Diskriminanten und Resultanten einer arithmetisch definierten Folge von Polynomen über $\mathbb{F}_q(T)$

Diplomarbeit

Bernd Kremling

Saarbrücken, November 1999

Fachbereich 9, Mathematik

Ich erkläre hiermit an Eides statt, diese Arbeit selbständig geschrieben und keine Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen werden die Eisenstein-Reihen für Gitter $\Lambda_{\omega_1,\omega_2} = \{a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ wie folgt definiert:

$$E_k(\Lambda_{\omega_1,\omega_2}) \quad = \quad {\sum}' \frac{1}{(a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_2)^k},$$

wobei k eine gerade Zahl ≥ 4 ist und ${\sum}'$ die Summation über alle $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ bedeutet. Von $\omega_1,\ \omega_2$ wird vorausgesetzt, daß $Im(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0$ ist. Insbesondere sei $\Lambda_{z,1}$ das Gitter $\{a \cdot z + b \,|\, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$, wobei $Im\, z > 0$ ist. Dann ist

$$E_k(z) \quad = \quad E_k(\Lambda_{z,1}) \quad = \quad {\sum}' \frac{1}{(a \cdot z + b)^k}$$

eine Funktion, die auf der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ definiert ist.
Die q-Entwicklung $(q = e^{2\pi i \cdot z})$ von $E_k(z)$ sieht folgendermaßen aus:

$$E_k(z) \quad = \quad \zeta(k) + \frac{2 \cdot (2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) \cdot q^n.$$

Hierbei ist $\sigma_{k-1}(n) = \sum\limits_{d|n} d^{k-1}$ und ζ die Riemansche Zeta-Funktion.

Daraus geht hervor, daß man die Eisenstein-Reihen auch zur Untersuchung der wichtigen zahlentheoretischen Funktionen σ_k benutzen kann.
Auch im Funktionenkörperfall kann man Eisenstein-Reihen betrachten. Dabei läßt man sich von folgender Analogie leiten:

(*i*) $A = \mathbb{F}_q[T]$ ist wie $\mathbb{Z}$ ein euklidischer Ring.

(*ii*) So wie $\mathbb{Z}$ diskret im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen eingebettet ist, ist A in einen Körper C diskret eingebettet, der vollständig und algebraisch abgeschlossen ist. Er wird im folgenden noch genauer definiert.

Für diesen Körper C kann man eine obere Halbebene definieren, die dann analoge Eigenschaften hat wie die obere Halbebene im Körper der komplexen Zahlen.

Diese obere Halbebene nennen wir Ω. Es werden dann entsprechend Summen der Form

$$E_k(\Lambda_{\omega_1,\omega_2}) \quad = \quad \sum{}' \frac{1}{(a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_2)^k}$$

betrachtet, wobei die Elemente ω_1, ω_2 aus C sind und $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ in Ω liegt. Die Summe $\sum{}'$ erstreckt sich auf die Elemente des zweidimensionalen Gitters $\Lambda_{\omega_1,\omega_2} = \{a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_2 \,|\, (a,b) \in A \times A\}$, die ungleich 0 sind. Wir definieren dann analog die Eisenstein-Reihe

$$E_k(z) \quad = \quad E(\Lambda_{z,1}) \quad = \quad \sum{}' \frac{1}{(a \cdot z + b)^k},$$

wobei $\Lambda_{z,1} = \{a \cdot z + b \,|\, (a,b) \in A \times A\}$ ist und z in Ω liegt.
In dieser Arbeit werden wir uns fast ausschließlich mit den Eisenstein-Reihen $E_{q^k-1}(z)$ beschäftigen. Diese sind von besonderem Interesse, weil ihre Nullstellen mit den supersingulären Invarianten modulo eines Primideals in $A = \mathbb{F}_q[T]$ vom Grade k verknüpft sind. Um den Begriff supersingulär zu definieren, benötigen wir zunächst noch einige andere Hilfsmittel. Wir werden nun im folgenden in kurzen Sätzen auf diese Hilfsmittel eingehen.
Zunächst führen wir den Begriff des Drinfeld-Moduls ein. Ausgangspunkt ist der Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Sei φ ein Homomorphismus von $A = \mathbb{F}_q[T]$ in einen Körper F. Vermöge φ ist $\mathbb{F}_q$ in F eingebettet. Die $\mathbb{F}_q$-lineraren Polynome über F bilden eine F-Algebra $\tilde{F}$, wobei die Multiplikation die Hintereinanderausführung ist. Die Elemente von $\tilde{F}$ sind gerade die Polynome der Form $\sum a_i \cdot Z^{q^i}$, $a_i \in F$. Ein Drinfeld-Modul ist ein Algebrenhomomorphismus ϕ von $A = \mathbb{F}_q[T]$ nach $\tilde{F}$, d.h. $\phi_{a \cdot b} = \phi_a \cdot \phi_b$, $\phi_{a+b} = \phi_a + \phi_b$, $\phi_{c \cdot a} = c \cdot \phi_a$ für $a, b \in A$ und $c \in \mathbb{F}_q$ (wir schreiben ϕ_a statt $\phi(a)$), so daß noch folgende Eigenschaft erfüllt ist: Wenn

$$\phi_a = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot Z^{q^i},$$

so gilt $a_0 = \varphi(a)$. Außerdem wird gefordert, daß $\phi \neq \varphi$ ist. Der Drinfeld-Modul heißt vom Rang k, wenn

$$\phi_T = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot Z^{q^i}$$

und $a_k \neq 0$ ist. Aufgrund der Tatsache, daß ϕ ein Algebrenhomomorphismus ist, ist ϕ eindeutig durch ϕ_T bestimmt.
Nun sei der Drinfeld-Modul vom Rang 2, also $\phi_T = \varphi(T) + g \cdot Z^q + \Delta \cdot Z^{q^2}$ mit $g, \Delta \in F$, $\Delta \neq 0$ gegeben. Die j-Invariante von ϕ ist definiert als

$$j(\phi) = \tfrac{g^{q+1}}{\Delta}.$$

Wenn F algebraisch abgeschlossen ist, charakterisiert $j(\phi)$ den Drinfeld-Modul ϕ bis auf Isomorphie. Dabei heißen zwei Drinfeld-Moduln ϕ, ψ isomorph, wenn ein Polynom der Form $a_0 \cdot Z$ mit $0 \neq a_0 \in F$ exisitiert, so daß $(a_0 \cdot Z)\phi_a = \psi_a(a_0 \cdot Z)$ für alle $a \in \mathbb{F}_q[T]$ gilt.
Zwei A-Gitter Λ, $\Lambda^{'}$ in C heißen isomorph, wenn ein $\lambda \in C$ mit $\Lambda^{'} = \lambda \cdot \Lambda$ existiert. Entsprechend dieser Relation definiert man die Isomorphieklassen von Gittern.
Mit Hilfe von Gittern haben wir Eisenstein-Reihen definiert. Drinfeld-Moduln sind nun für uns ein algebraisches Hilfsmittel, um Gitter im Körper C zu betrachten, denn es existiert eine Bijektion zwischen der Menge aller Isomorphie-Klassen von Gittern und der Menge aller Isomorphie-Klassen von Drinfeld-Moduln. Dabei entsprechen r-dimensionale Gitter den Drinfeld-Moduln vom Rang r. Für den Rang $r = 2$ bedeutet dies nach den obigen Bemerkungen, daß ein zweidimensionales Gitter bis auf Isomorphie eindeutig durch die j-Invariante des zugehörigen Drinfeld-Moduls bestimmt ist. Jedem Punkt z der oberen Halbebene entspricht die Isomorphie-Klasse der zu $\Lambda_{z,1}$ äquivalenten Gitter, also gerade die Gitter $\Lambda_{\lambda z, \lambda}$ $(0 \neq \lambda \in C)$. Dem Gitter $\Lambda_{z,1}$ entspricht genau ein Drinfeld-Modul ϕ, mit

$$\phi_T = T \cdot \tau^0 + g \cdot \tau + \Delta \cdot \tau^2,$$

wobei $\tau = Z^q$ und $\Delta \neq 0$ ist. Durchläuft nun z die obere Halbebene, so erhalten wir die Funktionen $g(z), \Delta(z)$, welche Modulformen sind. Modulformen werden analog wie im komplexen Körper definiert. Eine Modulform im Komplexen kann in der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot q^n$$

dargestellt werden, wobei $q = e^{2\pi i z}$ ist. Der Funktion q entspricht im Funktionenkörperfall eine Funktion t von C nach C, so daß $g(z)$ und $\Delta(z)$ Darstellungen $g(z) = \tilde{g}(t(z))$ und $\Delta(z) = \tilde{\Delta}(t(z))$ haben, wobei $\tilde{g}$ und $\tilde{\Delta}$ Potenzreihen über A sind. Wir können zum Drinfeld-Modul ϕ mit

$$\phi_T = T \cdot \tau^0 + g \cdot \tau + \Delta \cdot \tau^2$$

den Drinfeld-Modul $\tilde{\phi}$ mit

$$\tilde{\phi}_T = T \cdot \tau^0 + \tilde{g}(t) \cdot \tau + \tilde{\Delta}(t) \cdot \tau^2$$

betrachten, den man den zu ϕ zugehörigen Tate-Drinfeld-Modul nennt. Da $\tilde{g}$ und $\tilde{\Delta}$ nach geeigneter Normierung zu $A((t))$ gehören, kann man zu jedem Primideal $\wp$ von A den Drinfeld-Modul $\tilde{\phi}(\wp)$ bilden mit

$$\tilde{\phi}(\wp)_T = (T + \wp) \cdot \tau^0 + \hat{g} \cdot \tau + \hat{\Delta} \cdot \tau^2,$$

dessen Koeffizienten $\hat{g}$, $\hat{\Delta}$ aus $\tilde{g}$, $\tilde{\Delta}$ hervorgehen, indem man die Koeffizienten $\tilde{g}$, $\tilde{\Delta}$ durch ihre Bilder bei der Abbildung $A \to A/\wp$ ersetzt. Wird das Primideal $\wp$ von einem Primelement p vom Grad d erzeugt, so ist

$$\tilde{\phi}(\wp)_p = l_d \cdot \tau^d + ... + l_{2d} \cdot \tau^{2d},$$

wobei $l_d, ..., l_{2d}$ Elemente aus $(A/\wp)((t))$ sind. Wir nennen den Koeffizienten l_d die Hasse-Invariante von $\tilde{\phi}(\wp)$ und schreiben dafür $H(\phi(\wp))$. Der Drinfeld-Modul ϕ heißt supersingulär $mod\,\wp$, wenn $H(\tilde{\phi}(\wp)) = 0$ ist. Wenn ϕ_1 und ϕ_2 isomorph sind, so folgt aus $H(\tilde{\phi}_1(\wp)) = 0$ auch $H(\tilde{\phi}_2(\wp)) = 0$. Deshalb sprechen wir in diesem Zusammenhang auch von supersingulären j-Invarianten $mod\,\wp$.
Wir definieren für $k \geq 0$

$$g_k = (-1)^{k+1} \cdot \bar{\pi}^{1-q^k} \cdot L_k \cdot E_{q^k-1},$$

wobei $\bar{\pi} \in C$ und $L_k \in A$ Konstanten sind, die später definiert werden. E_{q^k-1} wird dabei so normiert, daß der konstante Koeffizient 1, d.h. also g_k von der Form $g_k = 1 + ...$ ist. In Kapitel 1 werden wir folgenden Satz beweisen:

$$\begin{aligned} g_0 &= 1,\, g_1 = g, \\ g_k &= -[k-1] \cdot g_{k-2} \cdot \delta^{q^{k-2}} + g_{k-1} \cdot g^{q^{k-1}} \text{ für } k \geq 2. \end{aligned}$$

Ersetzen wir nun g und Δ durch X und Y, so erhalten wir eine Rekursion für ein Polynom $A_k(X,Y) \in A[X,Y]$. Das Polynom $A_k(X,Y)$ ist isobar, wenn X das Gewicht $q-1$ und Y das Gewicht q^2-1 hat. Deshalb erhalten wir, wenn wir

$$Z = \frac{X^{q+1}}{Y}$$

definieren und durch einen geeigneten Faktor $X^i \cdot Y^j$ teilen, aus $A_k(X,Y)$ ein Polynom $\phi_k(Z) \in A[Z]$. Für diese Polynome $\phi_k(Z)$ gilt dann folgende Rekursion:

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= 1,\, \phi_1(Z) = 1, \\ \phi_k(Z) &= Z^{a_k} \cdot \phi_{k-1}(Z) - [k-1] \cdot \phi_{k-2}(Z). \end{aligned}$$

Hierbei sind die Folgen $(a_k)_{k=2}^{\infty}$ und $([k])_{k=1}^{\infty}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1, \\ a_{k+1} &= \begin{cases} q \cdot a_k - 1 \text{ wenn } i \text{ gerade} \\ q \cdot a_k + 1 \text{ wenn } i \text{ ungerade,} \end{cases} \\ [k] &= T^{q^k} - T \quad \text{für} \quad k = 1, 2, ... \quad . \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Polynome ϕ_k ergibt sich aus folgendem Satz:

(i) Sei k gerade. Dann ist $x \in \Omega$ eine Nullstelle von E_{q^k-1} genau dann, wenn $j(x)$ eine Nullstelle von ϕ_k ist.

(ii) Sei k ungerade. Ein $x \in \Omega - \varepsilon$ ist Nullstelle von E_{q^k-1} genau dann, wenn $j(x)$ eine Nullstelle von ϕ_k ist. Dabei ist ε die Menge der elliptischen Punkte von C, d.h. $\Omega - \varepsilon$ die Menge der nichtelliptischen Punkte von Ω. Eine genaue Definition folgt später.

Nun sind wir in der Lage, den Zusammenhang zwischen den Nullstellen von Eisenstein-Reihen $E_{q^k-1}(z)$ und den supersingulären j-Invarianten modulo eines Primideals vom Grad k zu formulieren:

Ist $\wp = (p)$ ein Primideal von A mit $deg\, p = k$, so hat $\phi_k(z)\, mod\, \wp$ als Nullstellen gerade alle supersingulären j-Invarianten $mod\, \wp$, die von 0 verschieden sind, d.h.

$$\phi_k(z)\, mod\, \wp \quad = \prod_{\substack{j_0 \neq 0 \\ j_0\, supersing.\, mod\, \wp}} (z - j_0).$$

Wie bereits erwähnt wurde, werden wir in Kapitel 1 eine Rekursionsgleichung für die normierten Eisenstein-Reihen g_k herleiten. Wir werden dabei auch die t-Entwicklung von Eisenstein-Reihen bestimmen. Kapitel 1 entspricht im Wesentlichen dem Inhalt der Abschnitte 1.1 bis 1.6 der Arbeit [5].
Im folgenden Kapitel leiten wir dann die Polynome ϕ_k her. Anschließend werden wir dann einige Eigenschaften dieser Polynome, insbesondere den gerade geschilderten Zusammenhang mit den supersingulären Invarianten, beweisen.
In Kapitel 3 untersuchen wir dann speziell die Diskriminanten $Diskr(\phi_k)$ der Polynomfolge $(\phi_k)_{k=2}^{\infty}$ auf Primteiler. Wir werden die Formel

$$Diskr(\phi_k) = \pm \prod_{i=1}^{k-1} [k-i]^{deg\, \phi_k - deg\, \phi_{k-i} - \delta(i)}$$

beweisen. Dabei hat $\delta(i)$ den Wert 1, wenn i ungerade ist und ansonsten den Wert 0. Man kann nun zeigen, daß $[i]$ gerade das Produkt aller normierten Primteiler in A ist, deren Grad i teilt. Somit kennen wir die Primelementzerlegung der Diskriminanten.
Anschließend werden wir in Kapitel 4 die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ und ihre Primteiler betrachten. Wir zeigen dabei zunächst die Formeln

$$\begin{aligned} Res(\phi_k, \phi_{k-1}) &= \pm \prod_{i=2}^{k-1} [i]^{deg\, \phi_i} \\ Res(\phi_k, \phi_{k-2}) &= \pm \prod_{i=1}^{k-2} [i]^{deg\, \phi_i + a_k \cdot \delta(k,i)}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\delta(k,i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn k und i beide gerade oder beide ungerade sind} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen weiter: Wenn $k-i > 2$ und ungerade ist, so ist $Res(\phi_k, \phi_{k-1})$ ein Teiler von $Res(\phi_k, \phi_i)$. Falls $k-i > 2$ gerade ist, teilt sogar $Res(\phi_k, \phi_{k-2})$ die Resultante $Res(\phi_k, \phi_i)$. Wir beweisen, daß für $k > 2i$ der Ausdruck $[k-i]^{deg\,\phi_i}$ ein Teiler von $Res(\phi_k, \phi_i)$ ist. Weiter werden in diesem Kapitel empirische Berechnungen von Primteilern solcher Resultanten angegeben. Aufgrund dieser Berechnungen stellen wir dann einige Vermutungen auf.
Das letzte Kapitel behandelt den klassischen Fall, denn auch in diesem können wir eine Rekursionsgleichung für Eisenstein-Reihen zweidimensionaler Gitter herleiten. Daraus konstruieren wir dann Polynome $\varphi_n \in \mathbb{Q}[x]$, die dann, wie die Polynome ϕ_k, Informationen über die Nullstellen der Eisenstein-Reihen enthalten. Für diese Polynome untersuchen wir wie im Funktionenkörperfall, allerdings fast nur empirisch, die Diskriminanten und Resultanten auf Primteiler. Außerdem untersuchen wir empirisch die Nullstellen solcher Polynome. Eine genauere Erklärung der Analogie zwischen Funktionenkörperfall und klassischem Fall erfolgt am Anfang von Kapitel 5.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. E.U. Gekeler für den interesanten Themenvorschlag und die gute Betreuung bei der Anfertigung der Diplomarbeit. Ebenso bedanke ich mich bei seinen Mitarbeitern für ihre Unterstützung. Insbesondere bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Math. B. Wack für das Korrekturlesen.

Saarbrücken, den 23.11.1999 Bernd Kremling

Kapitel 1

Herleitung einer Rekursion für die Eisenstein-Reihen g_k

1.1 Bezeichnungen und Definitionen

Die folgenden Notationen gelten für sämtliche Kapitel:

$\mathbb{F}_q$	$=$	$\mathbb{F}_{p^m}$	Körper der Charakteristik p mit q Elementen.
A	$=$	$\mathbb{F}_q[T]$	Polynomring über $\mathbb{F}_q$.
K	$=$	$\mathbb{F}_q(T)$	Quotientenkörper von A. $v_\infty:\ K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ sei die Bewertung von K mit $v_\infty(\frac{1}{T}) = 1$. Es gilt $v_\infty(\frac{f}{g}) = deg\, g - deg\, f$ für $f, g \in \mathbb{F}_q[T]$. Wir definieren die zugehörige Betragsbewertung durch $\|x\|_\infty := q^{-v_\infty(x)}$ für $x \in K$.
K_∞	$=$	$\mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$	ist die Komplettierung von K bezüglich der Bewertung v_∞. Sei $O_\infty = \{x \in K_\infty \,\|\, v_\infty(x) \geq 0\}$ der Ring der ganzen Elemente bezüglich v_∞. Es ist $K_\infty = \{\sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \cdot (\frac{1}{T})^i \,\|\, \alpha_i \in \mathbb{F}_q$ für $i \in \mathbb{Z}, i \geq m\}$ und $O_\infty = \{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot (\frac{1}{T})^i \,\|\, \alpha_i \in \mathbb{F}_q$ für $i = 0, ...\}$.
C	$=$	$\widehat{\overline{K}}_\infty$	sei die Komplettierung des algebraischen Abschlusses von K_∞. C ist wegen [8], Proposition 2.1 algebraisch abgeschlossen.

Wir bezeichen mit $|.|$ die eindeutige Fortsetzung der Bewertung $|.|_\infty$von K_∞ auf C.
Sei $O_C = \{x \in C \mid |x| \leq 1\}$ und $m_c = \{x \in C \mid |x| < 1\}$ das maximale Ideal von O_C.

$\Omega \;=\; C - K_\infty$ nennen wir die Drinfeld'sche obere Halbebene.

Der Imaginärbetrag $|z|_i$ für $z \in \Omega$ ist definiert durch

$$|z|_i \;=\; \inf_{x \in K_\infty} |z - x|.$$

Es gilt

$$|z|_i \;=\; \min_{x \in K_\infty} |z - x|.$$

Deshalb ist die obere Halbebene Ω von C gerade die Menge der $z \in C$, deren Imaginärbetrag größer 0 ist.

Wenn Γ die Gruppe $GL(2, A)$ ist, so operiert Γ gemäß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \tfrac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

auf Ω, wie aus der Gleichung

$$\left|\tfrac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}\right|_i = \tfrac{|a \cdot d - b \cdot c|}{|c \cdot z + d|^2} \cdot |z|_i$$

für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, K_\infty)$, $z \in \Omega$ hervorgeht.

Auf Ω lassen sich holomorphe und meromorphe Funktionen definieren. Die Definitionen finden sich in [4] und [7].

1.2 Gitter, Drinfeld-Moduln und Eisenstein-Reihen

Definition 1.2.1

(i) Eine Teilmenge S von C heißt diskret, wenn $S \cap B_r$ für jede Kugel $B_r = \{z \in C \mid |z| \leq r\}$ endlich ist.

(ii) Ein $\mathbb{F}_q$-Gitter in C ist ein diskreter $\mathbb{F}_q$-Unterraum von C. Ein A-Gitter ist ein endlich erzeugter, diskreter A-Untermodul.

Definition 1.2.2 *Für ein A-Gitter Λ und $i \in \mathbb{N}$ definieren wir die Eisenstein-Reihe*

$$E_i(\Lambda) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \frac{1}{\lambda^i}.$$

Aufgrund der Diskretheit von Λ gibt es nur endlich viele $\lambda \in \Lambda$ mit mit $|\lambda| \leq n_0$ für ein beliebig gewähltes $n_0 \in \mathbb{N}$. Da C unter $|.|$ nichtarchimedisch ist, folgt daraus die Konvergenz von $E_i(\Lambda)$.
Wir werden nun im folgenden Drinfeld-Moduln definieren und ihre Verbindung zu Gittern erläutern. Diese Beziehungen benutzen wir dann, um eine Rekursionsgleichung für Eisenstein-Reihen $E_i(\Lambda)$ herzuleiten. Aus dieser Rekursion werden wir dann später eine Rekursion speziell für den Fall $i = q^k - 1$ und Gitter Λ vom Rang zwei gewinnen. Ein A-Gitter ist vom Rang r, wenn es ein freier A-Modul vom Rang r ist. Wir sprechen dann auch von einem r-dimensionalen A-Gitter. Nähere Ausführungen zu den im folgenden dargestellten Beziehungen zwischen Gittern und Drinfeld-Moduln findet der Leser in den Artikeln [12] und [10].

Definition 1.2.3 *Ist Λ ein $\mathbb{F}_q$-Gitter bzw. A-Gitter, so definieren wir die Gitterfunktion*

$$e_\Lambda(z) = z \cdot \prod_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} (1 - \frac{z}{\lambda}).$$

Das Produkt konvergiert gleichmäßig auf beschränkten Mengen in C und definiert eine Funktion $e_\Lambda : C \longrightarrow C$.

Eigenschaften der Gitterfunktion:

(i) e_Λ ist ganz und surjektiv.

(ii) e_Λ ist $\mathbb{F}_q$-linear und Λ-periodisch.

(iii) Die Nullstellen von e_Λ sind genau die Elemente von Λ. Sie sind alle einfach.

(iv) Wenn $\Lambda^{'} = c \cdot \Lambda$ mit $c \in C^*$, so gilt $c \cdot e_\Lambda(z) = e_{\Lambda^{'}}(c \cdot z)$.

v) $\frac{d\,e_\Lambda}{d\,z} = e^{'}_\Lambda(z) = 1$ und es gilt $\frac{1}{e_\Lambda(z)} = \frac{e^{'}_\Lambda(z)}{e_\Lambda(z)} = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)}$.

Diese Aussagen zeigt man zuerst für endlliche Gitter. Für beliebiges Λ wählt man eine aufsteigende Folge $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ endlicher Gitter mit $\Lambda = \cup\Lambda_i$ und macht dann einen Grenzübergang.

Sei nun Λ ein A-Gitter vom Rang r. Für $a \in A$, $d = deg\, a > 0$ definieren wir das Polynom

$$\phi_a^\Lambda(z) = az \cdot \prod_{\substack{\lambda\in e_\Lambda(a^{-1}\Lambda) \\ \lambda\neq 0}} (1 - \frac{z}{\lambda}).$$

$\phi_a^\Lambda(z)$ ist ein $\mathbb{F}_q$-lineares Polynom mit $deg\, \phi_a^\Lambda(z) = q^{r\cdot d}$, d.h. von der Form

$$\phi_a^\Lambda(z) = \sum_{0\leq i\leq rd} l_i \cdot \tau^i\ ,$$

wobei $\tau^i = z^{q^i}$ ist (siehe dazu [8], Proposition 1.1.5). Die Polynome der Gestalt $\sum a_i \cdot \tau^i$ mit $a_i \in C$ und $\tau^i = z^{q^i}$ bilden einen nicht-kommutativen Ring $C\{\tau\}$, in dem die Addition wie gewöhnlich und die Multiplikation durch Komposition definiert ist. Das Einselement dieses Ringes ist dann $z = \tau^0$.

Bemerkung: Man kann die Multiplikation in $C\{\tau\}$ auch alternativ als die wohlbestimmte, assoziative und distributive Multiplikation $\cdot$ definieren, für die gilt:

(i) Konstanten $a, b \in C\{\tau\}$ werden wie in C multipliziert.

(ii) $\tau \cdot a = a^q \cdot \tau$ für $a \in C$.

Wegen (ii) nennt man $C\{\tau\}$ auch einen getwisteten Polynomring.

Für ϕ_a^Λ gilt nun die Funktionalgleichung

$$e_\Lambda(a \cdot z) = \phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z)), \tag{1.1}$$

wobei $z \in C$ ist. Dies bedeutet gerade, daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & C & \xrightarrow{e_\Lambda} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow a & & \Big\downarrow a & & \Big\downarrow \phi_a^\Lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & C & \xrightarrow{e_\Lambda} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ϕ_a^Λ ist auch eindeutig dadurch bestimmt, daß diese Kommutativität erfüllt ist. Wir definieren die Abbildung

$$\phi^\Lambda : A \longrightarrow C\{\tau\}$$

$$a \mapsto \phi_a^\Lambda.$$

ϕ^Λ ist ein $\mathbb{F}_q$-linearer Ring-Homomorphismus in $C\{\tau\}$, d.h. $\phi^\Lambda(a+b) = \phi^\Lambda(a) + \phi^\Lambda(b)$, $\phi^\Lambda(a \cdot b) = \phi^\Lambda(a) \cdot \phi^\Lambda(b)$ und $\phi^\Lambda(c \cdot a) = c \cdot \phi^\Lambda(a)$ für $a, b \in A$, $c \in \mathbb{F}_q$.

Definition 1.2.4 *Ein $\mathbb{F}_q$-Algebren-Homomorphismus $\phi : A \to C\{\tau\}$, der die Eigenschaft hat, daß für $a \in A$ mit $\deg a = d$ gilt*

$$\phi(a) = \sum_{i=0}^{r \cdot d} l_i \cdot \tau^i,$$

wobei $l_0 = a$ und $l_{rd} \neq 0$ ist, heißt Drinfeld-Modul vom Rang r. Statt $\phi(a)$ schreiben wir auch ϕ_a.

Bemerkungen:

(i) Vermöge ϕ erhält die additive Gruppe von C eine neue Struktur als A-Algebra, mit Skalarmultiplikation $a \cdot z := \phi_a(z)$ für $z \in C$.

(ii) Die Definition kann auf den Fall erweitert werden, daß $\varphi : A \to F$ ein Homomorphismus von A in einen Körper F ist. Entsprechend wird dann ein Drinfeld-Modul von A nach $F\{\tau\}$ definiert.

(iii) Aufgrund der Tatsache, daß ein Drinfeld-Modul ϕ ein Algebrenhomomorphismus ist, ist ϕ eindeutig durch ϕ_T bestimmt.

Für ein A-Gitter Λ vom Rang r ist die Abbildung ϕ^Λ ein Drinfeld-Modul vom Rang r, und es gilt folgender Satz:

Satz 1.2.5 *Die Abbildung $\Lambda \mapsto \phi^\Lambda$ ist eine Bijektion von der Menge der A-Gitter vom Rang r in C auf die Menge der Drinfeld-Moduln vom Rang r über C.*

Einen Beweis findet man in [12], Kapitel 3, Theorem 3.

Wegen $e_\Lambda^{'} = 1$ gibt es ein Kompositionsinverses $log_\Lambda(z) = \sum \beta_i \cdot z^{q^i}$ mit positivem Konvergenzradius. Sei nun Λ ein r-dimensionales Gitter. Die Abbildung eines Elementes $a \in A$ mit $deg\, a > 0$ unter dem zugehörigen Drinfeld-Modul ϕ^Λ ist von der Form

$$\phi_a^\Lambda(z) = \sum l_i \cdot z^{q^i},$$

mit $l_i = l_i(a, \Lambda)$. Wir leiten nun eine Rekursion für die Koeffizienten β_i in Abhängigkeit der Koeffizienten l_i von $\phi_a^\Lambda(z)$ her: Wenden wir auf beiden Seiten der Gleichung $e_\Lambda(a \cdot z) = \phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z))$ nun log_Λ an, so erhalten wir

$$log_\Lambda(e_\Lambda(a \cdot z)) = log_\Lambda(\phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z)))$$

Indem wir z durch $log_\Lambda(z)$ ersetzen erhalten wir also

$$log_\Lambda(e_\Lambda(a \cdot log_\Lambda z)) = log_\Lambda(\phi_a^\Lambda(e_\Lambda(log_\Lambda(z)))).$$

Daraus folgt

$$a \cdot log_\Lambda z = log_\Lambda(\phi_a^\Lambda(z)).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} log_\Lambda(\phi_a^\Lambda(z)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot \left(\sum_{j=0}^{r \cdot d} l_j \cdot z^{q^j} \right)^{q^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot \sum_{j=0}^{r \cdot d} l_j^{q^i} \cdot z^{q^{i+j}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=k} \beta_i \cdot l_j^{q^i} \Big) \cdot z^{q^k}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann

$$a \cdot \beta_k = \sum_{i+j=k} \beta_i \cdot l_j^{q^i}.$$

Da $l_0 = a$ ist, gilt

$$\beta_k \cdot (a - a^{q^k}) \quad = \quad \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i \cdot l_{k-i}^{q^i}. \tag{1.2}$$

Wegen $deg\, a > 0$ ist $a - a^{q^k} \neq 0$, so daß also ein rekursives Verfahren zur Berechnung der β_k aus ϕ_a^Λ existiert. Ist $e_\Lambda(z) = \sum \alpha_i \cdot z^{q^i}$, so ergibt sich der Rekursionsanfang aus

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \cdot z^{q^j} \right)^{q^i} \quad = \quad z.$$

Wegen $\alpha_0 = 1$ und $\alpha_0 \cdot \beta_0 = 1$ ist also $\beta_0 = 1$.

Sei nun $\frac{z}{e_\Lambda(z)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \cdot z^i$. Wir zeigen nun, daß die Koeffizienten γ_i für $i > 0$ gerade die Eisenstein-Reihen $-E_i(\Lambda)$ sind:

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{z}{e_\Lambda(z)} &= z \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda} \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(1 - \frac{\lambda}{z})} \\
&= 1 - \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \frac{(\frac{z}{\lambda})}{(1 - \frac{z}{\lambda})} \\
&= 1 - \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \left(\frac{z}{\lambda}\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^i \\
&= 1 - \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^i \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^i \right) \cdot z^i
\end{aligned}$$

$$= \quad 1 - \sum_{i=1}^{\infty} E^i(\Lambda) \cdot z^i.$$

Wir folgern $\gamma_0 = 1$ und wie für $i > 0$ behauptet

$$\gamma_i = -E_i(\Lambda). \tag{1.3}$$

Im folgenden stellen wir eine Verbindung zwischen den Koeffizienten β_i der Funktion log_Λ und den Eisenstein-Reihen $E_i(\Lambda) = -\gamma_i$ her:

Aus

$$e_\Lambda(log_\Lambda(z)) \quad = \quad z$$

folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \alpha_i \cdot \beta_j^{q^i} \right) \cdot z^{q^k} \quad &= \quad \left(\frac{z}{e_\Lambda(z)} \right) \cdot e_\Lambda(z) \\
&= \quad \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \cdot z^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \cdot z^{q^j} \\
&= \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_i \cdot \alpha_j \cdot z^{q^j+i} \\
&= \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \gamma_{q^k-q^j} \cdot \alpha_j \right) \cdot z^{q^k}.
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich dann

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \cdot \beta_{k-i}^{q^i} \quad = \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \cdot \gamma_{q^k-q^i} \quad \text{für } k = 0, 1, ...$$

Wir benutzen nun diese Gleichung, um durch Induktion zu zeigen, daß für $i \leq k$

$$\gamma_{q^k-q^i} = \beta_{k-i}^{q^i} \tag{1.4}$$

gilt:

Induktionsanfang: Sei also $k = 0$ und $i = 0$. Dann gilt $\alpha_0 \cdot \beta_0^{q^0} = \alpha_0 \cdot \gamma_{q^0-q^0}$. Da $\alpha_0 \neq 0$ ist also $\gamma_{q^0-q^0} = \beta_0$.

Induktionsschritt: Sei also schon bewiesen, daß $\gamma_{q^k - q^i} = \beta_{k-i}^{q^i}$ für ein $k \geq 0$ und alle $i \leq k$ gilt.
Wir zeigen die Behauptung also für $k+1$ und alle $i \leq k+1$:

Wenn $i \geq 1$, so ist

$$\begin{aligned}
\gamma_{q^{k+1}-q^i} &= -E_{q^{k+1}-q^i}(\Lambda) \\
&= -\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{\lambda^{q^{k+1}-q^i}} \\
&= -\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{\lambda^{(q^k-q^{i-1})\cdot q}} \\
&= \left(-\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{\lambda^{q^k-q^{i-1}}}\right)^q \\
&= \left(\gamma_{q^k-q^{i-1}}\right)^q \\
&= \left(\beta_{k-(i-1)}^{q^{i-1}}\right)^q \\
&= \beta_{(k+1)-i}^{q^i}.
\end{aligned}$$

Wenn $i = 0$, so folgt jetzt aus

$$\sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i \cdot \beta_{k+1-i}^{q^i} \quad = \quad \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i \cdot \gamma_{q^{k+1}-q^i},$$

und wegen $\alpha_0 \neq 0$

$$\gamma_{q^{k+1}-q^0} = \beta_{k+1-0}^{q^0}.$$

$\square$

Wie wir bereits gezeigt haben, gilt

$$a \cdot \beta_k \quad = \quad \sum_{i+j=k} \beta_i \cdot l_j^{q^i}.$$

Außerdem haben wir gerade gezeigt, daß

$$\gamma_{q^k-q^i} \quad = \quad \beta_{k-i}^{q^i}$$

ist. Insbesondere gilt also

$$\gamma_{q^k-1} \quad = \quad \beta_k.$$

Daraus folgern wir nun

$$a \cdot \gamma_{q^k-1} \quad = \quad \sum_{i+j=k} \gamma_{q^i-1} \cdot l_j^{q^i}.$$

Definieren wir nun noch $E_0(\Lambda) = -1$, so erhalten wir für $k \geq 0$ die Rekursionsgleichung

$$a \cdot E_{q^k-1} \quad = \quad \sum_{i+j=k} E_{q^i-1} \cdot l_j^{q^i}. \tag{1.5}$$

1.3 Der Carlitz-Modul

Ein für unsere Zwecke sehr wichtiger Drinfeld-Modul für $A = \mathbb{F}_q[T]$, ist der Drinfeld-Modul ρ vom Rang 1, der auch Carlitz-Modul genannt wird. Dieser ist definiert durch

$$\rho_T = T \cdot \tau^0 + \tau = T \cdot x + x^q.$$

Nach Satz 1.2.5 entspricht ρ einem eindimensionalen A-Gitter $L = \bar{\pi}A$. Dabei ist $\bar{\pi}$ bis auf eine Einheit in A, also ein Element aus $\mathbb{F}_q^*$ eindeutig bestimmt. Im folgenden wird ein solches $\bar{\pi}$ fest gewählt. Die q-Entwicklung der klassischen Eisenstein-Reihen $E_k(z)$ lautet:

$$E_k(z) = c_1(k) + c_2(k) \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{k-1}(n) \cdot q^n.$$

Hierbei ist $q = e^{2\pi i \cdot z}$ und $c_1(k), c_2(k)$ sind Konstanten. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir eine zur q-Entwicklung analoge Darstellung der Eisenstein-Reihen für den Funktionenkörperfall, die sogenannte t-Entwicklung, herleiten. Wie wir später noch sehen werden, wird $t(z) = e_L^{-1}(\bar{\pi}z) = \bar{\pi}^{-1}e_A^{-1}(z)$ ein Ersatz für $e^{2\pi iz}$ im klassischen Fall sein.
Zunächst stellen wir in diesem Abschnitt grundlegende arithmetische Funktionen in A vor, mit Hilfe derer wir dann im Anschluß die Koeffizienten der Exponentialfunktion $e_L(z)$ und ihrer Umkehrfunktion $log_L(z)$ beschreiben werden. In Abschnitt 1.5 werden wir für Gitter Λ Goss-Polynome $G_{k,\Lambda}$ definieren. Mit Hilfe der Goss-Polynome $G_{k,L}$ werden wir in Abschnitt 1.6 die t-Entwicklung für Eisenstein-Reihen angeben können. Zur Konstruktion dieser Goss-Polynome werden wir die Koeffizienten der Funktionen $e_L(z)$ und $log_L(z)$ benötigen.

Satz 1.3.1 *Für $i \in \mathbb{N}$ sei*

$$[i] \;=\; T^{q^i} - T.$$

Weiter definieren wir die Folgen $(D_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $(L_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 \\ D_i &= [i] \cdot D_{i-1}^q \quad \textit{für } i \geq 1, \\ \\ L_0 &= 1 \\ L_i &= [i] \cdot L_{i-1} \quad \textit{für } i \geq 1. \end{aligned}$$

Es ist also $D_i = [i] \cdot [i-1]^q \cdot ... \cdot [1]^{q^{i-1}}$ und $L_i = [i] \cdot [i-1] \cdot ... \cdot [1]$.

Nun gilt:

(i) $[i]$ ist das Produkt aller normierten Primteiler in A, deren Grad i teilt.

(ii) D_i ist das Produkt aller normierten Polynome in A, deren Grad i ist.

(iii) L_i ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller normierten Polynome vom Grad i in A.

Beweis:

(i) Gegeben sei ein irreduzibles Polynom $f(T)$ über $\mathbb{F}_q$, dessen Grad d ein Teiler von i ist. Sei $\mathbb{F}_q(\alpha)$ eine Erweiterung von $\mathbb{F}_q$ mit $f(\alpha) = 0$. Wie wir wissen, bildet die Menge der Einheiten $\mathbb{F}_q(\alpha)^*$ eine zyklische Gruppe mit $q^d - 1$ Elementen, so daß also jede Einheit die Gleichung $T^{q^d-1} = 1$ erfüllt. Somit ist jedes Element aus $\mathbb{F}_q(\alpha)$ eine Lösung der Gleichung $T^{q^d} - T = 0$. Also ist $f(T)$ ein Teiler von $T^{q^d} - T$. Wenn nun $i = d \cdot e$ ist, so gilt $q^{d\cdot e} - 1 = (q^d - 1) \cdot (q^{d(e-1)} + q^{d(e-2)} + ... + 1)$, d.h. $q^d - 1$ ist ein Teiler von $q^i - 1$. Mit der gleichen Argumentation folgern wir daß $T^{q^d-1} - 1$ das Polynom $T^{q^i-1} - 1$ teilt und damit $T^{q^d} - T$ ein Teiler von $T^{q^i} - T$ ist. Somit ist $f(T)$ ein Teiler von $[i]$.
Nun sei umgekehrt $f(T)$ irreduzibel über $\mathbb{F}_q$ und ein Teiler von $T^{q^i} - T$. Der Zerfällungskörper von $T^{q^i} - T$ über $\mathbb{F}_q$ ist $\mathbb{F}_{q^i}$. Also muß $\mathbb{F}_{q^i}$ eine Nullstelle α von $f(T)$ enthalten. Es gilt dann $[\mathbb{F}_{q^i} : \mathbb{F}_q] = [\mathbb{F}_{q^i} : \mathbb{F}_q(\alpha)] \cdot [\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q]$, d.h. $i = [\mathbb{F}_{q^i} : \mathbb{F}_q(\alpha)] \cdot deg\, f$. Also ist $deg\, f$ ein Teiler von i.
Desweiteren ist $\frac{d}{dT}(T^{q^i} - T) = -1 \neq 0$, also f separabel. Es folgt die Behauptung.

