak{b}}(az) = \frac{t_{\mathfrak{b}}^{q^{\deg(a)}}(z)}{R^{\mathfrak{b}}_{a}(t_{\mathfrak{b}}(z))} \; .$$

*Beweis.* Es ist $t_{\mathfrak{b}}(az) = e_L^{-1}(\xi(\mathfrak{b})az)$ und

$$e_L^{-1}(\xi(\mathfrak{b})az) = \rho^L_a(e_L(\xi(\mathfrak{b})z)) = \rho^L_a(t_{\mathfrak{b}}^{-1}(z)) \; .$$

□

**Auswertung von Partialsummen**

Um $E^{(k)}_Y(z)$ in $t_{\mathfrak{b}}$ zu entwickeln, ist es sinnvoll, die Partialsummen aus (5.2.19)

$$\sum_{\substack{a \in \mathfrak{q} \text{ norm.} \\ \deg(a) = d}} G_{L,k}(t_{\mathfrak{b}}(az))$$

für alle $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ getrennt auszuwerten.

Dazu betrachten wir zunächst die Summe

$$\sum_{\substack{a\in\mathfrak{q}\text{ norm.}\\ \deg(a)=d}} t_{\mathfrak{b}}(az) = t_{\mathfrak{b}}(z)^{q^d} \sum_{\substack{a\in\mathfrak{q}\text{ norm.}\\ \deg(a)=d}} \frac{1}{R_a^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})}\ .$$

Mit Lemma (5.2.30) können wir dann auch die Partialsumme

$$\sum_{\substack{a\in\mathfrak{q}\text{ norm.}\\ \deg(a)=d}} t_{\mathfrak{b}}^{q-1}(az)$$

auswerten, was wir für kleine $d$ auch tun. Aus diesem Lemma ergibt sich auch, wie Partialsummen, in denen höhere $t_{\mathfrak{b}}$-Potenzen aufaddiert werden, ausgewertet werden können.
Setzen wir nun für alle nicht negativen Zahlen $i \neq 1$

$$T_i := \begin{cases} x^{\frac{i}{2}}\ , & \text{falls } 2 \mid i \\ x^{\frac{i-3}{2}}y\ , & \text{falls } 2 \nmid i \end{cases}\ ,$$

dann gilt die Bijektion von Mengen

$$\{a \in A \mid \deg(a) = d,\ a \text{ normiert}\} \xrightarrow{\sim} \{T_d+\varepsilon_{d-1}T_{d-1}+\ldots+\varepsilon_2T_2+\varepsilon_0 \mid \varepsilon_i \in \mathbb{F}_q \forall i\}\ .$$

Auch die Elemente eines Primideals lassen sich in analoger Weise aufzählen.

**5.2.24 Beispiel.** Ist $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$ für $(\alpha,\beta) \in E(\mathbb{F}_q)$, so sind

$$\begin{aligned} \{a \in \mathfrak{q} \mid \deg(a) = 2,\ a \text{ norm.}\} &= \{x-\alpha\}\ , \\ \{a \in \mathfrak{q} \mid \deg(a) = 3,\ a \text{ norm.}\} &= \{y-\beta+\varepsilon(x-\alpha) \mid \varepsilon \in \mathbb{F}_q\}\ . \end{aligned}$$

Nun kann man zur Auswertung von

$$\sum_{\substack{a\in A\text{ norm.}\\ \deg(a)=d}} \frac{1}{R_a^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})}$$

die Vorgehensweise aus [Gek88, 10.6 bis 10.9] wählen.
Das Verfahren beruht im Wesentlichen darauf,

$$\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}(X+\varepsilon Z)^{-1} = -Z^{q-1}(X^q - XZ^{q-1})^{-1} \tag{5.2.25}$$

([Gek88, 10.6.(i)]) iterativ auf

$$\sum_{\varepsilon_{d-1}\in\mathbb{F}_q} \cdots \sum_{\varepsilon_0\in\mathbb{F}_q} (R^{\mathfrak{b}}_{T_d+\varepsilon_{d-1}T_{d-1}+\ldots+\varepsilon_2T_2+\varepsilon_0})^{-1}$$

anzuwenden.
Damit läßt sich für jede Partialsumme der Exponent der kleinsten $t_{\mathfrak{b}}$-Potenz bestimmen. Mit (5.2.21), (5.2.22)(iii) und der oben eingeführten Notation ließen sich sowohl Zähler als auch Nenner exakt bestimmen.
Solche Rechnungen werden allerdings sehr schnell unüberschaubar.

**5.2.26 Beispiel.** Für $\mathfrak{q} = (1)$ sind die am einfachsten auszuwertenden Partialsummen die zu $d = 0$ und $d = 2$. Es gibt nur ein normiertes Element vom Grad 0, nämlich 1 selbst. Nach Definition ist

$$R_1^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}}) = 1 \ .$$

Für $d = 2$ sind alle normierten Elemente aus $A$ von der Form $x - \varepsilon$ mit $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$. Mit (5.2.22)(ii) und (5.2.25) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \frac{1}{R_{x+\varepsilon}^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})} &= \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \left(R_x^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}}) + \varepsilon t_{\mathfrak{b}}^{q^2-1}\right)^{-1} \\ &= -t_{\mathfrak{b}}^{(q^2-1)(q-1)} \cdot \left(R_x^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})^q - R_x^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}}) t_{\mathfrak{b}}^{(q^2-1)(q-1)}\right)^{-1} \ .\end{aligned}$$

Damit können wir nun berechnen

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a\in A \text{ norm.}\\ \deg a\leq 2}} t_{\mathfrak{b}}(az) &= t_{\mathfrak{b}}^{q^0} \frac{1}{R_1^{\mathfrak{b}}}(t_{\mathfrak{b}}) + t_{\mathfrak{b}}^{q^2} \sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} \frac{1}{R_{x-\varepsilon}^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})} \\ &= t_{\mathfrak{b}}(z) - t_{\mathfrak{b}}^{q^3-q+1} \cdot \left(R_x^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})^q - R_x^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}}) t_{\mathfrak{b}}^{(q^2-1)(q-1)}\right)^{-1} \ .\end{aligned}$$

**5.2.27 Beispiel.** Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal vom Grad 1, so existiert ein $\mathbb{F}_q$-rationaler Punkt $(\alpha, \beta) \in E(\mathbb{F}_q)$ mit $\mathfrak{q} = (x - \alpha, y - \beta)$. In $\mathfrak{q}$ gibt es keine Elemente vom Grad 0 oder 1. Das einzige normierte Element vom Grad 2 ist $x - \alpha$. Also ist

$$\sum_{\substack{a\in\mathfrak{q} \text{ norm.}\\ \deg a\leq 2}} t_{\mathfrak{b}}(az) = t_{\mathfrak{b}}^{q^2}(z) \frac{1}{R_{x-\alpha}^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}}(z))} \ .$$

Auch in unserer Situation können wir die Überlegungen aus [Gek88, 10.8] für den Beitrag kleinster Ordnung einer Partialsumme an der Reihenentwicklung ausführen.
Allerdings müssen wir beachten, daß in $A$ kein Element der Ordnung 1 existiert. Ist $\mathfrak{q} \neq (1)$, so ist $\mathfrak{q} = (x - \alpha)\mathbb{F}_q[x] + (y - \beta)\mathbb{F}_q[x]$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$.
Analog zu [Gek88, 10.9] erhalten wir

**5.2.28 Lemma.** *Wir setzen für $d \geq 2$*

$$k_1 = (q-1)\left(q^d - 1 + \sum_{2\leq i<d} q^{i-1}(q^d - q^i)\right) \quad \textit{und} \quad k_2 = (q-1) \sum_{2\leq i<d} q^{i-2}(q^d - q^i) \ .$$

*Dann ist*

$$\sum_{\substack{a\in\mathfrak{q} \text{ norm.}\\ \deg(a)=d}} \frac{1}{R_a^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})} = (-1)^{d-1} t_{\mathfrak{b}}^k + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\} \ ;$$

*dabei ist $k = k_1$, falls $\mathfrak{q} = (1)$ ist, und für ein Primideal $\mathfrak{q}$ ist $k = k_2$.*

Mit wachsendem $d$ wächst also auch der Exponent der kleinsten auftretenden $t_{\mathfrak{b}}$-Potenz in der Auswertung der Partialsumme.

**5.2.29 Beispiel.** Für $d = 3$ können wir die Potenz $k$ aus dem obigen Lemma auch direkt, also ohne Hilfe des Lemmas, berechnen.
Im Fall $\mathfrak{q} = (1)$ müssen wir (5.2.25) zweimal anwenden:

$$\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{F}_q} (X_3 + \varepsilon_2 X_2 + \varepsilon_1 X_1)^{-1} =$$
$$\frac{X_1^{q-1}\left(X_2^q - X_1^{q-1}X_2\right)^{q-1}}{X_3^{q^2} - X_3^q X_1^{q^2-q} - (X_3^q - X_3 X_1^{q-1})(X_2^q + X_1^{q-1}X_2)^{q-1}}$$

Setzen wir nun $X_1 = t_{\mathfrak{b}}^{q^3-1}$, $X_2 = t_{\mathfrak{b}}^{q^3-q^2} R_x^{\mathfrak{b}}$ und $X_3 = R_y^{\mathfrak{b}}$, dann erhalten wir $k = (q^4 - 1)(q - 1)$.
Ist $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$ ein Primideal vom Grad 1, so sind alle normierten Elemente vom Grad 3 in $\mathfrak{q}$ von der Form $y - \beta + \varepsilon(x - \alpha)$. Setzen wir in (5.2.25) nun $X = R_{y-\beta}^{\mathfrak{b}}$ und $Z = t_{\mathfrak{b}}^{q^3-q^2} R_{x-\alpha}^{\mathfrak{b}}$, dann erhalten wir $k = (q^3 - q^2)(q - 1)$.

Zudem sind die folgenden Feststellungen hilfreich, wenn höhere Potenzen ausgewertet werden sollen.

**5.2.30 Lemma.** *([Gek88, 10.6 und 3.11]) Für festes $Z \neq 0$ gilt*

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} (X - \varepsilon Z)^{1-q} = \left(\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} (X - \varepsilon Z)^{-1}\right)^{q-1} .$$

*Sind $Z \neq 0$ fest und $j \in \mathbb{N}$, dann ist*

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} (X - \varepsilon Z)^{1-q^j} = \sum_{0 \leq i < j} Z^{1-q^i} (X - Z^{1-q} X^q)^{q^i - q^j} .$$

**5.2.31 Beispiel.** Es ist

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} (X - \varepsilon Z)^{1-q^2} = (X - Z^{q-q^2} X^{q^2})(X^{q^2} - Z^{q^2(1-q)} X^{q^3})^{-1} .$$

Mit Hilfe von (5.2.30) können wir nun die $(q-1)$-ten Potenzen der Partialsummen aus den Beispielen (5.2.26) und (5.2.27) berechnen. Unter Verwendung von Lemma (5.2.28) bzw. Beispiel (5.2.29) können wir auch eine Abschätzung der Ordnungen der Partialsummen bestimmen, die wir von Elementen aus $\mathfrak{q}$ von höherem Grad erhalten. Dies liefert uns

**5.2.32 Korollar.**

$$\begin{aligned}\xi(\mathfrak{b})^{1-q}E_Y^{(q-1)}(z) =& E^{(q-1)}(L) + t_{\mathfrak{b}}^{q-1}(z)\\ &- t_{\mathfrak{b}}^{(q-1)(q^3-q+1)} \cdot \left(R_x^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})^q - R_x^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})t_{\mathfrak{b}}^{(q^2-1)(q-1)}\right)^{1-q}\\ &+ \{\textit{Terme der Ordnung } \geq (q^5-q^4+q^3-q+1)(q-1)\}\ ,\end{aligned}$$

*falls* $\mathfrak{q}$ *trivial ist.*
*Und für ein Primideal* $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$ *vom Grad* 1 *ist*

$$\begin{aligned}\xi(\mathfrak{b})^{q-1}E_Y^{(q-1)}(z) = E^{(q-1)}(L) &- t_{\mathfrak{b}}^{q^2(q-1)}R_{x-\alpha}^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})^{1-q}\\ &+ \{\textit{Terme der Ordnung } \geq (q^5+2q^3)(q-1)\}\ .\end{aligned}$$

Zu $R_a^{\mathfrak{b}}$ für ein $a \in A$ erhalten wir $(R_a^{\mathfrak{b}})^{-1}$ als Potenzreihe in $t_{\mathfrak{b}}$ durch formales Invertieren.

**5.2.33 Beispiel.** Sei $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$. Setzen wir $R_{x+\varepsilon}^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}}) =: 1 + r_1 t_{\mathfrak{b}}^{q^2-q} + r_2 t_{\mathfrak{b}}^{q^2-1}$, so bestimmen wir in

$$\begin{aligned}1 &= \left(1 + r_1 t_{\mathfrak{b}}^{q^2-q} + r_2 t_{\mathfrak{b}}^{q^2-1}\right) \cdot \left(\sum_{i\geq 0} m_i t_{\mathfrak{b}}^i\right)\\ &= \sum_{i\geq 0} m_i t_{\mathfrak{b}}^i + \sum_{i\geq 0} r_1 m_i t_{\mathfrak{b}}^{q^2-q+i} + \sum_{i\geq 0} r_2 m_i t_{\mathfrak{b}}^{q^2-1+i}\end{aligned}$$

die $m_i$ durch Koeffizientenvergleich und erhalten

| $i$ | $m_i$ |
|---|---|
| $0$ | $1$ |
| $1 \leq i < q^2-q$ | $0$ |
| $q^2-q$ | $-r_1$ |
| $q^2-q < i < q^2-1$ | $0$ |
| $q^2-1$ | $-r_2$ |

sowie $m_i + m_{i-(q^2-q)}r_1 + m_{i-(q^2-1)}r_2 = 0$ für $i > q^2-1$. Somit ist

$$R_{x+\varepsilon}^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}})^{-1} = 1 - r_1 t_{\mathfrak{b}}^{q^2-q} - r_2 t_{\mathfrak{b}}^{q^2-1} + (-r_1)^2 t_{\mathfrak{b}}^{2(q^2-q)} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}\ .$$

Nun ist es also möglich, die Eisensteinreihe $E_Y^{(k)}$ als Potenzreihe in $t_{\mathfrak{b}}$ auszudrücken.

### Von $t_{\mathfrak{b}}$ nach $t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}$

Sei $\mathfrak{q} \neq (1)$. Den Zusammenhang zwischen $t_{\mathfrak{b}}$ und $t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}$ liefert die Isogenie $\rho_{\mathfrak{q}}^L$. Nach (2.3.21) ist

$$\xi(\mathfrak{b})e_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}} = \xi(\mathfrak{b})e_{\mathfrak{b}} + D(\rho_{\mathfrak{q}}^L)^{-1}\xi(\mathfrak{b})^q e_{\mathfrak{b}}^q = t_{\mathfrak{b}}^{-1} + D(\rho_{\mathfrak{q}}^L)^{-1}t_{\mathfrak{b}}^{-q}\ .$$

Daher ist

$$t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}^{-1} = \frac{\xi(\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b})}{\xi(\mathfrak{b})} t_{\mathfrak{b}}^{-1} + D(\rho_{\mathfrak{q}}^{L})^{-1} \frac{\xi(\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b})}{\xi(\mathfrak{b})} t_{\mathfrak{b}}^{-q} =: i_1 t_{\mathfrak{b}}^{-1} + i_2 t_{\mathfrak{b}}^{-q} \; .$$

Und somit gilt

$$t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}} = \frac{t_{\mathfrak{b}}^{q}}{i_2 + i_1 t_{\mathfrak{b}}^{q-1}} \; . \tag{5.2.34}$$

Es bleibt $(i_2+i_1 t_{\mathfrak{b}}^{q-1})^{-1}$ in einer Potenzreihe in $t_{\mathfrak{b}}$ auszudrücken. Auch hier wählen wir den Ansatz des formalen Invertierens

$$(i_2 + i_1 t_{\mathfrak{b}}^{q-1}) \sum_{j\geq 0} m_j t_{\mathfrak{b}}^{j} = 1$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleich

| $j$ | $m_j$ |
|---|---|
| $0$ | $i_2^{-1}$ |
| $1 \leq j < q-1$ | $0$ |
| $q-1$ | $-i_1 i_2^{-2}$ |
| $j > q-1$ | $-i_1 i_2^{-1} \cdot m_{j-q+1} i_2$ |

,

also insgesamt

$$\begin{aligned}(i_2 + i_1\, t_{\mathfrak{b}}^{q-1})^{-1} &= \sum_{j\geq 0} \frac{(-i_1)^j}{i_2^{j+1}}\, t_{\mathfrak{b}}^{j(q-1)} \\ &= \frac{1}{i_2} - \frac{i_1}{i_2^2}\, t_{\mathfrak{b}}^{q-1} + \frac{i_1^2}{i_2^3}\, t_{\mathfrak{b}}^{2(q-1)} + \dots \; .\end{aligned} \tag{5.2.35}$$