(ii) Sei $A' = \{f(T) \in A \,|\, \text{f normiert}\}$. Wir behaupten, daß

$$D_i = \prod_{\substack{f\in A' \\ deg\, f = i}} f$$

ist. Es gibt genau q^i Möglichkeiten ein normiertes Polynom vom Grad i zu konstruieren. Also ist

$$deg\,(\prod_{\substack{f\in A'\\ deg\, f=i}} f) = i\cdot q^i.$$

Da

$$D_i = \prod_{j=1}^{i}[j]^{q^{i-j}} = \prod_{j=1}^{i}(T^{q^j}-T)^{q^{i-j}}$$

ist, gilt ebenfalls $deg\, D_i = i\cdot q^i$. Es genügt also, noch zu zeigen, daß ein normiertes Polynom vom Grad i ein Teiler von D_i ist. Dies beweisen wir durch Induktion:

Induktionsanfang i=1: Sei $f \in A'$ mit $deg\, f = 1$. Dann ist f irreduzibel. Wegen (i) ist f ein Teiler von [1]. Nach Definition ist aber gerade $D_1 = [1]$.

Induktionsschritt $i-1 \to i$: Nach Definition ist $D_i = [i]\cdot D_{i-1}^q$. Sei nun $f \in A'$ ein Polynom vom Grad i. Ist f irreduzibel, so ist f ein Teiler von $[i]$. Ansonsten sei $f = g\cdot h$ mit $deg\, g, deg\, h \leq i-1$. Da D_j ein Teiler von D_{j-1} für $j \geq 0$ ist, sind nach Induktionsanahme g und h Teiler von D_{i-1}. Da $q\geq 2$ ist, muß $g\cdot h$, also f ein Teiler von D_{i-1}^q sein. Dann ist f Teiler von D_i.

(iii) Gegeben sei ein normiertes Polynom f vom Grad i. Sei $\prod_{j=1}^m f_j^{e_j}$ seine Primfaktorzerlegung. Für $1\leq j\leq m$ ist $deg\, f_j\cdot e_j \leq i$, und nach (i) ist f_j^e ein Teiler von $[deg\, f_j\cdot e]$ für $e = 1, ..., e_j$. Also ist $f_j^{e_j}$ ein Teiler von L_i. Es folgt, daß f ein Teiler von L_i ist. Also ist kgv=kgv$\{f \in A \,|\, f$ normiert mit $deg\, f = i\}$ ein Teiler von L_i.
Sei nun $\prod_{j=1}^m f_j^{e_j}$ die Primfaktorzerlegung von L_i. Wir betrachten eines der f_j, etwa f_1. Sei $d_1 = deg\, f_1$. Nach (i) ist f_1 ein Teiler von $[l]$ $(l \leq (i)$, wenn d_1 ein Teiler von l ist. Dann ist l ist von der Form $d_1, 2d_1, ..., [\frac{i}{d_1}]\cdot d_1$. (für den ganzzahligen Anteil einer rationalen Zahl a schreiben wir auch [a]). Also ist $e_1 = [\frac{i}{d_1}]$. Es sei $i = [\frac{i}{d_1}]\cdot d_1 + l$. Dann ist $f_1^{e_1}\cdot x^l$ ein normiertes Polynom vom Grad i, also Teiler des kgv. Es muß dann auch $f_1^{e_1}$ das kgv teilen. Dieselbe Überlegung gilt für die anderen $f_j^{e_j}$, $j = 2, ..., m$. Damit ist gezeigt, daß auch L_i ein Teiler des kgv ist. Also ist $L_i = kgv$. □

Satz 1.3.2 *Für das eindimensionale A-Gitter $L = \bar{\pi}\cdot A$ gelten die Gleichungen*

$$e_L(z) = \sum_{i\geq 0}\frac{1}{D_i}\cdot z^{q^i} \quad \text{und} \quad log_L(z) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i\cdot\frac{1}{L_i}\cdot z^{q^i}.$$

Beweis:

Aus der in Abschnitt 1.2 gezeigten Funktionalgleichung $\phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(a\cdot z)$ folgt für $a = T$, $\Lambda = L$ und $e_L(z) = \sum_{i\geq 0}\alpha_i\cdot z^{q^i}$ die Gleichung

$$(T\tau^0+\tau)(\sum_{i\geq 0}\alpha_i\cdot z^{q^i})=\sum_{j\geq 0}\alpha_j(Tz)^{q^j}.$$

Koeffizientenvergleich für $j\geq 0$ ergibt

$$T\cdot\alpha_j+\alpha_{j-1}^q=\alpha_j\cdot T^{q^j}.$$

Daraus folgt

$$\alpha_j=\tfrac{1}{[j]}\cdot\alpha_{j-1}^q.$$

Wegen $\alpha_0=1$ folgt daraus der erste Teil der Behauptung.

Für $log_\Lambda(z)=\sum_{i\geq 0}\beta_i\cdot z^{q^i}$ hatten wir in Abschnitt 2 aus der Funktionalgleichung die Rekursion $a\cdot\beta_k=\sum\limits_{i+j=k}\beta_i\cdot l_j^{q^i}$ hergeleitet. Dabei war $a\in A$ mit $deg\,a=d>0$ und $\phi_a^\Lambda=\sum\limits_{0\leq i\leq rd}l_i\tau^i$. Für $a=T$ und $\Lambda=L$ erhalten wir die Gleichung

$$T\cdot\beta_k=\beta_k\cdot T^{q^k}+\beta_{k-1}.$$

Also gilt

$$\beta_k=-\tfrac{1}{[k]}\cdot\beta_{k-1}.$$

Da $\beta_0=1$ ist, folgt obige Behauptung. □

1.4 Modulformen für $GL(2,A)$

Wir haben im zweiten Abschnitt Eisenstein-Reihen für beliebige A-Gitter definiert. Im folgenden interessieren uns vor allem Gitter vom Rang zwei. Gemäß Satz 1.2.5 entspricht einem Gitter $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}=A\omega_1\oplus A\omega_2$ ein Drinfeld-Modul vom Rang zwei.
Ein Gitter Λ_1 heißt isomorph zu einem Gitter Λ_2, wenn ein $\lambda\in C^*$ existiert, so daß $\Lambda_1=\lambda\cdot\Lambda_2$ gilt. Diesbezüglich definieren wir die Äquivalenzklassen von Gittern. Entspricht einem Gitter Λ vom Rang 2 der Drinfeld-Modul ϕ mit

$$\phi_T=T\cdot\tau^0+g\cdot\tau+\Delta\cdot\tau^2,$$

so entspricht $\lambda\cdot\Lambda$ der Drinfeld-Modul $\tilde{\phi}$ mit

$$\tilde{\phi}_T=T\cdot\tau^0+\lambda^{1-q}\cdot g\cdot\tau+\lambda^{1-q^2}\cdot\Delta\cdot\tau^2.$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß $\tilde{\phi}_T(e_{\lambda\Lambda}(z)) = e_{\lambda\Lambda}(Tz)$ gilt.

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_T(e_{\lambda\Lambda}(z)) &= T\cdot\tau^0(e_{\lambda\Lambda}(z)) + \lambda^{1-q}g\cdot\tau(e_{\lambda\Lambda}(z)) + \lambda^{1-q^2}\Delta\cdot\tau^2(e_{\lambda\Lambda}(z)) \\
&= T\cdot e_{\lambda\Lambda}(z) + \lambda^{1-q}g\cdot(e_{\lambda\Lambda}(z))^q + \lambda^{1-q^2}\Delta\cdot(e_{\lambda\Lambda}(z))^{q^2} \\
&= \lambda T\cdot e_\Lambda(\lambda^{-1}z) + \lambda^{1-q}g\cdot(\lambda\cdot e_\Lambda(\lambda^{-1}z))^q + \lambda^{1-q^2}\Delta\cdot(\lambda\cdot e_\Lambda(\lambda^{-1}z))^{q^2} \\
&= \lambda\{T\cdot e_\Lambda(\lambda^{-1}z) + g\cdot(e_\Lambda(\lambda^{-1}z))^q + \Delta\cdot(e_\Lambda(\lambda^{-1}z))^{q^2}\} \\
&= \lambda\cdot\phi_T(e_\Lambda(\lambda^{-1}z)) \\
&= \lambda\cdot e_\Lambda(T\lambda^{-1}z) \\
&= e_{\lambda\Lambda}(T\cdot z).
\end{aligned}$$

Sei nun $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$ ein Gitter und $z = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Dann ist $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$ isomorph zum Gitter $\Lambda_{z,1}$. Aus der Diskretheit von $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$ folgt, daß $z \in \Omega$ ist. Da

$$(z,1) = \tfrac{1}{\omega_2}\cdot(\omega_1,\omega_2)$$

ist, gilt nach dem oben Gezeigten: Wenn ϕ der Drinfeld-Modul zum Gitter $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$ ist, mit

$$\phi_T = T\cdot\tau^0 + g(\omega_1,\omega_2)\cdot\tau + \Delta(\omega_1,\omega_2)\cdot\tau^2$$

und $\tilde{\phi}$ der Drinfeld-Modul zum Gitter $\Lambda_{z,1}$ mit

$$\tilde{\phi}_T = T\cdot\tau^0 + \tilde{g}(z)\cdot\tau + \tilde{\Delta}(z)\cdot\tau^2,$$

so gilt

$$\tilde{g}(\tfrac{\omega_1}{\omega_2}) = \left(\tfrac{1}{\omega_2}\right)^{1-q}\cdot g(\omega_1,\omega_2)$$

und

$$\tilde{\Delta}(\tfrac{\omega_1}{\omega_2}) = \left(\tfrac{1}{\omega_2}\right)^{1-q^2}\cdot\Delta(\omega_1,\omega_2).$$

Wir schreiben im folgenden g statt $\tilde{g}$, Δ statt $\tilde{\Delta}$ und ϕ statt $\tilde{\phi}$, so daß ϕ der Drinfeld-Modul zum Gitter $\Lambda_{z,1}$ mit $z \in \Omega$ ist, der durch

$$\phi_T = T\cdot\tau^0 + g(z)\cdot\tau + \Delta(z)\cdot\tau^2$$

gegeben ist. Somit sind g und Δ Funktionen von Ω nach C.
Entsprechend ist

$$E_k(\Lambda_{\omega_1,\omega_2})) = \tfrac{1}{\omega_2^k} \cdot E_k(\Lambda_{\frac{\omega_1}{\omega_2},1}),$$

und wir definieren $E_k(z) = E_k(\Lambda_{z,1})$ für $z \in \Omega$.

Definition 1.4.1 *Sei für ein A-Gitter Λ vom Rang zwei der zugehörige Drinfeld-Modul durch $\phi_T = T \cdot \tau^0 + g \cdot \tau + \Delta \cdot \tau^2$ gegeben. Wir definieren die j-Invariante des Gitters Λ durch*

$$j(\Lambda) = \tfrac{g^{q+1}}{\Delta}.$$

Man sieht nun unmittelbar, daß $j(\Lambda) = j(\lambda \cdot \Lambda)$ für $\lambda \in C^*$ ist. Wir können also j für Äquivalenzklassen von Gittern, die vom Rang 2 sind, definieren.
Für die Gruppe $\Gamma = GL(2, A)$ sei $\Gamma \backslash \Omega$ der topologische Raum aller Äquivalenzklassen in Ω, unter der Äquivalenzrelation, die durch Γ definiert wird (siehe Abschnitt 1.1). Dann definiert j einen Isomorphismus von $\Gamma \backslash \Omega$ auf C.

Wir werden nun Modulformen auf Ω definieren. Dazu müssen wir wissen, wann eine Funktion auf Ω holomorph ist. Da wir diese Eigenschaft nicht weiter benötigen werden, wollen wir lediglich eine grobe Vorstellung dieses Begriffs geben. Eine detaillierte Darstellung findet man in [4] und [7].
Wichtig ist, daß für in diesem Sinne holomorphe Funktionen $f : \Omega \to C$ der Identitätssatz gilt: Verschwindet f in der Umgebung von $z \in \Omega$, so verschwindet f identisch auf Ω.
Fordert man für die Definition einer holomorphen Funktion f lediglich, daß f lokal durch eine Potenzreihe dargestellt wird, so ist dies nicht ausreichend. Aufgrund der starken Dreiecksungleichung würde dann z.B. auch die Indikatorfunktion der Menge $\{z \in C : |z| = q^{\frac{1}{2}}\}$ holomorph sein. Deshalb definiert man auf Ω eine rigid-analytische Struktur. Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in K_\infty$ sei

$$D_{(n,x)} := \{z \in C : |\pi|^{n+1} \leq |z - x| \leq |\pi|^n, \ |z - x|_i = |z - x|\}.$$

Die Bedingung an $|z - x|_i$ gewährleistet, daß $D_{(n,x)}$ eine Teilmenge von Ω ist. Die Mengen $D_{n,x}$ bilden eine Überdeckung von Ω. Eine Funktion f auf $D_{(n,x)}$ heißt holomorph, wenn es eine Folge von rationalen Funktionen auf C ohne Pole in $D_{(n,x)}$ gibt, die auf $D_{(n,x)}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Eine auf Ω holomorphe Funktion ist eine Funktion, deren Einschränkungen auf die Mengen $D_{(n,x)}$ holomorph sind.
Man könnte analog zu der hier gegebenen Definition die Holomorphie im Komlexen für eine Funktion definieren, die auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert ist. Der Satz von Runge besagt, daß eine Funktion, die im gewöhnlichen Sinn holomorph ist, auch nach der neuen Definition holomorph ist.

Definition 1.4.2 *Eine Funktion $f : \Omega \to C$ heißt Modulform vom Gewicht k und Typ m (wobei $k \geq 0$ eine ganze Zahl und $m \in \{0, \dots, q-2\}$ ist), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Wenn $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = GL(2, A)$, so ist $f(\gamma \cdot z) = (det\gamma)^{-m}(cz+d)^k f(z)$;

(ii) f ist holomorph;

(iii) f ist holomorph in ∞.

Bei der Definition der Holomorphie einer Funktion $f : \Omega \to C$ im Punkt ∞ läßt man sich vom komplexen Fall leiten:
Sei $c > 0$. Im komplexen Fall bezeichnen wir die Menge der Elemente, deren Imaginärteil größer als c ist, mit H_c. Im Funktionenkörperfall bezeichnen wir die Menge der Elemente, deren Imaginärbetrag größer als c ist mit Ω_c.
Betrachten wir zunächst den komplexen Fall: Für eine komplexe Modulform f gilt $f(z) = f(z+1)$. Aufgrund dieser Eigenschaft seien z_1, $z_2 \in H_c$ äquivalent, wenn ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 = z_2 + n$ existiert. Die Menge der so entstehenden Äquivalenzklassen nennen wir $\mathbb{Z} \backslash H_c$. Die Abbildung $z \longmapsto e^{2\pi i \cdot z}$ ist eine Bijektion von $\mathbb{Z} \backslash H_c$ auf eine offene punktierte Kreisscheibe $B_r \backslash \{0\}$. Wenn nun f eine Darstellung $f(z) = \tilde{f}(e^{2\pi i \cdot z})$ hat, wobei $\tilde{f} = \sum a_i \cdot X^i$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist, so heißt f holomorph in ∞.
Im Funktionenkörperfall folgt nun aus (i) die Eigenschaft $f(z) = f(z+b)$ für $b \in A$. Entsprechend dieser Eigenschaft gehen wir von der Menge $A \backslash \Omega_c$ aus. Für den Funktionenkörperfall gibt die Funktion $t = e_L(z)^{-1}$ eine Bijektion zwischen $A \backslash \Omega_c$ und einer punktierten Kugel $B_r \backslash \{0\}$ an. f heißt dann analog wie im komplexen Fall holomorph, wenn f eine Darstellung $f(z) = \tilde{f}(t(z))$ hat, wobei $\tilde{f} = \sum a_i \cdot X^i$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist.

Folgerung 1.4.3 *Die Modulformen vom Gewicht k, mit $k \not\equiv 0 \,(mod\, q-1)$ verschwinden identisch.*

Beweis: Sei $f(z)$ eine solche Modulform und a eine Primitivwurzel in $\mathbb{F}_q$. Für

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ist $f(\gamma z) = f(z)$. Aus Eigenschaft (i) folgt

$$(1 - a^{k-2m}) \cdot f(z) = 0.$$

Da $1 - a^{k-2m} \neq 0$ ist, muß also $f(z) = 0$ sein. □

Die Modulformen vom Gewicht k und Typ m bilden einen C-Vektorraum, den wir mit M_k^m bezeichnen. Aus $M_k^m \cdot M_{k'}^{m'} \subset M_{k+k'}^{m+m'}$ folgern wir, daß

$$M = \bigoplus_{k,m} M_k^m \text{ und } M^0 = \bigoplus_k M_k^0$$

graduierte C-Algebren sind.

Beispiele 1.4.4

Wir kennen bereits einige Modulformen:

(i) Die Eisenstein-Reihen

$$E_k(z) = \sum_{\substack{a,b \in A \\ (a,b) \neq 0}} \frac{1}{(az+b)^k}$$

sind Modulformen vom Gewicht k und Typ 0.

Beweis von Eigenschaft (i):

Für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,A)$ und $E_k(z) = \sum'_{e,f \in A} \frac{1}{(ez+f)^k}$ ist

$$\begin{aligned} E_k(\gamma \cdot z) &= \sum_{e,f \in A}{}' \frac{1}{\left(e \cdot \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + f\right)^k} \\ &= (cz+d)^k \cdot \sum_{e,f \in A}{}' \frac{1}{((ea+fc) \cdot z + (eb+fd))^k}. \end{aligned}$$

Da γ in $GL(2,A)$ liegt, hat die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{f} \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung (e,f) in $A \times A$. Daraus folgt (i).
Auf die Holomorphie der Eisenstein-Reihen wollen wir hier nicht weiter eingehen. Eigenschaft (iii) werden wir in Abschnitt 1.6 zeigen.

(ii) Aus Formel (1.5) folgt für a=T und k=1 bzw. k=2, daß

$$\begin{aligned} g(z) &= [1] \cdot E_{q-1}(z), \\ \Delta(z) &= [2] \cdot E_{q^2-1} + [1]^q \cdot (E_{q-1})^{q+1} \end{aligned}$$

ist. Also sind g bzw. Δ Modulformen vom Gewicht $q-1$ bzw. q^2-1. Entsprechend folgern wir allgemein für $a \in A$ und Drinfeld-Moduln ϕ vom Rang 2 mit $\phi_a = \sum l_i(a,z)\tau^i$, daß die die Koeffizienten $l_i(a,z)$ Modulformen vom Gewicht $q^i - 1$ sind.

Die Bedeutung der Elemente g und Δ für die C-Algebra M^0 ergibt sich aus folgendem Satz, dessen Beweis in [9] zu finden ist.

Satz 1.4.5 *Es gilt $M^0 = C[g, \Delta]$.*

1.5 Goss-Polynome

Die q-Entwicklung der Eisenstein-Reihen $E_k(z)$ im komplexen Fall hat die Form

$$E_k(z) = c_1(k) + c_2(k) \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{k-1}(n) \cdot q^n,$$

wobei $q = e^{2\pi i \cdot z}$ und $c_1(k), c_2(k)$ Konstanten sind. Dieser Ausdruck wird mit Hilfe der Formel

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geq 1} n^{k-1} \cdot q^n \qquad (*)$$

hergeleitet, die für $k \geq 2$ gilt.
Wir suchen eine analoge Darstellung der Eisenstein-Reihen im Funktionenkörperfall. In Analogie zu $(*)$ leiten wir nun eine Darstellung der Reihe

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z+\lambda)^k}$$

her, wobei Λ ein $\mathbb{F}_q$-Gitter in C ist. Diese Reihe bezeichnen wir mit $S_{k,\Lambda}$. Wie Goss zeigte, gibt es Polynome $G_{k,\Lambda}$ vom Grad k, derart, daß

$$S_{k,\Lambda} = G_{k,\Lambda}(t_\Lambda)$$

ist, wobei $t_\Lambda = S_{1,\Lambda} = e_\Lambda(z)^{-1}$ eine meromorphe Funktion über C ist. Wählt man $\Lambda = L$, so ist für $E_k(z)$, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, $t = t_L(z)$ ein Analogon zu $e^{2\pi i \cdot z}$ im klassischen Fall. Wir leiten nun diese Goss-Polynome her:

Zunächst nehmen wir an, daß Λ ein endliches $\mathbb{F}_q$-Gitter der Dimension m ist.
Wir suchen ein Polynom $f(X)$, das gerade die Nullstellenmenge $\{\frac{1}{(z+\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda\}$ hat. Hierbei ist z transzendent über C und $f(X)$ ein Polynom in $C(z)[X]$.

Das Polynom $e(X-z) = e(X) - e(z)$ mit

$$e(X) = e_\Lambda(X) = X \cdot \prod_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} (1 - \frac{X}{\lambda}) = \sum_{i \leq m} \alpha_i \cdot X^{q^i}$$

hat die Nullstellenmenge $\{z + \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Das Polynom $\tilde{f}(X) = e(X^{-1} - z) \cdot X^{q^m}$ in $C(z)[X]$ hat dann die Nullstellenmenge $\{\frac{1}{(z+\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Wegen $\alpha_0 = 1$ ist der führende Koeffizient von $\tilde{f}(X)$ gleich $-e(z)$, so daß

$$\begin{aligned} f(X) &= -e^{-1}(z) \cdot e(X^{-1} - z) \cdot X^{q^m} \\ &= X^{q^m} - \sum_{0 \leq i \leq m} t_\Lambda \cdot \alpha_i \cdot X^{q^m - q^i} \end{aligned}$$

ein normiertes Polynom mit der Nullstellenmenge $\{\frac{1}{(z+\lambda)} \mid \lambda \in \Lambda\}$ ist.

Wir benötigen nun die Newtonschen Formeln für Potenzsummen der Nullstellen eines Polynoms:

Satz 1.5.1 *Sei*

$$f(X) = X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot X + a_0$$

ein normiertes Polynom über einem beliebigen Körper.

Weiter seien $\alpha_1, ..., \alpha_n$ die Nullstellen von $f(X)$ in einem Erweiterungskörper.

Wir definieren $S_k = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^k$ für $k = 1, 2, ...$

Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} S_k + a_1 \cdot S_{k-1} + ... + a_{k-1} \cdot S_1 + k \cdot a_k &= 0 \qquad (k \leq n) \\ S_k + a_1 \cdot S_{k-1} + ... + a_n \cdot S_{k-n} &= 0 \qquad (k \geq n). \end{aligned}$$

Den Satz wenden wir nun auf das obige Polynom $f(X)$ an. Wir erhalten dann für $k \geq 2$

$$S_{k,\Lambda} = t_\Lambda \cdot (S_{k-1,\Lambda} + \alpha_1 \cdot S_{k-q,\Lambda} + \alpha_2 \cdot S_{k-q^2,\Lambda} + \ldots).$$

Für $k \geq n$ folgt die Gleichung unmittelbar aus der Newtonschen Formel.
Wenn $k < n$ ist, so ist das Glied $k \cdot a_k$ zu untersuchen:
Falls $k = q^m - q^i$ und $i > 0$ ist, so folgt $k \equiv 0 \, mod \, q$, und die Behauptung ist klar. Wenn $k = q^m - 1$, d.h. $i = 0$ ist, so müssen wir also $(q^m - 1) \cdot a_{q^m-1}$ betrachten, wobei a_{q^m-1} der Koeffizient von X in $f(X)$ ist. Dieser Koeffizient ist aber 0, weil die Potenz mit dem kleinsten positiven Exponenten in $f(X)$ gerade $q^m - q^{m-1} = q^{m-1} \cdot (q-1)$ ist; diese Zahl ist aber größer als 1, außer wenn $m = 1$ und $q = 2$ ist. In diesem Fall ist dann aber $k = 2^1 - 1 = 1$.

Wir haben also eine Rekursionsformel der

$$S_k = S_{k,\Lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z+\lambda)^k}$$

hergeleitet. Für unendliche Gitter Λ definieren wir $S_{k,\Lambda}$ genauso. Aufgrund dieser Betrachtungen definieren wir nun die Goss-Polynome:

Definition 1.5.2 *Für ein beliebiges Gitter Λ sind die Goss-Polynome $G_{k,\Lambda}(X) \in C[X]$ für $k \geq 1$ in folgender Weise rekursiv definiert:*

$$G_{1,\Lambda}(X) = X,$$

$$G_{k,\Lambda}(X) = X \cdot (G_{k-1,\Lambda} + \alpha_1 \cdot G_{k-q,\Lambda} + ... + \alpha_i \cdot G_{k-q^i,\Lambda} + ...) \quad (k - q^i \geq 0) \quad \text{für } k \geq 2,$$

wobei $e_\Lambda(z) = \sum\limits_{i \geq 0} \alpha_i \cdot z^{q^i}$ ist.

Satz 1.5.3 $G_{k,\Lambda}(t_\Lambda) = S_{k,\Lambda}$.

Beweis: Für endliche Gitter folgt dies direkt aus der Rekursionsgleichung für die $S_{k,\Lambda}$. Für unendliche Gitter Λ werden wir hier lediglich den Beweis skizzieren: Sei (Λ_i) eine monoton wachsende Folge endlicher Gitter, so daß $\Lambda = \bigcup \Lambda_i$ und seien $e_i, t_i, S_{k,i}, G_{k,i}$ die zu Λ_i zugehörigen Funktionen.
Man kann nun folgendes zeigen:

(i) $e_i \longrightarrow e_\Lambda$ lokal gleichmäßig als Funktion auf C.

(ii) $S_{k,i} \longrightarrow S_{k,\Lambda}$ gleichmäßig auf abgeschlossenen Kugeln, die zu Λ disjunkt sind.

Daraus folgt wiederum die koeffizientenweise Konvergenz der $G_{k,i}$ gegen das Polynom $G_{k,\Lambda}$. Da $S_{k,i} = G_{k,i}(t)$, folgt nun $S_{k,\Lambda} = G_{k,\Lambda}(t_\Lambda)$. □

Später werden für uns die Goss-Polynome G_k mit $k = q^j - 1$ von besonderem Interesse sein. Dabei werden wir von folgendem Satz Gebrauch machen:

Satz 1.5.4 *Sei Λ ein $\mathbb{F}_q$-Gitter in C mit der bereits definierten Logarithmusfunktion $log_\Lambda(z) = \sum \beta_i \cdot z^{q^i}$. Sei nun k von der Form $k = q^j - 1$. Dann gilt*

$$G_{k,\Lambda}(X) = \sum_{i<j} \beta_i \cdot X^{q^j - q^i}$$

Beweis: $G_{k,\Lambda}$ ist vom Grad k, so daß $G_{k,\Lambda}(X^{-1}) \cdot X^{k+1}$ ein Polynom in X ist. Die Gleichung

$$G_{k,\Lambda}(X) = \sum_{i<j} \beta_i \cdot X^{q^j - q^i}$$

ist äquivalent zu

$$G_{k,\Lambda}(X^{-1}) = \sum_{i<j} \beta_i \cdot X^{q^i - q^j}.$$

Diese Gleichung ist wiederum äquivalent zu

$$G_{k,\Lambda}(X^{-1}) \cdot X^{q^j} \quad = \quad \sum_{i<j} \beta_i \cdot X^{q^i}.$$

Wir definieren nun

$$P(X) = G_{k,\Lambda}(X^{-1}) \cdot X^{q^j} \qquad \text{und} \qquad Q(X) = \sum_{i<j} \beta_i \cdot X^{q^i}.$$

Es ist also $P(X) = Q(X)$ zu beweisen: $P(X)$ und $Q(X)$ haben beide einen Grad der kleiner als q^j ist. Wir zeigen nun zuerst, daß $P(e(z))$ und $Q(e(z))$ als Potenzreihen in z bis zur Ordnung $q^j - 1$ übereinstimmen. Dabei ist $e = e_\Lambda$ wie üblich die Gitterfunktion von Λ:

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
P(e(z)) &= G_{k,\Lambda}(e^{-1}(z)) \cdot e^{q^j}(z) \\
&= e^{q^j}(z) \cdot S_{k,\Lambda}(z) \\
&= e^{q^j}(z) \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda} (z-\lambda)^{1-q^j} \\
&= e^{q^j}(z) \cdot (z^{1-q^j} + \sum{}' (z-\lambda)^{1-q^j}).
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
e^{q^j}(z) &= (z + \alpha_1 \cdot z^q + o(z^q))^{q^j} \\
&= z^{q^j} + {\alpha_1}^{q^j} \cdot z^{q^{j+1}} + o(z^{q^{j+1}}).
\end{aligned}$$

Da $q^{j+1} \cdot (1 - q^j) = q^j \cdot (q-1) + 1 > q^j$ gilt, ist also

$$e^{q^j}(z) \cdot z^{1-q^j} = z + o(z^{q^j}).$$

Nun ist für $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}
(z-\lambda)^{1-q^j} &= (z-\lambda) \cdot \frac{1}{(z-\lambda)^{q^j}} \\
&= (z-\lambda) \cdot \frac{1}{z^{q^j} - \lambda^{q^j}} \\
&= (z-\lambda) \cdot \frac{1}{-\lambda^{q^j} \cdot \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{q^j}\right)} \\
&= (z-\lambda) \cdot \left(\frac{1}{-\lambda^{q^j}}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{q^j} + \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2 \cdot q^j} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

Wir sehen also, daß alle Summanden von $\sum'(z-\lambda)^{1-q^j}$ sich in Potenzreihen von z mit lauter nicht negativen Exponenten entwickeln lassen.

Insegesamt ergibt sich also

$$P(e(z)) = z + o\,(z^{q^j}).$$

Auf der anderen Seite ist

$$Q(e(z)) = \sum_{i<j} \beta_i \cdot (e(z))^{q^i}.$$

Da nun $log_\Lambda(z) = \sum \beta_i \cdot z^{q^i}$ das Inverse von $e_\Lambda(z)$ ist, ist dann $Q(e(z))$ ebenfalls von der Form

$$Q(e(z)) = z + o\,(z^{q^j}).$$

$P(e(z))$ und $Q(e(z))$ stimmen also tatsächlich als Potenzreihen in z bis zur Ordnung $q^j - 1$ überein.

Daraus folgt auch schon, daß $P(X) = Q(X)$ sein muß:

Sei

$$P(X) = \sum_{i=0}^{q^j-1} \gamma_i \cdot X^i \text{ und } Q(X) = \sum_{i=0}^{q^j-1} \beta_i \cdot X^i.$$

Wäre nun $P(X) \neq Q(X)$, so gäbe es ein i_0 mit $0 \leq i_0 \leq q^j - 1$, so daß

$$\gamma_i = \beta_i \text{ für } i < i_0 \text{ und } \gamma_{i_0} \neq \beta_{i_0}.$$

Nun ist $P(e(z)) = \sum \gamma_i \cdot (z + ...)^i$. Der Koeffizient z^{i_0} in $P(e(z))$ ist dann

$$\gamma_0 \cdot c_0 + ... + \gamma_{i_0-1} \cdot c_{i_0-1} + \gamma_{i_0},$$

wobei $c_0, ..., c_{i_0-1}$ irgendwelche Elemente sind, die von $\alpha_1, \alpha_2, ...$ abhängen.
Entsprechend ist der Koeffizient z^{i_0} in $Q(e(z))$ dann

$$\beta_0 \cdot c_0 + ... + \beta_{i_0-1} \cdot c_{i_0-1} + \beta_{i_0}$$

wobei $c_0, ..., c_{i_0-1}$ die schon genannten Elemente sind.
Aus $\gamma_{i_0} \neq \beta_{i_0}$ würde dann folgen

$$\gamma_0 \cdot c_0 + ... + \gamma_{i_0-1} \cdot c_{i_0-1} + \gamma_{i_0} \neq \beta_0 \cdot c_0 + ... + \beta_{i_0-1} \cdot c_{i_0-1} + \beta_{i_0}.$$

Also wären die Koeffizienten von z^{i_0} in $P(e(z))$ und $Q(e(z))$ voneinander verschieden. Da $i_0 \leq q^j - 1$ wäre dies ein Widerspruch zu dem vorher Gezeigten. $\square$

1.6 t-Entwicklungen

Wir werden in diesem Abschnitt zuerst die schon mehrfach erwähnte t-Darstellung der Eisenstein-Reihen $E_k(z)$ herleiten. Mit Hilfe der aus den einzelnen Abschnitten gewonnenen Ergebnisse werden wir anschließend eine Rekursionsgleichung der $E_k(z)$ für den Fall $k = q^i - 1$ angeben.

Sei für $a \in A$

$$t_a(z) = t(az) = (e_L(\bar{\pi}az))^{-1}.$$

Für $0 \neq a \in A$ definieren wir $f_a(Z) \in A[Z]$ durch

$$f_a(Z) = \rho_a(Z^{-1}) \cdot Z^{|a|},$$

wobei ρ der in Abschnitt 1.3 definierte Carlitz-Modul ist. Das Polynom $f_a(Z)$ ist vom Grad $|a| - 1$. Ist nun

$$a = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i T^i \qquad (a_m \neq 0),$$

so hat $f_a(Z)$ als konstanten Koeffizienten a_m. Die Funktionalgleichung (1.1) für $\Lambda = L = \bar{\pi}A$ lautet

$$e_L(az) = \rho_a(e_L(z)).$$

Damit folgern wir nun

$$\begin{aligned} t_a(z) &= t(az) \\ &= (e_L(\bar{\pi}az))^{-1} \\ &= (\rho_a(e_L(\bar{\pi}z)))^{-1} \\ &= \rho(t^{-1})^{-1} \\ &= \frac{t^{|a|}}{f_a(t)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Das Polynom f_a hat als konstanten Koeffizienten ein Element aus $\mathbb{F}_q^*$ und ist somit invertierbar im Ring $A[[t]]$ der formalen Potenzreihen in t. Somit können wir also $t_a(z)$ als Potenzreihe in t mit Koeffizienten in A darstellen.

Für $k \not\equiv 0 \, mod \, (q-1)$ ist nach 1.4.3 die Eisenstein-Reihe $E_k(z) = 0$. Sei also im folgenden immer $k \equiv 0 \, mod \, (q-1)$. Wir schreiben statt $\sum_{\substack{b \in A \\ b \neq 0}}$ kurz $\sum_{b \in A}'$. Es gilt

$$E_k(z) = \sum_{b \in A}' \frac{1}{b^k} + \sum_{a \in A}' \sum_{b \in A} \frac{1}{(az+b)^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{b\in A}{}' \frac{1}{b^k} + \sum_{a\,norm.} \sum_{b\in A} \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \frac{1}{(\alpha a z + b)^k} \\
&= \sum_{b\in A}{}' \frac{1}{b^k} + \sum_{a\,norm.} \sum_{b\in A} \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \frac{1}{\alpha^k} \cdot \frac{1}{(az + \alpha^{-1}b)^k} \\
&= \sum_{b\in A}{}' \frac{1}{b^k} + \sum_{a\,norm.} \sum_{b\in A} \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \frac{1}{(az + \alpha^{-1}b)^k} \\
&= \sum_{b\in A}{}' \frac{1}{b^k} + \sum_{a\,norm.} \sum_{b\in A} \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \frac{1}{(az + b)^k} \\
&= \sum_{b\in A}{}' \frac{1}{b^k} + \sum_{a\,norm.} \sum_{b\in A} \frac{q-1}{(az + b)^k} \\
&= \sum_{b\in A}{}' \frac{1}{b^k} - \sum_{a\,norm.} \sum_{b\in A} \frac{1}{(az + b)^k} \\
&= \sum_{b\in A}{}' \frac{1}{b^k} - \bar{\pi}^k \sum_{a\,norm.} \sum_{b\in A} \frac{1}{(\bar{\pi} a z + \bar{\pi} b)^k} \\
&= \bar{\pi}^k E_k(L) - \bar{\pi}^k \sum_{a\,norm.} G_k(t_a).
\end{aligned}$$

Dabei ist $G_k(x) = G_{k,L}(x)$. Es gilt also

$$\frac{1}{\bar{\pi}^k} E_k(z) = E_k(L) - \sum_{a\,norm.} G_k(t_a). \tag{1.7}$$

Wir wissen, daß $e_L(z)$ Koeffizienten in K hat. Also ist $z(e_L(z))^{-1}$ in der Form $\sum a_i z^i$, mit $a_i \in K$ darstellbar. Nach Formel (1.3) aus Abschnitt 1.2 gilt

$$z(e_L(z))^{-1} = 1 - \sum_{k\geq 1} E_k(L) \cdot z^k.$$

Also liegt $E_k(L)$ in K. Aus der rekursiven Definition der $G_{k,L}$ und Formel (1.6) folgern wir, daß die Ausdrücke $G_k(t_a)$ in $K[[t]]$ liegen. Da in der t-Entwicklung von t_a alle Exponenten größer als $|a|$ sind, gibt es also zu jedem festen Exponenten i nur eine endliche Anzahl von $a \in A$, so daß $G_k(t_a)$ Terme t^i mit Exponenten i enthält. $\bar{\pi}^{-k} E_k(z)$ hat also eine t-Entwicklung mit Koeffizienten in K.

Beispiele 1.6.1

$$\bar{\pi}^{1-q} \cdot E_{q-1} = \frac{1}{L_1} - \sum_{a\,normiert} t_a^{q-1}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\pi}^{1-q} \cdot E_{q^2-1} &= -\frac{1}{L_2} - \sum_{a\, normiert} (t_a^{q^2-1} - \frac{1}{L_1} t_a^{q^2-q}) \\
\bar{\pi}^{1-q} \cdot E_{q^3-1} &= \frac{1}{L_3} - \sum_{a\, normiert} (t_a^{q^3-1} - \frac{1}{L_1} t_a^{q^3-q} + \frac{1}{L_2} t_a^{q^3-q^2}).
\end{aligned}
$$

Die t-Entwicklungen von g bzw. Δ erhalten wir nach 1.4.4 (ii) durch die t-Entwicklungen von E_{q-1} bzw. E_{q-1} und E_{q^2-1}. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
g_{neu} &= \bar{\pi}^{1-q} g_{alt} \\
\Delta_{neu} &= \bar{\pi}^{1-q^2} \Delta_{alt}.
\end{aligned}
$$

Mit dieser neuen Normierung haben die t-Entwicklungen von g und Δ Koeffizienten in A. Wegen $g = 1 + \ldots$, $\Delta = -t^{q-1} + \ldots$ und Satz 1.4.5 folgt:

Satz 1.6.2 *Bezeichnen wir mit $M^0(A)$ die A-Algebra der Modulformen mit Koeffizienten in A, so gilt $M^0 = A[g, \Delta]$.*

Wir definieren nun für $k \geq 0$

$$
g_k = (-1)^{k+1} \cdot \bar{\pi}^{1-q^k} \cdot L_k \cdot E_{q^k-1}
$$

entweder als Modulform oder als Potenzreihe in t.

Satz 1.6.3 *Für die Eisenstein-Reihen g_k gilt*

(i) $g_k = 1 + \ldots$

(ii) g_k *hat Koeffizienten in A.*

(iii) $g_0 = 1$, $g_1 = g$,
$g_k = -[k-1] \cdot g_{k-2} \cdot \Delta^{q^{k-2}} + g_{k-1} \cdot g^{q^{k-1}}$ *für* $k \geq 2$.

Beweis:

(i) Aus Formel (1.4) in Abschnitt 1.2 und Satz 1.3.2 folgt $E_{q^k-1}(L) = \frac{(-1)^{k+1}}{L_k}$ und damit aus Formel (1.7) und der Definition der g_k die Behauptung.

(ii) Nach Satz 1.5.4 und Satz 1.3.2 hat G_{q^k-1} die Koeffizienten $\pm L_i^{-1}$, wobei $i = 0, \ldots, k-1$. Aus Formel (1.7) und aus der Definition der g_k folgt, daß die Koeffizienten in A liegen.