**Entwicklung in $t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}$**

Mit dem Ansatz

$$E_Y^{(k)}(z) = \sum_{j\geq 0} c_j t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}^{j}(z) = \sum_{j\geq 0} b_j t_{\mathfrak{b}}^{j}(z)$$

und Koeffizientenvergleich lassen sich nun die ersten Terme in der Entwicklung von $E_Y^{(k)}(z)$ bezüglich des Parameters $t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}$ explizit bestimmen.
Für $k = q-1$ führen wir dies nun aus. Dabei müssen die beiden Fälle $\mathfrak{q} = (1)$ und $\mathfrak{q} \neq (1)$ unterschieden werden.
Zunächst betrachten wir den Fall $\mathfrak{q} = (1)$. Hier ist $t := t_{\mathfrak{b}}$ der „richtige“ Parameter.
Nach (5.2.32) ist

$$\begin{aligned}\xi(\mathfrak{b})^{q-1} E_Y^{(q-1)}(z) = E^{(q-1)}(L) + t^{q-1} - t^{(q-1)(q^3-q+1)} \cdot \left( R_x^{\mathfrak{b}}(t)^q - R_x^{\mathfrak{b}}(t) t^{(q^2-1)(q-1)} \right)^{1-q} \\ + \{\text{Terme der Ordnung } \geq (q^5 - q^4 + q^3 - q + 1)(q-1)\} \; .\end{aligned}$$

Mit $R_x^{\mathfrak{b}}(t) = 1 + r_1 t^{q^2-q} + r_2 t^{q^2-1}$ ist

$$R_x^{\mathfrak{b}}(t)^q - R_x^{\mathfrak{b}}(t) t^{(q^2-1)(q-1)} = 1 - t^{(q^2-1)(q-1)} + r_1^q t^{q^3-q^2} - r_1 t^{q^3-2q+1} + (r_2^q - r_2) t^{q^3-q} \ .$$

Eine $(1-q)$-te Potenz eines Terms $X$ läßt sich durch $X^{1-q} = \frac{X}{X^q}$ leicht ermitteln. Wir erhalten

**5.2.36 Proposition.** *Sei* $Y = Ae_1 + \mathfrak{b}e_2$ *für ein gebrochenes Ideal* $\mathfrak{b}$. *Dann hat die Eisensteinreihe* $E_Y^{(q-1)}(z)$ *in* $t = t_{\mathfrak{b}}$, *der Uniformisierenden von* $\infty$ *in* $\mathrm{GL}(Y)\backslash\overline{\Omega}$, *die Entwicklung*

$$\begin{aligned}\xi(\mathfrak{b})^{1-q} E_Y^{(q-1)}(z) = E^{(q-1)}(L) + t^{q-1} - t^{(q-1)(q^3-q+1)} + t^{(q-1)q(q^2+q-1)} \\ + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\} \ .\end{aligned}$$

Sei nun $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$ ein Primideal vom Grad 1.
Zu fixiertem $Y = \mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{b}e_2$ (vgl. (5.2.13)) und

$$E_Y^{(q-1)}(z) = \sum_{j\geq 0} b_j\, t_{\mathfrak{b}}^j = \sum_{j\geq 0} c_j\, t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}^j(z)$$

setzen wir nun $t := t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}$ und $s := t_{\mathfrak{b}}$ sowie

$$B := \sum_{j\geq 0} b_j s^j \quad \text{und} \quad C := \sum_{j\geq 0} c_j t^j$$

für die jeweiligen Potenzreihenentwicklungen.
Mit (5.2.19) ist

$$B = \xi(\mathfrak{b})^{q-1} \left( E^{(q-1)}(L) - \frac{s^{q^2(q-1)}}{R_{x-\alpha}^{\mathfrak{b}}(s)^{q-1}} - \sum_{\substack{a\in\mathfrak{q}\ \text{norm.} \\ \deg a \geq 3}} \frac{s^{q^{\deg(a)}(q-1)}}{R_a^{\mathfrak{b}}(s)^{q-1}} \right) \ .$$

Aus (5.2.22) und (5.2.33) ergibt sich

$$\begin{aligned} s^{q^2(q-1)} R_{x-\alpha}^{\mathfrak{b}}(s)^{1-q} =& s^{q^3-q^2} + r_1 s^{q^3-q} + r_2 s^{q^3-1} - r_1 s^{2(q^3-q^2)} \\ &+ \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ . \end{aligned}$$

Zusammen mit der Abschätzung aus (5.2.32) ist also

$$\begin{aligned} B =& \xi(\mathfrak{b})^{q-1} E^{(q-1)}(L) - \xi(\mathfrak{b})^{q-1} s^{q^3-q^2} - \xi(\mathfrak{b})^{q-1} r_1 s^{q^3-q} \\ &- \xi(\mathfrak{b})^{q-1} r_2 s^{q^3-1} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ . \end{aligned}$$

Mit (5.2.34) und (5.2.35) läßt sich nun auch $C$ in eine Potenzreihe in $s$ entwickeln:

$$C = \sum_{j\geq 0} c_j \left( \frac{s^q}{i_2 + i_1 s^{q-1}} \right)^j \ .$$

Nun ist offensichtlich $c_0 = b_0 = \xi(\mathfrak{b})^{q-1}E^{(q-1)}(L)$.
Da genau dann $jq = q^3 - q^2$ ist, wenn $j = q(q-1)$ ist, und $\frac{s^{q^j}}{i_2^j} \neq 0$ ist, sind die $c_j = 0$ für alle $1 < j < q(q-1)$.
Der Koeffizient von $s^{q^3-q^2}$ in $C$ wird bestimmt von dem Term

$$c_{q(q-1)}t^{q(q-1)} = c_{q(q-1)}\left(\frac{s^q}{i_2 + i_1 s^{q-1}}\right)^{q(q-1)} \quad .$$

Mit (5.2.35) erhalten wir

$$t^{q(q-1)} = \frac{1}{i_2^{q(q-1)}}s^{q^2(q-1)} + \frac{i_1^q}{i_2^{q^2}}s^{q(q+1)(q-1)} - \frac{i_1^{q^2}}{i_2^{q(2q-1)}}s^{2q^2(q-1)} + \dots \; .$$

Wegen $b_{q^2(q-1)} = -\xi(\mathfrak{b})^{q-1}$ ist $c_{q(q-1)} = -\xi(\mathfrak{b})^{q-1}i_2^{q(q-1)}$.
Der Term mit der nächsthöheren Potenz in $C$ ist nun

$$c_{q(q-1)}\frac{i_1^q}{i_2^{q^2}}s^{q(q+1)(q-1)} + c_{(q+1)(q-1)}i_2^{-(q+1)(q-1)}s^{q(q+1)(q-1)} \; ,$$

während wir in $B$ den Ausdruck

$$-\xi(\mathfrak{b})^{q-1}r_1 s^{q(q-1)(q+1)}$$

ermittelt haben. Wir führen nun den Vergleich der Koeffizienten durch und vereinfachen den Term. Aus

$$c_{q(q-1)} \cdot \frac{i_1^q}{i_2^{q^2}} + c_{(q-1)(q+1)} \cdot i_2^{-(q-1)(q+1)} = -\xi(\mathfrak{b})^{q-1}r_1$$

und

$$c_{q(q-1)} \cdot \frac{i_1^q}{i_2^{q^2}} = -\xi(\mathfrak{b})^{q-1}\frac{i_1^q}{i_2^q} = -\xi(\mathfrak{b})^{q-1}D(\rho_{\mathfrak{q}}^L)^q$$

folgt nach Definition von $i_1$ und $i_2$

$$c_{(q-1)(q+1)} = i_2^{(q-1)(q+1)}\xi(\mathfrak{b})^{q-1}(D(\rho_{\mathfrak{q}}^L)^q - r_1) \; .$$

Es gilt also

**5.2.37 Proposition.** *Wir verwenden die Bezeichnungen aus* (5.2.13). *Seien* $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$ *ein Primideal vom Grad* 1 *und* $\mathfrak{b}$ *ein gebrochenes Ideal mit einer Gitterinvarianten* $\xi(\mathfrak{b})$. *Des weiteren seien* $i_2$ *und* $r_1$ *gegeben durch*

$$R^{\mathfrak{b}}_{x-\alpha}(t_{\mathfrak{b}}) = 1 + r_1\, t_{\mathfrak{b}}^{q^2-q} + r_2\, t_{\mathfrak{b}}^{q^2-1} \; ,$$
$$t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}} = \frac{t_{\mathfrak{b}}^{-1}}{i_2 + i_1\, t_{\mathfrak{b}}^{q-1}} \; .$$

*Dann hat die Eisensteinreihe $E_Y^{(q-1)}$ in $t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}$ die Entwicklung*

$$\begin{aligned} E_Y^{(q-1)}(z) = & \xi(\mathfrak{b})^{q-1} E^{(q-1)}(L) - \xi(\mathfrak{b})^{q-1}\, i_2^{q^2-q}\, t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}^{q(q-1)} \\ & + \xi(\mathfrak{b})^{q-1}\, i_2^{(q-1)(q+1)} (D(\rho_{\mathfrak{q}}^L)^q - r_1)\, t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}}^{(q-1)(q+1)} \\ & + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\}\ . \end{aligned}$$

**Verhalten einer Eisensteinreihe in allen Spitzen**

Ausgangspunkt unserer Überlegungen war die Entwicklung einer Eisensteinreihe $E_{Y(\mathfrak{q})}^{(k)}$ in allen Spitzen.
Wir fassen nun unsere Überlegungen für $k = q-1$ zusammen. Vorübergehend schreiben wir (vgl. (5.2.34) und (5.2.33))

$$\begin{aligned} t_{\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b}} &= t_{\mathfrak{b}}^q (i_2(\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b},\mathfrak{b}) + i_1(\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{b},\mathfrak{b}) t_{\mathfrak{b}}^{q-1})^{-1} \\ R_{x+\varepsilon}^{\mathfrak{b}}(t_{\mathfrak{b}}) &= 1 + r_1(\mathfrak{b}, x+\varepsilon) t_{\mathfrak{b}}^{q^2-q} + r_2(\mathfrak{b}, x+\varepsilon) t_{\mathfrak{b}}^{q^2-1}\ . \end{aligned} \tag{5.2.38}$$

**5.2.39 Satz.** *Ist $\mathbf{Y} = Ae_1 + Ae_2$ das triviale Gitter, dann hat die Eisensteinreihe $E_{\mathbf{Y}}^{(q-1)}$ in der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ die Entwicklung*

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Y}}^{(q-1)}(z) = E^{(q-1)}(A) - \xi((1))^{q-1} t^{q-1} - \xi((1))^{q-1} t^{(q-1)(q^3-q+1)} \\ + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\}\ . \end{aligned}$$

*Sind $\mathfrak{p} = (x-\alpha, y-\beta)$ ein Primideal vom Grad 1 und $\mathbf{Y}\vartheta = \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$, so ergibt sich das Verhalten von $E_{\mathbf{Y}}^{(q-1)}$ in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ aus*

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Y},[\vartheta]}^{(q-1)}(z) = & \xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q-1} E^{(q-1)}(L) - \xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q-1}\, i_2(\mathfrak{p}^{-2},\mathfrak{p}^{-1})^{q^2-q}\, t_{\mathfrak{p}^{-2}}^{(q-1)q} \\ & - \xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q-1}\, i_2(\mathfrak{p}^{-2},\mathfrak{p}^{-1})^{q^2-1} (D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)^q - r_1(\mathfrak{p}^{-1}, x-\alpha))\, t_{\mathfrak{p}^{-2}}^{q^2-1} \\ & + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\}\ , \end{aligned}$$

*wobei $L = \xi(\mathfrak{p}^{-1})\mathfrak{p}^{-1}$ für eine beliebige Gitterinvariante $\xi(\mathfrak{p}^{-1})$ ist.*

Für nichttriviale $\mathfrak{q}$ nutzen wir die Struktur der Idealklassengruppe.
Seien nun $(\alpha,\beta), (\alpha,\beta') \in E(\mathbb{F}_q)$ zwei (nicht notwendig verschiedene) $\mathbb{F}_q$-rationale Punkte (dann ist $(\alpha,\beta') = -(\alpha,\beta)$). Wir setzen $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$ und $\mathfrak{q}' = (x-\alpha, y-\beta')$. Dann ist $\mathfrak{q}' = (x-\alpha)\mathfrak{q}^{-1}$ (vgl. (1.3.5)), und daher ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}$ das Hauptideal $(x-\alpha)$. Zudem ist $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'^{-1} = (x-\alpha)\mathfrak{q}'^{-2}$. Somit ist

$$\sum_{\substack{a\in\mathfrak{q}\mathfrak{q}' \\ b\in\mathfrak{q}\mathfrak{q}'^{-1}}}{}' (az+b)^{-k} = (x-\alpha)^{-k} \sum_{\substack{a\in A \\ b\in\mathfrak{q}'^{-2}}}{}' (az+b)^{-k}\ .$$

Betrachten wir nun einen Repräsentanten $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$ der Picardgruppe, so finden wir ein $c(\mathfrak{q}\mathfrak{p}) \in K^*$ und einen Repräsentanten $\tilde{\mathfrak{q}} = (x-\tilde{\alpha}, y-\tilde{\beta})$, so daß $c(\mathfrak{q}\mathfrak{p})\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{q}}$ ist.

Hier können wir nun schreiben

$$\sum_{\substack{a\in\mathfrak{q}\mathfrak{p}\\ b\in\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}}}{}^{'}\,(az+b)^{-k} = c(\mathfrak{q}\mathfrak{p})^k \sum_{\substack{a\in\tilde{\mathfrak{q}}\\ b\in\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2}}}{}^{'}\,(az+b)^{-k}\ ,$$

da $c(\mathfrak{q}\mathfrak{p})\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1} = \tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2}$ ist. Insgesamt erhalten wir nun

**5.2.40 Satz.** *Mit den Bezeichnungen von oben und $Y = Y(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{q}e_2$ ergibt sich das Verhalten von $E_Y^{(q-1)}$ in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{q}')$ aus*

$$\begin{aligned} E^{(q-1)}_{Y,[\vartheta]}(z) =&(x-\alpha)^{1-q}\left(E^{(q-1)}(\mathfrak{q}'^{-2}) + \xi(\mathfrak{q}'^{-2})^{q-1}t^{q-1}_{\mathfrak{q}'^{-2}} + \xi(\mathfrak{q}'^{-2})^{q-1}\,t^{(q-1)(q^3-q+1)}_{\mathfrak{q}'^{-2}}\right)\\ &+\{\mathit{Terme\ h\ddot{o}herer\ Ordnung}\}\ , \end{aligned}$$

*wobei $Y\vartheta = \mathfrak{q}\mathfrak{q}'e_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{q}'^{-1}e_2$ ist.*
*In den Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\mathfrak{q}')$ erhalten wir mit $Y\vartheta = \mathfrak{q}\mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}e_2$ und $L = \xi(\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2})\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2}$:*

$$\begin{aligned} E^{(q-1)}_{Y,[\vartheta]}(z) =&\, c(\mathfrak{q}\mathfrak{p})\Big(E^{(q-1)}(\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2}) - \xi(\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2})^{q-1}\,i_2(\mathfrak{p}^{-2},\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2})^{q^2-q}\,t^{q(q-1)}_{\mathfrak{p}^{-2}}\\ &-\xi(\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2})^{q-1}\,i_2(\mathfrak{p}^{-2},\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2})^{q^2-1}(D(\rho^L_{\tilde{\mathfrak{q}}})^q - r_1(\tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}^{-2}, x-\tilde{\alpha}))t^{(q-1)(q+1)}_{\mathfrak{p}^{-2}}\Big)\\ &+\{\mathit{Terme\ h\ddot{o}herer\ Ordnung}\}\ , \end{aligned}$$

*wobei $Y\vartheta = \mathfrak{q}\mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}e_2$ ist.*

### Verhalten von allen Eisensteinreihen in einer Spitze

Nun können wir auch den Blickpunkt wechseln und das Verhalten der Eisensteinreihen $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{q})}(z)$ für die verschiedenen Idealklassenrepräsentanten $\mathfrak{q}$ in einer fixierten Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ betrachten.
Wir notieren hier nur die für uns wesentlichen Daten.

(i) In der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ erhalten wir:

  (a) Die Laurentreihenentwicklung der $(q-1)$-ten Eisensteinreihe zum trivialen Gitter hat den konstanten Term $E^{(q-1)}(A)$ und den kleinsten nichttrivialen Exponenten $q-1$.

  (b) Ist $\mathfrak{q} \neq (1)$ der Standardrepräsentant einer Idealklasse, so hat die Laurentreihenentwicklung von $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{q})}$ den konstanten Term $E^{(q-1)}(\mathfrak{q})$ und den kleinsten nichttrivialen Exponenten $q(q-1)$.

(ii) In einer Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$ erhalten wir:

  (a) Ist $\mathfrak{p}' \in [\mathfrak{p}^{-1}]$ der Standardrepräsentant der Klasse $[\mathfrak{p}^{-1}]$, so hat die Laurentreihenentwicklung der Eisensteinreihe $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{p}')}(z)$ den konstanten Term $(x-\alpha)^{1-q}E^{(q-1)}(\mathfrak{p}^{-2})$ und den kleinsten nichttrivialen Exponenten $q-1$.

(b) Ist $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}'$ ein Standardrepräsentant einer Idealklasse, dann hat die Laurentreihenentwicklung von $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{q})}$ den konstanten Term $E^{(q-1)}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1})$ und den kleinsten nichttrivialen Exponenten $q(q-1)$.

Zur besseren Übersicht fassen wir dies hier noch einmal kurz in einer Tabelle zusammen:

| Spitze | $\mathfrak{q}$ zu $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{q})}$ | Konstante | Exponent |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{S}(\infty)$ | $(1)$ | $E^{(q-1)}(A)$ | $q-1$ |
| | $\mathfrak{q} \neq (1)$ | $E^{(q-1)}(\mathfrak{q})$ | $q(q-1)$ |
| $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$ | $\mathfrak{p}'$ | $(x-\alpha)^{1-q}E^{(q-1)}(\mathfrak{p}^{-2})$ | $q-1$ |
| | $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}'$ | $E^{(q-1)}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1})$ | $q(q-1)$ |

**5.2.41 Bemerkung.** Auch hier nehmen in gewisser Weise die Zweiteilungspunkte eine Sonderrolle ein. Sei $\mathfrak{p} \neq (1)$ ein Standardrepräsentant der Picardgruppe. Ist $[\mathfrak{p}^2] \neq [(1)]$, dann hat die Laurentreihenentwicklung der Eisensteinreihe $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{p})}$ in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ den konstanten Term $E^{(q-1)}(A)$ und den kleinsten nichttrivialen Exponenten $q(q-1)$.
Gilt hingegen $[\mathfrak{p}^2] = [(1)]$, dann hat die Laurentreihenentwicklung von $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{p})}$ in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ zwar ebenfalls den konstanten Term

$$E^{(q-1)}(A) = (x-\alpha)^{1-q}E^{(q-1)}(\mathfrak{p}^{-2}) \ ;$$

der kleinste nichttriviale Exponent ist hier allerdings $q-1$.

**5.2.42 Korollar.** *Sei $Y(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{q}e_2$. Durchläuft $\mathfrak{q}$ ein Repräsentantensystem der Picardgruppe, so sind die Eisensteinreihen $E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{q})}$ paarweise linear unabhängig.*

*Beweis.* Seien $\mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{q}_2$ Standardrepräsentanten der Picardgruppe. Weiter sei $\mathfrak{q}_1'$ bzw. $\mathfrak{q}_2'$ der Standardrepräsentant zu $[\mathfrak{q}_1^{-1}]$ bzw. $[\mathfrak{q}_2^{-1}]$. Vergleichen wir nun deren kleinste nichttriviale $t_*$-Potenzen in den Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{q}_1')$ und $\mathcal{S}(\mathfrak{q}_2')$, so ergibt sich die Aussage des Korollars. □

### Lineare Unabhängigkeit

Sei weiterhin $Y(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{q}e_2$ und $k = q^j - 1$ mit $j \in \mathbb{N}$. Um die lineare Unabhängigkeit der $\{E^{(k)}_{Y(\mathfrak{q})} \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)\}$ nachzuweisen, genügt es, die konstanten Terme der Entwicklungen näher zu betrachten. Diese haben wir in (5.2.19) allgemein bestimmt.
Wir stellen sie nun noch einmal aus Sicht der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p} = (x-\alpha_0, y-\beta_0)$, in der entwickelt wird, zusammen. Die Matrix $\vartheta$ erfüllt $(Ae_1+Ae_2)\vartheta = \mathfrak{p}e_1+\mathfrak{p}^{-1}e_2$

für $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$, im Fall $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) = \mathcal{S}(\infty)$ setzen wir $\vartheta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Mit $\mathfrak{p}'$ bezeichnen wir den Standardrepräsentanten von $[\mathfrak{p}^{-1}]$.

| Spitze | $\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)$ | $Y(\mathfrak{q})\vartheta$ | konst. Term |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{S}(\infty)$ | $(1)$ | $Ae_1 + Ae_2$ | $E^{(k)}(A)$ |
| | $\mathfrak{q} \neq (1)$ | $\mathfrak{q}e_1 + \mathfrak{q}e_2$ | $E^{(k)}(\mathfrak{q})$ |
| $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$ | $\mathfrak{p}'$ | $(x-\alpha_0)Ae_1 + \mathfrak{p}'\mathfrak{p}^{-1}e_2$ | $(x-\alpha_0)^{-k}E^{(k)}(\mathfrak{p}^{-2})$ |
| | $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}'$ | $\mathfrak{q}\mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}e_2$ | $E^{(k)}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1})$ |

Wir setzen nun

$$\mathcal{B}(z) := \sum_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)} b(\mathfrak{q}) E^{(k)}_{Y(\mathfrak{q})}(z)$$

mit $b(\mathfrak{q}) \in \mathbf{C}$ und nehmen an, daß $\mathcal{B}(z) \equiv 0$ ist. Dann muß in jeder Spitze die Laurentreihenentwicklung von $\mathcal{B}(z)$ den konstanten Term 0 haben.
Wir beginnen unsere Überlegung in der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$. Hier ist der konstante Term

$$\mathrm{const}(k,\infty) := \sum_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)} b(\mathfrak{q}) E^{(k)}(\mathfrak{q}) \ .$$

Wir bestimmen nun die $\infty$-Bewertungen der konstanten Terme der Eisensteinreihen. Es ist

$$\begin{aligned} E^{(k)}(A) &= \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} \varepsilon^{-k} + \{\text{Terme höherer } v_\infty\text{-Bew.}\} \\ &= -\,1 + \{\text{Terme höherer } v_\infty\text{-Bew.}\} \ , \end{aligned}$$

und für nichttriviales $\mathfrak{q} = (x-\alpha, y-\beta)$

$$\begin{aligned} E^{(k)}(\mathfrak{q}) &= \sum_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} (\varepsilon(x-\alpha))^{-k} + \{\text{Terme höherer } v_\infty\text{-Bew.}\} \\ &= -\,(x-\alpha)^{-k} + \{\text{Terme höherer } v_\infty\text{-Bew.}\} \end{aligned}$$

Also ist $v_\infty(E^{(k)}(A)) = 0$ und $v_\infty(E^{(k)}(\mathfrak{q})) = 2k \geq 2$. Daher ist $\mathrm{const}(k,\infty) = 0$, also $v_\infty(\mathrm{const}(k,\infty)) = \infty$, nur mit $b((1)) = 0$ zu erreichen.
Wir betrachten nun nur noch

$$\mathcal{B}(z) := \sum_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}} b(\mathfrak{q}) E^{(k)}_{Y(\mathfrak{q})}(z)$$

in allen Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$. In einer solchen Spitze erhalten wir den konstanten Term aus $\mathcal{B}_{[\vartheta]}(z)$

$$\mathrm{const}(k,\mathfrak{p}) := \sum_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Pic}(A)-\{(1),\mathfrak{p}'\}} \mathcal{b}(\mathfrak{q})E^{(k)}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}) + \mathcal{b}(\mathfrak{p}')(x-\alpha_0)^{-k}\,E^{(k)}(\mathfrak{p}^{-2})\ .$$

Die liefert uns ein Gleichungssystem $Bv = 0$:
Die Matrix $B \in \mathrm{Mat}(h_K - 1, \mathbf{C})$ enthält als Einträge die verschiedenen konstanten Terme der Summanden von $\mathcal{B}(z)$. Dabei durchlaufen die Zeilen die nichttrivialen Elemente der Picardgruppe, während die Spalten die von $\mathcal{S}(\infty)$ verschiedenen Spitzen durchlaufen. Wir erhalten also

$$B = \left(E^{(k)}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1})\right)_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}\in\mathrm{Pic}(A)-\{(1)\}} =: (b_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}})$$

(denn es ist $(x-\alpha_0^{-k})E^{(k)}(\mathfrak{p}^{-2}) = E^{(k)}(\mathfrak{p}'\mathfrak{p}^{-1})$). Die Zeilen des Vektors $v = (\mathcal{b}(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Pic}(A)-\{(1)\}}$ durchlaufen ebenfalls die nichttrivialen Elemente der Picardgruppe.
Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Eisensteinreihen vom Typ $k$ genügt es nun zu zeigen, daß die Matrix $B$ regulär ist. Dazu benutzen wir das folgende aus der Numerik bekannte Lemma.

**5.2.43 Lemma.** *Ist $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{C})$ eine diagonaldominante Matrix, d.h. gilt mit $B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ für alle $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$*

$$\begin{aligned} &|b_{i,i}|_\infty > |b_{i,j}|_\infty \\ \textit{bzw.}\quad & v_\infty(b_{i,i}) < v_\infty(b_{i,j})\ , \end{aligned}$$

*dann ist $B$ eine reguläre Matrix.*

*Beweis.* Schreiben wir $B = D(I + R)$ mit der invertierbaren Diagonalmatrix $D$, der Einheitsmatrix $I$ und der Matrix $R$ mit Supremumsnorm $< 1$. Dann ist $I + R$ invertierbar mit der Inversen $I - R + R^2 - \ldots$ □

Wir bestimmen nun $v_\infty(b_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}})$, wobei $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ die nichttrivialen Elemente der Picardgruppe durchlaufen.
Offensichtlich ist für $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ das Ideal $\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}$ trivial, und $v_\infty(E^{(k)}(A)) = 0$.
Sei nun $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Zu dem Ideal $\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}$ existieren ein $c = c(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}) \in K^*$ und ein Primideal $\tilde{\mathfrak{q}} = (x - \tilde{\alpha}, y - \tilde{\beta})$ vom Grad 1, so daß

$$c \cdot \mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1} = \tilde{\mathfrak{q}}$$

ist. Für die Eisensteinreihe folgt

$$E^{(k)}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}) = \sum_{a\in\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}}{}' a^{-k} = c^k \sum_{b\in\tilde{\mathfrak{q}}}{}' b^{-k}\ .$$

Da $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\tilde{\mathfrak{q}}$ Primideale vom Grad 1 sind, folgt aus $c\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}$, daß $c$ den Grad 1 hat bzw. $v_\infty(c) = -1$ ist. Damit hat aber nun

$$E^{(k)}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}) = -c^k(x - \tilde{\alpha})^{-k} + c^k \cdot \{\text{Terme höherer } v_\infty\text{-Bew.}\}$$

einen führenden Term mit Bewertung $-k + 2k = k$, und insbesondere keinen Term mit $\infty$-Bewertung 0, da $k \neq 0$ ist.
Für alle $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}$ und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ gilt nun

$$v_\infty(b_{\mathfrak{q},\mathfrak{q}}) = 0 < 2k = v_\infty(b_{\mathfrak{q},\mathfrak{p}}) \ ,$$

da $k$ größer 0 ist. Mit (5.2.43) ist $B$ also regulär. Also ist $\mathcal{B}(z) \equiv 0$ nur mit $\mathscr{b}(\mathfrak{q}) = 0$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)$ erreichbar. Wir haben bewiesen:

**5.2.44 Satz.** *Die Menge* $\{E^{(k)}_{Y(\mathfrak{q})} \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)\}$ *ist linear unabhängig.*

## 5.3 Kanonische Modulform $\Delta$

Es bezeichnet $Y = \mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2$ ein $A$-Gitter in $K^2$ mit Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset K$.
Von besonderem Interesse sind auch die Modulformen der Leitkoeffizienten sowohl von $\phi^Y_a(z) = \phi^{Y_z}_a$ mit $a \in A$ als auch der Isogenien $\phi^Y_\mathfrak{n}(z) = \phi^{Y_z}_\mathfrak{n}$ für ein Ideal $\mathfrak{n}$.

**5.3.1 Definition.** *(i) Sei $a \in A$ nicht konstant. Wir setzen*

$$\Delta^Y_a(z) := \mathrm{coeff}(\phi^{Y_z}_a, 2\deg(a)) \ .$$

*Dabei ist* coeff(...) *die in* (2.3.2) *definierte Koeffizientenfunktion.*

*(ii) Sei* $(1) \neq \mathfrak{n} \in A$ *ein Ideal. Dann definieren wir*

$$\Delta^Y_\mathfrak{n}(z) := \mathrm{coeff}(\phi^{Y_z}_\mathfrak{n}, 2\deg(\mathfrak{n})) \ .$$

**5.3.2 Bemerkung.** (i) $\Delta^Y_\mathfrak{n}(z)$ ist eine Modulform vom Gewicht $q^{2\deg(\mathfrak{n})} - 1$ und Typ 0 (vgl. (2.3.8) und (2.3.9) oder [Gek86, V.3.4.]).

(ii) Ist $\mathfrak{n} = (a)$, dann ist $\Delta^Y_\mathfrak{n} = a \cdot \Delta^Y_a$ (siehe [Gek86, V.3.4.]).

(iii) Wir haben an dieser Stelle eine gewisse Inkonsistenz aus [Gek86] wiederholt: die Definition der normalisierten Rang-1 Drinfeld-Moduln $\rho$ aus (2.3.12) führt auf Isogenien mit Leitkoeffizient 1, während wir an dieser Stelle den konstanten Term auf 1 normieren. In diesem Sinne ist $(\Delta^Y_\mathfrak{n})^{-1}$ das zweidimensionale Analogon von $D(\rho_\mathfrak{n})$ (vgl. [Gek86, V.3.5.]).

Wir werden nun für $\Delta_{\mathfrak{n}}^Y$ und $\Delta_a^Y$ in den verschiedenen Spitzen jeweils eine Produktdarstellung angeben. Die einzelnen Rechenschritte zur Konkretisierung sind in [Gek86, VI.1.–4.] für einen beliebigen Drinfeld-Ring ausgeführt und umfassen dort dreizehn Seiten, wir werden sie hier nicht wiederholen.
An dem einfacheren Fall $A = \mathbb{F}_q[T]$, der in [Gek85] ausgeführt ist, läßt sich die Vorgehensweise klarer erkennen.

**5.3.3 Proposition.** *([Gek86, VI.4.11. und VI.4.12.]) Wir verwenden die Bezeichnungen aus* (5.2.20) *und aus* (4.4.4) *und setzen* $R_{\mathfrak{g}} := R_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}$ *und* $t := t_{\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}}(z)$ *sowie* $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$.

*(i) Sei* $\mathfrak{n} \subset A$ *ein Ideal vom Grad* $d$*. Weiter sei*

$$k := (q-1)(Z_{[\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{n}]}(q) - q^2 Z_{[\mathfrak{a}^{-1}]}(q)) \ ,$$

*wobei* $Z_{[\mathfrak{n}]}(S)$ *die in* (1.3.11) *definierte partielle Zetafunktion ist (für spezielle Werte: vgl.* (1.3.12)*). Dann besitzt* $\Delta_{\mathfrak{n}}^Y$ *eine Produktdarstellung*

$$\Delta_{\mathfrak{n}}^Y(z) = \xi(\mathfrak{b})^{q^{2d}-1}\varepsilon \cdot D(\rho_{\mathfrak{n}}^{(\mathfrak{m})})^{-1} t^k \cdot \prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{a}^{-1}] \\ ganz}} R_{\mathfrak{g}}{}^{q^{2d}(q-1)}(t) \cdot \left( \prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{n}] \\ ganz}} R_{\mathfrak{g}}{}^{q-1}(t) \right)^{-1} .$$

*Hierbei ist* $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^*$ *eine* $(q-1)$*-te Einheitswurzel.*

*Das Produkt konvergiert für jedes* $0 < r < 1$ *uniform auf Kreisen mit* $|t| \leq r \cdot q^{-(q^2-q)^{-1}}$.

*Auf* $\Omega$ *hat* $\Delta_{\mathfrak{n}}^Y$ *keine Nullstellen.*

*(ii) Ist* $a \in A$ *vom Grad* $d$,

$$k = (1-q^{2d})(q-1)Z_{[\mathfrak{a}^{-1}]}(q) \quad und \quad e = q^{\deg(\mathfrak{a})-\deg(\mathfrak{b})} \ ,$$

*dann ist*

$$\Delta_a^Y(z) = -sgn(a)^e \xi(\mathfrak{b})^{q^{2d}-1} t^k \prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{a}^{-1}] \\ ganz}} R_{\mathfrak{g}}{}^{(q^2-1)(q-1)}(t) \ .$$

**5.3.4 Bemerkung.** Die Gitterinvariante $\xi(\mathfrak{b})$ ist zwar nur bis auf eine $(q-1)$-te Einheitswurzel festgelegt, die $(q^{2d}-1)$-te Potenz ist dann aber eindeutig bestimmt.

Die kanonische Modulform $\Delta^Y$ wird aus den $\Delta_a^Y$ berechnet. Zu zwei Elementen $a, a' \in A$ vom Grad $d$ bzw. $d'$ mit $\mathrm{ggT}(d, d') = 1$ setzt Gekeler $i = q^{2d} - 1$ und $i' = q^{2d'} - 1$ sowie $\mathrm{ggT}(i, i') = ni + n'i'$ und erhält $\Delta^Y = (\Delta_a^Y)^n (\Delta_{a'}^Y)^{n'}$.
Das Ergebnis $\Delta^Y$ ist unabhängig von den gemachten Wahlen $a, a', d, d', i, i'$. Dies rechtfertigt auch den Zusatz „kanonisch“ für diese Modulform.