(iii) Aus der in Abschitt 1.2 bewiesenen Formel (1.5) erhalten wir für $a = T$ und

$$
\phi_T = T \cdot \tau^0 + \bar{\pi}^{q-1} g \cdot \tau + \bar{\pi}^{q^2-1} \Delta \cdot \tau^2
$$

die Gleichung

$$T \cdot E_{q^k-1} = E_{q^k-1} \cdot T^{q^k} + E_{q^{k-1}-1} \cdot (\bar{\pi}^{q-1} g)^{q^{k-1}} + E_{q^{k-2}-1} \cdot (\Delta \bar{\pi}^{q^2-1})^{q^{k-2}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\bar{\pi}^{q^k-1}} \cdot E_{q^k-1} = -\frac{1}{[k]} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\pi}^{q^{k-1}-1}} E_{q^{k-1}-1} \cdot g^{q^{k-1}} + \frac{1}{\bar{\pi}^{q^{k-2}-1}} E_{q^{k-2}-1} \cdot \Delta^{q^{k-2}} \right).$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $(-1)^{k+1} L_k$ so erhalten wir

$$\frac{(-1)^{k+1} L_k}{\bar{\pi}^{q^k-1}} \cdot E_{q^k-1} = \frac{(-1)^k L_{k-1}}{\bar{\pi}^{q^{k-1}-1}} E_{q^{k-1}-1} \cdot g^{q^{k-1}} - [k-1] \frac{(-1)^{k-1} L_{k-2}}{\bar{\pi}^{q^{k-2}-1}} E_{q^{k-2}-1} \cdot \Delta^{q^{k-2}}.$$

Aus der Definition der g_k folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 2

Die Polynome ϕ_k

Um die Nullstellen der Eisenstein-Reihen $g_k(z)$ besser untersuchen zu können, konstruieren wir mit Hilfe der Rekursionsgleichung für die $g_k(z)$ Polynome ϕ_k, die ebenfalls rekursiv definiert werden. Für diese Polynome ϕ_k werden wir dann einige Eigenschaften beweisen. Insbesondere werden wir in Abschnitt 1.3 eine Verbindung zwischen den Nullstellen der ϕ_k und den sogenannten supersingulären j-Invarianten herleiten.

2.1 Herleitung der Polynome ϕ_k

Definition 2.1.1 *Die Polynome $A_k(X,Y) \in A[X,Y]$ sind wie folgt rekursiv definiert:*

$$\begin{aligned} A_0(X,Y) &= 1, \quad A_1(X,Y) \quad = \quad X, \\ A_k(X,Y) &= A_{k-1}(X,Y) \cdot X^{q^{k-1}} - [k-1] \cdot A_{k-2}(X,Y) \cdot Y^{q^{k-2}} \text{ für } k \geq 2. \end{aligned}$$

Wir haben die Polynome A_k gerade so definiert, daß $A_k(g, \Delta) = g_k$ gilt. Ist $z \in \Omega$ eine Nullstelle von g_k und $\gamma \in GL(2,A)$, so folgt aus der Tatsache, daß g_k eine Modulform ist, daß auch $\gamma(z)$ eine Nullstelle ist. Es ist also natürlich, die Elemente $\bar{z}$ in $\Gamma \backslash \Omega$ zu betrachten, für die $g_k(z) = 0$ ist. In Abschnitt 1.4 haben wir gezeigt, daß die Abbildung

$$j : \Gamma \backslash \Omega \longrightarrow C \text{ mit } j(\bar{z}) = \tfrac{(g(z))^{q+1}}{\Delta(z)}$$

ein Isomorphismus ist. Statt der Nullstellen z von g_k in Ω können wir also auch die Elemente $j(\bar{z})$ in C untersuchen. Dies hat den Vorteil, daß wir Nullstellen in C von Polynomen ϕ_k betrachten können, die wir noch definieren werden, statt der Nullstellen der transzendenten Funktion g_k.
Wir haben in Kapitel 1 bereits gezeigt, daß die Eisenstein-Reihen g_k Modulformen vom Gewicht $q^k - 1$ und g bzw. Δ Modulformen vom Gewicht $q-1$ bzw. q^2-1

sind. Geben wir X das Gewicht $q-1$ und Y das Gewicht q^2-1, so folgt aus der Beziehung $A_k(g,\Delta)=g_k$, daß $A_k(X,Y)$ isobar vom Gewicht q^k-1 ist. Wenn nun $a\cdot X^iY^j$ und $b\cdot X^{i_1}Y^{j_1}$ Glieder von $A_k(X,Y)$ sind, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}(q-1)\cdot i+(q^2-1)\cdot j &= q^k-1,\\ (q-1)\cdot i_1+(q^2-1)\cdot j_1 &= q^k-1.\end{aligned}$$

Also ist

$$(q-1)\cdot(i_1-i)+(q^2-1)\cdot(j_1-j)=0.$$

Dann gilt

$$i_1-i=-(q+1)\cdot(j_1-j).$$

Damit folgern wir

$$b\cdot X^{(i_1-i)}Y^{(j_1-j)}=b\cdot X^{-(q+1)\cdot(j_1-j)}Y^{(j_1-j)}=b\cdot\left(\tfrac{X^{q+1}}{Y}\right)^{j-j_1}.$$

Sei nun X^iY^j das Glied in $A_k(X,Y)$, so daß für jedes andere Glied $X^{i_1}Y^{j_1}$ dann $j\geq j_1$ ist. Aus obiger Betrachtung folgt, daß $A_k(X,Y)\cdot X^{-i}Y^{-j}$ ein Polynom in $X^{q+1}Y^{-1}$ ist. Durch Induktion stellen wir fest, daß

$$X^iY^j=\begin{cases} Y^{\frac{q^k-1}{q^2-1}} & \text{wenn } k\equiv 0\, mod\, 2\\ XY^{\frac{q^k-q}{q^2-1}} & \text{wenn } k\equiv 1\, mod\, 2\end{cases}$$

ist.

Definition 2.1.2 *Wir definieren die Polynome $\phi_k(Z)\in A[Z]$ durch*

$$\phi_k\left(\tfrac{X^{q+1}}{Y}\right)=\begin{cases}\frac{A_k(X,Y)}{Y^{\frac{q^k-1}{q^2-1}}} & \textit{für } k\equiv 0\, mod\, 2\\[2ex] \frac{A_k(X,Y)}{X\cdot Y^{\frac{q^k-q}{q^2-1}}} & \textit{für } k\equiv 1\, mod\, 2.\end{cases}$$

Ist k gerade, so ist für $z\in\Omega$

$$g_k(z)=\phi_k(j(z))\cdot\Delta(z)^{\frac{q^k-1}{q^2-1}}.$$

Da $\Delta(z)$ der führende Koeffizient eines Drinfeld-Moduls vom Rang zwei ist, gilt also immer $\Delta(z)\neq 0$. Ein $z\in\Omega$ ist also genau dann Nullstelle von g_k, wenn $j(z)$ eine Nullstelle in C von $\phi_k(z)$ ist.
Ist k ungerade und $g(z)\neq 0$, so ist

$$g_k(z)=\phi_k(j(z))\cdot\Delta(z)^{\frac{q^k-q}{q^2-1}}\cdot g(z).$$

Wenn $g(z) \neq 0$ ist, gilt also wie im Fall k gerade, daß $z \in \Omega$ genau dann eine Nullstelle von g_k ist, wenn $j(z)$ eine Nullstelle in C von $\phi_k(z)$ ist. Bezüglich der Nullstellen von $g(z)$ verweisen wir auf [2], Lemma (1.3). Aus ihm folgt: Die Modulform g ist 0 genau an den elliptischen Punkten von Ω. Ein Punkt $e \in \Omega$ heißt dabei elliptisch, wenn es eine nichtdiagonale Matrix $\gamma \in GL(2, A)$ gibt, so daß $\gamma \cdot e = e$ ist.

Ist k ungerade, so teilt X das Polynom $A_k(X,Y)$, d.h. g ist ein Teiler von g_k. Für das Polynom $f(X,Y) = A_k(X,Y) \cdot X^{-1}$ ist dann $f(0,Y) = c \cdot Y^i$, wobei $c \neq 0$ und $i \geq 0$ ist. Für einen elliptischen Punkt e ist also $f(g(e), \Delta(e)) = c \cdot \Delta(e)^i \neq 0$. Ist k ungerade, so sind also die elliptischen Punkte einfache Nullstellen von g_k. Wir schließen aus dem oben Gesagten:

Satz 2.1.3

(*i*) *Ist* $k \equiv 0 \, mod \, 2$, *so gilt* $g_k(z) = 0$ *genau dann, wenn* $\phi_k(j(z)) = 0$ *ist.*

(*ii*) *Ist* $k \equiv 1 \, mod \, 2$ *und* z *ein nichtelliptischer Punkt von* Ω, *so gilt* $g_k(z) = 0$ *genau dann, wenn* $\phi_k(j(z)) = 0$ *ist.*

2.2 Eigenschaften der Polynome A_k und ϕ_k

Zunächst leiten wir aus der Rekursionsgleichung für die Polynome $A_k(X,Y)$ eine Rekursionsgleichung für die Polynome $\phi_k(Z)$ her.

Satz 2.2.1 *Für die Polynome* $\phi_k(Z)$ *gilt folgende Rekursion:*

$$\begin{aligned} \phi_0(Z) &= 1, \quad \phi_1(Z) = 1, \\ \phi_k(Z) &= Z^{a_k} \cdot \phi_{k-1}(Z) - [k-1] \cdot \phi_{k-2}(Z) \quad \textit{für } k \geq 2. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$a_k = \tfrac{q^{k-1}+(-1)^k}{q+1} = q^{k-2} - q^{k-3} + q^{k-4} - \ldots + (-1)^k.$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: Für $k = 0$ und $k = 1$ rechnet man die Behauptung nach.

Induktionsschritt $k-2, k-1 \longrightarrow k$:

(i) Sei $k \equiv 0 \, mod \, 2$:

$$\begin{aligned} \phi_k(Z) &= \frac{A_k(X,Y)}{Y^{\frac{q^k-1}{q^2-1}}} \\ &= \frac{A_{k-1}(X,Y) \cdot X^{q^{k-1}} - [k-1] \cdot A_{k-2}(X,Y) \cdot Y^{q^{k-2}}}{Y^{\frac{q^k-1}{q^2-1}}}. \end{aligned}$$

Nun gelten die Gleichungen

$$\tfrac{q^k-1}{q^2-1} = \tfrac{q^{k-2}-1}{q^2-1} + q^{k-2} \quad \text{und} \quad \tfrac{q^k-1}{q^2-1} = \tfrac{q^{k-1}+1}{q+1} + \tfrac{q^{k-1}-q}{q^2-1}.$$

Wir können also schreiben

$$\begin{aligned}
\phi_k(Z) &= \frac{X^{q^{k-1}+1}\cdot A_{k-1}(X,Y)}{X\cdot Y^{\frac{q^{k-1}+1}{q+1}+\frac{q^{k-1}-q}{q^2-1}}} - [k-1]\cdot\frac{A_{k-2}(X,Y)}{Y^{\frac{q^{k-2}-1}{q^2-1}}}\\
&= \left(\frac{X^{q+1}}{Y}\right)^{\frac{q^{k-1}+1}{q+1}}\cdot\frac{A_{k-1}(X,Y)}{X\cdot Y^{\frac{q^{k-1}-q}{q^2-1}}} - [k-1]\cdot\frac{A_{k-2}(X,Y)}{Y^{\frac{q^{k-2}-1}{q^2-1}}}\\
&= Z^{a_k}\cdot\phi_{k-1}(Z) - [k-1]\cdot\phi_{k-2}(Z).
\end{aligned}$$

(ii) Sei $k \equiv 1\, mod\, 2$:

$$\begin{aligned}
\phi_k(Z) &= \frac{A_k(X,Y)}{X\cdot Y^{\frac{q^k-q}{q^2-1}}}\\
&= \frac{A_{k-1}(X,Y)\cdot X^{q^{k-1}} - [k-1]\cdot A_{k-2}(X,Y)\cdot Y^{q^{k-2}}}{X\cdot Y^{\frac{q^k-q}{q^2-1}}}.
\end{aligned}$$

Aus

$$\tfrac{q^k-q}{q^2-1} = \tfrac{q^{k-2}-q}{q^2-1} + q^{k-2} \text{ und } \tfrac{q^k-q}{q^2-1} = \tfrac{q^{k-1}-1}{q+1} + \tfrac{q^{k-1}-1}{q^2-1}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\phi_k(Z) &= \left(\frac{X^{q+1}}{Y}\right)^{\frac{q^{k-1}-1}{q+1}}\cdot\frac{A_{k-1}(X,Y)}{Y^{\frac{q^{k-1}-1}{q^2-1}}} - [k-1]\cdot\frac{A_{k-2}(X,Y)}{XY^{\frac{q^{k-2}-q}{q^2-1}}}\\
&= Z^{a_k}\cdot\phi_{k-1}(Z) - [k-1]\cdot\phi_{k-2}(Z).
\end{aligned}$$

□

Beispiele 2.2.2

$$\begin{aligned}
\phi_2(Z) &= Z - [1]\\
\phi_3(Z) &= Z^q - [1]Z^{q-1} - [2]\\
\phi_4(Z) &= Z^{q^2+1} - [1]Z^{q^2} - [2]Z^{q^2-q+1} - [3]Z + [3][1]\\
\phi_5(Z) &= Z^{q^3+q} - [1]Z^{q^3+q-1} - [2]Z^{q^3} - [3]Z^{q^3-q^2+q} + [3][1]Z^{q^3-q^2+q-1} -\\
&\quad [4]Z^q + [4][1]Z^{q-1} + [4][2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_6(Z) &= Z^{q^4+q^2+1} - [1]Z^{q^4+q^2} - [2]Z^{q^4+q^2-q+1} - [3]Z^{q^4+1} + [3][1]Z^{q^4} - \\ &\quad [4]Z^{q^4-q^3+q^2+1} + [4][1]Z^{q^4-q^3+q^2} + [4][2]Z^{q^4-q^3+q^2-q+1} - [5]Z^{q^2+1} + \\ &\quad [5][1]Z^{q^2} + [5][2]Z^{q^2-q+1} + [5][3]Z - [5][3][1].\end{aligned}$$

Satz 2.2.3 *Für den Grad von ϕ_k gilt*

$$deg\,\phi_k = \begin{cases} \frac{1-q^k}{1-q^2} & falls\ k \equiv 0\,mod\,2 \\ \\ \frac{q-q^k}{1-q^2} & falls\ k \equiv 1\,mod\,2. \end{cases}$$

Beweis: Aus der Rekursion für ϕ_k folgt

$$deg\,\phi_k = deg\phi_{k-1} + \tfrac{q^{k-1}+(-1)^k}{q+1}.$$

Die Behauptung erfolgt dann durch Induktion über k. □

Satz 2.2.4 *Die Polynome ϕ_k sind separabel und irreduzibel über A.*

Beweis: In Kapitel 3 werden wir eine Formel für die Diskriminanten $Diskr(\phi_k)$ herleiten. Insbesondere ist für alle ϕ_k die Diskriminante ungleich Null. Daraus folgt die Seperabilität.
Die Irreduzibilität der Polynome ϕ_k hat G. Cornelissen bereits bewiesen. Den Beweis findet man in [3].

Satz 2.2.5 *Sei $\wp = (p)$ ein Primideal in $A = \mathbb{F}_q[T]$ vom Grad d. Dann gilt für $k \geq 0$*

$$A_{k+d} \equiv A_k^{q^d} \cdot A_d \,(mod\,\wp).$$

Beweis durch Induktion über k:

Induktionsanfang: Für $k = 0$ folgt die Behauptung direkt. Sei nun $k = 1$: Nach Definition ist

$$A_{1+d} = A_d \cdot A_1^{q^d} - [d] \cdot A_{d-1} \cdot Y^{q^{d-1}}.$$

Wir haben bereits gezeigt, daß $[d]$ gerade das Produkt aller normierten Primelemente in A ist, deren Grad d teilt. Also ist p ein Primteiler von $[d]$. Also gilt die Behauptung

$$A_{d+1} \equiv A_d \cdot A_1^{q^d} \,(mod\,\wp).$$

Induktionsschritt $k, k-1 \longrightarrow k+1$: Nach Definition ist

$$A_{k+d+1} = A_{k+d} \cdot X^{q^{d+k}} - [k+d] \cdot A_{k+d-1} \cdot Y^{q^{k+d-1}}.$$

Aus den Induktionsanahmen für A_{k+d} und A_{k+d-1} folgern wir

$$A_{k+d+1} \equiv A_k^{q^d} \cdot A_d \cdot X^{q^{d+k}} - [k+d] \cdot A_{k-1}^{q^d} \cdot A_d \cdot Y^{q^{d+k-1}} \, (mod \, \wp).$$

Nun ist

$$[k+d] - [d] = T^{q^{k+d}} - T - (T^{q^d} - T) = (T^{q^k} - T)^{q^d} = [k]^{q^d}.$$

Da $[d] \equiv 0 \, mod \, \wp$ ist, folgern wir

$$\begin{aligned}
A_{k+d+1} &\equiv (A_k^{q^d} \cdot X^{q^{d+k}} - ([k+d] - [d]) \cdot A_{k-1}^{q^d} \cdot Y^{q^{d+k-1}}) \cdot A_d \, (mod \, \wp) \\
&\equiv (A_k^{q^d} \cdot X^{q^{d+k}} - [k]^{q^d} \cdot A_{k-1}^{q^d} \cdot Y^{q^{d+k-1}}) \cdot A_d \, (mod \, \wp) \\
&\equiv (A_k \cdot X^{q^k} - [k] \cdot A_{k-1} \cdot Y^{q^{k-1}})^{q^d} \cdot A_d \, (mod \, \wp) \\
&\equiv A_{k+1}^{q^d} \cdot A_d \, (mod \, \wp).
\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.2.6 *Sei $\wp = (p)$ und $deg \, p = d$. Für $k \geq 0$ gilt*

$$\phi_k \equiv \begin{cases} \phi_k^{q^d} \cdot \phi_d \, (mod \, \wp) & \text{falls } k \text{ gerade} \\ Z^{a_{d+1}} \cdot \phi_k^{q^d} \cdot \phi_d \, (mod \, \wp) & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis: Aus Definition 2.1.2 und Satz 2.2.5 folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.2.7 *Ist $\wp$ ein Primideal vom Grad d, so ist für $k \geq 0$*

$$g_{k+d}(t) \equiv g_k(t^{q^d}) \, (mod \, \wp).$$

Beweis: Für $k \geq 0$ ist $g_k = A_k(g, \Delta)$. Also ist $g_{k+d} \equiv g_k^{q^d} \cdot g_d(\, mod \, \wp)$. Es ist $g_k^{q^d}(t) \equiv g_k(t^{q^d})(\, mod \, \wp)$. Das Goss-Polynom $G_{q^d-1,L}$ hat die Koeffizienten $\pm L_i{}^{-1}$, wobei $i < d$ ist. Aus Formel (1.7) in Abschnitt 1.6 und der Definition der g_k folgt dann $g_d \equiv 1 \, (mod \, \frac{L_d}{L_{d-1}})$, d.h. $g_d \equiv 1 \, (mod \, [d])$. Somit folgt die Behauptung. □

Hilfssatz 2.2.8 *(i) Sei R ein nullteilerfreier Ring und seien f, g, h Polynome in $R[X_1, \ldots, X_n]$. Ist f isobar bzgl. einer Gewichtsfunktion auf $\{X_1, \ldots, X_n\}$ und ist $f = g \cdot h$, so sind auch g, h isobar.*
(ii) Wir geben wie bisher X das Gewicht $q-1$ und Y das Gewicht q^2-1. Sei R ein Integritätsbereich und f ein isobares Polynom in $R[X, Y]$ von der Form $f(X, Y) = a \cdot X^n + \ldots$ $(a \neq 0)$. Weiter sei $X^i Y^j$ das Glied in f, so daß für alle anderen Glieder $X^{i_1} Y^{j_1}$ dann $j_1 < j$ gilt. Wir definieren $f^*(Z) \in R[Z]$ durch

$f^*(X^{q+1}\cdot Y^{-1}) = f(X,Y)\cdot X^{-i}\cdot Y^{-j}$. Dann ist f in $R[X,Y]$ genau dann quadratfrei, wenn $f^*(Z)$ quadratfrei in $R[Z]$ ist. Insbesondere ist also für ein Primideal $\wp$ in A das Polynom $A_k(X,Y) \,(mod\, \wp)$ in $(A/\wp)[X,Y]$ genau dann quadratfrei, wenn $\phi_k \,(mod\, \wp)$ in $(A/\wp)[Z]$ quadratfrei ist.

Beweis: (i) g und h haben Darstellungen der Form

$$g = \sum_{i=n_1}^{n_2} g_i \text{ und } h = \sum_{j=m_1}^{m_2} h_j,$$

wobei die Polynome g_i bzw. h_j isobar vom Gewicht i bzw. j sind. Das Produkt $g_i \cdot h_j$ hat dann das Gewicht $i+j$. Nun ist

$$f = g\cdot h = \sum_{k=n_1+m_1}^{n_2+m_2} (\sum_{i+j=k} f_i \cdot g_j) = g_{n_2}\cdot h_{m_2} + \sum_{n_1+m_1<k<n_2+m_2} (\sum_{i+j=k} f_i \cdot g_j) + g_{n_1}\cdot h_{m_1}.$$

Dann haben $g_{n_2}\cdot h_{m_2}$ das größte und $g_{n_1}\cdot h_{m_1}$ das kleinste Gewicht. Da f isobar ist, muß dann $n_2+m_2 = n_1+m_1$ sein. Also ist $m_2-m_1 = n_1-n_2$. Da $m_2-m_1 \geq 0$ und $n_1-n_2 \leq 0$ ist, folgt $m_2 = m_1$ und $n_1 = n_2$. Somit ist (i) bewiesen.
(ii) Wir zeigen zuerst, daß wenn f^* quadratfrei ist, dann auch f quadratfrei ist: Ist $f = f_1 \cdot f_2$ und f isobar, so sind nach (i) auch f_1, f_2 isobar. Wir können also f_1^* und f_2^* bilden. Seien $a\cdot X^{i_1}\cdot Y^{j_1}$ bzw. $b\cdot X^{i_2}\cdot Y^{j_2}$ die Glieder mit maximaler Y-Potenz in f_1 bzw. f_2 und $c\cdot X^i \cdot Y^j$ das entsprechende Glied für f. Es muß dann $(X^{i_1}\cdot Y^{j_1})\cdot(X^{i_2}\cdot Y^{j_2}) = X^i\cdot Y^j$ sein. Also ist $f^*(Z) = f_1^*(Z)\cdot f_2^*(Z)$. Wenn also $f(X,Y)$ isobar mit $f(X,Y) = f_1(X,Y)^2\cdot f_2(X,Y)$ ist , so ist $f^*(Z) = f_1^*(Z)^2\cdot f_2^*(Z)$.
Sei nun umgekehrt $f^*(Z) = f_1(Z)^2\cdot f_2(Z)$, wobei f_1 keine Einheit in R ist. Wenn $X^{i_0}\cdot Y^{j_0}$ das Glied mit maximaler Y-Potenz in $f(X,Y)$ ist, so gilt

$$f(X,Y) = X^{i_0}\cdot Y^{j_0}\cdot f_1(\tfrac{X^{q+1}}{Y})^2\cdot f_2(\tfrac{X^{q+1}}{Y}) \qquad (*)$$

Nun ist $f(X,Y)$ nach Voraussetzung von der Form $f(X,Y) = a\cdot X^n + \ldots$ $(a\neq 0)$. Da X bzw. Y das Gewicht $q-1$ bzw. q^2-1 hat und $f(X,Y)$ isobar vom Gewicht n ist, gilt also

$$(q-1)\cdot n = (q-1)\cdot i_0 + (q^2-1)\cdot j_0.$$

Daraus folgern wir

$$n - i_0 = (q+1)\cdot j_0.$$

Dann ist

$$a\cdot \tfrac{X^n}{X^{i_0}\cdot Y^{j_0}} = a\cdot \tfrac{X^{n-i_0}}{Y^{j_0}} = a\cdot \tfrac{X^{(q+1)\cdot j_0}}{Y^{j_0}} = a\cdot Z^{j_0}.$$

Die anderen Monome sind dann von der Form $b\cdot X^i\cdot Y^j$, so daß

$$\tfrac{X^i\cdot Y^j}{X^{i_0}\cdot Y^{j_0}} = \tfrac{X^{i-i_0}}{Y^{j-j_0}} = Z^k$$

ist, wobei $k < j_0$ sein muß, da $j \geq 1$ ist. Wir wissen also nun, daß $j_0 = 2 \cdot deg\, f_1 + deg\, f_2$ ist. Da die Ausdrücke

$$Y^{2 \cdot deg\, f_1} \cdot f_1(\tfrac{X^{q+1}}{Y})^2,\ Y^{deg\, f_2} \cdot f_2(\tfrac{X^{q+1}}{Y})$$

Polynome in $R[X,Y]$ sind, ist also nach $(*)$ das Polynom $f(X,Y)$ auch nicht quadratfrei. $\square$

Satz 2.2.9 *Sei $\wp = (p)$ und $deg\, p = d$. Für $k \leq d$ ist $\overline{\phi}_k := \phi_k\, (mod\, \wp)$ und damit auch $A_k\, (mod\, \wp)$ quadratfrei.*

Beweis: Wir müssen also zeigen, daß $\overline{\phi}_k$ und $\overline{\phi}_k'$ teilerfremd sind. Es gelten

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_k &= Z^{a_k} \cdot \overline{\phi}_{k-1} - \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2}, \\ \overline{\phi}_k' &= (-\bar{1})^k \cdot Z^{a_k - 1} \cdot \overline{\phi}_{k-1} + Z^{a_k} \cdot \overline{\phi}_{k-1}' - \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2}'. \end{aligned}$$

Eine gemeinsame Nullstelle von $\overline{\phi}_k$ und $\overline{\phi}_k'$ muß Lösung des folgenden Gleichungssystem sein:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overline{\phi}_{k-2} & Z \cdot \overline{\phi}_{k-1} \\ \overline{\phi}_{k-2}' & (-\bar{1})^k \overline{\phi}_{k-1} + Z \cdot \overline{\phi}_{k-1}' \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} -\overline{[k-1]} \\ Z^{a_k - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da p kein Teiler von $[k-1]$ ist, folgt

$$\begin{pmatrix} -\overline{[k-1]} \\ Z^{a_k - 1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Wenn $\overline{\phi}_k$ und $\overline{\phi}_k'$ gemeinsame Nullstellen haben, so muß also $Det(A) = 0$ gelten. Wir zeigen nun aber, daß $Det(A) \neq 0$ ist: Es gilt

$$Det(A) = (-\bar{1})^k \cdot \overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_{k-2} + Z \cdot (\overline{\phi}_{k-2} \cdot \overline{\phi}_{k-1}' - \overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_{k-2}').$$

Ist $k \geq 2$, so gilt

$$Det(A) = \overline{L}_{k-2}.$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: Für k=2 berechnet man $Det(A) = \bar{1}$. Sei nun $k = 3$:

$$\begin{aligned} Det(A) &= -\overline{\phi}_2 \cdot \overline{\phi}_1 + Z \cdot (\overline{\phi}_1 \cdot \overline{\phi}_2' - \overline{\phi}_2 \cdot \overline{\phi}_1') \\ &= -(Z - \overline{[1]}) \cdot \bar{1} + Z \cdot (\bar{1} \cdot \bar{1} - (Z - \overline{[1]}) \cdot \bar{0}) \\ &= \overline{[1]}. \end{aligned}$$

Induktionsschritt $k \longrightarrow k+1$:

$$\begin{aligned}
Det(A) &= (-\bar{1})^{k+1} \cdot \overline{\phi}_k \cdot \overline{\phi}_{k-1} + Z \cdot (\overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_k^{'} - \overline{\phi}_k \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'}) \\
&= (-\bar{1})^{k+1} \cdot (Z^{a_k} \cdot \overline{\phi}_{k-1} - \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2}) \cdot \overline{\phi}_{k-1} + Z \cdot \{\overline{\phi}_{k-1} \cdot ((-\bar{1})^k \cdot Z^{a_k-1} \\
&\quad \cdot \overline{\phi}_{k-1} + Z^{a_k} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'} - \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2}^{'}) - (Z^{a_k} \cdot \overline{\phi}_{k-1} - \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2}) \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'}\} \\
&= (-\bar{1})^{k+1} \cdot Z^{a_k} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{\,2} + (-\bar{1})^{k+2} \cdot \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2} \cdot \overline{\phi}_{k-1} + (-\bar{1})^k \cdot Z^{a_k} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{\,2} \\
&\quad + Z^{a_k+1} \cdot \overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'} - Z \cdot \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_{k-2}^{'} - Z^{a_k+1} \cdot \overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'} \\
&\quad + Z \cdot \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'} \\
&= (-\bar{1})^k \cdot \overline{[k-1]} \cdot \overline{\phi}_{k-2} \cdot \overline{\phi}_{k-1} + Z \cdot \overline{[k-1]} \cdot (\overline{\phi}_{k-2} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'} - \overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_{k-2}^{'}) \\
&= \overline{[k-1]} \cdot \{(-\bar{1})^k \cdot \overline{\phi}_{k-2} \cdot \overline{\phi}_{k-1} + Z \cdot (\overline{\phi}_{k-2} \cdot \overline{\phi}_{k-1}^{'} - \overline{\phi}_{k-1} \cdot \overline{\phi}_{k-2}^{'})\} \\
&= \overline{[k-1]} \cdot \overline{L}_{k-2} \\
&= \overline{L}_{k-1}.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.2.10 *Ein Primelement p in A ist für $k \geq 3$ genau dann ein Teiler der Diskriminanten von ϕ_k, wenn sein Grad kleiner als k ist.*

Beweis: Berechnet man die Diskriminante von ϕ_3, so erhält man $Diskr(\phi_3) = [2]^{q-2} \cdot [1]$. Nach 2.2.6 hat das Polynom $\overline{\phi}_k = \phi_k\,(mod\,(p))$, wenn $k > deg\,p$ und $k > 3$ ist, mehrfache Nullstellen. Nun ist $Diskr(\phi_k)\,(mod\,(p)) = Diskr(\phi_k\,(mod\,(p)))$, und die Diskriminante eines Polynoms über einem Körper ist genau dann Null, wenn das Polynom mehrfache Nullstellen im algebraischen Abschluß hat. Es folgt also, daß jedes Primelement, dessen Grad kleiner als k ist, die Diskriminante $Diskr(\phi_k)$ teilt. Wenn $deg\,p \geq k$ ist, so wissen wir, daß $\phi_k\,(mod\,(p))$ quadratfrei ist. Außerdem ist $\phi_k\,(mod\,(p))$ separabel, da $A/(p)$ endlich ist. Daraus folgt, daß $\phi_k\,(mod\,(p))$ nur einfache Nullstellen hat. Somit ist $Diskr(\phi_k)\,mod\,p \neq 0$, d.h. p kein Teiler von $Diskr(\phi_k)$. □

In Kapitel 3 werden wir auch die Vielfachheit der Primteiler der Diskriminanten $Diskr(\phi_k)$ bestimmen.

2.3 Supersinguläre Invarianten

Im folgenden sei $p \in A$ ein irreduzibles normiertes Polynom vom Grad d. Die kanonische Abbildung $A \longrightarrow \mathbb{F}_\wp = A/\wp$, wobei $\wp = (p)$ ist, sei wie bisher bezeichnet mit $a \longmapsto \bar{a}$. Sei $\mathbb{F}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_\wp$. Ein Drinfeld-Modul vom Rang zwei über $\mathbb{F}$ ist, entsprechend wie ein Drinfeld-Modul über C, definiert durch

$$\phi_T = \bar{T} \cdot \tau^0 + g \cdot \tau + \Delta \cdot \tau^2,$$

wobei g, $\Delta \in \mathbb{F}$ und $\Delta \neq 0$ ist. Wenn $\mathbb{F}$ algebraisch abgeschlossen ist, charakterisiert

$$j(\phi) = \frac{g^{q+1}}{\Delta}$$

den Drinfeld-Modul ϕ bis auf Isomorphie. Im folgenden sei ein Drinfeld-Modul immer über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ definiert, der ein Oberkörper von $A/\wp$ ist.

Satz 2.3.1 *Für einen Drinfeld-Modul ϕ und $a \in A$ sei $\omega(a)$ die kleinste natürliche Zahl, mit der τ^i in ϕ_a mit einem Koeffizienten$\neq 0$ auftritt. Ist $a = p^t \cdot r$, wobei p kein Teiler von r ist, so definieren wir $v_\wp(a) = t$. Es existiert dann eine positive ganze Zahl h, die sogenannte Höhe von ϕ, so daß*

$$\omega(a) = h \cdot v_\wp(a) \cdot deg\, \wp$$

für alle $a \in A$ gilt.

Beweis: Der Beweis folgt aus Lemma 4.5.6 und Proposition 4.5.7 in [8].

Folgerung 2.3.2 *ϕ_p ist von der Form*

$$\phi_p = l_d \cdot \tau^d + \ldots + l_{2d} \cdot \tau^{2d},$$

d.h. $l_0 = 0, \ldots, l_{d-1} = 0$.

Definition 2.3.3

(i) Wir nennen den Koeffizienten l_d die Hasse-Invarinante von ϕ und schreiben dafür $H(\phi)$.

(ii) Ist $H(\phi) = 0$, so nennen wir ϕ supersingulär. Die j-Invariante $j(\phi)$ nennen wir dann auch supersingulär.

Bemerkung 2.3.4 *Ähnlich wie bei elliptischen Kurven in positiver Charakteristik gilt die Äquivalenz folgender Aussagen:*

(i) $H(\phi) = 0$.

(ii) $(ker\,\phi_p)(\mathbb{F}) = 0$.

(iii) Der Endomorphismen-Ring von ϕ ist nicht kommutativ.

Bemerkung 2.3.5 *Ist ϕ supersingulär, so ist $j(\phi)$ höchstens vom Grad 2 über $\mathbb{F}_\wp$.*

Die Beweise der in den Bemerkungen 2.3.4 und 2.3.5 genannten Sachverhalte findet man in [6].

Bisher haben wir Drinfeld-Moduln vom Rang zwei über C betrachtet. Wie wir bereits wissen, gibt es Modulformen g, Δ über Ω, so daß der Drinfeld-Modul zum Gitter Λ_z definiert ist durch

$$\phi_T = T \cdot \tau^0 + g(z) \cdot \tau + \Delta(z) \cdot \tau^2.$$

In Kapitel 1 haben wir für g und Δ ihre t-Entwicklungen hergeleitet: $g(z) = \tilde{g}(t(z))$, $\Delta(z) = \tilde{\Delta}(t(z))$. Hierbei sind $\tilde{g}$ und $\tilde{\Delta}$ in $A((t))$. Somit haben wir einen Drinfeld-Modul TD mit

$$TD_T = T \cdot \tau^0 + \tilde{g}(t) \cdot \tau + \tilde{\Delta}(t) \cdot \tau^2$$

über dem Körper $K((t))$. Wir nennen TD den Tate-Drinfeld-Modul. Solange keine Verwechslungen entstehen können sind, schreiben wir g statt $\tilde{g}$ und Δ statt $\tilde{\Delta}$:

$$TD_T = T \cdot \tau^0 + g(t) \cdot \tau + \Delta(t) \cdot \tau^2.$$

Indem wir nun bei $g(t)$, $\Delta(t) \in A((t))$ zu den Restklassen $mod\,\wp$ übergehen, erhalten wir einen Drinfeld-Modul $\overline{TD}$ vom Rang zwei über $\mathbb{F}_\wp((t))$. Für diesen Drinfeld-Modul ist die Hasse-Invariante $H(\overline{TD})$ definiert. Wir werden im folgenden zeigen, daß $H(\overline{TD}) = \bar{1}$ ist. Dazu benötigen wir noch folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2.3.6 *Es gilt $(-1)^d \cdot \frac{p}{L_d} \equiv 1\,(mod\,\wp)$.*

Beweis: Da p das Polynom L_d in A genau einmal teilt, macht die Behauptung Sinn. Es ist

$$(-1)^d \cdot \frac{p}{L_d} = (-1)^d \cdot \frac{p}{D_d} \cdot \frac{D_d}{L_d}.$$

Wir zeigen die Aussagen

$$a) \quad \frac{p}{D_d} \equiv -1 \quad \text{und} \quad b) \quad \frac{D_d}{L_d} \equiv (-1)^{d-1}.$$

a) Es gilt

$$\frac{D_d}{p} = \prod_{\substack{p \neq x\,normiert \\ deg\,x = d}} x \equiv \prod_{\substack{p \neq x\,normiert \\ deg\,x = d}} (x - p) \equiv \prod_{0 \neq x \in \mathbb{F}_\wp} x = -1.$$

Also ist auch $\frac{p}{D_d} \equiv -1$.

b) Nach Definition ist

$$\begin{aligned} D_d &= (T^{q^d} - T) \cdot (T^{q^d} - T^q) \ldots (T^{q^d} - T^{q^{d-1}}) \\ \text{und} \\ L_d &= (T^{q^d} - T) \cdot (T^{q^{d-1}} - T) \ldots (T^q - T). \end{aligned}$$

Da $T^{q^d} \equiv T \, (mod \, \wp)$ ist, folgt

$$\begin{aligned} D_d &\equiv (T^{q^d} - T) \cdot (T - T^q) \ldots (T - T^{q^{d-1}}) \, (mod \, \wp) \\ &\equiv (-1)^{d-1} \cdot (T^{q^d} - T) \cdot (T^q - T) \ldots (T^{q^{d-1}} - T) \, (mod \, \wp) \\ &\equiv (-1)^{d-1} \cdot L_d \, (mod \, \wp). \end{aligned}$$

□

Satz 2.3.7 *Es ist* $H(\overline{TD}) = \bar{1}$.

Beweis: Ist

$$TD_p = \sum_{0 \le i \le 2d} l_i \cdot \tau^i,$$

mit $l_i \in A[[t]]$, so müssen wir also zeigen, daß $l_d \equiv 1 \, (mod \, \wp)$ ist. Nach Formel (1.5) in Abschnitt 1.2 und der Definition der Eisensteinreihen g_k gilt

$$(-1)^{k+1} \cdot p \cdot \frac{g_k}{L_k} = \sum_{i+j=k} (-1)^{i+1} \cdot \frac{g_i}{L_i} \cdot l_j^{q^i}.$$

Für $k = d$ ist also

$$l_d + (-1)^{d+1} \cdot p \cdot \frac{g_d}{L_d} = \sum_{1 \le i \le d} (-1)^{i+1} \frac{g_i}{L_i} \cdot l_{d-i}^{q^i}.$$

Nach Folgerung (2.3.2) ist $l_i \equiv 0 \, (mod \, \wp)$, wenn $i < d$ ist. Für $1 \le i < d$ ist also

$$\frac{l_{d-i}^{q^i}}{L_i} \equiv 0 \, (mod \, \wp^{q^i}),$$

da p kein Teiler von L_i ist. Ist $i = d$, so gilt

$$\frac{l_{d-i}^{q^i}}{L_i} = \frac{p^{q^d}}{L_d} \equiv 0 \, (mod \, \wp^{q^d - 1}).$$

Wir folgern

$$l_d \equiv (-1)^d \cdot \frac{p}{L_d} \cdot g_d \, (mod \, \wp^n),$$

wobei $n = min(q^d - 1, q)$ ist. Aus Hilfssatz (2.3.6) folgt

$$l_d \equiv g_d \,(mod\, \wp).$$

Beim Beweis von Folgerung (2.2.7) haben wir gezeigt, daß $g_d \equiv 1 \,(mod\, [d])$ ist. Also gilt wie behauptet

$$l_d \equiv 1 \,(mod\, \wp).$$

$\square$

Sei ϕ der zum Gitter $Az \bigoplus A$ zugehörige Drinfeld-Modul vom Rang zwei. Wir wissen aus Kapitel 1, daß für ein $a \in A$ die Koeffizienten $l_i(a, z)$ von $\phi_a = \sum l_i(a, z)\tau^i$ Modulformen vom Typ 0 und Gewicht $q^i - 1$ sind und somit in $M^{(0)} = A[g, \Delta]$ liegen. Deshalb gibt es zu jedem $l_i(p, z)$ ein eindeutig bestimmtes Polynom $F_i(X, Y) \in A[X, Y]$, so daß $F_i(g, \Delta) = l_i(p, z)$ gilt.