**5.3.5 Proposition.** *([Gek86, VI.5.15.]) Die Bezeichnungen sind wie in* (5.3.3) *gewählt.*

*(i) Für die kanonische Modulform $\Delta^Y$ ergibt sich mit $k = (1-q^2)(q-1)Z_{[\mathfrak{a}^{-1}]}(q)$*

$$\Delta^Y(z) = -\xi(\mathfrak{b})^{q^2-1} t^k \prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{a}^{-1}] \\ ganz}} R_{\mathfrak{g}}{}^{(q^2-1)(q-1)}(t) \ .$$

*(ii) $\Delta^Y$ ist eine holomorphe Modulform für $\mathrm{GL}(Y)$ vom Gewicht $q^2-1$ (und Typ $0$).*

*(iii) Wegen [Gek86, VI.5.15.iii] hat $\Delta^Y$ auf $\Omega$ keine Nullstelle.*

*(iv) $k$ ist durch $q-1$ teilbar und*

$$\Delta^Y = t^k(1 + \{\,\textit{Terme höherer Ordnung}\}) \ ,$$

*d.h. $\Delta^Y$ hat eine Entwicklung in $t^{q-1}$.*

*(v) ([Gek86, VI.5.3]) Ist nun $Y' = Y\vartheta$ ein zu $Y$ ähnliches Gitter, so gilt für ihre kanonischen Modulformen*

$$\Delta^Y_{[\vartheta]} = \Delta^{Y'} \ .$$

*Infolgedessen ist nun das Verhalten von $\Delta^Y$ in allen Spitzen bestimmt.*

**5.3.6 Korollar.** *Sei $\det(Y) = \mathfrak{d}$. Weiter seien die Spitzen von $\mathrm{GL}(Y)\backslash\overline{\Omega}$ gegeben durch $s(\mathfrak{d}\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^{-1})$ (vgl. (4.4)), wobei $\mathfrak{p}$ die Picardgruppe durchläuft. Dann hat der Divisor von $\Delta^Y$ Träger in den Spitzen und ist*

$$\mathrm{div}(\Delta^Y) = \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Pic}(A)} (1-q^2) Z_{[(\mathfrak{d}\mathfrak{p})^{-1}]}(q) \cdot s(\mathfrak{d}\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^{-1}) \in \mathrm{Div}(\mathrm{GL}(Y)\backslash\overline{\Omega}) \ .$$

Wir wenden uns nun wieder der Betrachtung von $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$ zu. Dazu führen wir zunächst vereinfachende Schreibweisen ein.

**5.3.7 Vereinbarung.** *Das triviale Gitter $Ae_1 + Ae_2$ bezeichnen wir mit $\mathbf{Y}$. Dann definieren wir*

$$\Delta := \Delta^{\mathbf{Y}} \ , \quad \Delta_{\mathfrak{n}} := \Delta^{\mathbf{Y}}_{\mathfrak{n}} \ , \quad \Delta_a := \Delta^{\mathbf{Y}}_a \ .$$

*Die Gitterinvariante des trivialen Rang-1 Gitters $A$ bezeichnen wir mit*

$$\pi := \xi((1)) \ .$$

*Damit erhalten wir $t_{(1)} = \pi^{-1} e_{(1)}^{-1} = \pi^{-1} t(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \infty)$.*

Mit den in (1.3.12) angeführten Werten der partiellen Zetafunktion und den Aussagen (5.3.3) und (5.3.5) erhalten wir

**5.3.8 Korollar.** *(i) Seien* $\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}' \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}$ *mit* $[\mathfrak{p}'] = [\mathfrak{p}^{-1}]$*. Dann hat* $\Delta_{\mathfrak{p}}$ *den Divisor*

$$\mathrm{div}(\Delta_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{div}(\Delta_{\mathfrak{p}'}) + (q^3 - q^2 + q) \cdot \mathcal{S}(\infty) + \sum_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1), \mathfrak{p}'\}} q \cdot \mathcal{S}(\mathfrak{q}) \ .$$

*(ii) Der Divisor von* $\Delta$ *ist*

$$\mathrm{div}(\Delta) = (q^3 - q^2 + 1) \cdot \mathcal{S}(\infty) + \sum_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}} q \cdot \mathcal{S}(\mathfrak{q}) \ .$$

*Dieser hat den Grad*

$$\deg \mathrm{div}(\Delta) = q^3 - q^2 + 1 + (h_K - 1)q = P(q) \ ,$$

*wobei* $P(S) = 1 - aS + qS^2$ *mit* $a := 1 + q - h_K$ *das Zählerpolynom der Zetafunktion ist (vgl.* (1.3.9)*).*

*(iii) Die Elemente der Menge*

$$\{\Delta\} \cup \{\Delta_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}\}$$

*sind linear unabhängig.*

*Beweis.* Zu zeigen ist nur (iii). Sei

$$\mathcal{B}(z) = \mathscr{b}(\infty)\Delta(z) + \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}} \mathscr{b}(\mathfrak{p})\Delta_{\mathfrak{p}}(z)$$

eine Linearkombination in $M_{q^2-1}(\mathrm{G}(A))$. Wir nehmen nun an, daß $\mathcal{B}(z) \equiv 0$ ist und zeigen, daß dies nur für die triviale Linearkombination möglich ist.
Aus den Teilen (i) und (ii) des Korollars erhalten wir für jeden Summanden $\Delta_{\mathfrak{p}}(z)$ und für $\Delta$ die Nullstellenordnung in jeder Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ bezüglich des Parameters $t_{\mathfrak{q}^{-2}}$ (bzw. $t_{(1)}$ für $\mathcal{S}(\infty)$).
Wir können nun die Entwicklungen in den verschiedenen Spitzen als Gleichungssystem in $h_K$ Gleichungen (für jede Spitze eine) und in $h_K$ Unbestimmten $\mathscr{b}(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}$ oder $\mathfrak{p} = \infty$ auffassen.
Betrachten wir nun eine Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) \neq \mathcal{S}(\infty)$. Sei $\mathfrak{q}' \in [\mathfrak{q}^{-1}]$ der Standardrepräsentant, dann hat bezüglich des Parameters $t_{\mathfrak{q}^{-2}}$

- $\Delta_{\mathfrak{q}'}(z)$ die Nullstellenordnung $q - 1$,
- $\Delta_{\mathfrak{p}}(z)$ mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$ die Nullstellenordnung $(q - 1)q$,
- $\Delta(z)$ die Nullstellenordnung $(q - 1)q$.

Um $\mathcal{B}(z) \equiv 0$ zu erfüllen, muß also der Koeffizient $\mathscr{b}(\mathfrak{q}') = 0$ sein. Dies gilt aber für alle $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Pic}(A) - \{(1)\}$, also auch für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Pic}(A) - \{(1)\}$.
Es bleibt der Summand $\mathscr{b}(\infty)\Delta(z)$. Und da $\Delta(z) \not\equiv 0$ ist, ist auch $\mathscr{b}(\infty) = 0$. □

**5.3.9 Korollar.** *Seien die Bezeichnungen wie oben und in* (5.2.12) *gewählt. Die Menge*

$$\{\Delta,\, \Delta_{\mathfrak{p}},\, E_{Y(\mathfrak{q})}^{(q^2-1)} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Pic}(A) - \{(1)\} \text{ und } \mathfrak{q} \in \operatorname{Pic}(A)\}$$

*ist linear unabhängig.*

*Beweis.* Aus (5.3.8) ist klar, daß die Elemente von $\{\Delta, \Delta_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Pic}(A) - \{(1)\}$ linear unabhängig sind; aus (5.2.44) wissen wir, daß die Eisensteinreihen $E_{Y(\mathfrak{q})}^{(q^2-1)}$, wobei $\mathfrak{q}$ die Picardgrupe durchläuft, linear unabhängig sind. Im Beweis der letzten Aussage haben wir nachgewiesen, daß es keine nichttriviale Linearkombination der (beteiligten) Eisensteinreihen gibt, die in allen Spitzen den konstanten Term 0 hat.
Betrachten wir nun von

$$\mathcal{B}(z) := \sum_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Pic}(A)} \mathscr{b}(\mathfrak{q}) E_{Y(\mathfrak{q})}^{(q^2-1)} + \mathscr{c}(\infty)\Delta(z) + \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Pic}(A) - \{(1)\}} \mathscr{c}(\mathfrak{p})\Delta_{\mathfrak{p}}(z)$$

die Entwicklungen in den verschiedenen Spitzen, dann müssen alle $\mathscr{b}(\mathfrak{q}) = 0$ sein, wenn wir $\mathcal{B}(z) \equiv 0$ erfüllen wollen. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\Delta(z)$ und $\Delta_{\mathfrak{p}}(z)$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Pic}(A) - \{(1)\}$, folgt dann aber auch $\mathscr{c}(\mathfrak{p}) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Pic}(A) - \{(1)\}$ oder $\mathfrak{p} = \infty$. Damit ist das Korollar gezeigt. □

## Reihenentwicklung in den Spitzen

Wir wollen nun die ersten Terme der Potenzreihenentwicklung von $\Delta$ in den verschiedenen Spitzen bestimmen. In der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ betrachten wir dazu $\Delta$ selbst, in Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$ wie üblich $\Delta_{[\vartheta]} = \Delta^Y$, wobei $Y = \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$ und $\mathbf{Y}\vartheta = Y$ ist.

Wir beginnen mit dem trivialen Gitter $\mathbf{Y}$. Das triviale Element der Picardgruppe ist $[(1)] = \{(a) \mid a \in K^*\}$, daher ist

$$\{\mathfrak{g} \in [(1)] \mid \mathfrak{g} \text{ ganz}\} \xrightarrow{\sim} \{a \in A \mid a \text{ normiert}\}\ ,$$

so daß wir die ersten Terme der Potenzreihenentwicklung von

$$\Delta(z) = \Delta^{\mathbf{Y}}(z) = -\xi((1))^{q^2-1} t_{(1)}^{(q-1)(q^3-q^2+1)} \prod_{\substack{a \in A \\ \text{normiert}}} R_a^{(1)}(t_{(1)})^{(q^2-1)(q-1)} \tag{5.3.10}$$

(vgl. (5.3.5), (5.3.7) und (5.3.8)) direkt bestimmen können, denn es tragen zum Koeffizienten einer $t_{(1)}$-Potenz stets nur endlich viele der $R_a^{(1)}$ bei.
Dabei ist es sinnvoll, die Elemente in $A$ wieder dem Grade nach zusammenzufassen und diese Produkte getrennt auszuwerten. Hierzu nutzen wir

**5.3.11 Lemma.** *Es gilt*

$$\prod_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q}(X - Z\varepsilon) = X^q - XZ^{q-1} \ .$$

*Beweis.* Wir ersetzen in $X^q - X = \prod_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} X - \varepsilon$ die Unbestimmte $X$ durch $\frac{X}{Z}$. □

Setzen wir

$$R_x^{(1)}(t_{(1)}) =: 1 + r_1 t_{(1)}^{q^2-q} + x t_{(1)}^{q^2-1} \ , \tag{5.3.12}$$

so erhalten wir nach (5.2.22)

$$\prod_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} R_{x-\varepsilon}^{(1)}(t_{(1)}) = 1 - t_{(1)}^{(q-1)(q^2-1)} + r_1^q t_{(1)}^{q^3-q^2} - r_1 t_{(1)}^{(q-1)(q^2+q-1)} + (x^q - x) t_{(1)}^{q(q^2-1)} \ . \tag{5.3.13}$$

Betrachten wir die normierten Elemente in $A$ vom Grad 3

$$\{y - \varepsilon_1 x - \varepsilon_2 \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{F}_q\} \ ,$$

so ist wegen (5.2.22)

$$R_{y-\varepsilon_1 x-\varepsilon_2}^{(1)}(t_{(1)}) = R_y^{(1)}(t_{(1)}) - \varepsilon_1 t_{(1)}^{q^3-q^2} R_x^{(1)}(t_{(1)}) - \varepsilon_2 t_{(1)}^{q^3-1} \ ,$$

und das Teilprodukt über die Elemente vom Grad 3 ist

$$\begin{aligned}
&\prod_{\varepsilon_1\in\mathbb{F}_q}\prod_{\varepsilon_2\in\mathbb{F}_q} R_{y-\varepsilon_1 x-\varepsilon_2} \\
&\qquad = \prod_{\varepsilon_1\in\mathbb{F}_q}\left(R_y^q - t_{(1)}^{(q-1)(q^3-1)} R_y + \varepsilon_1 (t_{(1)}^{(q-1)(q^3+q^2-1)} R_x - R_x^q t_{(1)}^{q^4-q^3})\right) \\
&= R_y^{q^2} - t_{(1)}^{(q-1)q(q^3-1)} R_y^q - (R_y^q - t_{(1)}^{(q-1)(q^3-1)} R_y)(t_{(1)}^{q^4-q^3} R_x^q - t_{(1)}^{(q-1)(q^3+q^2-1)})^{q-1} R_x \ ,
\end{aligned}$$

wobei $R_*^{(1)}(t_{(1)}) =: R_*$ gesetzt wurde.
Dabei hat die nichttriviale $t_{(1)}$-Potenz vom kleinsten Grad den Exponenten

| Term | Exponent |
|---|---|
| $R_y^{q^2}$ | $q^5 - q^4$ |
| $t_{(1)}^{(q-1)(q^3-1)} R_y$ | $q^4 - q^2 - q + 1$ |
| $R_y^q$ | $q^4 - q^3$ |
| $t_{(1)}^{q(q-1)(q^3-1)} R_y^q$ | $q^5 - q^3 - q^2 + q$ |
| $t_{(1)}^{(q-1)(q^3+q^2-1)}$ | $q^4 - q^2 - q + 1$ |
| $t_{(1)}^{q^4-q^3} R_x^q$ | $q^4 - q^3$ |

Aus dieser Tabelle läßt sich auch der kleinste nichttriviale Exponent in

$$(R_y^q - t_{(1)}^{(q-1)(q^3-1)} R_y)(t_{(1)}^{(q-1)(q^3+q^2-1)} - t_{(1)}^{q^4-q^3} R_x)^{q-1}$$

ablesen. Dieser ist $(q^4 - q^3) + (q-1)^2(q^3 + q^2 - 1) = (q-1)(q^4 + q^3 - q^2 - q + 1)$. Daher ist

$$\prod_{\varepsilon_1 \in \mathbb{F}_q} \prod_{\varepsilon_2 \in \mathbb{F}_q} R_{y-\varepsilon_1 x - \varepsilon_2} = 1 + r t_{(1)}^{q^5-q^4} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ ,$$

wobei $r = \operatorname{coeff}(\rho'_y, 2)$ der Koeffizient eines normalisierten Rang-1 Drinfeld-Moduls $\rho'$ ist, der isomorph zu $\rho^{(1)}$ ist.
Deshalb sind die ersten Summanden die in (5.3.13) bestimmten:

$$\begin{aligned}\prod_{a \in A,\, \text{norm.}} R_a^{(1)}(t_{(1)}) &= \prod_{\varepsilon \in \mathbb{F}_q} R_{x-\varepsilon}^{(1)}(t_{(1)}) \cdot \prod_{\substack{a \in A,\, \text{norm.} \\ \deg(a) \geq 3}} R_a^{(1)}(t_{(1)}) \\ &= 1 + t_{(1)}^{q^3-q^2-q+1} + r_1^q t_{(1)}^{q^3-q^2} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ .\end{aligned}$$

Beim Erheben dieses Ausdruckes in die $(q-1)(q^2-1)$-te Potenz entsprechen die ersten Terme denen desselben Ausdruckes, da die Reihe mit dem konstanten Term 1 beginnt. Zur Berechnung von $\Delta(z)$ müssen wir nun noch den Vorfaktor berücksichtigen (vgl. (5.3.10)).

**5.3.14 Satz.** *Die Entwicklung von $\Delta$ in $\mathcal{S}(\infty)$ ist*

$$\begin{aligned}\Delta(z) = -\xi((1))^{q^2-1} \Big( & t_{(1)}^{(q-1)(q^3-q^2+1)} + t_{(1)}^{(q-1)q^3} + r_1^q t_{(1)}^{(q-1)(q^3+1)} + \Big) \\ & + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\} \ .\end{aligned}$$

*Dabei ist $r_1$ in* (5.3.12) *definiert.*

Etwas aufwendiger ist es hingegen, die ersten Terme von $\Delta^Y$ für $Y = \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$ und nichttriviales $\mathfrak{p} \in \operatorname{Pic}(A)$ zu bestimmen.
Dazu müssen wir die ersten Terme in

$$\prod_{\substack{\mathfrak{g} \in [\mathfrak{p}^{-1}] \\ \text{ganz}}} R_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{p}^{-2}}(t_{\mathfrak{p}^{-2}})^{(q^2-1)(q-1)}$$

bestimmen. Der besseren Übersicht wegen formulieren wir die notwendigen Vorüberlegungen und Berechnungen als Lemmata.
Wie üblich seien $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta') \in E(\mathbb{F}_q)$ mit $(\alpha, \beta') = -(\alpha, \beta)$ und $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$ sowie $\mathfrak{p}' = (x - \alpha, y - \beta')$. Weiter sei $L := \xi(\mathfrak{p}^{-2})\mathfrak{p}^{-2}$ ein spezielles Gitter aus der Ähnlichkeitsklasse von $\mathfrak{p}^{-2}$.