Satz 2.3.8

(i) Für die Polynome $F_i(X, Y)$ gilt folgende Rekursion:
$F_0 = p, \quad F_1 = \frac{(p^q - p)}{[1]} \cdot X,$
$[i] \cdot F_i = X \cdot F_{i-1}^q - X^{q^{i-1}} \cdot F_{i-1} + Y \cdot F_{i-2}^{q^2} - Y^{q^{i-2}} \cdot F_{i-2}$ *für* $i \geq 2.$

(ii) Als Polynom in X betrachtet, ist F_d normiert und hat den Grad $\frac{q^d - 1}{q - 1}$.

(iii) $F_{2d} = Y^{\frac{q^{2d}-1}{q^2-1}}$ *und* $F_{2d+1} = 0.$

Beweis: (i) Für $TD_p = \sum_{i \geq 0} l_i \cdot \tau^i$ und $TD_T = T \cdot \tau^0 + g \cdot \tau + \Delta \cdot \tau^2$ folgern wir aus

$$TD_p \cdot TD_T = TD_{pT} = TD_{Tp} = TD_T \cdot TD_p$$

durch Koeffizientenvergleich die Gleichungen

$$\begin{aligned} g \cdot l_0 + T^q \cdot l_1 &= g \cdot l_0^q + T \cdot l_1, \\ T^{q^i} \cdot l_i + g^{q^{i-1}} \cdot l_{i-1} + \Delta^{q^{i-2}} \cdot l_{i-2} &= T \cdot l_i + g \cdot l_{i-1}^q + \Delta \cdot l_{i-2}^{q^2} \quad \text{für } i \geq 2. \end{aligned}$$

Es ist $F_0(X, Y) = p$, da $l_0 = p$ sein muß. Aus den obigen Gleichungen folgt dann $l_i = F_i(g, \Delta)$ für $i \geq 1$.
(ii) Durch Induktion über i zeigt man, daß F_i als Polynom in X den Grad $\frac{q^i - 1}{q - 1}$ hat, wenn $i \leq d$ ist. Man kann sich folgendermaßen überzeugen, daß der führende Koeffizient 1 ist: Ist ρ der Carlitz-Modul mit $\rho_a = \sum l_i(a) \cdot \tau^i$, so folgt aus $\rho_a \cdot \rho_T = \rho_T \cdot \rho_a$ die Rekursionsformel

$$l_i = \frac{l_{i-1}^q - l_{i-1}}{[i]}$$

für $i \geq 1$. Ist a normiert und vom Grad k, so folgt aus

$$\sum_{0\leq i\leq k} l_i(a)\cdot\tau^i = \rho_a = \rho_{\sum\limits_{0\leq i\leq k} a_i\cdot T^i} = \sum_{0\leq i\leq k} a_i\cdot\rho_{T^i} = \sum_{0\leq i\leq k} a_i\cdot(T\cdot\tau^0+\tau)^i,$$

daß auch l_k normiert sein muß. Betrachtet man die Definition der Polynome F_i, so sieht man, daß die führenden Koeffizienten c_i der F_i obige Rekursionsgleichung erfüllen. Da p normiert und vom Grad d ist, folgt also, daß $c_d = 1$ ist.
(iii) Für $p = \sum\limits_{1\leq i\leq d} a_i\cdot T^i$, mit $a_d = 1$, sehen wir aus

$$\sum_{1\leq i\leq d} a_i\cdot(T\cdot\tau^0+g\cdot\tau+\Delta\cdot\tau^2)^i = TD_p = \sum_{0\leq i\leq 2d} l_i\cdot\tau^i,$$

daß $l_{2d} = \Delta^{\frac{q^{2d}-1}{q^2-1}}$ ist. Also ist $F_{2d} = Y^{\frac{q^{2d}-1}{q^2-1}}$. Da für $i > 2d$ die Koeffizienten $l_i = 0$ sind, muß also auch $F_i(X,Y) = 0$ sein. □

Aus $F_0 \equiv 0\,mod\,\wp$, $F_1 \equiv 0\,mod\,\wp$ und $[i] \not\equiv 0\,mod\,\wp$ für $2 \leq i < d$, folgt aus der Rekursion, daß $\bar{F}_i = F_i\,mod\,\wp = \bar{0}$ ist. Da auch für $d < i < 2d$ der Ausdruck $[i] \not\equiv 0\,mod\,\wp$ ist, schließen wir aufgrund der rekursiven Definition der F_i, daß $\bar{F}_d$ ein Teiler von $\bar{F}_i$ ist, falls $d \leq i < 2d$ ist.

Satz 2.3.9 *Das Polynom $\bar{F}_d(X,Y)$ ist quadratfrei.*

Beweis: Sei $f(x) = \bar{F}_{2d-1}(X,1)$. Aus (i) folgt für $i = 2d+1$ mit Hilfe von (iii), daß $F'_{2d-1}(X,1) = 1$, also $f'(x) = \bar{1}$ ist. Daraus folgt, daß ein quadratischer Faktor von $\bar{F}_{2d-1}(X,Y)$ ein Polynom in Y sein muß. Weil $\bar{F}_{2d-1}(X,Y)$ isobar ist, muß ein quadratischer Faktor in Y sogar ein Monom sein. Da $\bar{F}_d$ ein Teiler von $\bar{F}_{2d-1}$ ist, kann ein quadratischer Faktor von $\bar{F}_d$ auch höchstens ein Monom in Y sein. Für $t = 0$ ist $\Delta(t) = 0$ und $g(t) = 1$. Der Tate-Drinfeld Modul TD wird so zum Carlitz-Modul reduziert. Wir folgern, daß $l_d = 1 + o(t)$, also $\bar{l}_d = \bar{1} + o(t)$ ist. Wenn aber Y das Polynom $\bar{F}_d$ teilt, so folgt $\bar{l}_d = o(t)$. $\bar{F}_d$ muß also quadratfrei sein. □

Betrachten wir nun den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathbb{F}_\wp[X,Y] &\longrightarrow \mathbb{F}_\wp[[t]] \\ (X,Y) &\longmapsto (\bar{g},\bar{\Delta}), \end{aligned}$$

wobei $\bar{g}$ bzw. $\bar{\Delta}$ die t-Entwicklungen $mod\,\wp$ von g und Δ sind. In (2.3.7) haben wir gezeigt, daß $\bar{l}_d = \bar{1}$ ist. Da $\bar{F}_d(\bar{g},\bar{\Delta}) = \bar{l}_d$ ist, folgt, daß $\bar{F}_d(X,Y) - 1$ im Kern von ϵ liegt.

Satz 2.3.10 *Das Polynom $\bar{F}_d(X,Y) - \bar{1}$ erzeugt $ker\,\epsilon$.*

Beweis: Da $\mathbb{F}_\wp/ker\,\epsilon$ isomorph zu einem Unterring des Integritätsbereichs $\mathbb{F}_\wp[[t]]$ ist, muß $ker\,\epsilon$ ein Primideal sein. Da $\bar{\Delta} = -t^{q-1} + \ldots$ ist, hat $\bar{\Delta}$ kein Inverses in $\mathbb{F}_\wp[[t]]$. Da $\epsilon(\mathbb{F}_\wp[X,Y]) \cong \mathbb{F}_\wp[X,Y]/ker\,\epsilon$ gilt, ist also $ker\,\epsilon$ kein maximales Ideal. In $\mathbb{F}[X,Y]$ kann eine echt aufsteigende Kette von Primidealen höchstens die Länge zwei haben. Deshalb reicht es zu zeigen, daß $\bar{F}_d(X,Y) - \bar{1}$ irreduzibel ist. Dies beweisen wir durch Widerspruch: Angenommen $\bar{F}_d(X,Y) - \bar{1} = R \cdot S$ ist eine nichttriviale Zerlegung. Seien $R = \sum_{i \le m} R_i$ und $S = \sum_{j \le n} S_j$ die Zerlegungen von R und S in ihre isobaren Komponenten, wobei R_i bzw. S_j die Gewichte i bzw. j haben (die Gewichte von X bzw. Y sind wie immer $q-1$ bzw. q^2-1). Es muß dann $R_m \cdot S_n = \bar{F}_d$ sein. Da $\bar{F}_d$ quadratfrei und $m, n > 0$ sind, müssen R_m und S_n teilerfremd sein. Aus $R_m \cdot S_{n-1} + R_{m-1} \cdot S_n = 0$ folgt deshalb $R_{m-1} = S_{n-1} = 0$. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir $R_i = S_j = 0$ für $i < m$, $j < n$. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß $R_0 \cdot S_0 = -\bar{1}$ ist. Also ist $\bar{F}_d(X,Y) - \bar{1}$ irreduzibel. $\square$

Folgerung 2.3.11 *Es gilt $\bar{A}_d = \bar{F}_d$ und damit ist*

$$\phi_d(Z)\,mod\,\wp \quad = \prod_{\substack{j_0 \neq 0 \\ j_0\ supersing.\ mod\ \wp}} (Z - j_0).$$

Beweis: Wir wissen bereits, daß $g_d \equiv 1\,mod\,\wp$ ist. Da $A_d(g, \Delta) = g_d$ ist, folgt also daß $\bar{A}_d - 1$ im Kern von ϵ liegt. Da $\bar{A}_d - 1$ und $\bar{F}_d - 1$ als Polynome in X die gleichen Grade und den gleichen obersten Koeffizienten haben (siehe 2.3.8(ii)), folgt $\bar{A}_d = \bar{F}_d$. Nach Satz 2.1.3 ist z elliptisch gdw. wenn $j(z) = 0$ ist. Daraus folgt die behauptete Gleichung. $\square$

Kapitel 3

Die Diskriminante von ϕ_k

Wir werden in diesem Kapitel eine Formel der Diskriminanten $Diskr(\phi_k)$ für $k = 2, 3, ...$ herleiten, nämlich Satz 3.2.5.

3.1 Grundlagen

Die Diskriminanten $Diskr(\phi_k)$ sind definiert durch $Diskr(\phi_k) = Res(\phi_k, \phi'_k)$:

Definition 3.1.1 *Wenn f,g Polynome in $K[X]$ sind, wobei K ein beliebiger Körper ist, so ist die Resultante $Res(f, g)$ definiert durch $Res(f, g) = Det(A)$. Dabei hat A die folgende Gestalt:*

(i)

$$
\left(\begin{array}{ccccc|cccccc}
a_n & & & & & b_m & & & & & \\
. & . & & 0 & & . & . & & & 0 & \\
. & & . & & & . & & . & & & \\
. & & & . & & . & & & . & & \\
. & & & & a_n & . & & & & . & \\
. & & & & . & b_0 & & & & & b_m \\
a_0 & & & & . & & . & & & & . \\
 & . & & & . & & & . & & & . \\
 & & . & & . & & & & . & & . \\
 & 0 & & . & . & & 0 & & & . & . \\
 & & & & a_0 & & & & & & b_0
\end{array}\right)
$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m\ Spalten}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n\ Spalten}$$

wenn

$$
\begin{aligned}
f(X) &= \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \\
g(X) &= \sum_{i=0}^{m} b_i X^i
\end{aligned}
$$

und $n > 0, m > 0,\ a_n \neq 0, b_m \neq 0$ *ist.*

(ii)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ & . & & 0 & \\ & & . & & \\ & 0 & & . & \\ & & & & a_0 \end{pmatrix}}_{m\ Spalten}$$

wenn

$$\begin{aligned} f(X) &= a_0, \\ g(X) &= \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \end{aligned}$$

und $m > 0, a_0 \neq 0, b_m \neq 0$ *ist.*

(iii)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_0 & & & & \\ & . & & 0 & \\ & & . & & \\ & 0 & & . & \\ & & & & b_0 \end{pmatrix}}_{n\ Spalten}$$

wenn

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \\ g(X) &= b_0 \end{aligned}$$

und $n > 0, a_n \neq 0, b_0 \neq 0$ *ist.*

(iv) (1), *wenn* $f(X) = a_0 \neq 0$ *und* $g(X) = b_0 \neq 0$ *ist.*

(v) (0), *wenn* $f(X) = a_0$, $g(X) = b_0$ *und* $a_0 = 0$ *oder* $b_0 = 0$ *ist.*

Hilfssatz 3.1.2 *Wenn*

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad (a_n \neq 0),$$

$$g(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \quad (b_m \neq 0)$$

ist, so gilt

$$Res(f,g) = (-1)^{m \cdot n} \cdot Res(g,f).$$

Beweis: Die Behauptung folgt durch $m \cdot n$ Spaltenvertauschungen in A. $\square$

Satz 3.1.3 *Wenn*

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad (n > 0,\ a_n \neq 0), \\ g(X) &= \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \quad (m > 0,\ b_m \neq 0,\ n \geq m) \end{aligned}$$

und

$$s(X) = f(X) - \left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot X^{n-m} \cdot g(X)$$

ist, so gilt

$$Res(f,g) = (-1)^{deg\, g(X) \cdot (deg\, f(X) - deg\, s(X))} \cdot b_m^{deg\, f(X) - deg\, s(X)} \cdot Res(s,g).$$

Beweis: Sei $s(X) = \sum_{i=0}^{m_1} c_i X^i$. Indem man in A von der i-ten Spalte, $i = 1, \ldots, m$, das $\frac{a_n}{b_m}$ -fache der $m+i$-ten Spalte abzieht, erhält man

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & b_m & & & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & & & & & & & \\
 & & 0 & & & \cdot & & \cdot & & & 0 & & & \\
c_{m_1} & & & & & \cdot & & & \cdot & & & & & \\
\cdot & \cdot & & & & b_0 & & & & \cdot & & & & \\
\cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & & \\
\cdot & & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & \\
\cdot & & & & c_{m_1} & & & & \cdot & & & & \cdot & \\
c_0 & & & & \cdot & & & & & \cdot & & & & b_m \\
 & \cdot & & & \cdot & & & & & & \cdot & & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot & & & & 0 & & & \cdot & & \cdot \\
 & 0 & & \cdot & \cdot & & & & & & & & \cdot & \cdot \\
 & & & & c_0 & & & & & & & & & b_0
\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m\ Spalten}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n\ Spalten}$$

Man entwickelt die Determinante nach der ersten Zeile, anschließend nach der zweiten Zeile, usw., bis zur $(n - m_1)$-ten Zeile. Bei jedem Schritt erhalten wir den Faktor $(-1)^m \cdot b_m$. Also erhalten wir nach $(n - m_1)$ Schritten den Faktor

$(-1)^{m\cdot(n-m_1)} \cdot b_m^{n-m_1}$. Die Matrix, die sich danach ergibt, ist gerade

$$\begin{pmatrix}
c_{m_1} &&&&& b_m &&&&& \\
\cdot & \cdot && 0 && \cdot & \cdot && 0 && \\
\cdot && \cdot &&& \cdot && \cdot &&& \\
\cdot &&& \cdot && \cdot &&& \cdot && \\
\cdot &&&& c_{m_1} & b_0 &&&& \cdot & \\
c_0 &&&& \cdot && \cdot &&&& b_m \\
& \cdot &&& \cdot &&& \cdot &&& \\
&& \cdot && \cdot &&&& \cdot && \\
& 0 && \cdot & \cdot && 0 &&& \cdot & \\
&&&& c_0 &&&&&& b_0
\end{pmatrix}$$

so daß sich als Determinante $Res\left(f - \frac{a_n}{b_m} \cdot X^{n-m} \cdot g, g\right) = Res(s,g)$ ergibt. $\square$

3.2 Herleitung einer Diskriminantenformel

In diesem Abschnitt werden wir eine Formel für $Diskr(\phi_k)$, $k \geq 2$ herleiten. Wir erinnern noch einmal an die rekursive Definition der a_k, die wir in Satz 2.2.1 definiert haben:

$$\begin{aligned}
a_2 &= 1, \\
a_{i+1} &= \begin{cases} q \cdot a_i - 1 & \text{für } i \text{ gerade} \\ q \cdot a_i + 1 & \text{für } i \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Es ist also $a_i \equiv 1 \; mod\, q$ für i gerade und $a_i \equiv -1 \; mod\, q$ für i ungerade. Im folgenden sei f_k die k-te Fibonacci-Zahl. Wie wir wissen, ist $f_0 = f_1 = 1$ und für $k \geq 2$ ist f_k rekursiv durch $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ definiert.

Satz 3.2.1 *Sei* $\phi_k = \sum_{i=0}^{q-1} \phi_k^{(i)}$, *wobei* $\phi_k^{(i)}$ *gerade die Monome enthält, deren Exponenten* $\equiv i \, mod\, q$ *sind. Es gilt:*

(i) *Wenn* k *gerade und* $\phi_k^{(i)} \neq 0$ *ist, so ist* $i \equiv 0, 1 \, mod\, q$. *Wenn* k *ungerade und* $\phi_k^{(i)} \neq 0$ *ist, so ist* $i \equiv 0, -1 \, mod\, q$.

(ii) *Sei* $u_k^{(i)}$ *die Anzahl der Glieder in* $\phi_k^{(i)}$. *Dann gilt für* $k \geq 2$:

(a) *Wenn* k *gerade ist, so gilt*

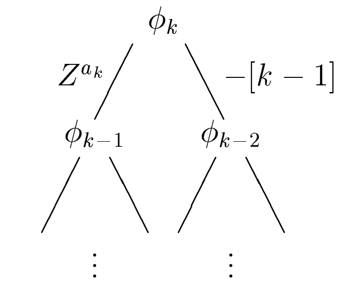
$$\begin{aligned}
u_k^{(1)} &= f_{k-1}, \\
u_k^{(0)} &= f_{k-2}, \\
u_k^{(i)} &= 0 \quad \text{für } i = 2, ..., q-1.
\end{aligned}$$

(b) Wenn k ungerade ist, so gilt

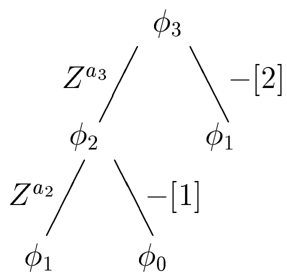
$$\begin{aligned} u_k^{(q-1)} &= f_{k-2}, \\ u_k^{(0)} &= f_{k-1}, \\ u_k^{(i)} &= 0 \quad \textit{für } i = 1, ..., q-2. \end{aligned}$$

Beweis: Aus (ii) folgt (i). Die Behauptung (ii) zeigt man durch Induktion. □

Zur Herleitung der Formel für die Diskriminanten $Diskr(\phi_k)$ benötigen wir noch einige einfache Hilfssätze. Weil $\phi_k = Z^{a_k} \cdot \phi_{k-1} - [k-1] \cdot \phi_{k-2}$ gilt, ist jedem ϕ_k ein gewichteter Baum zugeordnet, in der Weise



An den Enden des Baumes befinden sich dann $\phi_1 = 1$ und $\phi_0 = 1$.
Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge aller Summanden von ϕ_k und der Menge aller Pfade des Baumes, die bei ϕ_k beginnen und bis zu einem Ende des Baumes verlaufen. Dabei ist ein Summand gleich dem Produkt der Gewichte aller Zweige seines zugeordneten Pfades. Wir erläutern diesen Sachverhalt für $k = 3$:



Wir haben folgende Pfade:

(1) $\phi_3 \xrightarrow{Z^{a_3}} \phi_2 \xrightarrow{Z^{a_2}} \phi_1$,

(2) $\phi_3 \xrightarrow{Z^{a_3}} \phi_2 \xrightarrow{-[1]} \phi_0$,

(3) $\phi_3 \xrightarrow{-[2]} \phi_1$.

Dem Pfad aus (1) ist der Summand $Z^{a_3} \cdot Z^{a_2} = Z^{a_3+a_2}$ zugeordnet.
Dem Pfad aus (2) ist der Summand $-[1] \cdot Z^{a_3}$ zugeordnet.
Dem Pfad aus (3) ist der Summand $-[2]$ zugeordnet.

Hilfssatz 3.2.2

(i) Sei k gerade: Ein Pfad entspricht bei der oben genannten Bijektion genau dann einem Summanden von $\phi_k^{(0)}$, wenn er bei ϕ_0 endet und genau dann einem Summanden von $\phi_k^{(1)}$, wenn er bei ϕ_1 endet.

(ii) Sei k ungerade: Ein Pfad entspricht bei der oben genannten Bijektion genau dann einem Summanden von $\phi_k^{(0)}$, wenn er bei ϕ_1 endet und genau dann einem Summanden von $\phi_k^{(q-1)}$, wenn er bei ϕ_0 endet.

Dies beweist man durch Induktion. Daraus folgt sofort

Hilfssatz 3.2.3

(i) Wenn

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0, \\ \psi_1 &= 1, \\ \psi_k &= Z^{a_k} \cdot \psi_{k-1} - [k-1] \cdot \psi_{k-2} \quad \textit{für} \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

so ist

$$\psi_k = \begin{cases} \phi_k^{(1)} & \textit{wenn } k \textit{ gerade} \\ \phi_k^{(0)} & \textit{wenn } k \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

(ii) Wenn

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1, \\ \omega_1 &= 0, \\ \omega_k &= Z^{a_k} \cdot \omega_{k-1} - [k-1] \cdot \omega_{k-2} \quad \textit{für} \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

so ist

$$\omega_k = \begin{cases} \phi_k^{(0)} & \textit{wenn } k \textit{ gerade} \\ \phi_k^{(q-1)} & \textit{wenn } k \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Hilfssatz 3.2.4 *Sei $k \geq 2$:*

(i) Wenn k gerade ist, so gilt

$$\phi_k' = \tfrac{1}{Z} \cdot \phi_k^{(1)}.$$

(ii) Wenn k ungerade ist, so gilt

$$\phi_k' = -\tfrac{1}{Z} \cdot \phi_k^{(q-1)}.$$

Beweis: Hilfssatz 3.2.4 folgt aus der Tatsache, daß für gerades k

$$\phi_k = \phi_k^{(0)} + \phi_k^{(1)},\ \phi_k^{(0)'} = 0,\ \phi_k^{(1)'} = \tfrac{1}{Z}\phi_k^{(1)}$$

gilt und entsprechend für ungerades k

$$\phi_k = \phi_k^{(0)} + \phi_k^{(q-1)},\ \phi_k^{(0)'} = 0,\ \phi_k^{(q-1)'} = -\tfrac{1}{Z} \cdot \phi_k^{(q-1)}$$

ist. □

Satz 3.2.5 *Die Diskriminante läßt sich für ϕ_k, $k \geq 2$ wie folgt berechnen:*

$$Diskr(\phi_k) = v_k \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [j]^{deg\,\phi_k - deg\,\phi_j - \delta(k-j)}.$$

Dabei ist

$$\delta(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \text{ gerade} \\ 1 & \text{wenn } i \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und für das Vorzeichen v_k gilt:

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \equiv 0, 1, 2, 3 \,mod\, 8 \\ -1 & \text{wenn } k \equiv 4, 5, 6, 7 \,mod\, 8. \end{cases}$$

Bemerkung 3.2.6 *Wie wir im folgenden sehen werden, beruht der Beweis nicht auf der arithmetischen Natur der Ausdrücke $[i]$. Wir benötigen lediglich die Eigenschaft, daß $[i] \neq 0$ ist.*

Beweis von Satz 3.2.5:

Für $k = 2$ läßt sich die Formel direkt nachweisen: Es ist $\phi_2 = Z - [1]$. Also gilt $\phi_2' = 1$. Daraus folgt $Diskr(\phi_2) = 1$. Andererseits gilt

$$\prod_{j=1}^{1} [j]^{deg\,\phi_2 - deg\,\phi_j - \delta(2-j)} = [1]^{1-0-\delta(1)} = [1]^{1-0-1} = 1.$$

Sei nun $k > 2$. Wir beweisen die Behauptung getrennt für den Fall, daß k gerade und für den Fall, daß k ungerade ist.

Wir betrachten zuerst den Fall daß k **gerade**, $k > 2$ ist:

(3.2.5.1) Zum Beweis wenden wir wiederholt Satz 3.1.3 an.
Zunächst ist

$$\phi_k - Z \cdot \phi_k^{'} = \phi_k^{(0)}.$$

Nach Satz 3.1.3 und Hilfssatz 3.1.2 gilt also

$$\begin{aligned} Res(\phi_k, \phi_k^{'}) &= (-1)^{deg\, \phi_k^{(0)} \cdot deg\, \phi_k^{'} + deg\, \phi_k^{'} \cdot (deg\, \phi_k - deg\, \phi_k^{(0)})} \cdot Res(\phi_k^{'}, \phi_k^{(0)}) \\ &= (-1)^{deg\, \phi_k^{'} \cdot deg\, \phi_k} \cdot Res(\phi_k^{'}, \phi_k^{(0)}) \\ &= Res(\phi_k^{'}, \phi_k^{(0)}). \end{aligned}$$

Das Teilen mit Rest setzen wir so lange fort, bis sich ein Polynom ergibt, das eine Konstante ist. Wir definieren durch Rekursion für $i = 0, \ldots, k-1$ Polynome $Rest_{k,i}$, nämlich:

$$\begin{aligned} Rest_{k,0} &= \phi_k^{'}, \\ Rest_{k,1} &= \phi_k^{(0)} \end{aligned}$$

und für $i \geq 2$

$$Rest_{k,i} = Rest_{k,i-2} - \frac{c_{k,i-2}}{c_{k,i-1}} \cdot Z^{d_{k,i-2} - d_{k,i-1}} \cdot Rest_{k,i-1},$$

wobei $c_{k,i}$ der höchste Koeffizient von $Rest_{k,i}$ und $d_{k,i}$ der Grad von $Rest_{k,i}$ ist. Wegen Satz 3.1.3 und Hilfssatz 3.1.2 ist dann

$$\begin{aligned} Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) &= (-1)^{d_{k,i+1} \cdot d_{k,i+2} + d_{k,i+1} \cdot (d_{k,i} - d_{k,i+2})} \cdot c_{k,i+1}^{d_{k,i} - d_{k,i+2}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}) \\ &= (-1)^{d_{k,i+1} \cdot d_{k,i}} \cdot c_{k,i+1}^{d_{k,i} - d_{k,i+2}} \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}). \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir die Werte $c_{k,i}$, $d_{k,i}$ bestimmen. In (3.2.5.6) berechnen wir dann die Diskriminanten.

(3.2.5.2) *Wir behaupten:*

Es gilt

$$c_{k,0} = 1,$$

und für $i \geq 1$ ist

$$c_{k,i} = \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}} \cdot [i] \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [2] & \textit{wenn } i \textit{ gerade} \\ (-1)^{\frac{(i+1)}{2}} \cdot [i] \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [1] & \textit{wenn } i \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Für $i \geq 0$ gilt

$$d_{k,i} = \begin{cases} \sum\limits_{j=i+2}^{k} a_j & \textit{wenn } i \textit{ ungerade} \\ \\ (\sum\limits_{j=i+2}^{k} a_j) - 1 & \textit{wenn } i \textit{ gerade.} \end{cases}$$

Zum Beweis von Behauptung (3.2.5.2) führen wir Folgen $(R_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ ein, die gerade so definiert sind, daß $Rest_{k,i} = R_k^{(i)}$ gilt. Dies werden wir in (3.2.5.5) beweisen. Wir definieren

$$\begin{aligned} R_0^{(0)} &= 0, \quad R_1^{(0)} = \frac{1}{Z}, \\ R_j^{(0)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(0)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(0)} \quad \text{für } j \geq 2. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} R_0^{(1)} &= 1, \quad R_1^{(1)} = 0, \\ R_j^{(1)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(1)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(1)} \quad \text{für } j \geq 2. \end{aligned}$$

Für $2 \leq i \leq k-1$ definieren wir die Folge $(R_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ durch:

$$\begin{aligned} R_j^{(i)} &= 0 \quad \text{für } j = 0, \ldots, i, \\ R_{i+1}^{(i)} &= -[i] \cdot R_{i-1}^{(i-2)}, \\ R_j^{(i)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(i)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(i)} \quad \text{für } j > i+1. \end{aligned}$$

(3.2.5.3) *Wir behaupten: Für $i \geq 0$ gilt*

$$R_{i+1}^{(i)} = \begin{cases} b_i \cdot \frac{1}{Z} & \textit{wenn } i \textit{ gerade} \\ \\ b_i & \textit{wenn } i \textit{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei die Elemente b_i definiert sind durch:

$$b_0 = 1$$

und für $i \geq 1$ *ist*

$$b_i = \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}} \cdot [i] \cdot [i-2] \cdot \ldots [2] & \textit{wenn } i \textit{ gerade} \\ (-1)^{\frac{(i+1)}{2}} \cdot [i] \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [1] & \textit{wenn } i \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Aus dem weiteren Verlauf des Beweises von Satz 3.2.5 wird sich ergeben, daß $c_{k,i} = b_i$ ist.

Beweis von (3.2.5.3): Nach Definition ist $R_1^{(0)} = \frac{1}{Z} = b_0 \cdot \frac{1}{Z}$. Den Rest beweisen wir durch Induktion:

Induktionsanfang:

$i = 1$:

$$\begin{aligned} R_2^{(1)} &= Z^{a_2} \cdot 0 - [1] \cdot 1 &&= -[1], \\ b_1 &= (-1)^{\frac{(1+1)}{2}} \cdot [1] &&= -[1]. \end{aligned}$$

Also ist $R_2^{(1)} = b_1$.

$i = 2$:

$$\begin{aligned} R_3^{(2)} &= -[2] \cdot R_1^{(0)} &&= -[2] \cdot \frac{1}{Z}, \\ b_2 &= (-1)^{\frac{2}{2}} \cdot [2] &&= -[2]. \end{aligned}$$

Also ist $R_3^{(2)} = b_2 \cdot \frac{1}{Z}$.

Induktionsschritt $i - 2 \to i$:

(a) i ungerade:

$$\begin{aligned} R_{i+1}^{(i)} &= -[i] \cdot R_{i-1}^{(i-2)} \\ &= -[i] \cdot (-1)^{\frac{(i-1)}{2}} \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [1] \\ &= (-1)^{\frac{(i+1)}{2}} \cdot [i] \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [1] \\ &= b_i. \end{aligned}$$

(b) i gerade:

$$\begin{aligned} R_{i+1}^{(i)} &= -[i] \cdot R_{i-1}^{(i-2)} \\ &= -[i] \cdot (-1)^{\frac{(i-2)}{2}} \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [2] \cdot \frac{1}{Z} \\ &= (-1)^{\frac{i}{2}} \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [2] \cdot \frac{1}{Z} \\ &= b_i \cdot \frac{1}{Z}. \end{aligned}$$

Somit ist (3.2.5.3) bewiesen.

Für jede Folge $(R_j^{(i)})_{j \geq 0}$ gilt:

$$\begin{aligned} R_i^{(i)} &= 0, \\ R_j^{(i)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(i)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(i)} \quad \text{für } j > i+1. \end{aligned}$$

Wegen (3.2.5.3) folgt daraus

(3.2.5.4) *Für $i \geq 0$ gilt:*

(a) b_i ist der höchste Koeffizient von $R_k^{(i)}$.

(b) Für den Grad $\tilde{d}_{k,i}$ von $R_k^{(i)}$ gilt:

$$\tilde{d}_{k,i} = \begin{cases} \sum_{j=i+2}^{k} a_j & \textit{wenn } i \textit{ ungerade} \\ (\sum_{j=i+2}^{k} a_j) - 1 & \textit{wenn } i \textit{ gerade.} \end{cases}$$

(3.2.5.5) *Für $i \geq 0$ gilt*

$$R_k^{(i)} = Rest_{k,i}.$$

Wegen (3.2.5.4) gilt dann auch die Behauptung (3.2.5.2).

Beweis von (3.2.5.5) durch Induktion:

$i = 0$: Weil $\phi_k' = \frac{1}{Z} \cdot \phi_k^{(1)}$ ist, folgt aus Hilfssatz 3.2.3 (i), daß

$$R_k^{(0)} = \phi_k' = Rest_{k,0}$$

gilt.

$i = 1$: Aus Hilfssatz 4.3.3 (ii) folgt, daß

$$R_k^{(1)} = \phi_k^{(0)} = Rest_{k,1}$$

gilt.

Induktionsschritt $i-2, i-1 \to i$:

Zum Beweis definieren wir eine Folge $(\tilde{R}_j^{(i-2)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ durch:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_j^{(i-2)} &= 0 \quad \text{für } j = 0, \ldots, i-1, \\
\tilde{R}_i^{(i-2)} &= R_i^{(i-2)}, \\
\tilde{R}_j^{(i-2)} &= Z^{a_j} \cdot \tilde{R}_{j-1}^{(i-2)} - [j-1] \cdot \tilde{R}_{j-2}^{(i-2)} \quad \text{für } j \geq i+1.
\end{aligned}$$

Nun gilt:

(a)

$$\begin{aligned}
R_i^{(i-2)} &= \tilde{R}_i^{(i-2)} \\
&= \tilde{R}_i^{(i-2)} + R_i^{(i)},
\end{aligned}$$

weil $R_i^{(i)} = 0$ ist.

(b)

$$\begin{aligned}
R_{i+1}^{(i-2)} &= Z^{a_{i+1}} \cdot R_i^{(i-2)} - [i] \cdot R_{i-1}^{(i-2)} \\
&= Z^{a_{i+1}} \cdot R_i^{(i-2)} + R_{i+1}^{(i)} \\
&= Z^{a_{i+1}} \cdot \tilde{R}_i^{(i-2)} + R_{i+1}^{(i)} \\
&= (Z^{a_{i+1}} \cdot \tilde{R}_i^{(i-2)} - [i] \cdot \tilde{R}_{i-1}^{(i-2)}) + R_{i+1}^{(i)} \\
&= \tilde{R}_{i+1}^{(i-2)} + R_{i+1}^{(i)}.
\end{aligned}$$

(c) Für $j > i+1$ gilt

$$\begin{aligned} R_j^{(i-2)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(i-2)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(i-2)}, \\ \tilde{R}_j^{(i-2)} &= Z^{a_j} \cdot \tilde{R}_{j-1}^{(i-2)} - [j-1] \cdot \tilde{R}_{j-2}^{(i-2)}, \\ R_j^{(i)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(i)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(i)}. \end{aligned}$$

Aus (a), (b), (c) folgt, daß für $j \geq i$

$$R_j^{(i-2)} = \tilde{R}_j^{(i-2)} + R_j^{(i)}$$

gilt. Da $i \leq k-1$ ist, gilt also insbesondere

$$R_k^{(i-2)} = \tilde{R}_k^{(i-2)} + R_k^{(i)}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $R_k^{(i-2)} = Rest_{k,i-2}$. Deswegen gilt

$$Rest_{k,i-2} = \tilde{R}_k^{(i-2)} + R_k^{(i)}.$$

Wir definieren weiter die Folge $(\hat{R}_j^{(i-1)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$\begin{aligned} \hat{R}_j^{(i-1)} &= 0 \quad \text{für } j = 0, \ldots, i-1, \\ \hat{R}_i^{(i-1)} &= -\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2} - \tilde{d}_{k,i-1}} \cdot R_i^{(i-1)}, \\ \hat{R}_j^{(i-1)} &= Z^{a_j} \cdot \hat{R}_{j-1}^{(i-1)} - [j-1] \cdot \hat{R}_{j-2}^{(i-1)} \quad \text{für } j > i. \end{aligned}$$

Aus der Gestalt der Rekursion für $\hat{R}_j^{(i-1)}$ folgt

$$\hat{R}_j^{(i-1)} = -\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2} - \tilde{d}_{k,i-1}} \cdot R_j^{(i-1)} \quad \text{für } j = 0, \ldots, i.$$

Für $j > i$ folgt ebenfalls

$$\hat{R}_j^{(i-1)} = -\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2} - \tilde{d}_{k,i-1}} \cdot R_j^{(i-1)},$$

weil die Rekursionen für $R_j^{(i-1)}$ und $\hat{R}_j^{(i-1)}$ für $j > i$ übereinstimmen.
Wir zeigen nun, daß für $j \geq 0$ gilt

$$\hat{R}_j^{(i-1)} = -\tilde{R}_j^{(i-2)}.$$

Für $j = 0, \ldots, i-1$ folgt dies aus $\hat{R}_j^{(i-1)} = 0$, $\tilde{R}_j^{(i-2)} = 0$. Für $j = i$ machen wir Fallunterscheidung:

(a) i ungerade: Wir haben durch Induktion bereits gezeigt, daß $R_i^{(i-1)} = b_{i-1} \cdot \frac{1}{Z}$ gilt. Also folgt

$$\begin{aligned}
\hat{R}_i^{(i-1)} &= -\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2}-\tilde{d}_{k,i-1}} \cdot b_{i-1} \cdot \frac{1}{Z} \\
&= -b_{i-2} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2}-\tilde{d}_{k,i-1}-1} \\
&= -b_{i-2} \cdot Z^{\sum_{j=i}^{k} a_j - (\sum_{j=i+1}^{k} a_j - 1) - 1} \\
&= -b_{i-2} \cdot Z^{a_i}.
\end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der gezeigten Induktion, daß $R_{i-1}^{(i-2)} = b_{i-2}$ ist. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_i^{(i-2)} &= R_i^{(i-2)} \\
&= Z^{a_i} \cdot R_{i-1}^{(i-2)} - [i-1] \cdot R_{i-2}^{(i-2)} \\
&= Z^{a_i} \cdot b_{i-2}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\hat{R}_i^{(i-1)} = -\tilde{R}_i^{(i-2)}$.

(b) i gerade: Wie durch Induktion gezeigt wurde, ist $R_i^{(i-1)} = b_{i-1}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\hat{R}_i^{(i-1)} &= -\frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2}-\tilde{d}_{k,i-1}} \cdot b_{i-1} \\
&= -b_{i-2} \cdot Z^{(\sum_{j=i}^{k} a_j)-1)-(\sum_{j=i+1}^{k} a_j)} \\
&= b_{i-2} \cdot Z^{a_i-1}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist $R_{i-1}^{(i-2)} = b_{i-2} \cdot \frac{1}{Z}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_i^{(i-2)} &= R_i^{(i-2)} \\
&= Z^{a_i} \cdot R_{i-1}^{(i-2)} - [i-1] \cdot R_{i-2}^{(i-2)} \\
&= Z^{a_i} \cdot R_{i-1}^{(i-2)} \\
&= Z^{a_i} \cdot b_{i-2} \cdot \frac{1}{Z} \\
&= Z^{a_i-1} \cdot b_{i-2}.
\end{aligned}$$

Also gilt auch im Fall, wenn i gerade ist, daß $\hat{R}_i^{(i-1)} = -\tilde{R}_i^{(i-2)}$ ist.

Da die Rekursionen für $\hat{R}_j^{(i-1)}$, $\tilde{R}_j^{(i-2)}$ für $j > i$ dieselbe Gestalt haben, gilt für alle $j \geq 0$

$$\hat{R}_j^{(i-1)} = -\tilde{R}_j^{(i-2)}.$$

Insbesondere gilt

$$\hat{R}_k^{(i-1)} = -\tilde{R}_k^{(i-2)}.$$

Wie schon gezeigt wurde, gilt für $j \geq i$

$$R_j^{(i-2)} = \tilde{R}_j^{(i-2)} + R_j^{(i)}.$$

Weil $\tilde{R}_j^{(i-2)} = -\hat{R}_j^{(i-1)}$ ist, folgt

$$R_j^{(i-2)} = R_j^{(i)} + \frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2}-\tilde{d}_{k,i-1}} \cdot R_j^{(i-1)}.$$

Es gilt also

$$R_j^{(i)} = R_j^{(i-2)} - \frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2}-\tilde{d}_{k,i-1}} \cdot R_j^{(i-1)}.$$

Insbesondere ist

$$R_k^{(i)} = R_k^{(i-2)} - \frac{b_{i-2}}{b_{i-1}} \cdot Z^{\tilde{d}_{k,i-2}-\tilde{d}_{k,i-1}} \cdot R_k^{(i-1)}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} R_k^{(i-2)} &= Rest_{k,i-2}, \\ R_k^{(i-1)} &= Rest_{k,i-2}. \end{aligned}$$

Dann ist auch

$$\tilde{d}_{k,i-2} = d_{k,i-2}, \quad \tilde{d}_{k,i-1} = d_{k,i-1}$$

und

$$b_{i-2} = c_{k,i-2}, \quad b_{i-1} = c_{k,i-1}.$$

Es gilt also

$$R_k^{(i)} = Rest_{k,i-2} - \frac{c_{k,i-2}}{c_{k,i-1}} \cdot Z^{d_{k,i-2}-d_{k,i-1}} \cdot Rest_{k,i-1}.$$

Somit ist

$$R_k^{(i)} = Rest_{k,i}.$$

Damit ist (3.2.5.5) bewiesen.