**5.3.15 Lemma.** *Es gilt die Bijektion von Mengen*

$$\{\mathfrak{g} \in [\mathfrak{p}^{-1}] \mid \mathfrak{g} \text{ ganz}\} \xrightarrow{\sim} \{(f)\mathfrak{p}' \mid f \in A \text{ norm.}\} .$$

*Beweis.* Zu $\mathfrak{g} \in [\mathfrak{p}^{-1}]$ existiert ein $f \in K$ mit $\mathfrak{g} = f\mathfrak{p}^{-1}$, und $f\mathfrak{p}^{-1}$ ist genau dann ganz, wenn $f(1, \frac{y-\beta}{x-\alpha}) \subset A$ ist. Also gilt $(x-\alpha) \mid f$ und $f \in A$. Andererseits ist nach (1.3.5) $(x-\alpha)\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{p}'$. □

**5.3.16 Lemma.** *Für alle normierten $f \in A$ ist*

$$\rho^L_{(f)\mathfrak{p}'} = \rho^L_{\mathfrak{p}'}\rho^L_f .$$

*Beweis.* Nach [Hay79] ist

$$\rho^L_{(f)\mathfrak{p}'} = (\mathfrak{p}' * \rho^L)_{(f)}\rho^L_{\mathfrak{p}'} .$$

Da $\mathfrak{p}' * \rho^L$ *sgn*-normalisiert ist, ist $(\mathfrak{p}' * \rho^L)_{(f)} = (\mathfrak{p}' * \rho^L)_f$. Zudem ist $\mathfrak{p}' * \rho^L$ definiert als der Drinfeld-Modul, der

$$\rho^L_{\mathfrak{p}'}\rho^L_f = (\mathfrak{p}' * \rho^L)_f$$

zu gegebenem $\mathfrak{p}'$ und $\rho^L$ und für alle $f \in A$ erfüllt. □

**5.3.17 Definition.** *Den Rang-1 Drinfeld-Modul $\rho^L$ beschreiben wir durch*

$$\rho^L_f = \sum_{i=0}^{\deg(f)} l(f,i)\tau^i$$

*für alle $f \in A$. Die Isogenie kürzen wir ab mit*

$$\rho^L_{\mathfrak{p}'} = D\tau^0 + \tau .$$

*Zudem setzen wir $S_f(X) = R^{\mathfrak{p}^{-2}}_{(f)\mathfrak{p}'}(X)$.*

**5.3.18 Bemerkung.** Es ist also (vgl. (2.3.21))

$$\begin{aligned} D = D(\rho^L_{\mathfrak{p}'}) &= \xi(\mathfrak{p}^{-2})^{q-1}(\alpha((\mathfrak{p}')^{-1}\mathfrak{p}^{-2},1) - \alpha(\mathfrak{p}^{-2},1))^{-1} \\ &= \xi(\mathfrak{p}^{-2})^{q-1}(\alpha((x-\alpha)^{-2}\mathfrak{p}',1) - \alpha(\mathfrak{p}^{-2},1))^{-1} , \end{aligned}$$

da nach (1.3.5) $(\mathfrak{p}')^{-1} = \frac{1}{x-\alpha}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^{-1} = \frac{1}{x-\alpha}\mathfrak{p}'$ ist.

**5.3.19 Lemma.** *(i) Es ist $S_1(X) = 1 + DX^{q-1}$.*

*(ii) Ist $f \in A$ ein normiertes Polynom vom Grad $d \geq 2$, dann ist*

$$S_f(X) = 1 + (D + l(f,d-1))X^{q^{d+1}-q^d} + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\} .$$

*Beweis.* Für alle $f \in A$ ist

$$\rho^L_{\mathfrak{p}'}\rho^L_f = (D\tau^0 + \tau)(\sum_{i=0}^{\deg(f)} l(f,i)\tau^i) = \sum_{i=0}^{\deg(f)} D\,l(f,i)\tau^i + \sum_{i=0}^{\deg(f)} l(f,i)^q\tau^{i+1} \ ,$$

und daher ist mit (5.3.17) und (5.3.16)

$$S_f(X) = \sum_{i=0}^{\deg(f)} D\,l(f,i)X^{q^{\deg(f)+1}-q^i} + \sum_{i=0}^{\deg(f)} l(f,i)X^{q^{\deg(f)+1}-q^{i+1}} \ .$$

Ist $f$ normiert, so ist $l(f,\deg(f)) = 1$. □

Insbesondere erhalten wir

**5.3.20 Lemma.** *Für alle $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ ist*

$$S_{x+\varepsilon}(X) = 1 + (l(x,1)^q + D)X^{q^3-q^2} + (x^q + \varepsilon + D\,l(x,1))X^{q^3-q} + D(x+\varepsilon)X^{q^3-1}.$$

*Beweis.* Dies ist eine direkte Konsequenz aus (5.2.22). □

Wir setzen

$$S_x(X) = 1 + s_1X^{q^3-q^2} + s_2X^{q^3-q} + s_3X^{q^3-1} \ . \tag{5.3.21}$$

**5.3.22 Lemma.**

$$\prod_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} S_{x+\varepsilon}(X) = 1 - X^{(q-1)q(q^2-1)} + s_1^qX^{q^3(q-1)} - s_1X^{(q-1)q(q^2+q-1)} + DX^{q^4-q^3-q^2+2q-1} + s_2^qX^{q^2(q^2-1)} + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\} \ .$$

*Beweis.* Nach (5.3.20) und (5.3.11) ist

$$\prod_{\varepsilon\in\mathbb{F}_q} S_{x-\varepsilon}(X) = 1 + s_1^qX^{q^4-q^3} + s_2^qX^{q^4-q^2} + s_3^qX^{q^4-q} - (1 + s_1X^{q^3-q^2} + s_2X^{q^3-q} + s_3X^{q^3-1})(X^{q^3-q} + DX^{q^3-1})^{q-1}$$

Aus $(X+Z)^{q-1} = X^{q-1} - X^{q-2}Z + \ldots$ erhalten wir

$$(X^{q^3-q} + DX^{q^3-1})^{q-1} = X^{(q-1)q(q^2-1)} - DX^{q^4-q^3-q^2+2q-1} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}.$$

Damit ist

$$(1 + s_1X^{q^3-q^2} + s_2X^{q^3-q} + s_3X^{q^3-1})(X^{q^3-q} + DX^{q^3-1})^{q-1} = X^{(q-1)q(q^2-1)} + s_1X^{(q-1)q(q^2+q-1)} - DX^{q^4-q^3-q^2+2q-1} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ .$$

□

Zusammen mit (5.3.19) (i) ($s_1$ wie in (5.3.21)) ist

$$\prod_{\substack{a\in A \text{ norm.}\\ \deg(a)\leq 2}} S_a(X) = (1+DX^{q-1})\cdot \prod_{\substack{a\in A \text{ norm.}\\ \deg(a)=2}} S_a(X)$$
$$= 1 + DX^{q-1} - DX^{(q-1)(q^3-q^2+1)} - X^{(q-1)q(q^2-1)} + s_1^q X^{(q-1)q^3}$$
$$+ \{\text{Terme höherer Ordnung}\}\ . \quad (5.3.23)$$

Betrachten wir das Teilprodukt über alle Elemente aus $A$ vom Grad 3, so können wir durch zweimaliges Anwenden von (5.3.11) den kleinsten nichtkonstanten Term bestimmen. Dieser hat den Exponenten $q^6 - q^5$.
Wir halten das Ergebnis fest.

**5.3.24 Satz.** *(vgl.* (5.3.5) *und* (5.3.8)*) Seien* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}$ *ein Primideal vom Grad* 1 *und* $Y = \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$ *sowie* $\xi(\mathfrak{p}^{-2})$ *eine Gitterinvariante. Zum Gitter* $L = \xi(\mathfrak{p}^{-2})\mathfrak{p}^{-2}$ *setzen wir* $D = D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)$ *(näher bestimmt in* (5.3.18)*). Die Modulform* $\Delta^Y$ *hat bezüglich der Uniformisierenden* $t := t_{\mathfrak{p}^{-2}}$ *die Reihenentwicklung*

$$\Delta^Y(z) = -\xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q^2-1} t^{(q-1)q} \prod_{\substack{f\in A\\ norm}} S_f(t)^{(q^2-1)(q-1)}$$
$$= -\xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q^2-1} \left( t^{q(q-1)} + Dt^{q^2-1} - Dt^{(q-1)(q^3-q^2+q-1)} - t^{(q-1)q^3} \right)$$
$$+ \{\textit{Terme höherer Ordnung}\}\ .$$

## 5.4 Herleitung der Dimensionsformel

Die genaue Kenntnis der kanonischen Modulform $\Delta$ genügt uns, um den Divisorgrad einer Modulform von (allgemeinem) Gewicht $k$ und Typ $m$ zu bestimmen. Wir werden dann einen Isomorphismus von $M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$ in den $L$-Raum $L(D) = H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}, D)$ zu einem geeigneten Divisor $D$ konstruieren, dessen Dimension wir schließlich noch bestimmen müssen.

Sei $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$ der Parameter zu einem Element $s \in \mathbb{P}^1(K)$. Dann hat eine Modulform $f$ mit Gewicht $k$ und *Typ* $m$ im allgemeinen nur eine Entwicklung bezüglich $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))$, allerdings kann $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))^{-m} f$ bezüglich $t(\vartheta, \mathrm{G}(A))^{q-1}$ entwickelt werden.
Nichtsdestotrotz weichen wir nun in der Definition für einen Divisor der Modulform $f$ auf die „rationalen“ Divisoren aus.

**5.4.1 Definition.** *Sei $f$ eine Modulform für* $\mathrm{G}(A)$*. Dann ist der Divisor* $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}) \otimes \mathbb{Q}$ *von $f$ auf der Modulkurve* $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f) := &\sum_{[z]\in \mathrm{G}(A)\backslash\Omega - \mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))} \mathrm{ord}_{[z]}(f)\,[z] + \sum_{[e]\in \mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))} \frac{\mathrm{ord}_{[e]}(f)}{q+1}\,[e] \\ &+ \sum_{[s]\in \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega} - \mathrm{G}(A)\backslash\Omega} \frac{\mathrm{ord}_{[s]}(f)}{q-1}\,[s]\ .\end{aligned}$$

**5.4.2 Bemerkung.** Diese Definition macht Sinn, denn:

(i) Sind $z_1, z_2 \in [z] \in \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ zwei Elemente derselben Klasse, so können sich die Entwicklungen einer Modulform $f \in M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$ zwar in $z_1$ und $z_2$ unterscheiden, nicht aber ihre Nullstellenordnung.

(ii) Da jede nichtkonstante holomorphe Modulform modulo $\mathrm{G}(A)$ nur endlich viele Nullstellen hat, ist die Summe endlich.

**5.4.3 Proposition.** *Sei* $f \in M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$*. Dann ist der Grad von* $\mathrm{div}(f)$

$$\begin{aligned}&\deg\mathrm{div}(f) = \\ &\sum_{[z]\in \mathrm{G}(A)\backslash\Omega - \mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))} \mathrm{ord}_{[z]}(f) + \sum_{[e]\in \mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))} \frac{\mathrm{ord}_{[e]}(f)}{q+1} + \sum_{[s]\in \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega} - \mathrm{G}(A)\backslash\Omega} \frac{\mathrm{ord}_{[s]}(f)}{q-1} \\ &\qquad = \frac{k\cdot P(q)}{q^2-1}\ ,\end{aligned}$$

*wobei* $P(S) = qS^2 - aS + 1$ *mit* $a = 1 + q - h_K$ *das Zählerpolynom der Zetafunktion der elliptischen Kurve ist (vgl.* (1.3.9)*).*

*Beweis.* Das erste Gleichheitszeichen ergibt sich direkt aus der Definition. Ist $f$ eine Modulform vom Gewicht $k$ und Typ $m$, so ist $f^{1-q^2}(\Delta^Y)^k$ eine modulare Funktion, denn für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(A)$ ist

$$\begin{aligned}(f(\gamma z))^{1-q^2}(\Delta(\gamma z))^k &= \left(\frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)^m} f(z)\right)^{1-q^2} \left((h_3 z + h_4)^{q^2-1}\Delta(z)\right)^k \\ &= \underbrace{(\det(\gamma))^{(q^2-1)m}}_{=1} f^{1-q^2}(z)\Delta^k(z)\ .\end{aligned}$$

Daher ist $\deg\mathrm{div}(f^{1-q^2}(\Delta^Y)^k) = 0$. Andererseits hat $\Delta^Y$ den Divisorgrad $P(q)$ (vgl. (5.3.8)), und daher ist

$$\begin{aligned}0 = \deg\mathrm{div}(f^{1-q^2}\Delta^k) &= (1-q^2)\deg\mathrm{div}(f) + k\cdot\deg\mathrm{div}(\Delta) \\ &= (1-q^2)\deg\mathrm{div}(f) + k\cdot P(q)\end{aligned}$$

und somit $\deg\mathrm{div}(f) = \frac{k\cdot P(q)}{q^2-1}$. □

**5.4.4 (Strategie zur Dimensionsbestimmung).** Wir werden die obige Proposition nutzen, um eine Formel für die Dimensionen der Vektorräume $M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$ zu beweisen.
Dazu werden wir uns einen geeigneten Divisor $D$ konstruieren, so daß $M_{k,m}(\mathrm{G}(A)) \cong H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}, D)$ ist. Anschließend wollen wir den Satz von Riemann-Roch anwenden. Mit unseren Methoden konstruieren wir gebrochene Divisoren, der Satz von Riemann-Roch hingegen hat nur Gültigkeit für ganze Divisoren. Daher werden wir dann den gebrochenen Anteil des Divisors berechnen und daraus den Grad des ganzzahligen Anteils ermitteln.

Zu einer Modulform $f \in M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$ ist die Ableitung $f'$ im allgemeinen keine Modulform, denn für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(A)$ ergibt sich aus

$$f(\gamma z) = \frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)^m} f(z)$$

für die Ableitungen die Äquivalenzkette

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz} f(\gamma z) &&= \frac{d}{dz}\left(\frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)^m} f(z)\right) \\
\Leftrightarrow\quad & f'(\gamma z)\frac{d}{dz}\gamma z &&= \frac{k\, h_3 (h_3 z + h_4)^{k-1}}{\det(\gamma)^m} f(z) + \frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)^m} f'(z) \\
\Leftrightarrow\quad & f'(\gamma z)\frac{\det(\gamma)}{(h_3 z + h_4)^2} &&= \frac{k\, h_3 (h_3 z + h_4)^{k-1}}{\det(\gamma)^m} f(z) + \frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)^m} f'(z) \\
\Leftrightarrow\quad & f'(\gamma z) &&= \frac{(h_3 z + h_4)^{k+2}}{\det(\gamma)^{m+1}} f'(z) + k \frac{h_3 (h_3 z + h_4)^{k+1}}{\det(\gamma)^{m+1}} f(z)\ .
\end{aligned}$$

Im Beweis der Dimensionsformel benötigen wir ein geeignetes Äquivalent. Daher definieren wir nun

**5.4.5 Definition.** *Seien wie in* (5.3.7) *festgelegt* $\Delta = \Delta^{\mathbf{Y}}$ *und* $\pi$ *die fixierte Gitterinvariante des trivialen Gitters* $\mathbf{Y}$*.*

*(i) Sei* $H(z) := \pi^{-1}\frac{(\Delta)'(z)}{\Delta(z)}$ *die normalisierte logarithmische Ableitung der kanonischen Modulform. Ist* $Y = \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$ *und* $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ *mit* $\mathbf{Y}\vartheta = Y$*, so setzen wir (vgl.* (5.3.5)*)*

$$H^{\vartheta}(z) := \pi^{-1}\frac{(\Delta_{[\vartheta]})'(z)}{\Delta_{[\vartheta]}(z)} = \pi^{-1}\frac{(\Delta^Y)'(z)}{\Delta^Y(z)}\ .$$

*(ii) Zu einer gegebenen Modulform* $f \in M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$ *definieren wir die* Serre-Ableitung

$$\partial f(z) := \pi^{-1} f'(z) + k \cdot H(z) \cdot f(z)\ .$$

Die nächsten drei Lemmata zeigen, daß zu einer gegebenen Modulform $f$ die Serre-Ableitung $\partial f$ eine Modulform ist und wie man deren Entwicklungen in den von $\mathcal{S}(\infty)$ verschiedenen Spitzen bestimmt.