Daraus folgt wegen (3.2.5.4), daß $d_{k,i} = \tilde{d}_{k,i}$ und $c_{k,i} = b_i$ ist. Also gilt (3.2.5.2).

(3.2.5.6) Wir berechnen nun die Diskriminante von ϕ_k. In (3.2.5.1) wurde bereits gezeigt, daß

$$Diskr(\phi_k) = Res(\phi_k, \phi_k^{'}) = Res(\phi_k^{'}, \phi_k^{(0)}) = Res(Rest_{k,0}, Rest_{k,1})$$

gilt. Weiter haben wir gezeigt, daß

$$Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) = (-1)^{d_{k,i+1} \cdot d_{k,i}} \cdot b_{i+1}^{d_{k,i} - d_{k,i+2}} \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2})$$

für $i = 0, \ldots, k-3$ gilt. Es ist $d_{k,i} - d_{k,i+2} = a_{i+2} + a_{i+3}$. Bezüglich des Vorzeichens läßt sich folgendes sagen:
Wenn i gerade ist, so gilt

$$\begin{aligned} d_{k,i} &= \left(\sum_{j=i+2}^{k} a_j \right) - 1, \\ d_{k,i+1} &= \sum_{j=i+3}^{k} a_j. \end{aligned}$$

Wenn j ungerade ist, so ist a_j gerade, und wenn j gerade ist, so ist a_j ungerade. Es ist $d_{k,i} - d_{k,i+1} = a_{i+2} - 1$. Daraus folgt, daß $d_{k,i}$ und $d_{k,i+1}$ beide gerade oder beide ungerade sind. Durch Fallunterscheidung stellt man fest: Wenn $k - i \equiv 0 \, mod \, 4$ ist, so gilt $d_{k,i} \equiv 1 \, mod \, 2$. Wenn $k - i \equiv 2 \, mod \, 4$ ist, so gilt $d_{k,i} \equiv 0 \, mod \, 2$.
Wenn i ungerade ist, so gilt

$$\begin{aligned} d_{k,i} &= \sum_{j=i+2}^{k} a_j, \\ d_{k,i+1} &= \left(\sum_{j=i+3}^{k} a_j \right) - 1. \end{aligned}$$

Da $d_{k,i} - d_{k,i+1} = a_{i+2} + 1$ ungerade ist, muß also $d_{k,i}$ oder $d_{k,i+1}$ gerade sein. Wir folgern also:

(a) Falls i gerade ist, so gilt

$$\begin{aligned} Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) &= (-1)^{\frac{k-i}{2}+1} \cdot \{(-1)^{\frac{i+2}{2}} \cdot [i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [1]\}^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}). \end{aligned}$$

Da $a_{i+2} + a_{i+3} = q^{i+1}$ ist, gilt also

$$\begin{aligned} Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) &= (-1)^{\frac{k-i}{2}+1+\frac{i+2}{2}} \cdot ([i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [1])^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}) \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot ([i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [1])^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}). \end{aligned}$$

(b) Falls i ungerade ist, so gilt

$$\begin{aligned} Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) &= \{(-1)^{\frac{i+1}{2}} \cdot [i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [2]\}^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}) \\ &= (-1)^{\frac{i+1}{2}} \cdot ([i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [2])^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}) \end{aligned}$$

Durch Rekursion über i folgt nun:

(a) Wenn i gerade ist, so gilt

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{i}{2}\cdot\frac{k}{2}+\sum_{j=0}^{\frac{i-2}{2}} j} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i}{2}} [2j-1]^{\sum_{l=2j}^{i+1} a_l} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i-2}{2}} [2j]^{\sum_{l=2j+1}^{i} a_l} \cdot Res(Rest_{k,i-1}, Rest_{k,i}).$$

b) Wenn i ungerade ist, so gilt

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{i-1}{2}\cdot\frac{k}{2}+\sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} j} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} [2j-1]^{\sum_{l=2j}^{i} a_l} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} [2j]^{\sum_{l=2j+1}^{i+1} a_l} \cdot Res(Rest_{k,i-1}, Rest_{k,i}).$$

Für $i = k-1$ ergibt sich dann

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{k-2}{2}\cdot\frac{k}{2}+\sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} j} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} [2j-1]^{\sum_{l=2j}^{k-1} a_l} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} [2j]^{\sum_{l=2j+1}^{k} a_l} \cdot Res(Rest_{k,k-2}, Rest_{k,k-1}).$$

Bezüglich des Vorzeichens läßt sich folgendes sagen: Der Ausdruck $\frac{k-2}{2} \cdot \frac{k}{2}$ ist immer gerade. Weiter gilt

$$\sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} j = \frac{(k-2)\cdot k}{8}.$$

Aus

$$Res_{k,k-1} = R_k^{(k-1)} = (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot [k-1] \cdot [k-3] \cdot \ldots \cdot [1]$$

und $deg\, Res_{k,k-2} = a_k - 1$ folgt, da $a_k - 1$ gerade ist,

$$Res(Res_{k,k-2}, Res_{k,k-1}) = ([k-1] \cdot [k-3] \cdot ... \cdot [1])^{a_k - 1}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} Diskr(\phi_k) &= (-1)^{\frac{(k-2)\cdot k}{8}} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} [2j-1]^{(\sum_{l=2j}^{k} a_l)-1} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} [2j]^{\sum_{l=2j+1}^{k} a_l} \\ &= (-1)^{\frac{(k-2)\cdot k}{8}} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [j]^{(\sum_{l=j+1}^{k} a_l)-\delta(j)} \\ &= (-1)^{\frac{(k-2)\cdot k}{8}} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [j]^{(\sum_{l=j+1}^{k} a_l)-\delta(k-j)}. \end{aligned}$$

Für $1 \leq j \leq k-1$ ist $\sum_{l=j+1}^{k} a_l = deg\, \phi_k - deg\, \phi_j$. Wir folgern

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{(k-2)\cdot k}{8}} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [j]^{deg\, \phi_k - deg\, \phi_j - \delta(k-j)}.$$

Für das Vorzeichen gilt:

$$(-1)^{\frac{(k-2)k}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \equiv 0, 2\, mod\, 8 \\ -1 & \text{wenn } k \equiv 4, 6\, mod\, 8. \end{cases}$$

Damit haben wir für den Fall, daß k gerade ist, Satz (3.2.5) bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall, daß k **ungerade** und $k \geq 3$ ist:

Wir gehen mit der gleichen Strategie wie im Fall k gerade und $k \geq 2$, nämlich Satz 3.1.3 vor:

(3.2.5.7) Zunächst definieren wir

$$\begin{aligned} Rest_{k,0} &= \phi_k - \frac{Z^2}{[1]} \cdot \phi_k^{'}, \\ Rest_{k,1} &= \phi_k^{'} \end{aligned}$$

und für $i \geq 2$

$$Rest_{k,i} = Rest_{k,i-2} - \frac{c_{k,i-2}}{c_{k,i-1}} \cdot Z^{d_{k,i-2}-d_{k,i-1}} \cdot Rest_{k,i-1},$$

wobei $c_{k,i}$ der höchste Koeffizient von $Rest_{k,i}$ und $d_{k,i}$ der Grad von $Rest_{k,i}$ ist.

Bemerkung: Im Fall k gerade hatten die Polynome $\phi_k^{'}$ und $\phi_k^{(0)} = \phi_k - Z \cdot \phi_k^{'}$ gleichen Grad. Wir haben dann $Rest_{k,0} = \phi_k^{'}$ und $Rest_{k,1} = \phi_k^{(0)}$ definiert. Wir hätten auch $Rest_{k,0} = \phi_k^{'}$ und $Rest_{k,1} = \phi_k^{'}$ definieren können. Der Beweis wäre dann allerdings wesentlich aufwendiger gewesen. Im Fall k ungerade ist $deg\, \phi_k - \frac{Z^2}{[1]} \cdot \phi_k^{'} > deg\, \phi_k^{'}$, so daß wir $Rest_{k,0} = deg\, \phi_k - \frac{Z^2}{[1]} \cdot \phi_k^{'}$ und $Rest_{k,1} = \phi_k^{'}$ definieren müssen.

(3.2.5.8) Wie im Fall k gerade definieren wir für $i = 0, \ldots, k-1$ Folgen $(R_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}_0}$, mit der Eigenschaft, daß $R_k^{(i)} = Rest_{k,i}$ ist. Wir definieren die Folge $(R_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}_0}$:

$$\begin{aligned} R_j^{(1)} &= 0 \quad \text{für } j = 0, 1, \\ R_2^{(1)} &= \frac{[1]}{Z}, \\ R_j^{(1)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(1)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(1)} \quad \text{für } j > 2. \end{aligned}$$

Wegen Hilfssatz 3.2.3 (ii) ist $R_k^{(1)} = Rest_{k,1}$.

Die Folge $(R_j^{(0)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ definieren wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned} R_0^{(0)} &= 0, \quad R_1^{(0)} = 1, \quad R_2^{(0)} = -[1], \\ R_j^{(0)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(0)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(0)} \quad \text{für } j \geq 3. \end{aligned}$$

Im folgenden zeigen wir, daß $R_k^{(0)} = Rest_{k,0}$ ist. Dazu definieren wir die Folge $(\tilde{\phi})_{j \in \mathbb{N}_0}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j &= 0 \quad \text{für } j = 0, 1, \\ \tilde{\phi}_2 &= Z, \\ \tilde{\phi}_j &= Z^{a_j} \cdot \tilde{\phi}_{j-1} - [j-1] \cdot \tilde{\phi}_{j-2} \quad \text{für } j \geq 3. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, daß $\tilde{\phi}_1 + R_1^{(0)} = 0 + 1 = \phi_1$ und $\tilde{\phi}_2 + R_2^{(0)} = Z - [1] = \phi_2$ ist. Weil die Rekursionen $\tilde{\phi}_j$ und $R_j^{(0)}$ für $j \geq 2$ übereinstimmen, gilt $\phi_j = \tilde{\phi}_j + R_j^{(0)}$

für $j \geq 1$. Insbesondere ist also $\phi_k = \tilde{\phi}_k + R_k^{(0)}$.
Weiter definieren wir die Folge $(\hat{R}_j^{(1)})_{j\in\mathbb{N}_0}$:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_j^{(1)} &= 0 \quad \text{für} j = 0, 1, \\
\hat{R}_2^{(1)} &= -\frac{Z^2}{[1]} \cdot R_2^{(1)} \;=\; -Z, \\
\hat{R}_j^{(1)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(1)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(1)} \quad \text{für } j \geq 3.
\end{aligned}$$

Wir haben $(\hat{R}_j^{(1)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ so definiert, daß

$$\hat{R}_k^{(1)} = -\frac{Z^2}{[1]} \cdot \phi_k^{'}$$

gilt. Aus $\tilde{\phi}_1 = -\hat{R}_1^{(1)}$, $\tilde{\phi}_2 = -\hat{R}_2^{(1)}$, und da beide Rekursionen für $j > 2$ übereinstimmen, folgern wir, daß $\tilde{\phi}_k = -\hat{R}_k^{(1)}$ ist. Es gilt also

$$Rest_{k,0} = \phi_k - \frac{Z^2}{[1]} \cdot \phi_k^{'} = (\tilde{\phi}_k + R_k^{(0)}) + \hat{R}_k^{(1)} = R_k^{(0)}.$$

Für $i \geq 2$ definieren wir wie im Fall k gerade

$$\begin{aligned}
R_j^{(i)} &= 0 \quad \text{für } j = 0, \ldots, i, \\
R_{i+1}^{(i)} &= -[i] \cdot R_{i-1}^{(i-2)}, \\
R_j^{(i)} &= Z^{a_j} \cdot R_{j-1}^{(i)} - [j-1] \cdot R_{j-2}^{(i)} \quad \text{für } j > i+1.
\end{aligned}$$

(3.2.5.9) Durch Induktion folgt, daß $Rest_{k,i} = R_k^{(i)}$ für $0 \leq i \leq k-1$ ist. Den Induktionsanfang $i = 0, 1$ haben wir bereits in (3.2.5.8) gezeigt. Den Induktionsschritt zeigt man wie im Fall gerade. Daraus folgt: Es gilt

$$c_{k,0} = 1,$$

und für $i \geq 1$ ist

$$c_{k,i} = \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}} \cdot [i] \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [2] & \text{wenn } i \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}} \cdot [i] \cdot [i-2] \cdot \ldots \cdot [1] & \text{wenn } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Weiter ist

$$d_{k,0} = \sum_{j=3}^{k} a_j,$$

und für $i \geq 0$ gilt

$$d_{k,i} = \begin{cases} (\sum\limits_{j=i+2}^{k} a_j) - 1 & \text{wenn } i \text{ ungerade} \\ \\ \sum\limits_{j=i+2}^{k} a_j & \text{wenn } i \text{ gerade.} \end{cases}$$

(3.2.5.10) Wir bestimmen nun die Diskriminante:

Wegen Satz 3.1.3 gilt

$$\begin{aligned} Diskr(\phi_k) &= Res(\phi_k, \phi_k^{'}) \\ &= (-1)^{d_{k,1}\cdot(deg\,\phi_k - d_{k,0})} \cdot [1]^{deg\,\phi_k - d_{k,0}} \cdot Res(Rest_{k,0}, Rest_{k,1}). \end{aligned}$$

Aus $deg\,\phi_k - d_{k,0} = a_2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned} Diskr(\phi_k) &= (-1)^{d_{k,1}} \cdot [1]^{a_2} \cdot Res(Rest_{k,0}, Rest_{k,1}) \\ &= (-1)^{d_{k,1}} \cdot [1]^{a_2} \cdot (-1)^{d_{k,1}\cdot d_{k,2} + d_{k,1}\cdot(d_{k,0} - d_{k,2})} \cdot [1]^{d_{k,0} - d_{k,2}} \cdot Res(Rest_{k,1}, Rest_{k,2}) \\ &= (-1)^{d_{k,1}\cdot(d_{k,0}+1)} \cdot [1]^{a_2 + a_3} \cdot Res(Rest_{k,1}, Rest_{k,2}). \end{aligned}$$

Weil $d_{k,0} + 1 = d_{k,1} + 2$ ist, sind $d_{k,0}$ und $d_{k,1}$ beide gerade oder beide ungerade. Wenn $k \equiv 1\,mod\,4$ ist, so gilt $d_{k,1} \equiv 0\,mod\,2$. Wenn $k \equiv 3\,mod\,4$ ist, so gilt $d_{k,1} \equiv 1\,mod\,2$. Wir folgern

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot [1]^{a_2 + a_3} \cdot Res(Rest_{k,1}, Rest_{k,2}).$$

Für $i \geq 1$ gilt wegen Satz 3.1.3 und Hilfssatz 3.1.2

$$Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) = (-1)^{d_{k,i+1}\cdot d_{k,i}} \cdot c_{k,i+1}^{d_{k,i} - d_{k,i+2}} \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}).$$

Es gilt $d_{k,i} - d_{k,i+2} = a_{i+2} + a_{i+3}$. Wir untersuchen nun das Vorzeichen:
Ist i gerade, so gilt $d_{k,i} - d_{k,i+1} = a_{i+2} + 1$. Da a_{i+2} ungerade ist, folgt daß $d_{k,i} - d_{k,i+1}$ gerade ist. Also sind $d_{k,i}$, $d_{k,i+1}$ beide gerade oder beide ungerade. Durch Fallunterscheidung stellt man fest: Wenn $k - i \equiv 1\,mod\,4$ ist, so gilt $d_{k,i} \equiv 0\,mod\,2$. Wenn $k - i \equiv 3\,mod\,4$ ist, so gilt $d_{k,i} \equiv 1\,mod\,2$.
Ist i ungerade, so gilt $d_{k,i} - d_{k,i+1} = a_{i+2} - 1$. Da a_{i+2} gerade ist, folgt daß $d_{k,i}$ oder $d_{k,i+1}$ gerade sein muß. Wir folgern für $i \geq 1$:

(a) Falls i gerade ist, so gilt

$$\begin{aligned} Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) &= (-1)^{\frac{k-i-1}{2}} \cdot \{(-1)^{\frac{i}{2}} \cdot [i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [1]\}^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}) \\ &= (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot ([i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [1])^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}). \end{aligned}$$

(b) Falls i ungerade ist, so gilt

$$\begin{aligned} Res(Rest_{k,i}, Rest_{k,i+1}) &= \{(-1)^{\frac{i+1}{2}} \cdot [i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [2]\}^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}) \\ &= (-1)^{\frac{i+1}{2}} \cdot ([i+1] \cdot [i-1] \cdot \ldots \cdot [2])^{a_{i+2}+a_{i+3}} \\ &\quad \cdot Res(Rest_{k,i+1}, Rest_{k,i+2}). \end{aligned}$$

Durch Rekursion über i folgt dann, genau wie im Fall k gerade:

(a) Wenn i gerade und $i \geq 2$ ist, so gilt

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{i}{2} \cdot \frac{k-1}{2} + \sum_{j=0}^{\frac{i-2}{2}} j} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i}{2}} [2j-1]^{\sum_{l=2j}^{i+1} a_l} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i-2}{2}} [2j]^{\sum_{l=2j+1}^{i} a_l} \cdot Res(Rest_{k,i-1}, Rest_{k,i}).$$

b) Wenn i ungerade ist, so gilt

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{i-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2} + \sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} j} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} [2j-1]^{\sum_{l=2j}^{i} a_l} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} [2j]^{\sum_{l=2j+1}^{i+1} a_l} \cdot Res(Rest_{k,i-1}, Rest_{k,i}).$$

Da k ungerade ist, erhält man für $i = k-1$ dann

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2} + \sum_{j=0}^{\frac{k-3}{2}} j} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} [2j-1]^{\sum_{l=2j}^{k-1} a_l} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} [2j]^{\sum_{l=2j+1}^{k} a_l} \cdot Res(Rest_{k,k-2}, Rest_{k,k-1}).$$

Aus

$$Rest_{k,k-1} = R_k^{(k-1)} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot [k-1] \cdot [k-3] \cdot \ldots \cdot [2]$$

und $deg\, Rest_{k,k-2} = a_k - 1$ folgt, da $a_k - 1$ ungerade ist,

$$Res(Rest_{k,k-2}, Rest_{k,k-1}) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot ([k-1] \cdot [k-3] \cdot \ldots \cdot [2])^{a_k - 1}.$$

Für das Vorzeichen v von $Diskr(\phi_k)$ gilt dann

$$(-1)^{\frac{k-1}{2} \cdot (\frac{k-1}{2}+1) + \sum_{j=0}^{\frac{k-3}{2}} j} = (-1)^{\sum_{j=0}^{\frac{k-3}{2}} j} = (-1)^{\frac{(k-3)\cdot(k-1)}{8}}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} Diskr(\phi_k) &= (-1)^{\frac{(k-3)\cdot(k-1)}{8}} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} [2j-1]^{\sum_{l=2j}^{k} a_l} \cdot \prod_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} [2j]^{(\sum_{l=2j+1}^{k} a_l) - 1} \\ &= (-1)^{\frac{(k-3)\cdot(k-1)}{8}} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [j]^{(\sum_{l=j+1}^{k} a_l) - \delta(k-j)} \end{aligned}$$

Für $1 \leq j \leq k-1$ ist $\sum_{l=j+1}^{k} a_l = deg\, \phi_k - deg\, \phi_j$. Also gilt

$$Diskr(\phi_k) = (-1)^{\frac{(k-3)\cdot(k-1)}{8}} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [j]^{deg\, \phi_k - deg\, \phi_j - \delta(k-j)}.$$

Aus dem Fall k gerade folgern wir:

$$(-1)^{\frac{((k-1)-2)\cdot(k-1)}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k-1 \equiv 0, 2 \, mod\, 8 \\ -1 & \text{wenn } k-1 \equiv 4, 6 \, mod\, 8. \end{cases}$$

Also gilt

$$(-1)^{\frac{((k-3)\cdot(k-1)}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \equiv 1, 3 \, mod\, 8 \\ -1 & \text{wenn } k \equiv 5, 7 \, mod\, 8. \end{cases}$$

Wir haben damit auch für den Fall, daß k ungerade und $k \geq 3$ ist Satz 3.2.5 bewiesen. □

Kapitel 4

Die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$

In diesem Kapitel versuchen wir nun möglichst viele Informationen über die Primteiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ zu gewinnen. In Abschnitt 4.1 werden wir zunächst einige theoretische Überlegungen anstellen. Anschließend werden wir in Abschnitt 4.2, soweit es möglich ist, empirische Berechnungen solcher Resultanten auflisten. Aufgrund dieser Berechnungen stellen wir dann einige Vermutungen auf.

4.1 Theoretische Untersuchungen

Im vorherigen Kapitel haben wir bereits die Definition einer Resultanten, sowie einige grundlegende Eigenschaften angegeben. Nach Definition ist $\phi_0 = \phi_1 = 1$. Wenn also k oder i gleich 0 oder 1 ist, so gilt $Res(\phi_k, \phi_i) = 1$. Wir betrachten deshalb Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ mit $k, i \geq 2$. Da $Res(\phi_k, \phi_i)$ und $Res(\phi_i, \phi_k)$ sich höchstens im Vorzeichen unterscheiden, untersuchen wir im folgenden immer Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$, wobei $k > i$ ist. Wir bezeichnen in diesem Kapitel den Grad von ϕ_k auch mit d_k. Betrachten wir zunächst die Resultanten mit Indexabstand 1, d.h. $i = k - 1$:

Satz 4.1.1 *Es gilt*

$$Res(\phi_k, \phi_{k-1}) = v_k \cdot \prod_{i=2}^{k-1} [i]^{deg\, \phi_i}.$$

Dabei gilt für das Vorzeichen v_k:

$$v_k = \begin{cases} 1 & wenn\; k \equiv 0, 1, 2, 3 \; mod\; 8 \\ -1 & wenn\; k \equiv 4, 5, 6, 7 \; mod\; 8. \end{cases}$$

Beweis: Da nach Definition $\phi_k = Z^{a_k} \cdot \phi_{k-1} - [k-1] \cdot \phi_{k-2}$ ist, folgern wir aus 3.1.2 und 3.1.3:

$$Res(\phi_k, \phi_{k-1}) \;=\; (-1)^{d_{k-1}(d_k - d_{k-2})} \cdot Res(-[k-1] \cdot \phi_{k-2}, \phi_{k-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{d_{k-1}} \cdot Res(-[k-1] \cdot \phi_{k-2}, \phi_{k-1}) \\
&= (-1)^{2d_{k-1}+d_{k-1}\cdot d_{k-2}} \cdot [k-1]^{d_{k-1}} \cdot Res(\phi_{k-1}, \phi_{k-2}) \\
&= (-1)^{d_{k-1}\cdot d_{k-2}} \cdot [k-1]^{d_{k-1}} \cdot Res(\phi_{k-1}, \phi_{k-2}).
\end{aligned}
$$

Durch Induktion folgt, daß d_k genau dann ungerade ist, wenn $k \equiv 2, 3 \, mod \, 4$ gilt. Daraus folgern wir, daß $d_{k-1} \cdot d_{k-2}$ genau dann ungerade ist, wenn $k \equiv 0 \, mod \, 4$ gilt. Die Behauptung erfolgt nun durch Induktion: Es ist $Res(\phi_3, \phi_2) = [2] \cdot Res(\phi_2, \phi_1) = [2]$. Somit haben wir den Induktionsanfang $k = 3$ bewiesen. Der Induktionsschritt folgt aus dem oben Gezeigten. □

Satz 4.1.2 *Es sei K ein beliebiger Körper. Gegeben seien die Polynome $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot Z^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot Z^i$ in $K[Z]$, wobei die Koeffizienten a_n, $b_m \neq 0$ sind. Seien $x_1, ..., x_n$ die Nullstellen von f und $y_1, ..., y_m$ die Nullstellen von g im algebraischen Abschluß von K. Dann gilt*

$$
Res(f, g) \;\; = \;\; a_n^m \cdot \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = (-1)^{m \cdot n} \cdot b_m^n \cdot \prod_{i=1}^{m} f(y_i).
$$

Einen Beweis findet man in [17].

Folgerung 4.1.3 *Seien f, g wie in Satz 4.1.2 definiert, und sei $f = f_1 \cdot f_2$. Dann gilt*

$$
Res(f_1 \cdot f_2, g) = Res(f_1, g) \cdot Res(f_2, g).
$$

Beweis: Ist etwa $f_1 = c_1 \cdot \prod_{i=1}^{k} (Z - x_i)$, $f_2 = c_2 \cdot \prod_{i=k+1}^{n} (Z - x_i)$, mit $a_n = c_1 \cdot c_2$, so folgt

$$
Res(f_1, g) \cdot Res(f_2, g) = c_1^m \prod_{i=1}^{k} g(x_i) \cdot c_2^m \prod_{i=k+1}^{n} g(x_i) = (a_n)^m \prod_{i=1}^{n} g(x_i) = Res(f, g).
$$

□

Wir können nun die Resultanten mit Indexabstand 2, d.h. $i = k - 2$ bestimmen:

Satz 4.1.4 *Es gilt*

$$
Res(\phi_k, \phi_{k-2}) = w_k \cdot \prod_{i=1}^{k-2} [i]^{deg \, \phi_i + a_k \cdot \delta(k,i)}.
$$

Dabei ist

$$\delta(k,i) = \begin{cases} 0 & \textit{wenn } k \textit{ und } i \textit{ beide gerade oder beide ungerade sind} \\ 1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für das Vorzeichen w_k gilt

$$w_k = \begin{cases} 1 & \textit{wenn} \quad k \equiv 0,1,2,3 \; mod \; 8 \\ -1 & \textit{wenn} \quad k \equiv 4,5,6,7 \; mod \; 8. \end{cases}$$

Beweis: Aus $\phi_k = Z^{a_k} \cdot \phi_{k-1} - [k-1] \cdot \phi_{k-2}$ und $\phi_{k-1} = Z^{a_{k-1}} \cdot \phi_{k-2} - [k-2] \cdot \phi_{k-3}$ folgt

$$\phi_k = (Z^{a_k + a_{k+1}} - [k-1]) \cdot \phi_{k-2} - [k-2] \cdot Z^{a_k} \cdot \phi_{k-3}.$$

Es ist dann

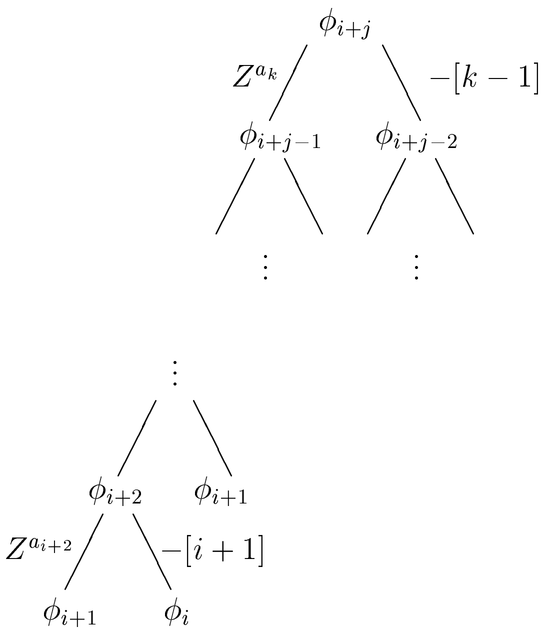
$$\begin{aligned} Res(\phi_k, \phi_{k-2}) &= (-1)^{d_{k-2}(d_k - (d_{k-3} + a_k))} \cdot Res(-[k-2] \cdot Z^{a_k} \cdot \phi_{k-3}, \phi_{k-2}) \\ &= (-1)^{d_{k-2}(a_{k-2} + a_{k-1})} \cdot Res(-[k-2] \cdot Z^{a_k} \cdot \phi_{k-3}, \phi_{k-2}) \\ &= (-1)^{d_{k-2}(q^{k-3}+1)} \cdot [k-2]^{d_{k-2}} \cdot Res(Z^{a_k} \cdot \phi_{k-3}, \phi_{k-2}) \\ &= [k-2]^{d_{k-2}} \cdot Res(Z^{a_k}, \phi_{k-2}) \cdot (-1)^{d_{k-3} \cdot d_{k-2}} \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_{k-3}) \\ &= (-1)^{d_{k-3} \cdot d_{k-2}} \cdot v_{k-2} \cdot [k-2]^{d_{k-2}} \cdot (\phi_{k-2}(0))^{a_k} \cdot \prod_{i=2}^{k-3} [i]^{deg\, \phi_i}. \end{aligned}$$

Aus der Rekursion für ϕ_k folgt

$$\phi_{k-2}(0) = -[k-3] \cdot \phi_{k-4}(0) = \ldots = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}-1} \prod\limits_{l=1}^{\frac{k}{2}-1} [2l-1] & \textit{wenn } k \textit{ gerade} \\ (-1)^{\frac{k+1}{2}} \prod\limits_{l=1}^{\frac{k-3}{2}} [2l] & \textit{wenn } k \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Daraus ergibt sich dann die Behauptung. □

Sei im folgenden $j \geq 2$ und $k = i + j$. Betrachten wir nun folgenden Baum:



An der Spitze des Baumes befindet sich ϕ_{i+j}. Der Baum verzweigt sich gemäß der Rekursion $\phi_{m+1} = Z^{a_{m+2}} \cdot \phi_{m+1} - [m+1] \cdot \phi_m$ nach unten solange bis ϕ_{i+1} oder ϕ_i erreicht wird.

Definition 4.1.5 *Wir definieren die Folgen* $(F_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ *und* $(G_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}_0}$*:*

$$\begin{aligned} F_0^{(i)} &= 0, \quad F_1^{(i)} = 1, \\ F_j^{(i)} &= Z^{a_{i+j}} \cdot F_{j-1}^{(i)} - [i+j-1] \cdot F_{j-2}^{(i)} \quad \textit{für } j \geq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_0^{(i)} &= 1, \quad G_1^{(i)} = 0, \\ G_j^{(i)} &= Z^{a_{i+j}} \cdot G_{j-1}^{(i)} - [i+j-1] \cdot G_{j-2}^{(i)} \quad \textit{für } j \geq 2. \end{aligned}$$

Nach Definition der Polynome $F_j^{(i)}$ und $G_j^{(i)}$ gilt gerade

$$\phi_{i+j} = F_j^{(i)} \cdot \phi_{i+1} + G_j^{(i)} \cdot \phi_i.$$

Folgerung 4.1.6 *Die Resultante $Res(\phi_{i+1}, \phi_i)$ ist ein Teiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$.*

Beweis:

$$\begin{aligned} Res(\phi_k, \phi_i) &= Res(F_j^{(i)} \cdot \phi_{i+1} + G_j^{(i)} \cdot \phi_i, \phi_i) \\ &= Res(F_j^{(i)} \cdot \phi_{i+1}, \phi_i) \\ &= Res(F_j^{(i)}, \phi_i) \cdot Res(\phi_{i+1}, \phi_i). \end{aligned}$$

□

Da wir die Primteiler der Resultanten $Res(\phi_{i+1}, \phi_i)$ bereits kennen, beschränken wir uns also bei der Untersuchung der Primteiler von $Res(\phi_k, \phi_i)$ auf die Resultante $Res(F_j^{(i)}, \phi_i)$. Zu diesem Zwecke versuchen wir die Polynome $F_j^{(i)}$ im folgenden näher zu beschreiben. Zunächst folgern wir für $i = 0$ aus 4.1.5:

Folgerung 4.1.7 *Es ist*

$$F_k^{(0)} = \begin{cases} \phi_k^{(1)} & \textit{wenn } k \textit{ gerade} \\ \phi_k^{(0)} & \textit{wenn } k \textit{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$G_k^{(0)} = \begin{cases} \phi_k^{(0)} & \textit{wenn } k \textit{ gerade} \\ \phi_k^{(q-1)} & \textit{wenn } k \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Also gilt

$$\phi_k = F_k^{(0)} + G_k^{(0)}.$$

Wir betrachten noch einmal die Gleichung $\phi_{i+j} = F_j^{(i)} \cdot \phi_{i+1} + G_j^{(i)} \cdot \phi_i$:

Zum einen können wir für ϕ_{i+j+1} schreiben

$$\phi_{i+(j+1)} = F_{j+1}^{(i)} \cdot \phi_{i+1} + G_{j+1}^{(i)} \cdot \phi_i.$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \phi_{(i+1)+j} &= F_j^{(i+1)} \cdot \phi_{i+2} + G_j^{(i+1)} \cdot \phi_{i+1} \\ &= F_j^{(i+1)} \cdot (Z^{a_{i+2}} \cdot \phi_{i+1} - [i+1] \cdot \phi_i) + G_j^{(i+1)} \cdot \phi_{i+1} \\ &= (F_j^{(i+1)} \cdot Z^{a_{i+2}} + G_j^{(i+1)}) \cdot \phi_{i+1} - [i+1] \cdot F_j^{(i+1)} \cdot \phi_i. \end{aligned}$$

Deshalb vermuten wir:

Hilfssatz 4.1.8 *Es gilt für* $j \geq 0$

$$G_{j+1}^{(i)} = -[i+1] \cdot F_j^{(i+1)}.$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang $j = 0$, $j = 1$:

$j = 0$: Es ist $G_1^{(i)} = 0$ und $F_0^{(i+1)} = 0$.

$j = 1$: Wir berechnen $G_2^{(i)} = Z^{a_{i+2}} \cdot G_1^{(i)} - [i+1] \cdot G_0^{(i)} = -[i+1]$ und $F_1^{(i+1)} = 1$.

Induktionsschritt $j, j+1 \to j+2$:

$$\begin{aligned}
G_{j+2}^{(i)} &= Z^{a_{i+j+2}} \cdot G_{j+1}^{(i)} - [i+j-1] \cdot G_j^{(i)} \\
&= Z^{a_{i+j+2}} \cdot (-[i+1] \cdot F_j^{(i+1)}) - [i+j+1] \cdot (-[i+1] \cdot F_{j-1}^{(i+1)}) \\
&= -[i+1] \cdot (Z^{a_{i+j+2}} \cdot F_j^{(i+1)} - [i+j+1] \cdot F_{j-1}^{(i+1)}) \\
&= -[i+1] \cdot F_{j+1}^{(i+1)}
\end{aligned}$$

□

Weiter läßt sich aus unserer Beobachtung

$$F_{j+1}^{(i)} = Z^{a_{i+2}} \cdot F_j^{(i+1)} + G_j^{(i+1)}$$

vermuten. Mit dem gerade bewiesenen Hilfssatz behaupten wir also:

Satz 4.1.9 *Es gilt*

$$F_{j+1}^{(i)} = Z^{a_{i+2}} \cdot F_j^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_{j-1}^{(i+2)} \quad \textit{für } j \geq 1.$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang $j = 1$, $j = 2$:

$j = 1$:

$$\begin{aligned}
F_2^{(i)} &= Z^{a_{i+2}} \cdot F_1^{(i)} - [i+1] \cdot F_0^{(i)} \\
&= Z^{a_{i+2}} \cdot 1 - [i+2] \cdot 0 \\
&= Z^{a_{i+2}} \cdot F_1^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_0^{(i+2)}.
\end{aligned}$$

$j = 2$:

$$\begin{aligned}
F_3^{(i)} &= Z^{a_{i+3}} \cdot F_2^{(i)} - [i+2] \cdot F_1^{(i)} \\
&= Z^{a_{i+2}} \cdot Z^{a_{i+3}} - [i+2] \cdot 1 \\
&= Z^{a_{i+2}} \cdot F_2^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_1^{(i+2)}.
\end{aligned}$$

Induktionsschritt $j-1, j \to j+1$:

Wir wollen also $F_{j+2}^{(i)} = Z^{a_{i+2}} \cdot F_{j+1}^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_j^{(i+2)}$ zeigen.

Nach Definition ist

$$F_{j+2}^{(i)} = Z^{a_{i+j+2}} \cdot F_{j+1}^{(i)} - [i+j+1] \cdot F_j^{(i)}.$$

Nach Induktionsannahme gilt dann

$$\begin{aligned}
F_{j+2}^{(i)} &= Z^{a_{i+j+2}} \cdot (Z^{a_{i+2}} \cdot F_j^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_{j-1}^{(i+2)}) \\
&\quad -[i+j+1] \cdot (Z^{a_{i+2}} \cdot F_{j-1}^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_{j-2}^{(i+2)}) \\
&= Z^{a_{i+2}} \cdot (Z^{a_{i+j+2}} \cdot F_j^{(i+1)} - [i+j+1] \cdot F_{j-1}^{(i+1)}) \\
&\quad -[i+2] \cdot (Z^{a_{i+j+2}} \cdot F_{j-1}^{(i+2)} - [i+j+1] \cdot F_{j-2}^{(i+2)}) \\
&= Z^{a_{i+2}} \cdot F_{j+1}^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_j^{(i+2)}.
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun den arithmetischen Ausdruck $F_j^{(i)} \cdot G_{j+1}^{(i)} - F_{j+1}^{(i)} \cdot G_j^{(i)}$. Nach Definition gilt

$$F_{j+1}^{(i)} = Z^{a_{i+j+1}} \cdot F_j^{(i)} - [i+j] \cdot F_{j-1}^{(i)}, \qquad G_{j+1}^{(i)} = Z^{a_{i+j+1}} \cdot G_j^{(i)} - [i+j] \cdot G_{j-1}^{(i)}.$$

Setzen wir diese Terme in obigen Ausdruck ein, so erhalten wir

$$F_j^{(i)} \cdot G_{j+1}^{(i)} - F_{j+1}^{(i)} \cdot G_j^{(i)} \;=\; [i+j] \cdot (F_{j-1}^{(i)} \cdot G_j^{(i)} - F_j^{(i)} \cdot G_{j-1}^{(i)}).$$

Für $j = 0$ erhalten wir

$$F_0^{(i)} \cdot G_1^{(i)} - F_1^{(i)} \cdot G_0^{(i)} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Daraus folgern wir die bemerkenswerte Beziehung

$$F_j^{(i)} \cdot G_{j+1}^{(i)} - F_{j+1}^{(i)} \cdot G_j^{(i)} = -[i+j] \cdot [i+j-1] \cdot \ldots \cdot [i+1] = -L_{i+j} \cdot {L_i}^{-1}.$$

Der betrachtete Ausdruck ist also unabhängig von Z. Wenden wir nun Hilfssatz 4.1.8 an, so erhalten wir

Satz 4.1.10 *Es ist*

$$F_j^{(i)} \cdot F_j^{(i+1)} - F_{j+1}^{(i)} \cdot F_{j-1}^{(i+1)} = L_{i+j} \cdot {L_{i+1}}^{-1}.$$

□

Speziell für $i = 0$ erhalten wir:

$$F_j^{(0)} \cdot G_{j+1}^{(0)} - F_{j+1}^{(0)} \cdot G_j^{(0)} = -L_i.$$

Dies entspricht, je nachdem ob j gerade oder ungerade ist, dem Term

$$\phi_j^{(1)} \cdot \phi_{j+1}^{(q-1)} - \phi_{j+1}^{(0)} \cdot \phi_j^{(0)} \quad \text{bzw.} \quad \phi_j^{(0)} \cdot \phi_{j+1}^{(0)} - \phi_{j+1}^{(1)} \cdot \phi_j^{(q-1)}.$$

Beide obigen Ausdrücke entsprechen dem Term

$$(-1)^j \cdot \phi_{j+1} \cdot \phi_j + Z(\phi_j \cdot \phi_{j+1}' - \phi_{j+1} \cdot \phi_j').$$

In Satz 2.2.9 hatten wir gezeigt: Wenn k eine natürliche Zahl und $\wp = (p)$ ein Primideal mit $k \leq deg\, p$ ist, so folgt daß ϕ_k quadratfrei mod $\wp$ ist. Beim Beweis des Satzes hatten wir diesen Term hergeleitet.

Mit Hilfe der Rekursionsgleichung für $F_j^{(i)}$ beweist man durch Induktion:

Satz 4.1.11 *Für jeden Exponenten e eines Summanden von $F_i^{(j)}$ gilt, wenn $j \geq 1$ ist:*

$$e \equiv \begin{cases} 0 \, mod \, q & \textit{für } j \textit{ ungerade} \\ 1 \, mod \, q & \textit{für } i \textit{ gerade, } j \textit{ gerade} \\ -1 \, mod \, q & \textit{für } i \textit{ ungerade, } j \textit{ gerade.} \end{cases}$$

Im nächsten Satz werden die Polynome $F_j^{(i)}$ mit Hilfe der Polynome ϕ_j beschrieben.