**5.4.6 Lemma.** *Die normalisierte logarithmische Ableitung $H(z)$ der kanonischen Modulform hat in der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ bezüglich der Unformsierenden $t_{(1)}$ eine einfache Nullstelle und in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A) - \{(1)\}$, bezüglich der Uniformisierenden $t_{\mathfrak{p}^{-2}}$ die Nullstellenordnung $q$.*

*Beweis.* Nach (5.3.14) hat $\Delta$ in der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ die Entwicklung

$$\Delta(z) = \pi^{q^2-1} t_{(1)}^{(q-1)(q^3-q^2+1)} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}\ .$$

Zusammen mit (5.1.9) ergibt sich für die Ableitung

$$\Delta'(z) = \pi^{q^2-1} t_{(1)}^{(q-1)(q^3-q^2+1)+1} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}\ .$$

Also hat $H(z) = \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}$ in der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ bezüglich $t_{(1)}$ eine einfache Nullstelle. Sei nun $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$ und $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ mit $\mathbf{Y}\vartheta = \mathfrak{p}e_1 + \mathfrak{p}^{-1}e_2$. Die Entwicklung von $H(z)$ in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$ erhalten wir, wenn wir $H^{\vartheta}(z)$ in $t_{\mathfrak{p}^{-2}}$ entwickeln. Nach (5.3.24) ist

$$\Delta^{Y}(z) = -\,\xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q^2-1}\left(t_{\mathfrak{p}^{-2}}^{q(q-1)} + D(\rho_{\mathfrak{p}}^{L})t^{q^2-1}\right) + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}$$

und mit (5.1.9) ist

$$(\Delta^{Y})'(z) = -\,\xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q^2-1} D(\rho_{\mathfrak{p}}^{L}) t_{\mathfrak{p}^{-2}}^{q^2} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}\ .$$

Also hat $H(z) = \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}$ die Nullstellenordnung $q^2 - q(q-1) = q$ bezüglich des Parameters $t_{\mathfrak{p}^{-2}}$. $\square$

**5.4.7 Lemma.** *Ist $f \in M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$, so ist $\partial f \in M_{k+2,m+1}(\mathrm{G}(A))$.*

*Beweis.* Für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{G}(A)$ ist

$$\begin{aligned} H(\gamma z) &= \frac{\pi^{-1}}{(h_3z+h_4)^{q^2-1}\Delta(z)}\left(\frac{(h_3z+h_4)^{q^2+1}}{\det(\gamma)}\Delta'(z) - \frac{h_3(h_3z+h_4)^{q^2}}{\det(\gamma)^m}\Delta(z)\right) \\ &= \frac{(h_3z+h_4)^2}{\det(\gamma)}H(z) - \frac{h_3(h_3z+h_4)}{\pi\det(\gamma)}\ , \end{aligned}$$

und daraus folgt das Transformationsverhalten von $\partial f$:

$$\begin{aligned}
\partial f(\gamma z) &= \pi^{-1} f'(\gamma z) + k \cdot H(\gamma z) f(\gamma z) \\
&= \pi^{-1} \left( \frac{(h_3 z + h_4)^{k+2}}{\det(\gamma)^{m+1}} f'(z) + \frac{k h_3 (h_3 z + h_4)^{k+1}}{\det(\gamma)^{m+1}} f(z) \right) \\
&\quad + k \left( \frac{(h_3 z + h_4)^2}{\det(\gamma)} H(z) - \frac{h_3 (h_3 z + h_4)}{\pi \det(\gamma)} \right) \cdot \frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\gamma)} f(z) \\
&= \frac{(h_3 z + h_4)^{k+2}}{\det(\gamma)^{m+1}} \left( \pi^{-1} f'(z) + k H(z) f(z) \right) \ .
\end{aligned}$$

Ist nun $f$ holomorph auf $\Omega$, so auch $\partial f$, denn die logarithmische Ableitung $H(z)$ der kanonischen Modulform ist holomorph auf $\Omega$ (vgl. (5.3.5) (iii)). Die Holomorphie von $\partial f$ in den Spitzen folgt aus der Holomorphie von $f$ und $H(z)$ in den Spitzen (vgl. (5.4.6)). □

**5.4.8 Lemma.** *Seien $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ eine Matrix und $f$ eine Modulform vom Gewicht $k$ und Typ $m$. Dann ist*

$$(\partial f)_{[\vartheta]}(z) = \pi^{-1} (f_{[\vartheta]})'(z) + k \cdot H^{\vartheta}(z) f_{[\vartheta]}(z) \ .$$

*Beweis.* Sei $\vartheta = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{smallmatrix}\right)$. Nach Definition (5.1.2) ist für eine Modulform vom Gewicht $k$ und Typ $m$

$$f(\vartheta z) = \frac{(h_3 z + h_4)^k}{\det(\vartheta)^m} f_{[\vartheta]}(z) \qquad \text{und}$$

$$(\partial f)_{[\vartheta]}(z) = \frac{\det(\vartheta)^{m+1}}{(h_3 z + h_4)^{k+2}} \partial f(\vartheta z) = \frac{\det(\vartheta)^{m+1}}{(h_3 z + h_4)^{k+2}} \left( \pi^{-1} f'(\vartheta z) + H(\vartheta z) f(\vartheta z) \right) \ .$$

Aus (5.1.2) und (5.1.9) erhalten wir

$$(f_{[\vartheta]})'(z) = \frac{-k h_3 \det(\vartheta)^m}{(h_3 z + h_4)^{k+1}} f(\vartheta z) + \frac{\det(\vartheta)^{m+1}}{(h_3 z + h_4)^{k+2}} f'(\vartheta z) \ .$$

Also ist

$$f'(\vartheta z) = \frac{(h_3 z + h_4)^{k+2}}{\det(\vartheta)^{m+1}} (f_{[\vartheta]})'(z) + k h_3 \frac{(h_3 z + h_4)^{k+1}}{\det(\vartheta)^{m+1}} f_{[\vartheta]}(z) \ .$$

Insbesondere ist, da nach (5.3.5) $\Delta_{[\vartheta]}(z) = \Delta^Y(z)$ ist,

$$\Delta'(\vartheta z) = \frac{(h_3 z + h_4)^{q^2+1}}{\det(\vartheta)} (\Delta^Y)'(z) - h_3 \frac{(h_3 z + h_4)^{q^2}}{\det(\vartheta)} \Delta^Y(z) \ .$$

Damit erhalten wir nun

$$\frac{\Delta'(\vartheta z)}{\Delta(\vartheta z)} = \frac{(h_3 z + h_4)^2}{\det(\vartheta)} \frac{(\Delta^Y)'(z)}{\Delta^Y(z)} - \frac{h_3 (h_3 z + h_4)}{\det(\vartheta)} \qquad \text{und}$$

$$\pi^{-1} \frac{\Delta'(\vartheta z)}{\Delta(\vartheta z)} f(\vartheta z) = \frac{(h_3 z + h_4)^{k+2}}{\det(\vartheta)^{m+1}} H^{\vartheta}(z) f_{[\vartheta]}(z) - \pi^{-1} \frac{(h_3 z + h_4)^{k+1}}{\det(\vartheta)^{m+1}} f_{[\vartheta]}(z) \ .$$

Also ist

$$\pi^{-1}f'(\vartheta z)+kH(\vartheta z)f(\vartheta z)=$$
$$\pi^{-1}\frac{(h_3z+h_4)^{k+2}}{\det(\vartheta)^{m+1}}(f_{[\vartheta]})'(z)+\frac{k(h_3z+h_4)^{k+2}}{\det(\vartheta)^{m+1}}H^{\vartheta}(z)f_{[\vartheta]}(z)\ .$$

□

Zudem benötigen wir noch zwei technische Definitionen.

**5.4.9 Definition.** *Zu einer Zahl $s\in\mathbb{Q}$ bezeichnen wir mit $\lfloor s\rfloor$ den ganzzahligen Anteil und mit $\langle s\rangle = s-\lfloor s\rfloor$ den gebrochenen Anteil von $s$ (es ist $0\le\langle s\rangle<1$). Sei $D=\sum_{x\in \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}} a_x x\in \mathrm{div}(\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega})\otimes\mathbb{Q}$ ein rationaler Divisor. Dann bezeichnen wir den ganzzahligen Anteil von $D$ mit*

$$\lfloor D\rfloor=\sum_{x\in \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}}\lfloor a_x\rfloor x\ .$$

*Der gebrochene Anteil von $D$ ist $D-\lfloor D\rfloor$.*

**5.4.10 Satz.** *Seien $k,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ mit $0\le m<q-1$ und $k\equiv 2m \mod q-1$,*

$$g(z):=E_{\mathbf{Y}}^{(q-1)}(z)=\sum_{a,b\in A}{}'(az+b)^{1-q}\quad \textit{die } (q-1)\textit{-te Eisensteinreihe,}$$
$$p(z):=\partial E_{\mathbf{Y}}^{(q-1)}(z)=\pi^{-1}g'(z)-H(z)g(z)\in M_{q+1,1}(\Gamma)$$

*deren Serre-Ableitung und*

$$D:=\frac{k-m(q+1)}{q-1}\cdot\mathrm{div}(g)+m\cdot\mathrm{div}(p)\ .$$

*Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} M_{k,m}(\mathrm{G}(A)) & \longrightarrow & H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)},\lfloor D\rfloor)\\ f & \mapsto & f\,p^{-m}\,g^{\frac{m(q+1)-k}{q-1}}\end{array}$$

*wohldefiniert und ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Sei $f\in M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$. Dann ist $fp^{-m}g^{\frac{m(q+1)-k}{q-1}}$ eine modulare Funktion, denn für $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{G}(A)$ ist

$$\begin{aligned}f(\gamma z)p(\gamma z)^{-m}g(\gamma z)^{\frac{m(q+1)-k}{q-1}} =&\frac{(cz+d)^k}{\det(\gamma)^m}f(z)\cdot\left(\frac{(cz+d)^{q+1}}{\det(\gamma)}\right)^{-m}p(z)^{-m}\\ &+\left((cz+d)^{q-1}\right)^{\frac{m(q+1)-k}{q-1}}g(z)^{\frac{m(q+1)-k}{q-1}}\\ =&(cz+d)^n\det(\gamma)^o f(z)p(z)^{-m}g(z)^{\frac{m(q+1)-k}{q-1}}\end{aligned}$$

mit $n=k-m(q+1)+(q-1)\frac{m(q+1)-k}{q-1}=0$ und $o=-m+m=0$.

Betrachten wir zunächst $H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}, \lfloor D \rfloor)$. Da $f$ holomorph ist, ist

$$\operatorname{div}(f\, p^{-m}\, g^{\frac{m(q+1)-k}{q-1}}) \geq -m \operatorname{div}(p) + \frac{m(q+1)-k}{q-1} \operatorname{div}(g) = -D \ .$$

Die Abbildung ist also wohldefiniert. Zu jeder modularen Funktion

$$\tilde{f} \in H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}, \lfloor D \rfloor)$$

ist $\tilde{f} p^m g^{\frac{k-m(q+1)}{q-1}}$ eine Modulform vom Gewicht $k$ und Typ $m$ (vgl. [Shi71, 2.21]). Somit ist $M_{k,m}(\mathrm{G}(A)) \longrightarrow H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}, \lfloor D \rfloor)$ ein Isomorphismus. □

Um nun den Satz von Riemann-Roch anwenden zu können und damit $\dim(M_{k,m}(\mathrm{G}(A)))$ zu bestimmen, benötigen wir den Grad von $\lfloor D \rfloor$.
Diesen berechnen wir, indem wir den Gesamtgrad ausrechnen und dann den gebrochenen Anteil abziehen. Da $g$ in $M_{q-1,0}(\mathrm{G}(A))$ und $p$ in $M_{q+1,1}(\mathrm{G}(A))$ liegen, haben sie nach (5.4.3) die Divisorgrade

$$\deg \operatorname{div}(g) = \frac{P(q)}{q+1} \quad \text{und} \quad \deg \operatorname{div}(p) = \frac{P(q)}{q-1} \ .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\deg\left(\frac{k-m(q+1)}{q-1} \cdot \operatorname{div}(g) + m \cdot \operatorname{div}(p)\right) \\ &\qquad = \frac{k-m(q+1)}{q-1} \cdot \frac{(q-1)P(q)}{q^2-1} + m \cdot \frac{(q+1)P(q)}{q^2-1} \\ &\qquad\qquad = \frac{(k-m(q+1)+m(q+1))P(q)}{q^2-1} = \frac{kP(q)}{q^2-1} \ . \end{aligned}$$

Da $k \equiv 2m \equiv m(q+1) \bmod q-1$ ist, ist $\frac{k-m(q+1)}{q-1} \in \mathbb{Z}$. Um den gebrochenen Anteil zu bestimmen, müssen wir nun also noch die gebrochenen Anteile von $g$ und $p$ in allen Spitzen und den elliptischen Punkten bestimmen.
Die Modulform $\Delta$ hat auf $\Omega$ keine Nullstellen, also auch nicht in den elliptischen Punkten. Für die Eisensteinreihe gilt

**5.4.11 Proposition.** *([Gek86, VII.3.]) Sei $Y = \mathfrak{a}e_1 + \mathfrak{b}e_2$ ein A-Gitter, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gebrochene Ideale. Dann hat die Eisensteinreihe $E_Y^{(q-1)}$ in allen elliptischen Punkten eine einfache Nullstelle.*

Daher hat $g(z)$ in den elliptischen Punkten eine einfache Nullstelle, während $p(z) = \pi g'(z) - H(z)g(z)$ keine Nullstelle in elliptischen Punkten hat.
Von den Eisensteinreihen wissen wir, daß sie in allen Spitzen invertierbar sind.

Es bleibt das Verhalten von $p(z)$ in den Spitzen zu bestimmen. Betrachten wir zunächst die Spitze $\mathcal{S}(\infty)$. Hier haben wir in (5.2.39) errechnet

$$\begin{aligned} g(z) = E_{\mathbf{Y}}^{(q-1)}(z) =& E^{(q-1)}(A) + \pi^{q-1} t_{(1)}^{q-1} - \pi^{q-1} t_{(1)}^{(q-1)(q^3-q+1)} \\ &+ \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ . \end{aligned}$$

Mit (5.1.9) ist

$$g'(z) = (E_{\mathbf{Y}}^{(q-1)}(z))' = \pi^{q-1} t_{(1)}^{q} - t_{(1)}^{(q-1)(q^3-q+1)+1} + \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ .$$

Nach (5.4.6) hat $H(z)$ bezüglich $t_{(1)}$ eine einfache Nullstelle und daher auch $p(z) = \pi g'(z) - H(z) g(z)$.

Seien nun $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$ sowie $\vartheta \in \mathrm{G}(K)$ mit $\mathbf{Y}\vartheta = \mathfrak{p} e_1 + \mathfrak{p}^{-1} e_2 = Y$. Nach (5.4.8) und (5.2.3) ist

$$p_{[\vartheta]}(z) = \pi^{-1} (E_Y^{(q-1)})'(z) - H^{\vartheta}(z) E_Y^{(q-1)}(z) \ .$$

Mit den Ergebnissen und Bezeichnungen aus (5.2.38), (5.2.39) und (5.1.9) ist

$$\begin{aligned} (E_{\mathbf{Y},[\vartheta]}^{(q-1)}(z))' = \xi(\mathfrak{p}^{-1})^{q-1}\, i_2(\mathfrak{p}^{-2}, \mathfrak{p}^{-1}) (D(\rho_{\mathfrak{p}}^{L})^{q} - r_1(\mathfrak{p}^{-1}, x-\alpha)) t_{\mathfrak{p}^{-2}}^{q^2} \\ + \{\text{Terme höherer Ordnung}\} \ . \end{aligned}$$

Die Ableitung der Eisensteinreihe hat also mindestens eine $q^2$-fache Nullstelle in der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p})$. Nach (5.4.6) hat $H(z)$ die Nullstellenordnung $q$ bezüglich $t_{\mathfrak{p}^{-2}}$. Somit hat $p(z)$ bezüglich $t_{\mathfrak{p}^{-2}}$ eine $q$-fache Nullstelle. Die Nullstellenordnungen in den kritischen Punkten sind also:

| | ellipt. Pkt | $\mathcal{S}(\infty)$ | $\mathcal{S}(\mathfrak{p}) \neq \mathcal{S}(\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $g$ | 1 | 0 | 0 |
| $p$ | 0 | 1 | $q$ |

**5.4.12 (Offene Frage).** Der Gesamtgrad von $\operatorname{div}(p)$ ist $\deg \operatorname{div}(p) = \frac{P(q)}{q-1}$ (vgl. (5.4.3)). Aus der Betrachtung der „kritischen Punkte“ erhalten wir einen Anteil am Grad von

$$\frac{1 + q(h_K - 1)}{q-1} \ .$$

Das bedeutet, daß wir auf $\mathrm{G}(A)\backslash\Omega$ eine gewisse Anzahl an Nullstellen haben, und zwar

$$\begin{aligned} \frac{P(q) - (1 + q(h_K - 1))}{q-1} &= (q-1)^{-1}(q^3 - q^2 - q + q h_K + 1 - (1 + q h_K - q)) \\ &= (q-1)^{-1}(q^3 - q^2) = q^2 \ . \end{aligned}$$

Dies entspricht $q^2$ Klassen von Punkten auf $\Omega$ unter der Operation von $\mathrm{G}(A)$. Diese konnten wir bislang nicht ermitteln. Auch für die Eisensteinreihen selbst sind die (Klassen von) Nullstellen auf $\Omega$ nicht bekannt. Hier ermitteln wir mit (5.4.3) und (5.4.11), daß es genau

$$\frac{P(q)}{q+1} - \frac{P(-1)}{q+1} = q^2 - 2q - 1 + h_K$$

viele solcher Klassen gibt.

Offensichtlich können wir die gebrochenen Anteile des Divisors

$$D = \frac{k - m(q+1)}{q-1} \operatorname{div}(g) + m \operatorname{div}(p)$$

getrennt berechnen. Von diesen benötigen wir allerdings nur den Grad. Es ist stets $0 \leq m < q - 1$. Für $q = 2$ ist $m = 0$, für $q \neq 2$ ist $q \equiv 1 \mod q-1$, daher gilt $\left\langle \frac{mq}{q-1} \right\rangle = \left\langle \frac{m}{q-1} \right\rangle$. Der gebrochene Anteil von $D$ hat daher den Grad

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{k - m(q+1)}{q^2 - 1} \right\rangle \#\mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A)) + \left\langle \frac{m}{q-1} \right\rangle h_K \\ &\qquad = \left\langle \frac{k - m(q+1)}{q^2 - 1} \right\rangle P(-1) + \left\langle \frac{m}{q-1} \right\rangle P(1) \ , \end{aligned}$$

da nach (4.3.5) $P(-1) = \#\mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))$ und nach (1.3.9) $P(1) = h_K$ ist. Daraus folgt direkt

$$\deg(\lfloor D \rfloor) = \frac{k\,P(q)}{q^2 - 1} - \left( \left\langle \frac{k - m(q+1)}{q^2 - 1} \right\rangle P(-1) + \left\langle \frac{m}{q-1} \right\rangle P(1) \right) \ . \tag{5.4.13}$$

Da $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}$ das Geschlecht 0 hat, liefert der Satz von Riemann-Roch für $\deg(\lfloor D \rfloor) > -2$, daß

$$\dim(H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A)}, \lfloor D \rfloor)) = 1 + \deg(\lfloor D \rfloor)$$

ist, und für $\deg(\lfloor D \rfloor) \leq -2$, daß $\dim(H^0(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}(A), \lfloor D \rfloor})) = 0$ ist (vgl. [Ros02, 5.4]). Vorübergehend schreiben wir $d := \deg(\lfloor D \rfloor)$.