Satz 4.1.12 *Sei $j \geq 1$. Dann gilt*

$$F_j^{(i)} = Z^{\delta(j) \cdot a_{i+2}} \cdot \{(\phi_{j-1})^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_j^{(i)}\}.$$

Dabei ist

$$\delta(j+1) = \begin{cases} 0 & \textit{wenn } j \textit{ gerade} \\ 1 & \textit{wenn } j \textit{ ungerade,} \end{cases}$$

und $H_j^{(i)}$ ist folgendermaßen definiert:

$$H_j^{(i)} = 0 \quad \textit{für } j{=}1{,}2$$

$$H_j^{(i)} = Z^{a_{j-1} \cdot q^{i+1}} \cdot H_{j-1}^{(i)} - [i+j-1] \cdot H_{j-2}^{(i)} - \phi_{j-1}^{q^{i+1}} \quad \textit{für } j \geq 3.$$

Beweis durch Induktion:

Nach Definition ist

$$a_i = \tfrac{q^{i-1}+(-1)^i}{q+1}.$$

Daraus folgt:

(i) Wenn j ungerade ist, so gilt $a_{i+j+1} - a_{i+2} = q^{i+1} \cdot a_j$ für alle $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$.

(ii) Wenn j gerade ist, so gilt $a_{i+j+1} + a_{i+2} = q^{i+1} \cdot a_j$ für alle $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$.

Für $i, j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$[i+j] = T^{q^{i+j}} - T = T^{q^{i+j}} - T^{q^j} + (T^{q^j} - T) = (T^{q^i} - T)^{q^j} + (T^{q^j} - T) = [i]^{q^j} + [j].$$

Induktionsanfang $j = 1$, $j = 2$:

$$j = 1: \quad Z^{0 \cdot a_{i+2}} \cdot \{\phi_0^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot 0\} = 1 = F_1^{(i)}.$$

$$j = 2: \quad Z^{1 \cdot a_{i+2}} \cdot \{\phi_1^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot 0\} = Z^{a_{i+2}} = F_2^{(i)}.$$

Induktionsschritt $j-1, j \to j+1$:

(a) Sei j ungerade:

Nach Definition ist

$$F_{j+1}^{(i)} = Z^{a_{i+j+1}} \cdot F_j^{(i)} - [i+j] \cdot F_{j-1}^{(i)}.$$

Nach Induktionsanahme gilt

$$\begin{aligned} F_j^{(i)} &= \phi_{j-1}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_j^{(i)}, \\ F_{j-1}^{(i)} &= Z^{a_{i+2}} \cdot \{\phi_{j-2}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_{j-1}^{(i)}\}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} F_{j+1}^{(i)} &= Z^{a_{i+j+1}}\{\phi_{j-1}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_j^{(i)}\} - [i+j] \cdot Z^{a_{i+2}} \cdot \{\phi_{j-2}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_{j-1}^{(i)}\}. \\ &= Z^{a_{i+2}} \cdot (Z^{a_{i+j+1}-a_{i+2}} \cdot \{\phi_{j-1}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_j^{(i)}\} - [i+j] \cdot \{\phi_{j-2}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_{j-1}^{(i)}\}) \end{aligned}$$

Es ist $a_{i+j+1} - a_{i+2} = a_j \cdot q^{i+1}$. Wir können also schreiben

$$\begin{aligned} F_{j+1}^{(i)} &= Z^{a_{i+2}} \cdot (Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot \phi_{j-1}^{q^{i+1}} - [i+j] \cdot \phi_{j-2}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot H_j^{(i)} \\ &\quad -[i+j] \cdot [i+1] \cdot H_{j-1}^{(i)}). \end{aligned}$$

Mit $[i+j] = [j-1]^{q^{i+1}} + [i+1]$ folgt dann

$$\begin{aligned} F_{j+1}^{(i)} &= Z^{a_{i+2}} \cdot (Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot \phi_{j-1}^{q^{i+1}} - [j-1]^{q^{i+1}} \cdot \phi_{j-2}^{q^{i+1}} - [i+1] \cdot \phi_{j-2}^{q^{i+1}} \\ &\quad +[i+1] \cdot Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot H_j^{(i)} - [i+j] \cdot [i+1] \cdot H_{j-1}^{(i)}) \\ &= Z^{a_{i+2}} \cdot ((Z^{a_j} \cdot \phi_{j-1} - [j-1] \cdot \phi_{j-2})^{q^{i+1}} + [i+1] \\ &\quad \cdot (Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot H_j^{(i)} - [i+j] \cdot H_{j-1}^{(i)} - \phi_{j-2}^{q^{i+1}})) \\ &= Z^{a_{i+2}} \cdot (\phi_j^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_{j+1}^{(i)}). \end{aligned}$$

(b) Entsprechend zeigen wir den Fall j gerade:

Aus

$$F_j^{(i)} = Z^{a_{i+2}} \cdot \{\phi_{j-1}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_j^{(i)}\},$$

$$F_{j-1}^{(i)} = \phi_{j-2}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_{j-1}^{(i)}$$

folgern wir

$$\begin{aligned} F_{j+1}^{(i)} &= Z^{a_{i+j+1}} \cdot F_j^{(i)} - [i+j] \cdot F_{j-1}^{(i)} \\ &= Z^{a_{i+j+1}} \cdot (Z^{a_{i+2}}\{\phi_{j-1}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_j^{(i)}\}) - [i+j] \cdot \{\phi_{j-2}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_{j-1}^{(i)}\}. \end{aligned}$$

Da $a_{i+j+1} + a_{i+2} = q^{i+1} \cdot a_j$ ist, und wiederum mit $[i+j] = [j-1]^{q^{i+1}} + [i+1]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F_{j+1}^{(i)} &= Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot \phi_{j-1}^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot H_j^{(i)} - [j-1]^{q^{i+1}} \cdot \phi_{j-2}^{q^{i+1}} \\ &\quad -[i+1] \cdot \phi_{j-2}^{q^{i+1}} - [i+1] \cdot [i+j] \cdot H_{j-1}^{(i)} \\ &= (Z^{a_j} \cdot \phi_{j-1} - [j-1] \cdot \phi_{j-2})^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot (Z^{a_j \cdot q^{i+1}} \cdot H_j^{(i)} - [i+j] \cdot H_{j-1}^{(i)} - \phi_{j-2}^{q^{i+1}}) \\ &= Z^{a_{i+2}} \cdot (\phi_j^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_{j+1}^{(i)}). \end{aligned}$$

□

Folgerung 4.1.13 *Sei $k = i + j$, $i \geq 2$ und j gerade. Dann gilt:*

Wenn $\begin{cases} i \text{ gerade} \\ \\ i \text{ ungerade} \end{cases}$ *ist, so teilt* $\begin{cases} \left(\prod_{l=1}^{\frac{i}{2}} [2l-1]\right)^{a_{i+2}} \\ \\ \left(\prod_{l=1}^{\frac{i-1}{2}} [2l]\right)^{a_{i+2}} \end{cases}$ *die Resultante $Res(F_j^{(i)}, \phi_i)$.*

Daraus folgt, daß in diesem Fall sogar $Res(\phi_{i+2}, \phi_i)$ ein Teiler von $Res(\phi_k, \phi_i)$ ist.

Beweis:

Nach Satz 4.1.12 ist $F_j^{(i)}$ von der Form

$$F_j^{(i)} = Z^{a_{i+2}} \cdot \tilde{F}_j^{(i)},$$

wobei

$$\tilde{F}_j^{(i)} = (\phi_{j-1})^{q^{i+1}} + [i+1] \cdot H_j^{(i)}$$

ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} Res(F_j^{(i)}, \phi_i) &= Res(Z^{a_{i+2}} \cdot \tilde{F}_j^{(i)}, \phi_i) \\ &= Res(Z^{a_{i+2}}, \phi_i) \cdot Res(\tilde{F}_j^{(i)}, \phi_i) \\ &= (\phi_i(0))^{a_{i+2}} \cdot Res(\tilde{F}_j^{(i)}, \phi_i). \end{aligned}$$

$\phi_i(0)^{a_{i+2}}$ ist der behauptete Teiler. □

Satz 4.1.14 *Sei $i \geq 1$ und $k = i + j > 2 \cdot i$. Dann ist $[k-i]^{deg\,\phi_i}$ ein Teiler der Resultanten $Res(F_j^{(i)}, \phi_i)$.*

Beweis:

Wir definieren die Folge $(B_l)_{l=0}^{j-i}$ durch

$$B_l = F_{i+l}^{j-l} \quad \text{für } l = 0, \cdots, j-i.$$

Nach Satz 4.1.9 ist

$$F_{i+l+2}^{j-l-2} = Z^{a_{j-l}} \cdot F_{i+l+1}^{j-l-1} - [j-l] \cdot F_{i+l}^{j-l}.$$

Also gilt

$$B_{l+2} = Z^{a_{j-l}} \cdot B_{l+1} - [j-l] \cdot B_l \quad \text{für } l = 0, \cdots, j-i-2.$$

Nach Satz 4.1.12 ist $B_1 = F_{i+1}^{(j-1)}$ von der Form

$$B_1 = p_1(Z) \cdot [j] + q_1(Z) \cdot \phi_i,$$

mit $p_1(Z), q_1(Z) \in A[Z]$.

Da $B_2 = Z^{a_j} \cdot B_1 - [j] \cdot B_0$ ist, kann man dann auch B_2 in der Form

$$B_2 = p_2(Z) \cdot [j] + q_2(Z) \cdot \phi_i,$$

mit $p_1(Z), q_1(Z) \in A[Z]$ darstellen.

Weil

$$B_{l+2} = Z^{a_{j-l}} \cdot B_{l+1} - [j-l] \cdot B_l \text{ für } l = 1, ..., j-i-2$$

ist, gibt es also immer $p_l(Z), q_l(Z) \in A[Z]$, so daß

$$B_l = p_l(Z) \cdot [j] + q_l(Z) \cdot \phi_i \text{ für } l = 1, ..., j-i-2$$

gilt. Dann ist also

$$\begin{aligned} Res(F_j^{(i)}, \phi_i) &= Res(B_{j-i}, \phi_i) \\ &= Res(p_{j-i}(Z) \cdot [j] + q_{j-i}(Z) \cdot \phi_i, \phi_i) \\ &= Res(p_{j-i}(Z) \cdot [j], \phi_i) \\ &= [j]^{deg\,\phi_i} \cdot Res(p_{j-i}(Z), \phi_i) \\ &= [k-i]^{deg\,\phi_i} \cdot Res(p_{j-i}(Z), \phi_i). \end{aligned}$$

□

Folgerung 4.1.15 *Sei $k \geq 2$, $k = i + j$ und j gerade. Dann ist der Ausdruck $(\phi_i(0))^{a_{i+2}} \cdot [k-i]^{deg\,\phi_i}$ ein Teiler der Resultanten $Res(F_j^{(i)}, \phi_i)$.*

Beweis: Nach Satz 4.1.12 ist $\frac{1}{Z^{a_{i+2}}} \cdot F_j^{(i)}$ ein Polynom in $A[Z]$. Satz 4.1.14 gilt für $\frac{1}{Z^{a_{i+2}}} \cdot F_j^{(i)}$ anstatt $F_j^{(i)}$ mit der gleichen Argumentation. □

Kommen wir noch einmal auf Satz 4.1.9 zurück. Dieser besagt, daß die Rekursion

$$F_j^{(i)} = Z^{a_{i+2}} \cdot F_{j-1}^{(i+1)} - [i+2] \cdot F_{j-2}^{(i+2)}$$

gilt. Wir schreiben die Rekursion in folgender Form:

(i) j gerade:

$$\frac{1}{Z^{a_{i+2}}} \cdot F_j^{(i)} = F_{j-1}^{(i+1)} - [i+2] \cdot Z^{a_{i+4}-a_{i+2}} \cdot \left(\frac{1}{Z^{a_{i+4}}} \cdot F_{j-2}^{(i+2)}\right).$$

Dabei sind $\frac{1}{Z^{a_{i+2}}} \cdot F_j^{(i)}$ und $\frac{1}{Z^{a_{i+4}}} \cdot F_{j-2}^{(i+2)}$ nach Satz 4.1.12 Polynome in $A[Z]$.

(ii) j ungerade:

$$F_j^{(i)} = Z^{a_{i+2}+a_{i+3}} \cdot \left(\frac{1}{Z^{a_{i+3}}} \cdot F_{j-1}^{(i+1)}\right) - [i+2] \cdot F_{j-2}^{(i+2)}.$$

Dabei ist $\frac{1}{Z^{a_{i+3}}} \cdot F_{j-1}^{(i+1)}$ nach Satz 4.1.12 Polynom in $A[Z]$.

Definition 4.1.16 *Wir definieren die Polynome $\hat{F}_j^{(i)}$ folgendermaßen:*

$$\hat{F}_j^{(i)} = \begin{cases} F_j^{(i)} & \textit{falls } j \textit{ ungerade} \\ \\ \frac{1}{Z^{a_{i+2}}} \cdot F_j^{(i)} & \textit{falls } j \textit{ gerade.} \end{cases}$$

Da $a_{i+4} - a_{i+2} = q^{i+2} - q^{i+1} = (q-1) \cdot q^{i+1}$ und $a_{i+2} + a_{i+3} = q^{i+1}$ gilt, erhalten wir für $\hat{F}_j^{(i)}$ folgende Rekursion:

(i) j gerade:

$$\hat{F}_j^{(i)} = \hat{F}_{j-1}^{(i+1)} - [i+2] \cdot Z^{(q-1)\cdot q^{i+1}} \hat{F}_{j-2}^{(i+2)}.$$

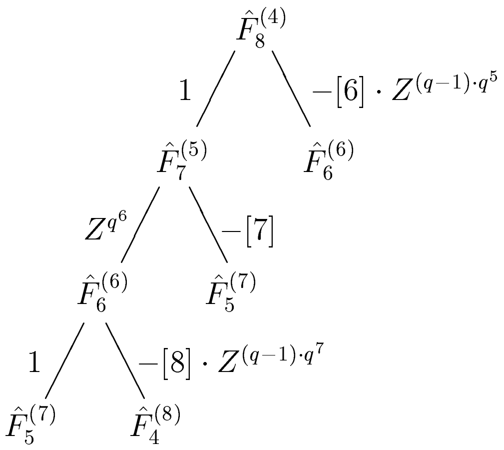
(ii) j ungerade:

$$\hat{F}_j^{(i)} = Z^{q^{i+1}} \cdot \hat{F}_{j-1}^{(i+1)} - [i+2] \cdot \hat{F}_{j-2}^{(i+2)}.$$

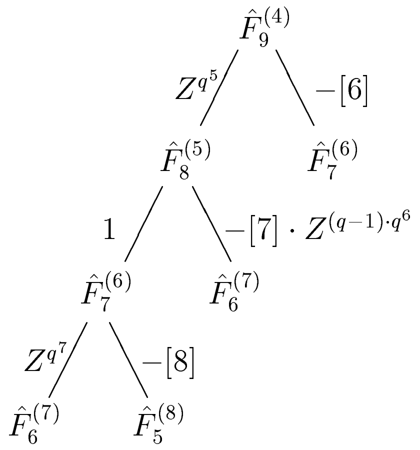
Da $Res(F_j^{(i)}, \phi_i) = Res(Z^{a_{i+2}\cdot\delta(j)}, \phi_i) \cdot Res(\hat{F}_j^{(i)}, \phi_i)$ ist, reicht es in Zukunft also $Res(\hat{F}_j^{(i)}, \phi_i)$ zu betrachten.

Beispiele 4.1.17

(i) Rekursionsbaum, der mit $\hat{F}_8^{(4)}$ beginnt und mit $\hat{F}_5^{(7)}$, $\hat{F}_4^{(8)}$ endet:
(ein Zweig bei $\hat{F}_6^{(6)}$ ist dabei aus Platzgründen weggelassen worden)



(ii) Rekursionsbaum, der mit $\hat{F}_9^{(4)}$ beginnt und mit $\hat{F}_6^{(7)}$, $\hat{F}_5^{(8)}$ endet:
(ein Zweig bei $\hat{F}_7^{(6)}$ ist dabei aus Platzgründen weggelassen worden)



Zu Beginn dieses Kapitels haben wir für festes j Resultanten der Form $Res(\phi_k, \phi_i)$ untersucht. Im Fall $i = 1$ und $i = 2$ haben wir Formeln hergeleitet. Eine andere Möglichkeit ist es, für festes i Resultanten der Form $Res(\phi_k, \phi_i)$ zu betrachten. Wir betrachten nun den Fall $i = 2$. Da $\phi_2 = Z - 1$ linear ist, folgern wir aus Satz 4.1.2, daß $Res(\phi_k, \phi_2) = \phi_k([1])$ gilt. Somit erhalten wir für $Res(\phi_k, \phi_2)$ die Rekursionsformel

$$Res(\phi_k, \phi_2) = [1]^{a_k} \cdot Res(\phi_{k-1}, \phi_2) - [k-1] \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2),$$

mit den Startwerten $Res(\phi_3, \phi_2) = -[2]$ und $Res(\phi_4, \phi_2) = -[2] \cdot [1]^{q^2-q+1}$.

Die so durch die Rekursionsformel gewonnenen Resultanten haben also eine Darstellung als Summe von Produkten von Klammerausdrücken. Für $i = 5$ und $i = 6$ können wir die verschiedenen Summanden zu einem einzigen Summanden zusammenfassen, so daß wir alle Primteiler daraus ablesen können. Es gilt

$$Res(\phi_5, \phi_2) = [2] \cdot [3] \quad \text{und} \quad Res(\phi_6, \phi_2) = \frac{[2]^{q^3+1} \cdot [4]}{[1]^{q^3-q^2+q-1}}.$$

Wir können nun folgende allgemeine Aussagen für Resultanten dieser Art machen:

Satz 4.1.18 (a) *Die Folge $(b_{1,k}^{(2)})_{k \geq 3}$ sei definiert durch:*

$$\begin{aligned} b_{1,3}^{(2)} &= 1, \\ b_{1,4}^{(2)} &= 1 + a_4, \\ b_{1,k}^{(2)} &= b_{1,k-2}^{(2)} + 1 \quad \textit{für } k \geq 5. \end{aligned}$$

Dann ist $[1]^{b^{(2)}_{1,k}}$ *ein Teiler von* $Res(\phi_k, \phi_2)$

(b) *Weiter definieren wir* $(b^{(2)}_{2,k})_{k\geq 3}$ *wie folgt:*

$$\begin{aligned} b^{(2)}_{2,k} &= 1 \quad \textit{für } k = 3,4,5 \\ b^{(2)}_{2,6} &= q^3 + 2, \\ b^{(2)}_{2,k} &= b^{(2)}_{2,k-4} + 1 \quad \textit{für } k \geq 7. \end{aligned}$$

Dann ist $\left(\frac{[2]}{[1]}\right)^{b^{(2)}_{2,k}}$ *ein Teiler von* $Res(\phi_k, \phi_2)$.

(c) *Sei* p *ein Primteiler von* $Res(\phi_k, \phi_2)$ *in* $\mathbb{F}_q[T]$ *mit* $\deg p = k$. *Dann ist* p *auch ein Teiler von* $Res(\phi_n, \phi_2)$, *wenn* n *größer als* k *ist.*

Beweis:

(a) Induktionsanfang $k = 3$, $k = 4$:

Für $k = 3$ und $k = 4$ sehen wir anhand der Formeln die Richtigkeit der Aussage.

Induktionsschritt $k-2, k-1 \to k$:

Es ist

$$Res(\phi_k, \phi_2) = \underbrace{[1]^{a_k} \cdot Res(\phi_{k-1}, \phi_2)}_{:=S_1} - \underbrace{[k-1] \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2)}_{:=S_2}.$$

Sei k gerade:
Nach Induktionsannahme ist $[1]^{b^{(2)}_{1,k-1}}$ Teiler von $Res(\phi_{k-1}, \phi_2)$. Da $a_k \geq a_4$ gilt, ist dann $[1]^{b^{(2)}_{1,k-1}+a_4} = [1]^{b^{(2)}_{1,k}}$ ein Teiler von S_1. Weiter ist $[1]^{b^{(2)}_{1,k-2}}$ nach Induktionsvoraussetzung ein Teiler von $Res(\phi_{k-2}, \phi_2)$. Da $[1]$ Teiler von $[k-1]$ ist, folgt daß $[1]^{b^{(2)}_{1,k-2}+1} = [1]^{d_k}$ ein Teiler von S_2 ist. Also ist $[1]^{b^{(2)}_{1,k}}$ Teiler von $Res(\phi_k, \phi_2)$.
Entsprechend argumentieren wir im Fall k ungerade.

(b) Den Induktionsanfang $k = 3, 4, 5, 6$ erkennen wir durch Betrachtung der bereits angegebenen Darstellung der Resultanten.

Induktionsschritt $k-1 \to k$:

Wie wir wissen ist

$$Res(\phi_{k-1}, \phi_2) = [1]^{a_{k-1}} \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2) - [k-2] \cdot Res(\phi_{k-3}, \phi_2).$$

Außerdem gilt $\quad [k-1] = [k-2] + [1]^{q^{k-2}}$.

Beide obige Aussagen in

$$Res(\phi_k, \phi_2) = [1]^{a_k} \cdot Res(\phi_{k-1}, \phi_2) - [k-1] \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2)$$

eingesetzt, ergibt dann

$$\begin{aligned} Res(\phi_k, \phi_2) \quad = \quad & [1]^{a_k + a_{k-1}} \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2) - [1]^{a_k} \cdot [k-2] \cdot Res(\phi_{k-3}, \phi_2) \\ & -[k-2] \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2) - [1]^{q^{k-2}} \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2). \end{aligned}$$

Da $a_k + a_{k-1} = q^{k-2}$ ist, folgern wir

$$Res(\phi_k, \phi_2) = -[k-2] \cdot ([1]^{a_k} \cdot Res(\phi_{k-3}, \phi_2) + Res(\phi_{k-2}, \phi_2)).$$

Weil

$$Res(\phi_{k-2}, \phi_2) = [1]^{a_{k-2}} \cdot Res(\phi_{k-3}, \phi_2) - [k-3] \cdot Res(\phi_{k-4}, \phi_2)$$

gilt, erhalten wir

$$Res(\phi_k, \phi_2) = -[k-2]((([1]^{a_k} + [1]^{a_{k-2}}) \cdot Res(\phi_{k-3}, \phi_2) - [k-3] \cdot Res(\phi_{k-4}, \phi_2)).$$

Nun ist $\quad [1]^{a_k} + [1]^{a_{k-2}} = [1]^{a_{k-2}} \cdot ([1]^{q^{k-2} - q^{k-3}} + 1)$.

Durch Umformung erhalten wir

$$[1]^{q^{k-2} - q^{k-3}} + 1 = \left(\frac{[2]}{[1]}\right)^{q^{k-3}}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} Res(\phi_k, \phi_2) &= -[k-2] \cdot \left(\frac{[2]}{[1]}\right)^{q^{k-3}} \cdot [1]^{a_{k-2}} \cdot Res(\phi_{k-3}, \phi_2) \\ &\quad +[k-2] \cdot [k-3] \cdot Res(\phi_{k-4}, \phi_2). \end{aligned}$$

Es ist $q^{k-3} > b_{2,k}^{(2)}$ für $k > 6$. Weiter ist nach Induktionsanahme $([2] \cdot [1]^{-1})^{b_{2,k-4}^{(2)}}$ ein Teiler von $Res(\phi_{k-4}, \phi_2)$. Da $[2]$ entweder ein Teiler von $[k-2]$ oder von $[k-3]$ ist und nach Definition $b_{2,k}^{(2)} = b_{2,k-4}^{(2)} + 1$ gilt, folgt die Behauptung.

(c) Es gilt

$$Res(\phi_{k+1}, \phi_2) = [1]^{a_{k+1}} \cdot Res(\phi_k, \phi_2) - [k] \cdot Res(\phi_{k-1}, \phi_2).$$

Nach Definition von $[k]$ muß, da $deg\, p = k$ ist, p ein Teiler von $[k]$ sein. Also ist p auch ein Teiler von $Res(\phi_{k+1}, \phi_2)$. In der gleichen Weise folgern wir durch Induktion die Richtigkeit der Aussage für $n > k + 1$. □

4.2 Empirische Untersuchungen

Im folgenden werden wir nun versuchen, möglichst viele empirische Aussagen über die Primteiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ zu machen, wobei $k > i + 2$ ist.

4.2.1 Verfahrensweise

Wir teilen die Primteiler einer Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ in Abhängigkeit ihres Grades in drei Klassen ein: Sei K_1 die Klasse der Primteiler, deren Grad $\leq i$ ist. Wie wir bereits bewiesen haben, liegen unter anderem alle Primteiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_{k-1})$ darin. Wir werden feststellen, daß diese Klasse bereits die meisten Primteiler der Resultanten umfasst. Sei K_2 die Klasse der Primteiler p, mit $i < deg\, p \leq k$. Ist $k > 2i$, so sind nach Satz 4.1.14 unter anderem alle Primteiler des Ausdrucks $[k-i]^{deg\, \phi_i}$ darin enthalten, deren Grad größer als i ist. Die restlichen Primteiler, also die, deren Grad größer als k ist, fassen wir in einer Klasse, die wir mit K_3 bezeichnen, zusammen. Bisher kennen wir keine solchen Ausreißer.
Betrachtet man für $q = 2$ die Resultanten vom Typ $Res(\phi_k, \phi_2)$, so stellt man fest, daß deren Grad für größer werdendes k sehr schnell wächst. Zum Beispiel ist $deg_T\ Res(\phi_{18}, \phi_2)$ schon 174762. Wählt man $q > 2$ oder betrachtet man Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ für $i > 2$, so ist der Grad dieser Resultanten noch um ein

Vielfaches größer. Daher ergeben sich bei der Berechnung der Primteiler solcher Resultanten im allgemeinen große Laufzeitprobleme.
Wir haben bereits bewiesen, daß $[l] = T^{q^l} - T$ gerade das Produkt aller normierten Primteiler ist, deren Grad l teilt. Daraus erkennen wir, daß bei wachsendem l, die Anzahl der Primteiler von $[l]$, deren Grad l ist, steil ansteigt. Die Berechnung von Primteilern mit größerem Grad dauert also um ein Vielfaches länger. Da in unserem Fall fast alle Primteiler in den Klassen K_1 und K_2 liegen, benötigen wir ein Verfahren, das zunächst einmal die kleineren Primteiler bestimmt und anschließend, falls vorhanden, auch noch den einen oder anderen Ausreißer ermittelt, solange dies von der Laufzeit her sinnvoll erscheint.
Wir werden die Primteiler der Resultanten nicht explizit berechnen, sondern wir ermitteln für jeden Grad die Anzahl der Primteiler. Darüber hinaus werden wir angeben, in welcher Vielfachheit ein Primteiler in der Primfaktorzerlegung der Resultanten höchstens auftritt.
Bei den Berechnungen werden wir von den arithmetischen Funktionen $[i]$ wie folgt Gebrauch machen: Wir schreiben statt $Res(\phi_k, \phi_i)$ kurz Res. Sei

$$S_{1,0} = [1], \quad P_{1,0} = Res.$$

Dann sei

$$S_{1,1} = ggT(S_{1,0}, P_{1,0}), \quad P_{1,1} = \frac{P_{1,0}}{S_{1,1}}.$$

Induktiv definieren wir nun: Wenn $S_{1,i}$, $P_{1,i}$ berechnet sind, so sei

$$S_{1,i+1} = ggT(S_{1,i}, P_{1,i}), \quad P_{1,i+1} = \frac{P_{1,i}}{S_{1,i+1}}.$$

Dieses Verfahren wird bis zu dem i_1 fortgesetzt, für das gilt

$$S_{1,i_1+1} = 1.$$

Anschließend definieren wir die Polynome $S_{2,0}$ und $P_{2,0}$, nämlich

$$S_{2,0} = [2], \quad P_{2,0} = P_{1,i_1}$$

und dann induktiv: Wenn $S_{2,i}$, $P_{2,i}$ berechnet sind, so sei

$$S_{2,i+1} = ggT(S_{2,i}, P_{2,i}), \quad P_{2,i+1} = \frac{P_{2,i}}{S_{2,i+1}}.$$

Das Verfahren wird bis zu dem i_2 fortgesetzt, für das gilt

$$S_{2,i_2+1} = 1.$$

Dann definiert man analog die Polynome $S_{3,0}$, $P_{3,0}$, $S_{3,1}$, $P_{3,1}$ usw. Man setzt das Verfahren bis zu einem Paar (j_0, i_0) fort, so daß der Algorithmus in erträglich

kurzer Zeit S_{j_0,i_0} berechnet.
$S_{1,1}$ enthält alle Primteiler von Res vom Grad 1, die mindestens einmal in Res vorkommen. $S_{1,2}$ enthält alle Primteiler von Res vom Grad 1, die mindestens zweimal in Res vorkommen. Allgemein gilt: $S_{1,i}$ enthält alle Primteiler von Res vom Grad 1, die mindestens i-mal in Res vorkommen. Das Verfahren geht bis i_1. Res hat dann genau $deg\, S_{1,i_1}$ Primteiler vom Grad 1, mit der Vielfachheit i_1, $deg\, S_{1,i_1-1} - deg\, S_{1,i_1}$ Primteiler vom Grad 1 der Vielfachheit $i_1 - 1, \ldots, deg\, S_{1,1} - deg\, S_{1,2}$ Primteiler von Res der Vielfachheit 1. Daraus folgt: Es gibt $\sum_{i=1}^{i_1} deg\, S_{1,i}$ Primteiler vom Grad 1, von Res, wobei jeder Primteiler mit seiner Vielfachheit in Res gezählt wird. Allgemein gilt: Die Anzahl der Primteiler von Res vom Grade j ist gleich

$$\frac{1}{j} \cdot \sum_{i=1}^{i_j} deg\, S_{j,i},$$

wobei jeder Primteiler mit seiner Vielfachheit in Res gezählt wird.
Wir modifizieren den Algorithmus noch ein wenig, um Polynome mit niedrigerem Grad zu erhalten. Wir haben bisher

$$S_{j,0} = [j], \quad P_{j,0} = P_{j-1,i_{j-1}}$$

definiert. Nun ist

$$S_{j,1} = ggT([j], P_{j,0}).$$

Es ist aber

$$ggT([j], P_{j,0}) = ggT([j] - Q \cdot P_{j,0}, P_{j,0})$$

für ein beliebiges $Q \in \mathbb{F}_q[T]$. Da $[j] = T^{q^j} - T$ ist, bilden wir den Rest der Division von T^{q^j} durch $P_{j,0}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} R_{1,j} &= Rest(T^q : P_{j,0}), \\ R_{2,j} &= Rest(R_{1,j}^q : P_{j,0}), \\ &\vdots \\ R_{j,j} &= Rest(R_{j-1,j}^q : P_{j,0}). \end{aligned}$$

Statt $[j]$ nehmen wir dann $R_{j,j} - T$, also $S_{j,0} = R_{j,j} - T$. Die übrigen Schritte geschehen wie vorher auch. Dieses Verfahren hat auch folgenden Vorteil: Wenn $P_{j+1,0} = P_{j,0}$ ist, d.h., die Resultante keinen Primteiler vom Grad j hat, so gilt

$$R_{1,j+1} = R_{1,j}, \ldots, R_{j,j+1} = R_{j,j} \text{ und } R_{j+1,j+1} = Rest(R_{j,j}^q : P_{j,0}).$$

Es werden damit viele Rechnungen gespart.

4.2.2 Die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$

Wir haben im vorigen Abschnitt bereits festgestellt, daß wir die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$ rekursiv durch

$$Res(\phi_k, \phi_2) = [1]^{a_k} \cdot Res(\phi_{k-1}, \phi_2) - [k-1] \cdot Res(\phi_{k-2}, \phi_2)$$

bestimmen können. Die so berechnete Resultante formen wir zu einem geordneten Polynom in T um. Zu beachten ist, daß bei dieser Umformung, je größer k wird, der Rechenaufwand um ein Vielfaches steigt. Um unnötige Laufzeitprobleme zu vermeiden, sollten deshalb bei der Berechnung von $Res(\phi_k, \phi_2)$ die Resultanten $Res(\phi_{k-1}, \phi_2)$ und $Res(\phi_{k-2}, \phi_2)$ bereits als geordnete Polynome in T abgespeichert vorliegen. Die Primteiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$ kennen wir für $k \leq 6$ bereits. Mit dem oben angegebenen Algorithmus erhalten wir für $q = 2$ und $k \geq 7$ folgende Ergebnisse:

Wir erklären die Notation unserer empirischen Berechnungen anhand der Resultanten $Res(\phi_7, \phi_2)$.

$Res(\phi_7, \phi_2)$:
$deg\, 84$
$[5] \cdot [2]^2 \cdot [1]$
(7,2,1)
(30,1,1)

Zuerst geben wir den Grad der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$ an. Die Resultante $Res(\phi_7, \phi_2)$ hat den Grad 84. Anschließend geben wir das Produkt aller Primteiler an, die wir nach den bisher bewiesenen Sätzen aus 4.1 schon bestimmen können. Dieses Produkt lautet $[k-2] \cdot [2]^{b^{(2)}_{2,k}-1} \cdot [1]^{b^{(2)}_{1,k}-b^{(2)}_{2,k}}$ wenn k gerade ist und $[k-2] \cdot [2]^{b^{(2)}_{2,k}} \cdot [1]^{b^{(2)}_{1,k}-b^{(2)}_{2,k}-1}$ wenn k ungerade ist. Für $k = 7$ ist das Produkt also $[5] \cdot [2]^2 \cdot [1]$. Die Ausdrücke der Form (a, b, c) beziehen sich dann auf den Term

$$Res^{(2)}_k = \begin{cases} \frac{Res(\phi_k,\phi_2)}{[k-2]\cdot[2]^{b^{(2)}_{2,k}-1}\cdot[1]^{b^{(2)}_{1,k}-b^{(2)}_{2,k}}} & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ \frac{Res(\phi_k,\phi_2)}{[k-2]\cdot[2]^{b^{(2)}_{2,k}}\cdot[1]^{b^{(2)}_{1,k}-b^{(2)}_{2,k}-1}} & \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ein Ausdruck der Form (a, b, c) bedeutet, daß genau b Primteiler von $Res^{(2)}_k$, mit ihrer Vielfachheit in $Res^{(2)}_k$ gezählt, den Grad a haben. Mindestens ein Primteiler tritt in der Vielfachheit c auf. Jeder Primteiler tritt höchstens mit der Vielfachheit c auf. Der Ausdruck $(7, 2, 1)$ bedeutet also, daß es genau 2 Primteiler vom Grad 7 gibt, die $Res^{(2)}_k$ teilen. Beide Primteiler sind verschieden. Der Ausdruck $(30, 1, 1)$ besagt, daß es genau einen Primteiler vom Grad 30 gibt, der $Res^{(2)}_k$ teilt.

Für $k \geq 16$ wurden die Primteiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$ nur bis zu einem bestimmten Grad ermittelt. Das verbleibende Restpolynom nennen wir R. Die Notationen bis $deg\, l$ und $deg\, R = m$ bedeuten, daß alle Primteiler der Resultanten, deren Grad kleiner als l ist, bestimmt wurden und daß das Restpolynom den Grad m hat.

$Res(\phi_8, \phi_2)$:
$deg\, 162$
$[6] \cdot [2] \cdot [1]^4$
(7,2,1)
(8,1,1)
(64,1,1)

$Res(\phi_9, \phi_2)$:
$deg\, 340$
$[7] \cdot [2]^2 \cdot [1]$
(8,1,1)
(9,6,1)
(12,2,1)
(19,2,1)
(39,2,1)

$Res(\phi_{10}, \phi_2)$:
$deg\, 682$
$[8] \cdot [2]^{10} \cdot [1]^{-4}$
(7,2,1)
(9,6,1)
(10,1,1)
(24,2,1)
(29,2,1)
(105,2,1)

$Res(\phi_{11}, \phi_2)$:
$deg\, 1356$
$[9] \cdot [2]^3 \cdot [1]$
(7,2,1)
(8,1,1)
(9,2,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(18,1,1)
(26,2,1)
(34,1,1)
(58,2,1)
(91,2,1)
(178,2,1)

$Res(\phi_{12}, \phi_2)$:
$deg\, 2730$
$[10] \cdot [2]^2 \cdot [1]^5$
(7,2,1)
(8,1,1)
(9,6,1)
(11,2,1)
(12,2,1)
(41,2,1)
(56,1,1)
(169,2,1)
(229,2,1)
(632,1,1)

$Res(\phi_{13}, \phi_2)$:
$deg\, 5460$
$[11] \cdot [2]^3 \cdot [1]^2$
(7,2,1)
(8,1,1)
(9,6,1)
(10,1,1)
(12,2,1)
(13,6,1)
(16,1,1)
(92,2,1)
(228,1,1)
(426,1,1)
(2354,1,1)

$Res(\phi_{14}, \phi_2)$:
$deg\, 10914$
$[12] \cdot [2]^{11} \cdot [1]^{-3}$
(7,2,1)
(8,1,1)
(9,6,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(13,6,1)

$Res(\phi_{15}, \phi_2)$:
$deg\, 21844$
$[13] \cdot [2]^4 \cdot [1]^2$
(7,2,1)
(8,1,1)
(9,6,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(12,2,1)

$Res(\phi_{16}, \phi_2)$:
$deg\, 43690$
$[14] \cdot [2]^3 \cdot [1]^6$
(7,16,8)
(8,1,1)
(9,6,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(12,2,1)

(14,8,1)
(120,1,1)
(122,1,1)
(1249,2,1)
(1852,1,1)
(1890,1,1)

(14,8,1)
(15,16,1)
(31,2,1)
(89,1,1)
(114,1,1)
(416,1,1)
(825,2,1)
(1718,2,1)
(2180,1,1)
(2556,2,1)

(13,6,1)
(14,2,1)
(15,16,1)
(16,2,1)
(188,1,1)
bis deg 640
deg R=26486

$Res(\phi_{17}, \phi_2)$:
$deg\, 87372$
$[15] \cdot [2]^4 \cdot [1]^3$
(7,2,1)
(8,1,1)
(9,6,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(12,2,1)
(13,6,1)
(14,8,1)
(15,16,1)
(16,2,1)
(17,20,1)
(22,1,1)
bis deg 165
deg R=53610

$Res(\phi_{18}, \phi_2)$:
$deg\, 174762$
$[16] \cdot [2]^{12} \cdot [1]^{-2}$
(7,2,1)
(8,8,8)
(9,6,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(12,2,1)
(13,6,1)
(14,8,1)
(15,16,1)
(17,20,1)
(18,23,1)
bis deg 26
deg R=107810

$Res(\phi_{19}, \phi_2)$:
$deg\, 34$
$[17] \cdot [2]^5 \cdot [1]^3$
(7,2,1)
(8,1,1)
(9,6,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(12,2,1)
(13,6,1)
(14,8,1)
(15,16,1)
(16,2,1)
(18,23,1)
(19,42,1)
bis deg 21
deg R=216620

Für die bisher gemachten Berechnungen mit $q = 2$ stellen wir nun fest:

(i) Das Polynom $Res_k^{(2)}$, $k \geq 3$, enthält keine Primteiler vom Grad 1 oder 2.

(ii) Wir beschreiben nun die Primteiler p des Polynoms $Res_k^{(2)}$ mit $2 < deg\, p < k$. Wir stellen empirisch folgendes fest:

  (a) $Res_k^{(2)}$ enthält für die berechneten Beispiele, bis auf zwei Ausnahmen, keine Primteiler vom Grad $k - 2$. Die Ausnahmen sind $k = 11$ und $k = 16$. Das Polynom $Res_{11}^{(2)}$ hat zwei verschiedene Primteiler vom Grad 9, und das Polynom $Res_{16}^{(2)}$ hat zwei verschiedene Primteiler vom Grad 14.

(b) Wenn $deg\,p \neq k-2$ und wenn p kein Teiler von $Res^{(2)}_{deg\,p}$ ist, so ist p auch kein Teiler von $Res^{(2)}_k$. Ist dagegen p ein Teiler von $Res^{(2)}_{deg\,p}$, so ist p immer ein einfacher Teiler von $Res^{(2)}_{deg\,p}$ und es gilt folgendes:

(1) Wenn $deg\,p$ kein Teiler von $k-2$ ist, dann ist p auch ein Teiler von $Res^{(2)}_k$, und zwar nur einfach.