Falls $k - m(q+1) \geq 0$ ist, können wir den Grad von $\lfloor D \rfloor$ leicht abschätzen. Da dann $k \geq m(q+1)$ und $\left\langle \frac{k - m(q+1)}{q^2-1} \right\rangle (q^2 - 1) \leq k - m(q+1)$ ist, erhalten wir aus der Gleichung (5.4.13)

$$\begin{aligned} (q^2 - 1)d &\geq kP(q) - (k - m(q+1))P(-1) + m(q+1)P(1) \\ &= k\underbrace{(P(q) - P(-1))}_{\geq 0} + m(q+1)(P(-1) - P(1)) \\ &\geq m(q+1)(P(q) - P(-1) + P(-1) - P(1)) \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Der Grad des Divisors ist unter der obigen Bedingung also nicht negativ.

Ist nun $k - m(q+1) < 0$, so müssen wir etwas sorgfältiger arbeiten. Dann ist sicherlich $m > 0$, so daß wir $q = 2$ ausschließen können (dies wird erst am Ende der Ausführungen von Bedeutung sein). Zunächst bestimmen wir $\left\langle \frac{k-m(q+1)}{q^2-1} \right\rangle$.

*5.4.14 Behauptung.* $0 < k - m(q+1) + q^2 - 1 < q^2 - 1$.

Zu zeigen ist nur, daß $k - m(q+1) + q^2 - 1 > 0$ ist. Wegen $k \geq 0$ und $m < q - 1$ ist dies aber klar.

Setzen wir dies nun in (5.4.13) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(q^2-1)d &= kP(q) - (k - m(q+1) + q^2 - 1)P(-1) - m(q+1)P(1) \\ &= k(P(q) - P(-1)) + m(q+1)(P(-1) - P(1)) - (q^2-1)P(-1) \ .\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Insbesondere der letzte Term der unteren Zeile, der weder von $k$ noch von $m$ abhängt und darüber hinaus negativ ist, erzwingt nun eine nähere Betrachtung der Werte von $P(S)$:

$$\begin{aligned}P(q) &= q^3 - q^2 - q + 1 + qh_K \\ P(-1) &= 2q + 2 - h_K \\ P(1) &= h_K \\ P(q) - P(-1) &= q^3 - q^2 - 3q + (q+1)h_K - 1 \ .\end{aligned}$$

Eingesetzt in (5.4.15) liefert dies wegen $q^3 - q^2 - 3q - 1 = (q+1)(q^2 - 2q - 1)$

$$(q^2-1)d = k(q+1)(q^2-2q-1+h_K) + 2m(q+1)(q+1-h_K) - (q^2-1)(2q+2-h_K) \ .$$

Wir vereinfachen durch Kürzen um den Faktor $q+1$ und fassen zusammen:

$$(q-1)d = k(q^2-2q-1) + 2m(q+1) - 2(q^2-1) + (k - 2m + q - 1)h_K \ . \tag{5.4.16}$$

Betrachten wir zunächst den Ausdruck $k - 2m + q - 1$. Für $k - 2m \geq 0$ ist dieser Ausdruck größer 0.

*5.4.17 Behauptung.* Ist $k - 2m < 0$, dann ist $k - 2m + q - 1 = 0$.

Aus $m < q - 1$ und $k \geq 0$ folgt nämlich, daß $2m - k < 2(q-1)$ ist, und wegen $k \equiv 2m \mod q - 1$ erhalten wir damit $2m - k = q - 1$.

Für die verbleibenden Terme in (5.4.16) und für $k \geq 2$ ermitteln wir

$$\begin{aligned}k(q^2-2q-1) + 2m(q+1) - 2(q^2-1) &\geq 2q^2 - 4q - 2 + 2m(q+1) - 2q^2 + 2 \\ &= -4q + 2m(q+1) \\ &\geq -4q + 2q + 2 = -2(q-1) \ ,\end{aligned}$$

da $m \geq 1$ ist. Damit haben wir nun erhalten: Ist $k > 2$ oder $m > 1$, dann ist diese Summe größer als $-2(q-1)$. Es ist also $d > -2$. Für $(k, m) = (2, 1)$ nutzen wir, daß dann $k - 2m + q - 1 = q - 1$ ist, und erhalten für $d$ die Abschätzung $d = -2 + h_K > -1$.

Es bleiben (im Falle $k - m(q+1) < 0$) also noch die Fälle $k = 1$ und $k = 0$ zu untersuchen.

Sei nun $k = 1$. Die Kongruenz $1 \equiv 2m \mod q-1$ ist nur lösbar, falls $q$ eine Zweierpotenz ist (aber nicht $q = 2$ wegen $m \geq 1$). Dann ist $m = \frac{q}{2}$, also $m > k$. Setzen wir dies nun in (5.4.16) ein und nutzen (5.4.17), dann erhalten wir

$$(q-1)d = q^2 - 2q - 1 + q(q+1) - 2(q^2 - 1) = -q + 1 \ .$$

Also ist $d = -1$.
Sei jetzt $k = 0$. Die Kongruenz $0 \equiv 2m \mod q-1$ ist wegen $k - m(q+1) < 0$ nur für ungerades $q$ lösbar; und $m = \frac{q-1}{2}$ ist die einzig mögliche Wahl für $m$. In (5.4.16) eingesetzt erhalten wir

$$(q-1)d = (q-1)(q+1) - 2(q^2 - 1) = -(q^2 - 1) \ .$$

Daher ist $d = -(q+1) < -2$.

**5.4.18 Satz (Dimensionsformel).** *Seien* $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *mit* $0 \leq m < q - 1$.

*(i) In den Fällen*

*(a)* $k \not\equiv 2m \mod q-1$ *und*
*(b)* $2 \not| \, q$, $k = 0$ *und* $m = \frac{q-1}{2}$

*ist* $\dim(M_{k,m}(\mathrm{G}(A))) = 0$.

*(ii) In allen anderen Fällen ist*

$$\dim(M_{k,m}(\mathrm{G}(A))) = 1 + \frac{k\,P(q)}{q^2-1} - \left(\left\langle \frac{k - m(q+1)}{q^2-1} \right\rangle P(-1) + \left\langle \frac{m}{q-1} \right\rangle P(1)\right) \ .$$

**5.4.19 Bemerkung.** Daß im Fall $2 \not| \, q$, $k = 0$ und $m = \frac{q-1}{2}$ der Raum $M_{k,m}(\mathrm{G}(A))$ die Dimension 0 hat, läßt sich auch auf diese Weise einsehen: Angenommen wir hätten eine Modulform $f$ vom Gewicht 0 und Typ $\frac{q-1}{2}$, dann wäre deren Quadrat eine Modulform von Gewicht und Typ 0, also eine Konstante $c \in \mathbf{C}$. Der Raum $\Omega$ ist zusammenhängend bezüglich der hier verwendeten Grothendieck-Topologie (vgl. (2.1.7)). Folglich ist $f$ selbst konstant auf ganz $\Omega$.

Als leichte Folgerung erhalten wir nun auch [Gek86, VII.4.6]:

**5.4.20 Korollar.** *Sei* $(q,k) \neq (2,1)$. *Ist* $k \equiv 0 \mod q-1$, *dann hat* $M_{k,0}(\mathrm{G}(A)) = M_k(\mathrm{G}(A))$ *die Dimension*

$$\dim(M_k(\mathrm{G}(A))) = 1 + \frac{k}{q^2-1}P(q) - \left\langle \frac{k}{q^2-1} \right\rangle P(-1) \ .$$

**5.4.21 Beispiel.** Für $k = q-1$ und $k = q^2-1$ sowie $m = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim(M_{q-1}(\mathrm{G}(A))) &= q^2 - 2q + h_K \ , \\ \dim(M_{q^2-1}(\mathrm{G}(A))) &= q^3 - q^2 - q + 2 + q \cdot h_K \ . \end{aligned}$$

**5.4.22 (Offene Frage).** In (5.2.44) haben wir gezeigt, daß die $h_K$ Eisensteinreihen vom Gewicht $q^j - 1$ zu $\mathrm{G}(A)$ linear unabhängig sind. Aus dem Beweis ergab sich zugleich

$$M^1_{q^j-1,0}(\mathrm{GL}(Y)) \cap \left\langle \{E^{(q^j-1)}_{Y(\mathfrak{q})} \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)\} \right\rangle = \{0\} \ .$$

Die nun noch fehlenden Anteile einer Basis zu $M_{q-1}(\mathrm{G}(A))$ hängen nun der Anzahl nach nicht mehr von der elliptischen Kurve ab. Da sich der Raum der Modulformen zerlegen läßt in

$$M_{q-1}(\mathrm{G}(A)) = M^1_{q-1,0}(\mathrm{GL}(Y)) \oplus \left\langle \{E^{(q-1)}_{Y(\mathfrak{q})} \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Pic}(A)\} \right\rangle \ ,$$

haben die Spitzenformen vom Gewicht $q-1$ möglicherweise eine Qualität, die nur von dem zugrunde liegenden endlichen Körper und nicht von der elliptischen Kurve abhängt.
Interessanterweise gibt es allerdings für $k = q^2-1$ eine natürliche Familie von Spitzenformen, deren Zahl und Gestalt von der elliptischen Kurve abhängig sind, nämlich $\Delta$ und $\Delta_{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A)$ nichttrivial.

## 5.5 $j$-Invarianten als modulare Funktionen

**5.5.1 (Annahme).** Sei $\mathrm{Pic}(A)$ nichttrivial.

In Abschnitt (4.5) haben wir die $j$-Invarianten $j_\omega$ mit geeignetem $\omega \in \overline{\Omega}$ als spezielle Thetafunktionen definiert. Wir geben nun eine algebraische Beschreibung von $j_\omega$.
Dazu werden wir die cuspidalen Modulformen $\Delta$ und $\Delta_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Pic}(A)$, nutzen. Das naheliegende Vorgehen, die $j$-Invarianten wie in der klassischen Situation durch Quotienten von Eisensteinreihen bzw. von $\Delta$ und gewissen Eisensteinreihen auszudrücken, führte nicht zum Ziel.
Denn die $j$-Invarianten haben in den Punkten genau einer Spitze bezüglich des Parameters $t_*$ eine $(q-1)$-fache Nullstelle, in den Punkten genau einer anderen einen $(q-1)$-fachen Pol und keine weiteren Null- oder Polstellen. Die Eisensteinreihen hingegen sind invertierbar in allen Spitzen von $\overline{\Omega}$, während die

kanonische Modulform $\Delta$ in allen Spitzen bezüglich der Parameter $t_*$ Nullstellen verschiedener Vielfachheiten hat. Es ist daher nur sehr schwer möglich, einen algebraischen Ausdruck in Eisensteinreihen und $\Delta$ zu konstruieren, der das von der $j$-Invarianten vorgegebene Null- und Polstellenverhalten hat.
Unter Einbeziehung der Modulformen $\Delta_\mathfrak{p}$ hingegen gelingt es uns, $j_\omega^{q-1}$ als Quotient von Modulformen aufzufassen und die Konstante exakt zu bestimmen.

Wir tragen zunächst die notwendigen Ergebnisse aus (4.5) und (5.3) zusammen.

**5.5.2 (Annahme).** Seien $(\alpha, \beta)$ und $(\alpha, \beta')$ zwei (nicht notwendig verschiedene) $\mathbb{F}_q$-rationale Punkte mit $(\alpha, \beta') = -(\alpha, \beta)$ sowie $\mathfrak{p} = (x - \alpha, y - \beta)$ und $\mathfrak{p}' = (x - \alpha, y - \beta')$. Des weiteren sei

$$\omega := s_{\mathfrak{p}'} = (-(x - \alpha) : y - \beta') \in \mathbb{P}^1(K)$$

die in (4.0.1) definierte Koordinate zu $\mathcal{S}(\mathfrak{p}')$ (vgl. auch (4.2.6)).
Wir wählen eine Gitterinvariante $\xi(A)$ und setzen $L := \xi(A)A$.

Die $j$-Invariante

$$\begin{array}{rcl} j_\omega : \mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \theta(\omega, \infty, z) \end{array}$$

mit

$$\theta(\omega, \infty, z) = \prod_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma(\omega)}\right) \cdot \prod_{\gamma \in \widetilde{\Gamma} - \widetilde{\Gamma}_\infty} \frac{z - \gamma(\omega)}{z - \gamma(\infty)} \tag{5.5.3}$$

hat in $\omega$ bezüglich des Parameters $t_{\mathfrak{p}'^{-2}}^{q-1}$ eine einfache Nullstelle, in $\infty$ bezüglich des Parameters $t_{(1)}^{q-1}$ einen einfachen Pol und keine weiteren Null- oder Polstellen. Wir können sie als $\mathrm{G}(A)$-invariante Funktion auf $\overline{\Omega}$ auffassen (vgl. [Gek00b] und (4.5.14)): sie ist eine meromorphe Funktion auf $\overline{\Omega}$ mit $(q-1)$-facher Nullstelle bezüglich des Parameters $t_{\mathfrak{p}'^{-2}}$, und $(q-1)$-fachem Pol bezüglich des Parameters $t_{(1)}$.
Sowohl $\Delta$ als auch $\Delta_\mathfrak{p}$ sind Modulformen auf $\overline{\Omega}$ bezüglich $\mathrm{G}(A)$ vom Gewicht $q^2 - 1$, die in allen Spitzen $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ eine Entwicklung bezüglich $t_\mathfrak{q}^{q-1}$ haben. Die Nullstellenordnungen bezüglich $t_\mathfrak{q}$ entnehmen wir der Tabelle (vgl. (5.3.8)):

| | $\mathcal{S}(\mathfrak{p}')$ | $\mathcal{S}(\infty)$ | $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) \neq \mathcal{S}(\mathfrak{p}'), \mathcal{S}(\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta$ | $(q-1)q$ | $(q-1)(q^3 - q^2 + 1)$ | $(q-1)q$ |
| $\Delta_\mathfrak{p}$ | $q - 1$ | $(q-1)(q^3 - q^2 + q)$ | $(q-1)q$ |

Auf $\Omega$ sind $\Delta$ und $\Delta_\mathfrak{p}$ invertierbar.

Der Quotient $\frac{\Delta}{\Delta_\mathfrak{p}}$ ist eine modulare Funktion, die auf $\Omega$ invertierbar ist, in den Punkten der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ bezüglich $t_{(1)}$ die Ordnung

$$(q-1)(q^3 - q^2 + 1) - (q-1)(q^3 - q^2 + q) = -(q-1)^2 \ ,$$

also einen Pol mit Vielfachheit $(q-1)^2$ hat und in den Punkten der Spitze $\mathcal{S}(\mathfrak{p}')$ Nullstellen mit Vielfachheit

$$(q-1)q-(q-1)=(q-1)^2\ .$$

Somit stimmen die Divisoren von $\frac{\Delta}{\Delta_\mathfrak{p}}$ und $j_\omega^{q-1}$ überein.
Nach [FvdP81, I.2] unterscheiden sich $\frac{\Delta}{\Delta_\mathfrak{p}}$ und $j_\omega^{q-1}$ höchstens um eine auf $\overline{\Omega}$ invertierbare, $\mathrm{G}(A)$-invariante Funktion $g(z)$. Diese ist insbesondere holomorph. Nach (4.5.16) sind alle auf $\overline{\Omega}$ holomorphen, $\mathrm{G}(A)$-invarianten Funktionen konstant. Wir halten fest

**5.5.4 Satz.** *Mit den Bezeichnungen aus* (5.5.2) *ist*

$$j_\omega^{q-1}(z)=c_{(\alpha,\beta)}\cdot\frac{\Delta(z)}{\Delta_\mathfrak{p}(z)}$$

*für eine geeignete Konstante* $c_{(\alpha,\beta)}\in\mathbf{C}^*$ *(die wir in* (5.5.7) *angeben).*

Zur Berechnung der Konstanten betrachten wir nun die Entwicklungen von $j_\omega$ und $\frac{\Delta}{\Delta_\mathfrak{p}}$ in $t_{(1)}^{q-1}$.
Nach (5.3.3) ist mit $R_*=R_*^{\pi A}$, wobei $\pi=\xi(A)$ ist, (dort ist $t=t_{(1)}$)

$$\Delta_\mathfrak{p}=\pi^{q^2-1}\varepsilon\cdot D(\rho_\mathfrak{p}^L)^{-1}t_{(1)}^k\cdot\prod_{\substack{a\in A\\ \text{norm.}}}R_a^{q^2(q-1)}(t_{(1)})\cdot\left(\prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{p}]\\ \text{ganz}}}R_\mathfrak{g}^{q-1}(t_{(1)})\right)^{-1}\ ,$$

wobei $k=(q-1)(q^3-q^2+q)$ und $\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*$ sind.
Wir wissen aus (5.2.21) und (5.3.19), daß $R_*(0)=1$ ist. Daher hat in $\Delta_\mathfrak{p}$ die Potenz $t_{(1)}^k$ den Koeffizienten $\pi^{q^2-1}\varepsilon D(\rho_\mathfrak{p}^L)^{-1}$.
Aus (5.3.14) kennen wir die Laurentreihenentwicklung von $\Delta$ in $t_{(1)}$. Der Koeffizient von $t_{(1)}^{(q-1)(q^3-q^2+1)}$ ist $\pi^{q^2-1}$.
Damit ergibt sich

$$\frac{\Delta}{\Delta_\mathfrak{p}}=\varepsilon^{-1}D(\rho_\mathfrak{p}^L)\,t_{(1)}^{-(q-1)^2}+\{\text{Terme höherer Ordnung}\}\ . \qquad (5.5.5)$$

In [Gek97a, 2.5] wird die kleinste $t_{(1)}$-Potenz der Laurentreihenentwicklung von $j_\omega$ hergeleitet, allerdings wird auf die Berechnung der Konstanten verzichtet.
Zu beachten ist außerdem, daß die Uniformisierende dort $t((\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}),\mathrm{G}(A))$ und nicht $t_{(1)}$ ist, der entsprechende Normierungsfaktor muß also noch eingefügt werden.

Wir zitieren zunächst:
Die Faktoren $\frac{z-\gamma(\omega)}{z-\gamma(\infty)}$ aus (5.5.3), also $\gamma\in\widetilde{\Gamma}-\widetilde{\Gamma}_\infty$, konvergieren für $|z|_i\to\infty$, also $|t_{(1)}(z)|\to 0$, gegen 1 und zwar uniform in $\gamma$. Sie tragen daher mit $1+o(t_{(1)})$ zur Laurentreihenentwicklung bei.

Zu betrachten bleibt also das Teilprodukt, in dem $\gamma$ die Gruppe $\widetilde{\Gamma}_\infty$ durchläuft. Wir wissen

$$\widetilde{\Gamma} = \mathrm{G}(A)/\mathbb{F}_q^* \quad \text{und} \quad \mathrm{G}(A)_\infty = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \mu & b \\ 0 & \nu \end{smallmatrix}\right) \mid \mu, \nu \in \mathbb{F}_q^*,\ b \in A \right\} \ ,$$

also ist

$$\widetilde{\Gamma}_\infty = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \mu & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid \mu \in \mathbb{F}_q^*,\ b \in A \right\} \ .$$

Damit ergibt sich

$$\prod_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}_\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma(\omega)}\right) = \prod_{\substack{\mu \in \mathbb{F}_q^* \\ b \in A}} \left(1 - \frac{z}{\mu\omega + b}\right) \ .$$

Durch Vergleich der Divisoren ergibt sich

$$const \prod_{\substack{\mu \in \mathbb{F}_q^* \\ b \in A}} \left(1 - \frac{z}{\mu\omega + b}\right) = \prod_{\mu \in \mathbb{F}_q^*} e_{(1)}(z - \mu\omega)$$

für eine geeignete Konstante *const*.

Hier nun wollen wir einerseits die Konstante bestimmen und andererseits den Faktor $\pi$ einfügen.
Sei zunächst $\mu \in \mathbb{F}_q^*$ fest gewählt. Es ist

$$e_{(1)}(z - \mu\omega) = (z - \mu\omega) \prod_{b \in A}{}' \left(1 - \frac{z - \mu\omega}{b}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \prod_{b \in A} \left(1 - \frac{z}{\mu\omega + b}\right) &= -(\mu\omega)^{-1}(z - \mu\omega) \prod_{b \in A}{}' \frac{\mu\omega + b - z}{\mu\omega + b} \\ &= -(\mu\omega)^{-1}(z - \mu\omega) \prod_{b \in A}{}' \frac{b}{\mu\omega + b} \left(1 - \frac{z - \mu\omega}{b}\right) \\ &= -(\mu\omega)^{-1} \prod_{b \in A}{}' \frac{b}{\mu\omega + b} \cdot e_{(1)}(z - \mu\omega) \ . \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Vorfaktor

$$\begin{aligned} c_1 := \prod_{\mu \in \mathbb{F}_q^*} \left( -(\mu\omega)^{-1} \prod_{b \in A}{}' \frac{b}{\mu\omega + b} \right) &= \omega^{1-q} \prod_{b \in A}{}' b^{q-1} \prod_{\mu \in \mathbb{F}_q^*} (\mu\omega + b)^{-1} \\ &= \omega^{1-q} \prod_{b \in A}{}' \frac{b^{q-1}}{b^{q-1} - \omega^{q-1}} \ . \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

Nun können wir die Berechnungen analog zu [Gek97a] fortsetzen:

$$\begin{aligned}\prod_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}_\infty}\left(1-\frac{z}{\gamma(\omega)}\right) &= c_1\prod_{\mu\in\mathbb{F}_q^*} e_{(1)}(z-\mu\omega)\\ &= c_1\pi^{1-q}\prod_{\mu\in\mathbb{F}_q^*}(\pi e_{(1)}(z-\mu\omega))\\ &= c_1\pi^{1-q}\prod_{\mu\in\mathbb{F}_q^*}(\pi e_{(1)}(z)-\mu\,\pi e_{(1)}(\omega))\\ &= c_1\pi^{1-q}t_{(1)}^{1-q}(1+o(t_{(1)}))\ .\end{aligned}$$

Damit erhalten wir durch Koeffizientenvergleich der kleinsten $t_{(1)}$-Potenz von $j_\omega^{q-1}(z)$ und $\frac{\Delta(z)}{\Delta_{\mathfrak{p}}(z)}$ (siehe (5.5.4) und (5.5.5))

$$c_{(\alpha,\beta)} = c_1^{q-1}\pi^{-(q-1)^2}\varepsilon D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)^{-1}\ .$$

Setzen wir nun die Werte für $c_1$ aus (5.5.6) und für $D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)$ aus (5.2.8) ein, so ergibt sich

**5.5.7 Korollar.** *Die Konstante $c_{(\alpha,\beta)}$ aus* (5.5.4) *ist*

$$c_{(\alpha,\beta)} = \varepsilon\omega^{-(q-1)^2}\left(\prod_{b\in A}{}'\frac{b^{q-1}}{b^{q-1}-\omega^{q-1}}\right)^{q-1}\pi^{-(q-1)^3}(E^{(q-1)}(\mathfrak{p}^{-1})-E^{(q-1)}(A))\ ,$$

*wobei $\varepsilon\in\mathbb{F}_q^*$ wie in* (5.3.3) *gewählt ist.*

Mit (5.3.3) und (5.3.5) ergibt sich

$$\frac{\Delta(z)}{\Delta_{\mathfrak{p}}(z)} = \varepsilon^{-1}D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)t_{(1)}^{-(q-1)^2}\prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{p}]\\ ganz}} R_{\mathfrak{g}}{}^{q-1}(t_{(1)}) = \varepsilon^{-1}D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)\left(t_{(1)}^{1-q}\prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{p}]\\ ganz}} R_{\mathfrak{g}}(t_{(1)})\right)^{q-1}\ .$$

Daher gilt

**5.5.8 Korollar.** *In der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ von $\overline{\Omega}$ hat die $j$-Invariante $j_\omega$ die Produktdarstellung*

$$j_\omega(z) = d_{(\alpha,\beta)}t_{(1)}^{1-q}\prod_{\substack{\mathfrak{g}\in[\mathfrak{p}]\\ ganz}} R_{\mathfrak{g}}(t_{(1)})$$

*mit einer geeigneten Konstanten $d_{(\alpha,\beta)}\in\mathbf{C}^*$ in Abhängigkeit des $\mathbb{F}_q$-rationalen Punktes $(\alpha,\beta)$. Für die Konstante gilt $d_{(\alpha,\beta)}^{q-1} = c_{(\alpha,\beta)}$.*

Setzen wir nun

$$\rho_x^L = x\tau^0 + l_1\tau + \tau^2 \quad \text{und} \quad \rho_{\mathfrak{p}}^L = D\tau^0 + \tau$$
$$r_1 := l_1^q + D\ , \quad r_2 := x^q + Dl_1 \quad \text{und} \quad r_3 = xD\ ,$$

so ist nach (5.3.15), (5.3.19) und (5.3.20)

$$R_{\mathfrak{p}}(X) = 1 + DX^{q-1}$$
$$R_{x\mathfrak{p}}(X) = r_1 X^{q^3-q^2} + r_2 X^{q^3-q} + r_3 X^{q^3-1}\ .$$

Wir gehen analog zu den Ausführungen von (5.3.19) bis (5.3.23) vor und erhalten die ersten Terme der Laurentreihenentwicklung von $j_\omega$ in $\mathcal{S}(\infty)$ von $\overline{\Omega}$:

$$j_\omega(z) = d_{(\alpha,\beta)}^{-1} \cdot t_{(1)}^{1-q} \left(1 + Dt_{(1)}^{q-1} - Dt_{(1)}^{(q-1)(q^3-q^2+1)} - t_{(1)}^{(q-1)q(q^2-1)} + r_1^q t_{(1)}^{(q-1)q^3}\right) + \{\text{Terme höherer Ordnung}\}$$

Damit ergibt sich nun

**5.5.9 Korollar.** *In der Spitze $\mathcal{S}(\infty)$ von $\mathrm{G}(A)\backslash\overline{\Omega}$ hat die Laurentreihenentwicklung der $j$-Invarianten $j_\omega$ die ersten Terme*

$$j_\omega(z) = d_{(\alpha,\beta)}\, s^{-1} \left(1 + D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)s - D(\rho_{\mathfrak{p}}^L)s^{q^3-q^2+1} - s^{q(q^2-1)} + r_1^q s^{q^3}\right) + \{\textit{Terme höherer Ordnung}\}\ ,$$

*wobei $s = t_{(1)}^{q-1}$ ist.*

**5.5.10 (Offene Frage).** Die $j$-Invariante $j_\omega$ hat in allen Spitzen eine Entwicklung bezüglich des Parameters $t_*^{q-1}$. Die Frage liegt nahe, ob wir $j_\omega$ als $(q-1)$-te Potenz einer Funktion auf $\Omega$ betrachten können. Diese Funktion ist dann allerdings möglicherweise nicht mehr $\mathrm{G}(A)$-invariant.
Dennoch könnten Überlegungen in dieser Richtung die Situation weiter erhellen.

**5.5.11 (Offene Frage).** Zu Beginn dieses Abschnittes haben wir gefordert, daß die Picardgruppe nichttrivial ist. In (4.5.17) haben wir für den Fall $\mathrm{Pic}(A) = \{(1)\}$ die $j$-Invarianten definiert durch

$$j_\alpha(z) = \theta(\infty, \alpha, z)\ ,$$

wobei $\alpha \in \mathrm{Ell}(\mathrm{G}(A))$ die Klassen der elliptischen Punkte durchläuft.
Für $j$-Invarianten dieser Art geben wir keine Darstellung als algebraischer Ausdruck in Modulformen an. Als „kanonische“ Kandidaten stehen uns hier neben der Modulform $\Delta$ nur die Eisensteinreihen zur Verfügung. Deren Nullstellenverhalten auf $\Omega$ ist aber ungeklärt (vgl. (5.4.12)), so daß es mit den vorhandenen Kenntnissen nicht möglich ist, eine auf $\omega - [\alpha]$ invertierbare Funktion zu konstruieren.

**5.5.12 (Offene Frage).** Interessant wäre es nun sicherlich auch, die vorhandenen Ergebnisse zur Berechnung expliziter Beispiele zu nutzen.
Um zu einer gegebenen Kurve die beschriebenen Daten explizit und einigermaßen effektiv berechnen zu können, wären allerdings umfangreiche Programmierarbeiten notwendig. Denn die Arithmetik auf elliptischen Kurven, die daraus resultierende Arithmetik im Ring $A = \mathbb{F}_q[E]$ und die Multiplikation im getwisteten Polynomring $\mathbf{C}\{\tau\}$ greifen in den einzelnen Rechnungen ineinander und müssen dementsprechend effektiv implementiert werden.

# Symbolverzeichnis

# Index

# Literaturverzeichnis


[AEJ92] J. Kr. Arason, R. Elman, and B. Jacob. On indecomposable vector bundles. *Comm. Algebra*, 20(5):1323–1351, 1992.

[Ati57] Michael F. Atiyah. Vector bundles over an elliptic curve. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 7:414–452, 1957.

[BBD90] F. Baldassarri, S. Bosch, and B. Dwork (Hrsg.). *p-adic analysis (Trento, 1989)*, volume 1454 of *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, 1990. Springer-Verlag.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.

[Bou65] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXI. Algèbre commutative. Chapitre 7: Diviseurs.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1314. Hermann, Paris, 1965.

[Cor97] Gunther Cornelissen. A survey of Drinfeld modular forms. In *Drinfeld modules, modular schemes and applications (Alden-Biesen, 1996)*, pages 167–187. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997.

[CR62] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[DH87] P. Deligne and D. Husemoller. Survey of Drinfeld modules. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 of *Contemp. Math.*, pages 25–91. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Dri74] Vladimir G. Drinfel′d. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 94(136):594–627, 656, 1974.

[EH00] D. Eisenbud and J. Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[FvdP81] J. Fresnel and M. van der Put. *Géométrie analytique rigide et applications*, volume 18 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1981.

[Geb03] Max Gebhardt. *Galoisdarstellungen auf den Torsionspunkten von Drinfeld-Moduln des Ranges zwei*. Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2003.

[Gek83] Ernst-Ulrich Gekeler. Zur Arithmetik von Drinfeld-Moduln. *Math. Ann.*, 262(2):167–182, 1983.

[Gek85] Ernst-Ulrich Gekeler. A product expansion for the discriminant function of Drinfeld modules of rank two. *J. Number Theory*, 21(2):135–140, 1985.

[Gek86] Ernst-Ulrich Gekeler. *Drinfeld modular curves*, volume 1231 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Gek88] Ernst-Ulrich Gekeler. On the coefficients of Drinfeld modular forms. *Invent. Math.*, 93(3):667–700, 1988.

[Gek97a] Ernst-Ulrich Gekeler. On the cuspidal divisor class group of a Drinfeld modular curve. *Doc. Math.*, 2:351–374 (electronic), 1997.

[Gek97b] Ernst-Ulrich Gekeler. On the Drinfeld discriminant function. *Compositio Math.*, 106(2):181–202, 1997.

[Gek00a] Ernst-Ulrich Gekeler. Cuspidal divisor class groups of modular curves. In *Algebraic number theory and Diophantine analysis (Graz, 1998)*, pages 163–189. de Gruyter, Berlin, 2000.

[Gek00b] Ernst-Ulrich Gekeler. A note on the finiteness of certain cuspidal divisor class groups. *Israel J. Math.*, 118:357–368, 2000.

[GHR92] D. Goss, D. R. Hayes, and M. I. Rosen (Hrsg.). *The arithmetic of function fields (Columbus, Ohio, 1991)*, Ohio State University Mathematical Research Institute Publications, 2, Berlin, 1992. Walter de Gruyter & Co.

[GI63] O. Goldman and N. Iwahori. The space of $\mathfrak{p}$-adic norms. *Acta Math.*, 109:137–177, 1963.

[Gos80] David Goss. $\pi$-adic Eisenstein series for function fields. *Compositio Math.*, 41(1):3–38, 1980.

[Gos96] David Goss. *Basic structures of function field arithmetic*, volume 35 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[GR96] E.-U. Gekeler and M. Reversat. Jacobians of Drinfeld modular curves. *J. Reine Angew. Math.*, 476:27–93, 1996.

[GvdP80] L. Gerritzen and M. van der Put. *Schottky groups and Mumford curves*, volume 817 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

[GvdPR97] E.-U. Gekeler, M. van der Put, and M. Reversat (Hrsg.). *Drinfeld modules, modular schemes and applications (Alden-Biesen, 1996)*, River Edge, NJ, 1997. World Scientific Publishing Co. Inc.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Hay79] David R. Hayes. Explicit class field theory in global function fields. In *Studies in algebra and number theory*, volume 6 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 173–217. Academic Press, New York, 1979.

[Hay91] David R. Hayes. On the reduction of rank-one Drinfeld modules. *Math. Comp.*, 57(195):339–349, 1991.

[Hay92] David R. Hayes. A brief introduction to Drinfeld modules. In *The arithmetic of function fields (Columbus, OH, 1991)*, volume 2 of *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, pages 1–32. de Gruyter, Berlin, 1992.

[HKT00] F. Halter-Koch and R. F. Tichy (Hrsg.). *Algebraic number theory and Diophantine analysis*, Berlin, 2000. Walter de Gruyter & Co.

[Koc97] Helmut Koch. *Zahlentheorie*, volume 72 of *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course]*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997. Algebraische Zahlen und Funktionen. [Algebraic numbers and functions].

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[Lor97] Dino Lorenzini. *An invitation to arithmetic geometry*, volume 9 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Rev92] Marc Reversat. Lecture on rigid geometry. In *The arithmetic of function fields (Columbus, OH, 1991)*, volume 2 of *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, pages 143–151. de Gruyter, Berlin, 1992.

[Rib87] Kenneth A. Ribet (Hrsg.). *Current trends in arithmetical algebraic geometry*, volume 67 of *Contemporary Mathematics*, Providence, RI, 1987. American Mathematical Society.

[Ros02] Michael Rosen. *Number theory in function fields*, volume 210 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[Ser03] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.

[Shi71] Goro Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1971. Kancflex o Memorial Lectures, No. 1.

[Sil86] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[Sti93] Henning Stichtenoth. *Algebraic function fields and codes*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[Tak93] Shuzo Takahashi. The fundamental domain of the tree of GL(2) over the function field of an elliptic curve. *Duke Math. J.*, 72(1):85–97, 1993.

[Tei92] Jeremy T. Teitelbaum. Rigid analytic modular forms: an integral transform approach. In *The arithmetic of function fields (Columbus, OH, 1991)*, volume 2 of *Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ.*, pages 189–207. de Gruyter, Berlin, 1992.

[Til83] Agnes Tillmann. *Unzerlegbare Vektorbündel über algebraischen Kurven*. Dissertation, Fernuniversität, Hagen, 1983.

[vdP92] Marius van der Put. Discrete groups, Mumford curves and theta functions. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(3):399–438, 1992.

[Yu85] Jing Yu. Transcendence theory over function fields. *Duke Math. J.*, 52(2):517–527, 1985.

[Yu86] Jing Yu. Transcendence and Drinfel′d modules. *Invent. Math.*, 83(3):507–517, 1986.