(2) Wenn $deg\,p$ ein echter Teiler von $k-2$ ist, dann ist p auch ein Teiler von $Res^{(2)}_k$, und zwar mit einer Vielfachheit, die eine Zweier-Potenz ist. Folgende solche Fälle wurden bereits berechnet:
k=16: Ist $deg\,p = 7$, so ist p^8 ein Teiler von $Res^{(2)}_{16}$.
k=18: Ist $deg\,p = 8$, so ist p^8 ein Teiler von $Res^{(2)}_{18}$.
Zusätzlich wurden noch die folgenden Fälle berechnet:
k=20: Ist $deg\,p = 9$, so ist p^8 ein Teiler von $Res^{(2)}_{20}$.
k=22: Ist $deg\,p = 10$, so ist p^8 ein Teiler von $Res^{(2)}_{22}$.
k=23: Ist $deg\,p = 7$, so ist p ein Teiler von $Res^{(2)}_{23}$.
k=24: Ist $deg\,p = 11$, so ist p^2 ein Teiler von $Res^{(2)}_{24}$.

(iii) Für $k = 3, 4, 5, 6$ hat $Res^{(2)}_k$ keine Primteiler vom Grad k. Nach dem in (ii) bereits festgestellten, gibt es in den berechneten Beispielen dann kein $k \geq 3$, so daß $Res^{(2)}_k$ einen Primteiler p vom Grad $3, 4, 5, 6$ hat.

(iv) Für den Grad der Resultanten $Res(\phi_j, \phi_2)$, mit $3 < j < 26$, gilt

$$deg\,Res(\phi_j, \phi_2) = 2 \cdot deg\,Res(\phi_{j-1}, \phi_2) + f_j.$$

Dabei ist

$$f_j = \begin{cases} 18 & \text{wenn } j \equiv 0 \; mod\; 6 \\ 0 & \text{wenn } j \equiv 1 \; mod\; 6 \\ -6 & \text{wenn } j \equiv 2 \; mod\; 6 \\ 16 & \text{wenn } j \equiv 3 \; mod\; 6 \\ 2 & \text{wenn } j \equiv 4 \; mod\; 6 \\ -8 & \text{wenn } j \equiv 5 \; mod\; 6. \end{cases}$$

Folgende Berechnungen wurden für $q = 3$ durchgeführt:

$Res(\phi_7, \phi_2)$:	$Res(\phi_8, \phi_2)$:	$Res(\phi_9, \phi_2)$:
$deg\,819$	$deg\,2406$	$deg\,7380$
$[5] \cdot [2]$	$[6] \cdot [2] \cdot [1]^8$	$[7] \cdot [2]^2 \cdot [1]$
(11,6,1)	(54,3,1)	(9,14,1)
(28,3,1)	(129,2,1)	(231,2,1)
(136,3,1)	(408,3,1)	(270,6,1)
		(988,3,1)

$Res(\phi_{10}, \phi_2)$:
deg 22143
$[8] \cdot [2]^{29} \cdot [1]^{-19}$
(9,14,1)
(10,12,1)
(58,3,1)
(80,3,1)
(96,3,1)
bis deg 100
deg R=14430

$Res(\phi_{11}, \phi_2)$:
deg 66375
$[9] \cdot [2]^{3} \cdot [1]$
(10,12,1)
(11,36,1)
(16,3,1)
(48,3,1)
(62,3,1)
bis deg 92
deg R=45768

$Res(\phi_{12}, \phi_2)$:
deg 199290
$[10] \cdot [2]^{2} \cdot [1]^{9}$
(9,14,1)
(11,36,1)
(12,32,1)
bis deg 25
deg R=139290

$Res(\phi_{13}, \phi_2)$:
deg 597870
$[11] \cdot [2]^{3} \cdot [1]^{2}$
(9,14,1)
(10,12,1)
(12,32,1)
bis deg 13
deg R=420060

Folgende Berechnungen wurden für $q = 5$ durchgeführt:

$Res(\phi_7, \phi_2)$:
deg 16275
$[5] \cdot [2]^{2}$
(16,5,1)
(32,10,1)
(2540,5,1)

$Res(\phi_8, \phi_2)$:
deg 80880
$[6] \cdot [2] \cdot [1]^{22}$
(8,20,1)
(20,4,1)
(24,5,1)
(40,4,1)
bis deg 164
deg R=64600

$Res(\phi_9, \phi_2)$:
deg 406900
$[7] \cdot [2]^{2} \cdot [1]$
(8,20,1)
bis deg 15
deg R=328560

Da der Rechenaufwand für $q = 3$ und $q = 5$ wesentlich größer ist als bei $q = 2$, sind nur wenige Beispiele berechnet worden. Deshalb sind die empirischen Belege für entsprechende Vermutungen für $q = 3, 5$ wie bei $q = 2$ zu kümmerlich, doch Widersprüche der Vermutungen gibt es keine. Für den Grad der berechneten Resultanten stellen wir für $q = 2, 3, 5$ fest:

$$deg\, Res(\phi_j, \phi_2) = q \cdot deg\, Res(\phi_{j-1}, \phi_2) + f_j.$$

Dabei ist

$$f_j = \begin{cases} (q-1)\cdot q^4 + q & \text{wenn } j \equiv 0 \, mod \, 6 \\ 0 & \text{wenn } j \equiv 1 \, mod \, 6 \\ -((q-1)\cdot q^3 - q) & \text{wenn } j \equiv 2 \, mod \, 6 \\ (q-1)\cdot q^4 & \text{wenn } j \equiv 3 \, mod \, 6 \\ q & \text{wenn } j \equiv 4 \, mod \, 6 \\ -((q-1)\cdot q^3) & \text{wenn } j \equiv 5 \, mod \, 6. \end{cases}$$

4.2.3 Die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_3)$

Da ϕ_3 kein lineares Polynom ist, können wir nicht, wie für die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$, direkt eine Rekursionsformel angeben. Wir werden deshalb die Resultanten direkt als Determinante der entsprechenden Matrix berechnen. Dies ist aber sehr schwierig: Nach Satz 2.2.3 gilt

$$deg\, \phi_k = \begin{cases} \frac{1-q^k}{1-q^2} & \text{falls } k \equiv 0 \, mod \, 2 \\ \\ \frac{q-q^k}{1-q^2} & \text{falls } k \equiv 1 \, mod \, 2. \end{cases}$$

Wenn $q = 2$ bzw. $q = 3$ ist, so ist $deg\, \phi_{15} = 10922$ bzw. $deg\, \phi_{15} = 1793613$. Für $k = 15$ und $q = 2$ müssen wir also die Determinante einer $(10924) \times (10924)$-Matrix berechnen. Für $k = 15$ und $q = 3$ müssen wir sogar die Determinante einer $(1793615) \times (1793615)$-Matrix berechnen. Obwohl diese Matrizen sehr viele Nullen enthalten, ist die Berechnung der Determinanten ohne einen passenden Algorithmus aufgrund von Speicherplatz- und Laufzeitproblemen nicht möglich. Wir werden zunächst versuchen, mit den von den meisten Computeralgebrasystemen üblicherweise benutzten Algorithmen (euklidischer Algorithmus, Algorithmus von Sylvester, Bezout, Collins), möglichst viele Resultanten zu berechnen. Diese Algorithmen findet man in [1].
Statt der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_3)$ berechnen wir die Resultanten $Res(\tilde{F}_{k-3}^{(3)}, \phi_3)$ oder $Res(H_{k-3}^{(3)}, \phi_3)$. Die Polynome $\tilde{F}_i^{(j)}$ bzw. $H_i^{(j)}$ wurden in 4.1.16 bzw. 4.1.12 definiert. Der Grad der Polynome $\tilde{F}_{k-3}^3$, H_{k-3}^3 ist etwas kleiner als der Grad von ϕ_k, so daß wir die Determinante einer kleineren Matrix berechnen. Bei der Berechnung der Resultanten machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß die Polynome ϕ_3, $\tilde{F}_{k-3}^3$, H_{k-3}^3 sogar Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_q[\,[1]\,]$ sind. Wir stellen zuerst die Koeffizienten der Polynome $\tilde{F}_{k-3}^3$ bzw. H_{k-3}^3 und ϕ_3 als Summe von Potenzen von $[1]$ dar, berechnen so deren Resultanten und speichern diese in eine Datei ab. Danach lesen wir die so gewonnen Daten in unser bereits für die Berechnung der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$ verwendetes Programm ein. Die Berechnungen der Resultanten sind mit Maple und Simath durchgeführt worden. Der Vorteil, daß wir statt ϕ_k die Polynome $\tilde{F}_{k-3}^{(3)}$ bzw. $H_{k-3}^{(3)}$ verwenden, besteht vor allem darin, daß diese aus wesentlich weniger Summanden bestehen. Außerdem

sind die Koeffizienten, wenn man diese als Summe von Potenzen von [1] darstellt, wesentlich übersichtlicher.
Die Notation der empirischen Berechnungen ist die gleiche wie bei den Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$. Für $k \geq 7$ lautet das Produkt derjenigen Primteiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_3)$, das wir aus Abschnitt 4.1 bereits kennen, $[k-3]^{deg\,\phi_3} \cdot [3]^{deg\,\phi_3} \cdot [2]$ wenn k gerade ist und $[k-3]^{deg\,\phi_3} \cdot [3]^{deg\,\phi_3} \cdot [2]^{1+a_5}$ wenn k ungerade ist. Die Ausdrücke der Form (a, b, c) beziehen sich dann für $k \geq 7$ auf das Polynom

$$Res_k^{(3)} = \begin{cases} \frac{Res(\phi_k,\phi_3)}{[k-3]^{deg\,\phi_3} \cdot [3]^{deg\,\phi_3} \cdot [2]} & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ \frac{Res(\phi_k,\phi_3)}{[k-3]^{deg\,\phi_3} \cdot [3]^{deg\,\phi_3} \cdot [2]^{1+a_5}} & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

und für $k = 6$ auf

$$Res_6^{(3)} = \frac{Res(\phi_6, \phi_3)}{[3]^2 \cdot [2]}.$$

Betrachten wir nun zunächst folgende Ergebnisse für $q = 2$:

$Res(\phi_6, \phi_3)$:	$Res(\phi_7, \phi_3)$:	$Res(\phi_8, \phi_3)$:
$deg\,84$	$deg\,136$	$deg\,340$
$[3]^2 \cdot [2]$	$[4]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]^6$	$[5]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
(1,4,2)	(2,32,32)	(1,4,2)
(2,1,1)		(2,1,1)
(58,1,1)		(8,1,1)
		(10,2,1)
		(31,2,1)
		(76,1,1)
		(84,1,1)

$Res(\phi_9, \phi_3)$:	$Res(\phi_{10}, \phi_3)$:	$Res(\phi_{11}, \phi_3)$:
$deg\,680$	$deg\,1364$	$deg\,2696$
$[6]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]^6$	$[7]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]$	$[8]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]^6$
(1,4,2)	(1,8,4)	(1,8,4)
(2,1,1)	(2,2,2)	(2,35,35)
(3,64,32)	(3,4,2)	(3,4,2)
(8,1,1)	(8,2,2)	(9,2,1)
(9,2,1)	(9,2,1)	(10,1,1)
(12,1,1)	(10,1,1)	(11,2,1)
(28,2,1)	(29,2,1)	(38,1,1)
(220,1,1)	(35,2,1)	(78,1,1)
	(58,1,1)	(174,2,1)
	(417,2,1)	(770,2,1)

$Res(\phi_{12}, \phi_3):$
$deg\, 5460$
$[9]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
$(1, 12, 6)$
$(2, 2, 2)$
$(8, 1, 1)$
$(10, 1, 1)$
$(11, 2, 1)$
$(12, 8, 1)$
$(30, 1, 1)$
$(36, 2, 1)$
$(170, 1, 1)$
$(436, 2, 1)$
$(532, 1, 1)$
$(2588, 1, 1)$

Für $l \in \mathbb{N}_0$ definieren wir nun rekursiv die Folge $(\bar{R}_i^{(l)})_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_1^{(l)} &= 0, \\
\bar{R}_2^{(l)} &= [5+l] \cdot [1]^{q^{4+l}}, \\
\bar{R}_i^{(l)} &= [i+l+3] \cdot \left\{ [2]^{a_{i+l+2}} \cdot \bar{R}_{i-1}^{(l)} + [i+l+2] \cdot [1]^{q^{i+l+1}} \cdot \bar{R}_{i-2}^{(l)} \right\} \quad \text{für } i \geq 3.
\end{aligned}$$

Sei $Res^*(\phi_4, \phi_3) := Res(\phi_4, \phi_3)$, $Res^*(\phi_5, \phi_3) := Res(\phi_5, \phi_3)$. Wir definieren zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl $k \geq 6$

$$Res^*(\phi_k, \phi_3) = \sum_{i=0}^{k-4} p_i^{(k)}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
p_0^{(k)} &= [2]^{a_k} \cdot Res^*(\phi_{k-1}, \phi_3), \\
p_1^{(k)} &= [k-1]^q \cdot Res^*(\phi_{k-2}, \phi_3), \\
p_j^{(k)} &= \bar{R}_j^{(k-4-j)} \cdot Res^*(\phi_{k-j}, \phi_3) \quad \text{für } 2 \leq j \leq k-4.
\end{aligned}$$

Berechnen wir nun die Primteiler von $Res^*(\phi_k, \phi_3)$ so stellen wir fest, daß

$$Res(\phi_k, \phi_3) = Res^*(\phi_k, \phi_3) \quad \text{für } 6 \leq k \leq 12$$

gilt. Im folgenden wird die Primelementzerlegung weiterer Terme $Res^*(\phi_k,\phi_3)$ berechnet. Für diese gilt, genau wie bei den Resultanten $Res(\phi_k,\phi_3)$, daß für $g \geq 7$ das Produkt $[k-3]^{deg\,\phi_3} \cdot Res(\phi_4,\phi_3)$ bzw. $[k-3]^{deg\,\phi_3} \cdot Res(\phi_5,\phi_3)$ ein Teiler von $Res^*(\phi_k,\phi_3)$ ist, wenn k gerade bzw. k ungerade ist. Aus Übersichtlichkeitsgründen wird dieser Faktor wie bei den Resultanten $Res(\phi_k,\phi_3)$ am Anfang angegeben. Wir definieren dann für $k \geq 7$

$$Res_k^{*(3)} = \begin{cases} \frac{Res^*(\phi_k,\phi_3)}{[k-3]^{deg\,\phi_3}\cdot[3]^{deg\,\phi_3}\cdot[2]} & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ \\ \frac{Res^*(\phi_k,\phi_3)}{[k-3]^{deg\,\phi_3}\cdot[3]^{deg\,\phi_3}\cdot[2]^{1+a_5}} & \text{wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$Res^*(\phi_{13},\phi_3)$:
$deg\,10920$
$[10]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]^6$
(1,12,6)
(2,4,4)
(3,4,2)
(8,1,1)
(9,2,1)
(11,2,1)
(12,8,1)
(13,2,1)
(46,1,1)
(196,1,1)
(359,2,1)
(426,1,1)
(924,2,1)
(2698,2,1)

$Res^*(\phi_{14},\phi_3)$:
$deg\,21844$
$[11]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
(1,16,8)
(2,3,3)
(3,4,2)
(8,1,1)
(9,2,1)
(10,1,1)
(12,8,1)
(13,2,1)
(14,7,1)
(20,1,1)
(30,1,1)
(34,1,1)
(64,1,1)
(72,2,1)
(116,1,1)
(119,2,1)
(136,2,1)
bis deg 355
deg R=16520

$Res^*(\phi_{15},\phi_3)$:
$deg\,43656$
$[12]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]^6$
(1,16,8)
(2,38,38)
(3,68,34)
(8,1,1)
(9,2,1)
(10,1,1)
(11,2,1)
(13,2,1)
(14,7,1)
(15,18,2)
(109,2,1)
(116,1,1)
bis deg 297
deg R=34342

$Res^*(\phi_{16},\phi_3)$:
$deg\,87380$
$[13]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
(1,20,10)
(2,3,3)
(3,8,4)
(8,1,1)

$Res^*(\phi_{17},\phi_3)$
174760
$[14]^2 \cdot [3]^2 \cdot [2]^6$
(1,20,10)
(2,7,7)
(3,8,4)
(8,1,1)

(9,2,1)	(9,2,1)
(10,2,2)	(10,2,2)
(11,2,1)	(11,2,1)
(12,8,1)	(12,8,1)
(14,7,1)	(13,2,1)
(15,18,2)	(15,18,2)
(16,13,1)	(16,13,1)
(56,2,1)	(17,28,1)
(96,1,1)	bis deg 51
bis deg 125	deg R=140710
deg R=69978	

Alle bisher gemachten und die noch folgenden Beobachtungen legen die Vermutung nahe, daß tatsächlich $Res^*(\phi_k, \phi_3) = Res(\phi_k, \phi_3)$ gilt. Die Berechnung der $Res^*(\phi_k, \phi_3)$ als geordnetes Polynom in T ist um ein Vielfaches weniger aufwendig, als die vorher gemachten Berechnungen, um $Res(\phi_k, \phi_3)$ als geordnetes Polynom in T darzustellen. Die Rekursion für die Polynome $Res^*(\phi_k, \phi_3)$ ist aber um ein Vielfaches komplizierter, als die Rekursion für die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$. Deshalb ist die Berechnung der $Res^*(\phi_k, \phi_3)$ als geordnete Polynome in T wesentlich aufwendiger.
Für die berechneten Polynome stellen wir fest:

(i) Wir definieren nun

(a) $(b^{(3)}_{1,k})_{k\geq 4}$:

$$\begin{aligned} b^{(3)}_{1,4} &= 3 = q+1, \\ b^{(3)}_{1,5} &= 8 = q+1+a_5, \\ b^{(3)}_{1,k} &= b^{(3)}_{1,k-2} + q \quad \text{für } k \geq 6. \end{aligned}$$

(b) $(b^{(3)}_{2,k})_{k\geq 4}$:

$$\begin{aligned} b^{(3)}_{2,4} &= 1, \\ b^{(3)}_{2,5} &= 6 = 1+a_5, \\ b^{(3)}_{2,6} &= 2, \end{aligned}$$

$$b_{2,7}^{(3)} = 40 = q^5 + a_5 + q + 1,$$

$$b_{2,k}^{(3)} = b_{2,k-4}^{(3)} + \begin{cases} 1 & k \equiv 0,2 \; mod \; 4 \\ 3 = 2 \cdot q - 1 & k \equiv 1,3 \; mod \; 4. \end{cases}$$

(c) $(b_{3,k}^{(3)})_{k \geq 4}$

$$b_{3,k}^{(3)} = 2 = q \quad \text{für } k = 4, ..., 8,$$

$$b_{3,9}^{(3)} = 35 = q^5 + 2 \cdot q,$$

$$b_{3,k}^{(3)} = b_{3,k-6}^{(3)} + q \quad \text{für } k \geq 10.$$

Es ist dann $[3]^{b_{3,k}^{(3)}} \cdot [2]^{b_{2,k}^{(3)}} \cdot [1]^{b_{1,k}^{(3)} - b_{2,k}^{(3)} - b_{3,k}^{(3)}}$ ein Teiler von $Res^*(\phi_k, \phi_3)$. Ansonsten enthält $Res^*(\phi_k, \phi_3)$ keine Primteiler mehr, deren Grad $1, 2$ oder 3 ist.

(ii) Wir beschreiben nun die Primteiler p der Polynome $Res_k^{*(3)}$, mit $3 < deg\, p < k$.

(a) Die berechneten Polynome $Res_k^{*(3)}$ enthalten keine Primteiler vom Grad $k-3$.

(b) Berechnet man jeden Primteiler p von $Res_k^{*(3)}$, mit $3 < deg\, p < k$, einzeln, so stellt man fest: Wenn p kein Teiler von $Res_{deg\, p}^{*(3)}$ ist, so ist p auch kein Teiler von $Res_k^{*(3)}$. Ist dagegen p ein Teiler von $Res_{deg\, p}^{*(3)}$, so ist p auch ein Teiler von $Res_k^{*(3)}$ und zwar, bis auf zwei Ausnahmen, mit der gleichen Vielfachheit. Diese beiden Ausnahmen lauten: Das Primelement p vom Grad 8, daß $Res_8^{*(3)}$ teilt, ist sogar ein Primteiler der Vielfachheit 2 von $Res_{10}^{*(3)}$. Das Primelement p vom Grad 10, das $Res_{10}^{*(3)}$ teilt, ist sogar ein Primteiler der Vielfachheit 2 von $Res_{16}^{*(3)}$. Für die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_3)$ haben wir für $q = 2$ festgestellt, daß, wenn p ein Teiler von $Res_{deg\, p}^{(2)}$ und $deg\, p$ ein echter Teiler von $k-2$ ist, p immer ein mehrfacher Teiler von $Res_k^{(3)}$ ist. Der für die Polynome $Res_k^{*(3)}$ am einfachsten zu berechnende Fall, in dem p ein Teiler von $Res_{deg\, p}^{*(3)}$ und $deg\, p$ ein echter Teiler von $k-3$ ist, lautet $k = 19$ und $deg\, p = 3$. Die Berechnung des Polynoms $Res^*(\phi_{19}, \phi_3)$ ist sehr zeitaufwendig und wurde deshalb nicht mehr durchgeführt.

(iii) Für $4 \leq j \leq 16$ gilt nun:

$$deg\, Res^*(\phi_j, \phi_3) = 2 \cdot deg\, Res^*(\phi_{j-1}, \phi_3) + f_j.$$

Dabei ist

$$f_j = \begin{cases} 68 & \text{wenn } j \equiv 0 \; mod\, 4 \\ 0 & \text{wenn } j \equiv 1 \; mod\, 4 \\ 4 & \text{wenn } j \equiv 2 \; mod\, 4 \\ -32 & \text{wenn } j \equiv 3 \; mod\, 4. \end{cases}$$

Folgende Berechnungen wurden für q=3 durchgeführt:

$Res(\phi_6, \phi_3)$:
$deg\, 819$
$[3]^3 \cdot [2]$
$(1, 9, 3)$
$(2, 3, 1)$
$(14, 3, 1)$
$(29, 6, 1)$
$(47, 6, 1)$
$(72, 3, 1)$

$Res(\phi_7, \phi_3)$:
$deg\, 1971$
$[4]^3 \cdot [3]^3 \cdot [2]^{21}$
$(2, 738, 243)$

$Res(\phi_8, \phi_3)$:
$deg\, 7380$
$[5]^3 \cdot [3]^3 \cdot [2]$
$(1, 9, 3)$
$(2, 3, 1)$
$(8, 6, 1)$
$(48, 3, 1)$
$(316, 6, 1)$
$(426, 3, 1)$
$(490, 3, 1)$
$(570, 3, 1)$

$Res(\phi_9, \phi_3)$:
$deg\, 22140$
$[6]^3 \cdot [3]^3 \cdot [2]^{21}$
$(1, 9, 3)$
$(2, 6, 2)$
$(3, 1944, 243)$
$(8, 6, 1)$
$(9, 12, 1)$
$(16, 3, 1)$
$(24, 2, 1)$
$(36, 2, 1)$
$bis\; deg\, 2774$
$deg\, R = 15693$

Beobachtungen:

(i) Im Fall $q = 2$ haben wir die Folgen $(b_{1,k}^{(3)})$, $(b_{2,k}^{(3)})$ und $(b_{3,k}^{(3)})$ definiert. Wir haben bei der Definition dieser Folgen einige Glieder auch mit q ausgedrückt. Für $q = 3$ gilt die vorher gemachte Aussage (i) auch für die gerade berechneten Resultanten.

(*ii*) Die Primteiler der Resultanten $Res(\phi_8, \phi_3)$ vom Grad 8, sind gerade auch die Primteiler der Resultanten $Res(\phi_9, \phi_3)$ vom Grad 8.

(*iii*) Anscheinend gilt

$$Res(\phi_7, \phi_3) = Res(\phi_5, \phi_3) \cdot [2]^{q^5} \cdot [1]^{-q^5}.$$

Es folgen einige Bemerkungen zur Resultantenberechnung:

(*i*) Für $q = 2$ ist $Res(\phi_k, \phi_3)$ durch eine ziemlich komplizierte Rekursion definiert. Der Verfasser dieser Arbeit hat für $q > 2$ keine analoge Rekursion gefunden.

(*ii*) Folgender Sachverhalt könnte für die Resultantenberechnung von Bedeutung sein: Betrachten wir die arithmetischen Ausdrücke $[i]$ als Unbekannte und geben $[i]$ das Gewicht q^{i-1}, Z das Gewicht 1, so ist ϕ_k isobar vom Gewicht $deg\,\phi_k$. Dies folgt sofort durch Induktion, indem man die Rekursion für ϕ_k verwendet.

4.2.4 Die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_4)$, $k \geq 4$

Die Berechnungen zu Bestimmung der Primteiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_4)$, $k \geq 4$ wurden wie bei den Resultanten $Res(\phi_k, \phi_3)$ ausgeführt. Wir verwenden zur Darstellung der Primteiler die bisherige Notation.

(*i*) Resultanten der Form $Res(\phi_k, \phi_4)$:

$q = 2$:

$Res(\phi_7, \phi_4)$:	$Res(\phi_8, \phi_4)$:	$Res(\phi_9, \phi_4)$:
$deg\,420$	$deg\,850$	$deg\,1540$
$[4]^5 \cdot [3]^2 \cdot [2]$	$[4]^5 \cdot [3]^{13} \cdot [2] \cdot [1]^{11}$	$[5]^5 \cdot [4]^5 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
$(1, 10, 5)$	$(1, 10, 5)$	$(1, 10, 5)$
$(3, 6, 3))$	$(2, 37, 37)$	$(2, 5, 5)$
$(4, 1, 1)$	$(7, 2, 1)$	$(3, 10, 5)$
$(7, 2, 1)$	$(26, 2, 1)$	$(7, 2, 1)$
$(14, 1, 1)$	$(132, 1, 1)$	$(17, 2, 1)$
$(130, 2, 1)$	$(179, 2, 1)$	$(380, 2, 1)$
		$(422, 1, 1)$

$Res(\phi_{10}, \phi_4)$:
$deg\, 3410$
$[6]^5 \cdot [4]^5 \cdot [3]^{13} \cdot [2] \cdot [1]^{11}$
$(1, 10, 5)$
$(3, 128, 64)$
$(7, 2, 1)$
$(10, 2, 1)$
$(29, 2, 1)$
$(106, 2, 1)$
$(308, 1, 1)$
$(582, 2, 1)$
$(710, 1, 1)$

$Res(\phi_{11}, \phi_4)$:
$deg\, 6820$
$[7]^5 \cdot [4]^5 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
$(1, 20, 10)$
$(2, 5, 5)$
$(3, 10, 5)$
$(10, 2, 1)$
$(11, 6, 1)$
$(16, 1, 1)$
$(56, 2, 1)$
$(150, 1, 1)$
$(190, 1, 1)$
$(224, 2, 1)$
$(240, 1, 1)$
$(738, 2, 1)$
$(3302, 1, 1)$

$q = 3$:

$Res(\phi_7, \phi_4)$:
$deg\, 8190$
$[4]^{10} \cdot [3]^3 \cdot [2]$
$(1, 30, 10)$
$(3, 56, 7)$
$(30, 2, 1)$
$(186, 2, 1)$
$(224, 3, 1)$
$(368, 6, 1)$
$(531, 2, 1)$
$(1359, 2, 1)$

$Res(\phi_8, \phi_4)$:
$deg\, 23370$
$[4]^{10} \cdot [3]^{23} \cdot [2] \cdot [1]^{20}$
$(1, 30, 10)$
$(2, 759, 253)$
$(8, 6, 1)$
$(45, 2, 1)$
$(46, 3, 1)$
$(78, 3, 1)$
$(102, 3, 1)$
$(150, 3, 1)$
$(237, 6, 1)$
$(256, 3, 1)$
$(294, 3, 1)$
$(408, 6, 1)$
$(549, 2, 1)$
$bis\, deg\, 2799$
$deg\, R = 12438$

(ii) Resultanten der Form $Res(\phi_k, \phi_5)$:

$q = 2$:

$Res(\phi_8, \phi_5)$:
$deg\, 1636$
$[5]^{10} \cdot [4]^5 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
$(1, 20, 10)$
$(2, 5, 5)$
$(3, 16, 8)$
$(5, 2, 1)$
$(8, 2, 1)$
$(20, 1, 1)$
$(44, 2, 1)$
$(266, 1, 1)$
$(738, 1, 1)$

$Res(\phi_9, \phi_5)$:
$deg\, 3400$
$[5]^{10} \cdot [4]^{26} \cdot [3]^2 \cdot [2]^{22}$
$(1, 20, 10)$
$(2, 69, 69)$
$(3, 4, 2)$
$(4, 15, 5)$
$(8, 2, 1)$
$(9, 2, 1)$
$(378, 2, 1)$
$(770, 2, 1)$

$Res(\phi_{10}, \phi_5)$:
$deg\, 6820$
$[5]^{10} \cdot [4]^5 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
$(1, 40, 20)$
$(2, 5, 5)$
$(3, 4, 2)$
$(8, 2, 1)$
$(9, 2, 1)$
$(10, 1, 1)$
$(14, 2, 1)$
$(235, 2, 1)$
$(742, 2, 1)$
$(746, 1, 1)$
$(3566, 1, 1)$

$Res(\phi_{11}, \phi_5)$:
$deg\, 13000$
$[6]^{10} \cdot [5]^{10} \cdot [4]^{26} \cdot [3]^2 \cdot [2]^{22}$
$(1, 20, 10)$
$(2, 5, 5)$
$(3, 516, 256)$
$(4, 15, 5)$
$(8, 2, 1)$
$(10, 1, 1)$
$(11, 2, 1)$
$(26, 1, 1)$
$(49, 2, 1)$
$bis\, deg\, 822$
$deg\, R = 9710$

$Res(\phi_{12}, \phi_5)$:
27300
$[7]^{10} \cdot [5]^{10} \cdot [4]^5 \cdot [3]^2 \cdot [2]$
$(1, 40, 20)$
$(2, 10, 10)$
$(3, 4, 2)$
$(4, 15, 5)$
$(8, 2, 1)$
$(9, 2, 1)$
$(10, 1, 1)$
$(11, 2, 1)$
$(12, 3, 1)$
$(15, 4, 1)$
$(108, 1, 1)$
$bis\, deg\, 311$
$deg\, R = 25198$

$q = 3$:

$Res(\phi_8, \phi_5)$:
$deg\, 72342$
$[5]^{30} \cdot [4]^{10} \cdot [3]^{3} \cdot [2]$
$(1, 90, 30)$
$(2, 30, 10)$
$(3, 216, 27)$
$bis\, deg\, 50$
$deg\, R = 63354$

(iii) Resultanten der Form $Res(\phi_k, \phi_6)$:

$q = 2$:

$Res(\phi_9, \phi_6)$:
$deg\, 7140$
$[6]^{21} \cdot [5]^{10} \cdot [4]^{5} \cdot [3]^{2} \cdot [2]$
$(1, 42, 21)$
$(5, 2, 1)$
$(6, 3, 1)$
$(10, 1, 1)$
$(35, 2, 1)$
$(81, 2, 1)$
$(93, 2, 1)$
$(125, 2, 1)$
$(156, 2, 1)$
$(254, 1, 1)$
$(536, 1, 1)$
$bis\, deg\, 1671$
$deg\, R = 3526$

$Res(\phi_{10}, \phi_6)$:
$deg\, 14322$
$[6]^{21} \cdot [5]^{53} \cdot [4]^{5} \cdot [3]^{45} \cdot [2] \cdot [1]^{43}$
$(1, 42, 21)$
$(2, 277, 277)$
$(3, 6, 3)$
$(4, 48, 16)$
$(10, 2, 1)$
$(13, 2, 1)$
$(88, 1, 1)$
$bis\, deg\, 1347$
$deg\, R = 9812$

$Res(\phi_{11},\phi_6):$
$deg\,28644$
$[6]^{21}\cdot[5]^{10}\cdot[4]^5\cdot[3]^2\cdot[2]$
$(1,84,42)$
$(2,21,21)$
$(5,66,11)$
$(10,2,1)$
$(11,2,1)$
$bis\;deg\,494$
$deg\,R=26382$

(iv) Resultanten der Form $Res(\phi_k,\phi_7)$:

q=2:

$Res(\phi_{10},\phi_7):$
$deg\,28772$
$[7]^{43}\cdot[6]^{21}\cdot[5]^{10}\cdot[4]^5\cdot[3]^2\cdot[2]$
$(1,84,42)$
$(2,21,21)$
$(3,48,24)$
$(10,3,1)$
$(14,1,1)$
$(56,1,1)$
$(259,2,1)$
$(362,2,1)$
$(896,1,1)$
$bis\;deg\,947$
$deg\,R=18996$

$Res(\phi_{11},\phi_7):$
$deg\,56904$
$[7]^{43}\cdot[6]^{106}\cdot[5]^{10}\cdot[4]^{90}\cdot[3]^2\cdot[2]^{86}$
$(1,84,42)$
$(2,790,790))$
$(4,96,32)$
$(6,1,1)$
$(7,2,1)$
$(10,3,1)$
$(33,2,1)$
$(97,2,1)$
$bis\;deg\,122$
$deg\,R=40138$

Beobachtungen:

(i) Wir haben bereits festgestellt: Wenn $k>2\cdot i$ ist, so ist $[k-i]^{deg\phi_i}$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}^{(i)}_{k-i},\phi_i)$. Zur Erinnerung sei noch einmal erwähnt, daß $Res(\phi_k,\phi_i)=Res(\tilde{F}^{(i)}_{k-i},\phi_i)\cdot Res(\phi_{i+1},\phi_i)$ gilt, wenn $k-i$ ungerade ist und $Res(\phi_k,\phi_i)=Res(\tilde{F}^{(i)}_{k-i},\phi_i)\cdot Res(\phi_{i+2},\phi_i)$ gilt, wenn $k-i$ gerade ist. Das Polynom $\tilde{F}^{(i)}_{k-i}$ haben wir in 4.1.16 definiert.
Wir betrachten nun den Fall, daß $k\leq 2\cdot i$ ist:
Folgende Resultanten wurden untersucht, für die $k=2i$ ist: $Res(\phi_4,\phi_2)$,

$Res(\phi_6, \phi_3)$, $Res(\phi_8, \phi_4)$, $Res(\phi_{10}, \phi_5)$.
Folgende Resultanten wurden untersucht, für die $k < 2i$ und für die $k > i+2$ ist: $Res(\phi_7, \phi_4)$, $Res(\phi_8, \phi_5)$, $Res(\phi_9, \phi_5)$, $Res(\phi_9, \phi_6)$, $Res(\phi_{10}, \phi_6)$, $Res(\phi_{11}, \phi_6)$, $Res(\phi_{10}, \phi_7)$, $Res(\phi_{11}, \phi_7)$.
Wir stellen in allen diesen berechneten Fällen fest, daß $[k-i]^{deg\,\phi_i}$ ein Teiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ ist. Wenn $k = 2i$ ist, so ist dies klar: Wir wissen, daß $Res(\phi_k, \phi_i) = Res(F^{(i)}_{k-i}, \phi_i) \cdot Res(\phi_{i+1}, \phi_i)$ gilt. Das Polynom $[i]^{deg\,\phi_i}$, d.h. $[k-i]^{deg\,\phi_i}$, ist ein Teiler von $Res(\phi_{i+1}, \phi_i)$.
Es gilt aber in keinem der berechneten Fälle, daß $[k-i]^{deg\,\phi_i}$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}^{(i)}_{k-i}, \phi_i)$ ist. Mit Ausnahme der Fälle, daß $q = 2$, $i = 7$ und $k = 10$ oder $k = 11$ ist, gilt daß $[k-i]^{deg\,\phi_i - deg\,\phi_{k-i}}$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}^{(i)}_{k-i}, \phi_i)$ ist. In diesen Fällen ist $deg\,\phi_i - deg\,\phi_{k-i}$ auch die maximale Potenz l, so daß $[k-i]^l$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}^{(i)}_{k-i}, \phi_i)$ ist. Für $k = 2i$ bedeutet dies gerade, daß $[k-i]$ kein Teiler von $Res(\tilde{F}^{(i)}_{k-i}, \phi_i)$ ist. Für die beiden anderen Fälle ist festzustellen, daß $[3]^{24}$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}^{(7)}_3, \phi_7)$ und daß $[4]^{32}$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}^{(7)}_4, \phi_7)$ ist ($deg\,\phi_7 - deg\,\phi_{(10-7)} = 41$, $deg\,\phi_7 - deg\,\phi_{11-7} = 38$).

(*ii*) Für die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$, $k \geq 3$, haben wir Folgen

$$(b^{(2)}_{1,j})_{j\geq 3},\ (b^{(2)}_{2,j})_{j\geq 3}$$

definiert, so daß

$$[2]^{b^{(2)}_{2,k}} \cdot [1]^{b^{(2)}_{1,k} - b^{(2)}_{2,k}}$$

ein Teiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$ ist. In allen berechneten Beispielen haben die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_2)$ ansonsten keine Primteiler vom Grad 1 oder 2.
Für die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_3)$ (bzw. die Polynome $Res^*(\phi_k, \phi_3)$), $k \geq 4$, haben wir Folgen

$$(b^{(3)}_{1,j})_{j\geq 4},\ (b^{(3)}_{2,j})_{j\geq 4},\ (b^{(3)}_{3,j})_{j\geq 4}$$

definiert, so daß in allen berechneten Beispielen

$$[3]^{b^{(3)}_{3,k}} \cdot [2]^{b^{(3)}_{2,k}} \cdot [1]^{b^{(3)}_{1,k} - b^{(3)}_{3,k} - b^{(3)}_{2,k}}$$

gerade das Produkt aller Primelemente vom Grad $1, 2$ und 3 ist, die in der Primfaktorzerlegung der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_3)$ enthalten sind.
Aufgrund dieser Feststellungen kann man sich durchaus vorstellen, daß man für ein festes $i \geq 2$ die Primelemente der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$, deren Grad kleiner oder gleich i ist, recht gut mit Hilfe von Folgen

$$(b^{(i)}_{1,k})_{k\geq i+1}, \ldots, (b^{(i)}_{i,k})_{k\geq i+1}$$

beschreiben kann. Für $1 \leq j \leq i$ ist eine Folge

$$(b^{(i)}_{j,k})_{k\geq i+1}$$

so definiert, daß man, wenn $k > i+j$ ist, ein Glied

$$b_{j,k}^{(i)}$$

rekursiv erhält, indem man zu

$$b_{j,k-j}^{(i)}$$

eine natürliche Zahl $c_0, \ldots, c_{j-1}$ addiert, je nachdem ob $k \equiv 0 \, mod \, j, \ldots, k \equiv j-1 \, mod \, j$ ist. Unsere empirischen Ergebnisse für die Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$, $i \geq 4$, sind allerdings viel zu kümmerlich, um obigen Sachverhalt zu beobachten. Außerdem ist zu erwähnen, daß in der Primelementzerlegung einer Resultanen $Res(\phi_k, \phi_i)$ die Primelemente mit gleichem Grad j, wobei $1 \leq j \leq i$ ist, nicht immer in gleicher Vielfachheit auftreten. Folgende Beispiele hierzu sind festzustellen:

- $q = 2$ $Res(\phi_7, \phi_4)$: (4,1,1)
- $q = 2$ $Res(\phi_9, \phi_6)$: (5,2,1), (6,3,1)
- $q = 2$ $Res(\phi_7, \phi_4)$: (6,1,1), (7,2,1).

(iii) Betrachtet man für $i \geq 2$ die berechneten Primelementzerlegungen der Resultanten $Res(\tilde{F}_1^{(i)}, \phi_i), \ldots, Res(\tilde{F}_4^{(i)}, \phi_i)$, so stellt man fest, daß gerade die Resultanten $Res(\tilde{F}_4^{(i)}, \phi_i)$ besonders viele Primteiler vom Grad 2 enthalten. Betrachtet man für $i \geq 3$ die berechneten Primelementzerlegungen der Resultanten $Res(\tilde{F}_1^{(i)}, \phi_i), \ldots, Res(\tilde{F}_6^{(i)}, \phi_i)$, so stellt man fest, daß gerade die Resultanten $Res(\tilde{F}_6^{(i)}, \phi_i)$ besonderst viele Primteiler vom Grad 3 enthalten.
Allgemein könnte gelten:
Betrachtet man für $j \geq 2$ und $i \geq j$ die berechneten Primelementzerlegungen der Resultanten $Res(\tilde{F}_1^{(i)}, \phi_i), \ldots, Res(\tilde{F}_{2j}^{(i)}, \phi_i)$, so stellt man fest, daß gerade die Resultanten $Res(\tilde{F}_{2j}^{(i)}, \phi_i)$ besonderst viele Primteiler vom Grad j enthalten.
Wir geben nun im folgenden an, in welcher maximalen Potenz der Ausdruck $[2] \cdot [1]^{-1}$ die untersuchten Resultanten $Res(\tilde{F}_4^{(i)}, \phi_i)$ teilt. Für $q = 2$ haben wir berechnet, daß $([2] \cdot [1]^{-1})^{34}$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}_4^{(3)}, \phi_3)$ ist. Die Potenz 34 ist auch maximal bzgl. dieser Eigenschaft. Wir notieren

$$Res(\phi_7, \phi_3) \quad : \quad 34 = q^5 + deg \, \phi_3.$$

Entsprechend notieren wir die anderen Fälle, in denen $q = 2$ ist:

$$\begin{aligned}
Res(\phi_7, \phi_3) \quad &: \quad 34 = q^5 + deg \, \phi_3, \\
Res(\phi_8, \phi_4) \quad &: \quad 37 = q^5 + deg \, \phi_4, \\
Res(\phi_9, \phi_5) \quad &: \quad 69 = q^6 + deg \, \phi_4, \\
Res(\phi_{10}, \phi_6) \quad &: \quad 277 = q^8 + deg \, \phi_6, \\
Res(\phi_{11}, \phi_7) \quad &: \quad 790 = q^9 + q^8 + deg \, \phi_6 + 1.
\end{aligned}$$

Für $q = 3$ stellen wir fest:

$$\begin{aligned} Res(\phi_7, \phi_3) &: \; 34 = q^5 + deg\, \phi_3, \\ Res(\phi_8, \phi_4) &: \; 37 = q^5 + deg\, \phi_4. \end{aligned}$$

Für beliebiges q stellen wir fest:

$$Res(\phi_k, \phi_2) : q^3 + 1 = q^3 + deg\, \phi_2.$$

Weiter geben wir an, in welcher maximalen Potenz der Ausdruck $[3] \cdot [1]^{-1}$ die untersuchten Resultanten $Res(\tilde{F}_6^{(i)}, \phi_i)$ teilt. Für $q = 2$ stellen wir fest:

$$\begin{aligned} Res(\phi_9, \phi_3) &: \; 34 = q^5 + deg\, \phi_3, \\ Res(\phi_{10}, \phi_4) &: \; 69 = q^6 + deg\, \phi_4, \\ Res(\phi_{11}, \phi_5) &: \; 266 = q^8 + deg\, \phi_5. \end{aligned}$$

Für q=3 stellen wir fest:

$$Res(\phi_9, \phi_3) \; : \; 246 = q^5 + deg\, \phi_3.$$

Zumindestens für $k \geq 2 \cdot i$ sind in unseren aufgeführten Fällen die Potenzen von der Form $q^j + deg\, \phi_i$. Ist $k > 2 \cdot i$, so wissen wir, daß $[k-i]^{deg\, \phi_i}$ ein Teiler von $Res(\tilde{F}_{k-i}^{(i)}, \phi_i)$ ist. Sieht man also in diesen Fällen noch von den Primteilern ab, die in $[k-i]^{deg\, \phi_i}$ enthalten sind, so bleibt noch eine Primzahlpotenz übrig.

(*iv*) Sei $i \geq 2$. Wir definieren für $(Res(\phi_k, \phi_i))_{k>i}$ die Folge $(b_{1,k}^{(i)})_{k>i}$:

$$\begin{aligned} b_{1,i+1}^{(i)} &= \sum_{j=2}^{i} deg\, \phi_j, \\ b_{1,i+2}^{(i)} &= \sum_{j=1}^{i} (deg\, \phi_j + a_{i+2} \cdot \delta(i,j)), \\ b_{1,k}^{(i)} &= b_{1,k-2}^{(i)} + deg\, \phi_i \quad \text{für } k > i+2. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \text{ und } j \text{ beide gerade oder beide ungerade sind} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In allen berechneten Beispielen ist dann $[1]^{b_{1,k}^{(i)}}$ ein Teiler der Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$. Ansonsten enthalten die Resultanten keine weiteren Primteiler vom Grad 1.

(*v*) Für alle berechneten Resultanten $Res(\phi_k, \phi_i)$ gilt: Ist $i < l < k$ und p Primteiler einer Resulanten $Res(\phi_l, \phi_i)$ mit $deg\, p = l$, so ist p auch ein Primteiler von $Res(\phi_k, \phi_i)$.

Kapitel 5

Die klassischen Eisenstein-Reihen

Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit den klassischen Eisenstein-Reihen

$$G_{2n}(z) = \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(a,b)\neq(0,0)}} \frac{1}{(az+b)^{2n}}$$

für $n = 2, 3, \ldots$. Normieren wir $G_{2n}(z)$ durch einen geeigneten Faktor, so erhalten wir $E_{2n}(z)$. Wir werden zunächst in Abschnitt 5.1 für die Eisenstein-Reihen eine Rekursionsgleichung herleiten. Im Funktionenkörperfall ließen sich alle Modulformen vom Typ 0 als isobare Polynome in g und Δ darstellen. Im klassischen Fall kann jede Modulform als isobares Polynom in E_4 und E_6 dargestellt werden, wobei E_4 und E_6 die Gewichte 4 und 6 haben. Wir sehen hier eine Analogie zwischen E_4, E_6 und g, Δ. Die Analogien lassen sich in folgender Weise fortsetzen: Die Modulformen im komplexen Fall sind auf der oberen Halbebene H definiert, im Funktionenkörperfall auf Ω. So wie $\Gamma_1 = GL(2, A)$ auf Ω operiert, operiert $\Gamma_2 = SL(2, \mathbb{Z})$ auf H. Entsprechend wie es einen Isomorphismus $j_1 : \Gamma_1\backslash\Omega \to C$ gibt, so existiert auch einen Isomorphismus $j_2 : \Gamma_2\backslash H \to \mathbb{C}$. Die Abbildung j_2 ist definiert durch die Gleichung

$$j_2(\bar{z}) = \frac{1728\cdot E_4(z)^3}{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}.$$

Da die Eisenstein-Reihen E_{2n} auch Modulformen sind, gibt es isobare Polynome $A_{2n}(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$ so, daß $E_{2n} = A_{2n}(E_4, E_6)$ ist. Indem wir $A_{2n}(X, Y)$ durch ein geeignetes Monom X^iY^j teilen, erhalten wir einen Ausdruck

$$\varphi_{2n}\left(\frac{1728\cdot X^3}{X^3 - Y^2}\right),$$

wobei $\varphi_{2n}(Z) \in \mathbb{Q}[Z]$ ist. Wir können dann folgende Aussagen über die Nullstellen der klassischen Eisenstein-Reihen E_{2n} machen: Wenn $E_4(z) \neq 0$ und $E_6(z) \neq 0$ ist, so ist z eine Nullstelle von E_{2n} für $n \geq 4$ genau dann, wenn $j(z)$ eine Nullstelle von φ_{2n} ist. Für diese Polynome φ_{2n} untersuchen wir dann analog zum

Funktionenkörperfall Diskriminanten und Resultanten, allerdings fast nur empirisch. Außerdem untersuchen wir empirisch die Galois-Gruppe und die Nullstellen der Polynome φ_{2n}.
Einige Aussagen in diesem Kapitel werden nur zitiert und nicht bewiesen. Die Beweise findet man in [11], [15].

5.1 Herleitung einer Rekursionsgleichung für die klassischen Eisenstein-Reihen

Für ein zweidimensionales Gitter $\Lambda_{\omega_1,\omega_2} = \mathbb{Z}\omega_1 \bigoplus \mathbb{Z}\omega_2$, wobei $Im\,\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$ ist, definieren wir die Eisenstein-Reihe

$$G_k(\Lambda_{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^k}.$$

Ist insbesondere $z \in H$, so sei

$$G_k(z) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\cdot z+n)^k}.$$

Somit ist $G_k(z)$ eine Funktion, die auf der oberen Halbebene H definiert ist. Die Konvergenz von $G_k(z)$ ist für $k > 2$ einfach zu beweisen. Die Funktionen $G_k(z)$ sind Modulformen vom Gewicht k. Dies bedeutet, daß $G_k(z)$ holomorph in H ist, daß

$$G_k(\gamma\cdot z) = (cz+d)^k \cdot G_k(z) \quad \text{für } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

gilt, sowie daß $G_k(z)$ auch im Punkt ∞ von $\bar{H}$ holomorph ist. Eine Funktion f von H nach $\mathbb{C}$ heißt dabei holomorph in ∞, wenn es eine Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot q^n$$

gibt, wobei $q = e^{2\pi i\cdot z}$ ist. Ist k ungerade, so ist G_k identisch Null, denn für $\gamma =$ minus die Einheitsmatrix, gilt $\gamma\cdot z = z$, und daraus folgt $2\cdot G_k(z) = 0$.
Die q-Entwicklung für G_k, $k > 2$ und k gerade, lautet

$$G_k(z) = 2\zeta(k)\cdot\left(1 - \frac{2k}{B_k}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)\cdot q^n\right),$$

wobei B_k die k-te Bernoulli-Zahl, ζ die Riemannsche Zeta-Funktion und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ ist. Die Bernoulli-Zahlen B_k sind definiert durch die Formel

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\cdot\frac{x^k}{k!}.$$

Wir normieren $G_k(z)$ durch Division von $2\zeta(k)$ und erhalten so eine Funktion

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) \cdot q^n.$$

Unser Ziel ist es, eine Rekursion für die $E_k(z)$, k gerade, $k \geq 8$ herzuleiten. Um die Form der Rekursion möglichst einfach zu gestalten, betrachten wir statt $E_k(z)$ die Funktionen

$$F_k(z) = -\frac{B_k}{2k(k-2)!} \cdot E_k(z).$$

Zur Herleitung der Rekursionsgleichung benutzen wir die Differentialgleichung

$$\wp''(u) = 6 \cdot \wp^2(u) - 30 \cdot G_4(\Lambda_{\omega_1,\omega_2}),$$

wobei $\wp(u)$ die Weierstraß' sche $\wp$-Funktion zum Gitter $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$ ist, die folgendermaßen definiert ist:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{l \in \Lambda_{\omega_1,\omega_2} \\ l \neq 0}} \left(\frac{1}{(u-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right).$$

Wie schon oben eingeführt, ist

$$G_4(\Lambda_{\omega_1,\omega_2}) = \sum_{\substack{l \in \Lambda_{\omega_1,\omega_2} \\ l \neq 0}} \frac{1}{l^4}.$$

Zur Bedeutung der Weierstraß' schen $\wp$-Funktion erinnern wir daran, daß $\wp$ doppelt-periodisch bezüglich des Gitters $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$ ist und der Körper der $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$-periodischen meromorphen Funktionen von $\wp$ und seiner Ableitung $\wp'$ erzeugt wird. Die obige Differentialgleichung erhalten wir, indem wir die Differentialgleichung

$$(\wp')^2 = 4 \cdot \wp^3 - 60 \cdot G_4(\Lambda_{\omega_1,\omega_2}) \cdot \wp - 140 \cdot G_6(\Lambda_{\omega_1,\omega_2})$$

ableiten. Wir formen nun $\wp(u)$ um, indem wir $\frac{1}{(1-\frac{u}{l})^2}$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\frac{1}{(1-\frac{u}{l})^2} = 1 + 2\frac{u}{l} + 3\frac{u^2}{l^2} + \dots.$$

In dieser Gleichung subtrahieren wir auf beiden Seiten 1 und dividieren das Ergebnis durch l^2. Wir erhalten so

$$\frac{1}{(l-u)^2} - \frac{1}{l^2} = 2 \cdot \frac{u}{l^3} + 3 \cdot \frac{u^2}{l^4} + \dots.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Definition von $\wp(u)$ ein, so folgt

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{l \in \Lambda_{\omega_1,\omega_2} \\ l \neq 0}} \left(\sum_{k=3}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{u^{k-2}}{l^k} \right).$$

Vertauschen wir die Summationen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\wp(u) &= \frac{1}{u^2}+\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)\cdot G_k\cdot u^{k-2}\\ &= \frac{1}{u^2}+\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)\cdot G_{2k}\cdot u^{2k-2}.\end{aligned}$$

Für (ω_1,ω_2) wählen wir jetzt $(z,1)$, wobei $Im\, z>0$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\wp(u) &= \frac{1}{u^2}+\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)\cdot G_{2k}(z)\cdot u^{2k-2}\\ &= \frac{1}{u^2}+\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)\cdot 2\zeta(2k)\cdot E_{2k}(z)\cdot u^{2k-2}\\ &= \frac{1}{u^2}-2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\zeta(2k)\cdot\frac{4k\cdot(2k-1)!}{B_{2k}}\cdot F_{2k}\cdot u^{2k-2}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\zeta(2k)=\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}\cdot(-1)^{k-1}\cdot B_{2k}\cdot\pi^{2k}.$$

Wir erhalten somit

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot(2\pi)^{2k}\cdot F_{2k}(z)\cdot u^{2k-2}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}\wp'(u) &= -\frac{2}{u^3}+2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot(2k-2)\cdot(2\pi)^{2k}\cdot F_{2k}(z)\cdot u^{2k-3},\\ \wp''(u) &= \frac{6}{u^4}+2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot(2k-2)\cdot(2k-3)\cdot(2\pi)^{2k}\cdot F_{2k}(z)\cdot u^{2k-4}.\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\wp^2(u) &= \left\{\frac{1}{u^2}\cdot\left(1+2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot(2\pi)^{2k}\cdot F_{2k}(z)\cdot u^{2k}\right)\right\}^2\\ &= \frac{1}{u^4}\cdot\left\{1+4\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot(2\pi)^{2k}\cdot F_{2k}(z)\cdot u^{2k}+4\cdot\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k\cdot(2\pi)^{2k}\cdot\right.\\ &\qquad\left.\left(\sum_{i=2}^{k-2}F_{2i}(z)\cdot F_{2(k-i)}(z)\right)\cdot u^{2k}\right\}.\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke setzen wir nun in die Differentialgleichung $\wp'' = 6 \cdot \wp^2 - 30 \cdot G_4$ ein. Es ist

$$G_4(z) = \frac{32\pi^4}{3} \cdot F_4(z).$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$\frac{6}{u^4}+2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(2k-2)(2k-3)(2\pi)^{2k}F_{2k}(z)\cdot u^{2k-4} = \frac{6}{u^4}+24\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(2\pi)^{2k}F_{2k}(z)\cdot u^{2k-4} + 24\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k(2\pi)^{2k}\left(\sum_{i=2}^{k-2}F_{2i}(z)\cdot F_{2(k-i)}(z)\right)\cdot u^{2k-4} - 320\pi^4F_4(z).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir für $k \geq 4$

$$(-1)^k\cdot 2\cdot(2k-2)\cdot(2k-3)\cdot(2\pi)^{2k}\cdot F_{2k}(z) = (-1)^k\cdot 24\cdot(2\pi)^{2k}\cdot\left(F_{2k}(z)+\sum_{i=2}^{k-2}F_{2i}(z)\cdot F_{2(k-i)}(z)\right).$$

Daraus folgt

$$((2k-2)(2k-3)-12)\cdot F_{2k}(z) = 12\sum_{i=2}^{k-2}F_{2i}(z)\cdot F_{2(k-i)}(z).$$

Da $(2k-2)(2k-3)-12 = (2k-6)(2k+1)$ ist, gilt also die Rekursionsformel

$$(2k-6)(2k+1)\cdot F_{2k}(z) = 12\sum_{i=2}^{k-2}F_{2i}(z)\cdot F_{2(k-i)}(z).$$

Diese Formel findet sich ohne Beweis in der Arbeit [Sw], Seite 19.

5.2 Die Polynome φ_k

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei M_k der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k. Aus $M_k \cdot M_{k'} \subset M_{k+k'}$ folgern wir, daß $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} M_k$ eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra ist.

Satz 5.2.1 *Es gilt*

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} M_k = \mathbb{C}[E_4, E_6]$$

mit den algebraisch unabhängigen Eisenstein-Reihen E_4 und E_6.

Sei im folgenden k immer eine gerade natürliche Zahl, die größer als 2 ist. Nach Satz 5.2.1 gibt es eindeutig bestimmte Polynome $A_k(X,Y) \in \mathbb{Q}(X,Y)$, so daß $A_k(E_4,E_6) = E_k$ gilt.

Beispiele 5.2.2

$$\begin{aligned}
A_4(X,Y) &= X \\
A_6(X,Y) &= Y \\
A_8(X,Y) &= X^2 \\
A_{10}(X,Y) &= X \cdot Y \\
691 \cdot A_{12}(X,Y) &= 441 \cdot X^3 + 250 \cdot Y^2 \\
A_{14}(X,Y) &= X^2 \cdot Y \\
3617 \cdot A_{16}(X,Y) &= X \cdot (1617 \cdot X^3 + 2000 \cdot Y^2) \\
43867 \cdot A_{18}(X,Y) &= Y \cdot (5500 \cdot Y^2 + 38367 \cdot X^3) \\
174611 \cdot A_{20}(X,Y) &= X^2 \cdot (53361 \cdot X^3 + 121250 \cdot Y^2) \\
77683 \cdot A_{22}(X,Y) &= X \cdot Y \cdot (57183 \cdot X^3 + 20500 \cdot Y^2) \\
236364091 \cdot A_{24}(X,Y) &= 49679091 \cdot X^6 + 176400000 \cdot Y^2 \cdot X^3 + 10285000 \cdot Y^4 \\
657931 \cdot A_{26}(X,Y) &= X^2 \cdot Y \cdot (392931 \cdot X^3 + 265000 \cdot Y^2)
\end{aligned}$$

Aus diesen Beispielen läßt sich vermuten:

Hilfssatz 5.2.3 *Ist*

$$X^{a(k)} \cdot Y^{b(k)} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \equiv 0 \, mod \, 12 \\ X^2 \cdot Y & \text{wenn } k \equiv 2 \, mod \, 12 \\ X & \text{wenn } k \equiv 4 \, mod \, 12 \\ Y & \text{wenn } k \equiv 6 \, mod \, 12 \\ X^2 & \text{wenn } k \equiv 8 \, mod \, 12 \\ X \cdot Y & \text{wenn } k \equiv 10 \, mod \, 12, \end{cases}$$

so ist $X^{a(k)} \cdot Y^{b(k)}$ ein Teiler von $A_k(X,Y)$. Die Polynome $X^{a(k)+1}$ und $Y^{b(k)+1}$ sind keine Teiler von $A_k(X,Y)$.

Dies beweist man induktiv, mit Hilfe der für die Polynome $A_k(X,Y)$ geltenden Rekursionsgleichung, die man aus der Rekursionsgleichung der Eisenstein-Reihen F_k erhält.

Ist $z \in H$ eine Nullstelle von E_k und $\gamma \in \Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$, so folgt wie im Funktionenkörperfall aus der Tatsache, daß E_k eine Modulform ist, daß auch $\gamma(z)$ eine Nullstelle von E_k ist. Wir betrachten deshalb die Elemente $\bar{z}$ in $\Gamma\backslash H$, für die $E_k(z) = 0$ ist. Wie im Funktionenkörperfall existiert ein Isomorphismus

$$j : \Gamma\backslash H \to \mathbb{C},$$

definiert durch

$$j(\bar{z}) \longmapsto \frac{1728 \cdot E_4(z)^3}{E_4(z)^3 - E_6(z)^2},$$

so daß wir statt der Nullstellen z von E_k in H, die entsprechenden Elemente $j(\bar{z})$ in $\mathbb{C}$ untersuchen können. Die Diskriminantenfunktion $\Delta(z)$ ist im komplexen Fall definiert durch

$$1728 \cdot \Delta(z) = E_4^3(z) - E_6^2(z).$$

Wir leiten nun die bereits erwähnten Polynome $\varphi_k(Z)$ her. Die Polynome $A_k(X,Y)$ bestehen aus lauter Termen der Form $a \cdot X^i \cdot Y^j$ ($a \in \mathbb{Q}$), wobei $4i + 6j = k$ ist. Sei im folgenden $k = 12k_1$, also $k \equiv 0 \, mod \, 12$. Dann ist

$$2i + 3j = 6k_1,$$

woraus $i \equiv 0 \, mod \, 3$ und $j \equiv 0 \, mod \, 2$ folgt. Sei also

$$X^i \cdot Y^j = X^{3i_1} \cdot Y^{2j_1}.$$

Es ist

$$\frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)} = j(\bar{z})$$

und

$$\frac{E_6^2(z)}{\Delta(z)} = \frac{E_4^3(z) - 1728 \cdot \Delta(z)}{\Delta(z)} = j(\bar{z}) - 1728.$$

Ersetzen wir in jedem Monom $a \cdot X^i \cdot Y^j$ von $A_k(X,Y)$ die Variablen X und Y durch $E_4(z)$ und $E_6(z)$ und teilen durch $\Delta^{\left[\frac{k}{12}\right]}$, so erhalten wir

$$a \cdot \frac{E_4^i(z) \cdot E_6^j(z)}{\Delta^{\left[\frac{k}{12}\right]}} = a \cdot (j(\bar{z}))^{i_1} \cdot (j(\bar{z}) - 1)^{j_1}$$

($\left[\frac{k}{12}\right]$ ist der ganzzahlige Anteil von $\frac{k}{12}$).

Wir wählen nun $m, n \geq 0$ minimal gerade so, daß $A_k(X,Y) \cdot X^{-m} \cdot Y^{-n}$ ein Polynom mit einem durch 12 teilbaren Gewicht ist. Dies bedeutet, daß wir $X^m \cdot Y^n$ so wie in Hilfssatz 5.2.3 bestimmen, d.h. $m = a(k)$, $n = b(k)$. Aus diesen Überlegungen heraus definieren wir die Polynome $\varphi_k(Z)$ folgendermaßen:

Definition 5.2.4 *Abhängig von $k \bmod 12$ sei das Monom $X^{a(k)} \cdot Y^{b(k)}$ so wie in Hilfssatz 5.2.3 angegeben. Für $k \geq 4$ ist $\varphi_k(Z) \in \mathbb{Q}[Z]$ definiert durch:*

$$\varphi_k\left(\frac{1728 \cdot X}{X^3 - Y^2}\right) = \begin{cases} 1728^{\left[\frac{k}{12}\right]-1} \cdot \frac{A_k(X,Y)}{(X^3-Y^2)^{\left[\frac{k}{12}\right]-1} \cdot X^{a(k)} \cdot Y^{b(k)}} & \text{wenn } k \equiv 2 \bmod 12 \\ 1728^{\left[\frac{k}{12}\right]} \cdot \frac{A_k(X,Y)}{(X^3-Y^2)^{\left[\frac{k}{12}\right]} \cdot X^{a(k)} \cdot Y^{b(k)}} & \text{wenn } k \equiv 0, 4, 6, 8, 10 \bmod 12. \end{cases}$$

Ist $E_4(z) \cdot E_6(z) \neq 0$, so folgen aus der Definition der Polynome $\varphi_k(Z)$ die Gleichungen

$$\varphi_k(j(\bar{z})) \cdot E_4^{a(k)}(z) \cdot E_6^{b(k)}(z) \cdot \Delta^{\left[\frac{k}{12}\right]-1}(z) = 1728^{\left[\frac{k}{12}\right]-1} \cdot E_k(z) \text{ für } k \equiv 2 \bmod 12,$$

$$\varphi_k(j(\bar{z})) \cdot E_4^{a(k)}(z) \cdot E_6^{b(k)}(z) \cdot \Delta^{\left[\frac{k}{12}\right]}(z) = 1728^{\left[\frac{k}{12}\right]} \cdot E_k(z) \text{ für } k \equiv 0, 4, 6, 8, 10 \bmod 12.$$

Aus der Definition der j-Invarianten folgt, daß $\Delta(z)$ keine Nullstellen in H hat. Für die Eisenstein-Reihen $E_4(z)$, $E_6(z)$ gilt:

Satz 5.2.5

(i) Die Eisenstein-Reihe $E_4(z)$ hat die einfache Nullstelle $\rho = \frac{1}{2} \cdot (1 - i \cdot \sqrt{3})$. Außer den Nullstellen $\gamma(\rho)$, $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$, hat $E_4(z)$ keine weiteren Nullstellen.

(ii) Die Eisenstein-Reihe $E_6(z)$ hat die einfache Nullstelle i. Außer den Nullstellen $\gamma(i)$, $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$, hat $E_6(z)$ keine weiteren Nullstellen.

Wir folgern aus Satz 5.2.5 und Hilfssatz 5.2.3:

Folgerung 5.2.6

(i) Ist $k \equiv 0 \bmod 12$, so sind ρ und i keine Nullstellen von E_k.

(ii) Ist $k \equiv 2 \bmod 12$, so ist ρ eine doppelte Nullstelle und i eine einfache Nullstelle von E_k.

(iii) Ist $k \equiv 4 \bmod 12$, so ist ρ eine einfache Nullstelle und i keine Nullstelle von E_k.

(iv) Ist $k \equiv 6 \bmod 12$, so ist i eine einfache Nullstelle und ρ keine Nullstelle von E_k.

(v) Ist $k \equiv 8 \bmod 12$, so ist ρ eine doppelte Nullstelle und i keine Nullstelle von E_k.

(vi) Ist $k \equiv 10 \bmod 12$, so sind ρ und i einfache Nullstellen von E_k.

Satz 5.2.7 *Wir bezeichnen mit N die Menge der Nullstellen von E_k. Sei $N_1 = \{z_1, \ldots, z_l\}$ ein Repräsentantensystem für N modulo $SL(2,\mathbb{Z})$. Es gilt dann*

$$\varphi_k(Z) = c \cdot \prod_{\substack{z_i \in N_1 \\ j(\bar{z}_i) \neq 0, 1728}} (Z - j(z)),$$

wobei $c \neq 0$ eine Konstante ist.

Beweis: Es ist

$$j(\rho) = \frac{E_4(\rho)^3}{\Delta(\rho)} = 0$$

und

$$j(i) = \frac{E_4(i)^3}{\Delta(i)} = \frac{1728 \cdot \Delta(i) + E_6^2(i)}{\Delta(i)} = 1728.$$

Aus den vorher gemachten Überlegungen folgt: Ein $z \in H$, mit $\bar{z} \neq \bar{\rho}$ und $\bar{z} \neq \bar{i}$ ist genau dann Nullstelle von E_k, wenn $j(\bar{z})$ eine Nullstelle von φ_k ist. Mit den Argumenten von [14] folgt, daß die Nullstellen von E_k einfach sind. Da $j : \Gamma\backslash H \to \mathbb{C}$ in $j(\bar{z}) \neq 0$, 1728 unverzweigt ist, folgt aus der Definition der Polynome φ_k die Behauptung.

Beispiele 5.2.8

Für $4 \leq k \leq 10$ und $k = 14$ ist $\varphi_k = 1$.

$$\varphi_{12}(x) = \frac{-691 \cdot x + 432000}{-691}$$

$$\varphi_{16}(x) = \frac{-3617 \cdot x + 3456000}{-3617}$$

$$\varphi_{18}(x) = \frac{43867 \cdot x - 9504000}{43867}$$

$$\varphi_{20}(x) = \frac{-174611 \cdot x + 209520000}{-174611}$$

$$\varphi_{22}(x) = \frac{77683 \cdot x - 35424000}{77683}$$

$$\varphi_{24}(x) = \frac{-236364091 \cdot x^2 + 340364160000 \cdot x - 30710845440000}{-236364091}$$

$$\varphi_{26}(x) = \frac{657931 \cdot x - 457920000}{657931}$$

$$\varphi_{28}(x) = \frac{-3392780147 \cdot x^2 + 5699870640000 \cdot x - 1180807372800000}{-3392780147}$$

$$\varphi_{30}(x) = \frac{1723168255201 \cdot x^2 - 1612885487040000 \cdot x + 77698438963200000}{1723168255201}$$

$$\varphi_{32}(x) = \frac{-7709321041217 \cdot x^2 + 14801896399104000 \cdot x - 4840290216345600000}{-7709321041217}$$

$$\varphi_{34}(x) = \frac{151628697551 \cdot x^2 - 178315348320000 \cdot x + 22238265139200000}{151628697551}.$$

Betrachtet man die Nenner der angegebenen Polynome φ_k genauer, so liegt folgende Vermutung nahe:

Satz 5.2.9 *Sei $k \geq 2$ und k eine natürliche Zahl. Der Nenner des Polynoms $\varphi_k(X)$ ist gerade der Zähler der Zahl $\frac{B_k}{2k}$. Die Polynome φ_k sind normiert.*

Beweis: Wegen $E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot q + \cdot \ldots$ stimmt der Zähler von $\frac{B_k}{2k}$ mit dem Nenner (= Hauptnenner aller Koeffizienten) von E_k überein. Es gilt

$$E_k = \varphi_k(j) \cdot \Delta^{k_*} E_4{}^{a(k)} E_6{}^{b(k)},$$

wobei $k_* = deg\, \varphi_k(X)$ ist und $a(k)$, $b(k) \geq 0$ sind. Die Diskriminantenfunktion $\Delta(z)$ hat die Produktdarstellung

$$\Delta = q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot q^n$$

die q-Darstellung von Δ. Dabei heißt $\tau(n)$ Ramanujan-Funktion. Aus der Produktdarstellung folgt, daß die Koeffizienten $\tau(n)$ ganze Zahlen sind und daß $\tau(1) = 1$ ist. Es gilt

$$j = \frac{E_4{}^3}{\Delta} = \frac{\left(1 + 240 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) \cdot q^n\right)^3}{q \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tau(n+1) \cdot q^n}.$$

j ist also von der Form

$$\frac{1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} d(n) \cdot q^n}{q \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tau(n+1) \cdot q^n},$$

wobei die Koeffizienten $d(n)$ ganze Zahlen sind. Da $\tau(1) = 1$ ist, hat

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \tau(n+1) \cdot q^n$$

ein inverses Element mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$, so daß wir also j in der Form

$$j = \frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n) \cdot q^n$$

schreiben können, wobei die Koeffizienten $c(n) \in \mathbb{Z}$ sind. Wegen der Produktdarstellung von Δ ist der Ausdruck $\Delta^{k_*} {E_4}^{a(k)} {E_6}^{b(k)}$ von der Form

$$q^{k_*} + \sum_{n>k_*} \alpha_n \cdot q^n,$$

wobei $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ für $n > k_*$ ist. Wenn $\varphi_k(X) = \sum\limits_{0 \leq i \leq k_*} a_i \cdot X^i$ ist, so gilt also

$$E_k(z) = \sum_{i=0}^{k_*} a_i \cdot \left(\frac{1}{q} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n) \cdot q^n \right)^i \cdot \left(q^{k_*} + \sum_{n>k_*} \alpha_n \cdot q^n \right). \quad (*)$$

Sei nun p ein Primteiler des Nenners von φ_k. Weiter sei $e \in \mathbb{N}$ maximal, so daß p^e ein Teiler von $Nenner(\varphi_k)$ ist. Im folgenden schreiben wir dafür auch $p^e \,||\, Nenner(\varphi_k)$. Wir wählen i_0 maximal mit der Eigenschaft $p^e \,||\, Nenner(a_{i_0})$, d.h. p^e ist kein Teiler von $Nenner(a_i)$ für $i > i_0$. Nun ergibt sich aus $(*)$, wenn ausmultipliziert wird, für den Koeffizienten von $q^{k_* - i_0}$

$$\sum_{i=i_0+1}^{k_*} a_i b_i + a_{i_0},$$

wobei $b_i \in \mathbb{Z}$ für $i = i_0 + 1, \ldots, k_*$ ist. Es gilt $p^e \,||\, Nenner(\sum\limits_{i=i_0+1}^{k_*} a_i b_i + a_{i_0})$. $\quad (**)$

Begründung: Sei

$$\sum_{i=i_0+1}^{k_*} a_i b_i = \frac{a}{p^{e_1} b},$$

mit $e_1 < e$, $(p, a) = (p, b) = 1$ und

$$a_{i_0} = \frac{c}{p^e d},$$

mit $ggT(p, c) = ggT(p, d) = 1$. Der Koeffizient von $q^{k_* - i_0}$ ist dann

$$\frac{ap^{e-e_1} d + bc}{p^e bd}.$$

Weil p kein Teiler von bc ist und da aus $e - e_1 > 0$ folgt, daß p kein Teiler von $ap^{e-e_1}d + bc$ ist, gilt also $(**)$. Somit ist p^e ein Teiler des Nenners von E_k.
Sei nun umgekehrt p ein Primteiler des Nenners von E_k, d.h. des q-Koeffizienten von E_k. Aus $(*)$ sieht man, daß der q-Koeffizient von E_k von der Form $a_{k_*-1} + b$ mit $b \in \mathbb{Z}$ ist. Der Nenner des q-Koeffizienten von E_k, d.h. der Zähler von $\frac{B_k}{2k}$, ist also gleich dem Nenner von a_{k_*-1} und damit ein Teiler des Nenner von φ_k. Damit folgt die Behauptung.

$\square$

5.3 Empirische Berechnungen

Im folgenden sei $\varphi_k^* = Z\ddot{a}hler(\frac{B_k}{2k}) \cdot \varphi_k$. Nach Satz 5.2.9 sind die Koeffizienten von φ_k^* ganze Zahlen. Wir werden in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 die Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ und Resultanten $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ empirisch auf Primteiler untersuchen. Da für größere k bzw. i und j die Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ bzw. Resultanten $Res(\varphi_k^*, \varphi_i^*)$ riesige Zahlen mit mehreren tausend Stellen sind, können wir nicht alle Primteiler berechnen. MAPLE besitzt nun eine Funktion, die alle kleineren Primteiler und zusätzlich noch größere einfach zu berechnende Primteiler bestimmt. Diese Funktion werden wir benutzen.
Da die Berechnung von Diskriminanten und Resultanten mit MAPLE aufgrund der großen Koeffizienten von φ_k^* nur sehr begrenzt möglich ist, wurden diese mit KANT (TU-Berlin) berechnet und anschließend nach MAPLE transferiert.

5.3.1 Primteilerberechnungen der Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$

Wenn $k < 12$ oder wenn $k = 14$ ist, so ist $Diskr(\varphi_k^*) = 0$. Für $k = 12, 14, ..., 22$ sowie für $k = 26$ sind die Polynome φ_k^* vom Grad 1 und haben als höchsten Koeffizienten $Z\ddot{a}hler(\frac{B_k}{2k})$. Also ist in diesen Fällen $Diskr(\varphi_k^*) = Z\ddot{a}hler(\frac{B_k}{2k})$. Die berechneten Primelementzerlegungen von $Diskr(\varphi_k^*)$ für $k = 24$ und $28 \leq k \leq 250$ findet man in Anhang A.

Beobachtungen:

Wir stellen in den Fällen $k = 24$ und $28 \leq k \leq 250$ fest, daß in der Primelementzerlegung einer Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ sämtliche Primteiler $p \neq 11$, die kleiner als $\frac{k}{2}$ oder die gleich $\frac{k}{2} + 1$ sind, auftreten.
Im folgenden werden wir versuchen zu beschreiben, in welcher Potenz die Primelemente, die kleiner oder die gleich $\frac{k}{2} + 1$ sind, in der Primelementzerlegung der Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ auftreten:
Für eine rationale Zahl a bezeichnen wir mit $[a]$ ihren ganzzahligen Anteil. Weiter seien im folgenden k und l immer gerade natürliche Zahlen.

Für eine feste Primzahl $p > 2$ definieren wir

$$A_{l,p} \quad = \quad max\{m \in \mathbb{N}_0 \mid p^m \text{ ist ein Teiler von } Diskr(\varphi_l^*)\}.$$

Wir werden im folgenden so vorgehen, daß wir versuchen für ein festes $k \geq 2$ eine Formel für alle berechneten Werte $A_{k(p-1),p}$ zu finden. Anschließend werden wir dann mit Hilfe von $A_{k(p-1),p}$ für $k(p-1)+2 < l < (k+1)(p-1)$ die Werte $A_{l,p}$ beschreiben. Wir werden sehen, daß fast immer $A_{k(p-1)+2,p} = A_{(k-1)(p-1),p}$ gilt.
Alle numerischen Beobachtungen beziehen sich auf die Primzahlen p, für die $k(p-1) \leq 250$ ist. Wir geben für jedes k die kleinste Zahl an, unter dem diese Primzahlen liegen.

Für $k = 2$ stellen wir für alle Primzahlen $p < 114$ fest:

$$A_{2(p-1),p} \quad = \quad \left[\frac{p}{12}\right] \cdot 2,$$

$$A_{2p,p} \quad = \quad A_{p-1,p} \quad = \quad 0.$$

Für $2p < l < 3(p-1)$ gilt fast immer

$$A_{l,p} \quad = \quad A_{2(p-1),p}.$$

Ist dies nicht der Fall, so unterscheiden sich $A_{l,p}$ und $A_{2(p-1),p}$ nur gering: Es gilt immer

$$0 \leq A_{l,p} - A_{2(p-1),p} \leq 3.$$

In fast allen Fällen ist $A_{l,p}$ höchstens um 1 größer als $A_{2(p-1),p}$. Nur für $l = 124$, $p = 83$ ist $A_{l,p} = A_{2(p-1),p} + 3$.

Für $k = 3$ stellen wir für alle Primzahlen p mit $10 < p < 84$ fest:

$$A_{3(p-1),p} \quad = \quad 3 \cdot A_{2(p-1),p},$$

$$A_{3p-1,p} \quad = \quad A_{2(p-1),p}.$$

Für $3p - 1 < l < 4(p-1)$ unterscheiden sich die Werte $A_{l,p}$ und $A_{3(p-1),p}$ nur geringfügig. Es gilt immer

$$0 \leq A_{l,p} - A_{3(p-1),p} \leq 3.$$

Ist $p \neq 2, 3$, so ist $p \equiv 1, 5, 7, 11 \, mod \, 12$. Ist $p \equiv 1, 5 \, mod \, 12$, so ist fast immer $A_{l,p} = A_{3(p-1),p}$. Wenn $p \equiv 7, 11 \, mod \, 12$ ist, so gilt bis auf höchstens wenige Ausnahmen $A_{3p+1,p} = A_{3(p-1),p}$, $A_{3p+3,p} = A_{3(p-1),p} + 2$ und desweiteren dann $A_{l,p} = A_{l-4,p}$.

Für $k = 4$ stellen wir für alle Primzahlen p mit $4 < p < 62$ fest:

$$\begin{aligned} A_{4(p-1),p} &= 2 \cdot A_{3(p-1),p} + 4 \cdot \left[\frac{\delta_p}{7} \right], \\ A_{4p-2,p} &= A_{3(p-1),p}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\delta_p = \begin{cases} 1 & \text{falls Rest}(p : 12) > 6 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Werte $A_{4p,p}$ stellen wir fest:

$$A_{4p,p} = \frac{3}{4} \cdot A_{4(p-1),p}.$$

Für $4p < l < 5(p-1)$ gilt immer

$$|A_{l,p} - A_{4(p-1),p}| \leq 4.$$

Betrachten wir die berechneten Werte $A_{l,p}$ genauer, so stellen wir fest:

(*i*) Ist $p \equiv 1 \, mod \, 12$, also $p = 13, 37, 61$, so gilt für $A_{l,p}$ bis auf eventuell wenige Abweichungen um 1 nach oben:

$$A_{l,p} = A_{4(p-1),p}.$$

(*ii*) Ist $p \equiv 5 \, mod \, 12$, also $p = 17, 29, 41, 53$, so gilt für $A_{l,p}$ bis auf eventuell wenige Abweichungen um 1 oder 2 nach oben:

$$A_{4p+2,p} = A_{4(p-1),p},$$

$$A_{4p+4,p} = A_{4(p-1),p} + 2,$$

$$
\begin{aligned}
A_{4p+6,p} &= A_{4(p-1),p}, \\
A_{l,p} &= A_{l-6,p} \qquad \text{für } l > 4p+6.
\end{aligned}
$$

(iii) Ist $p \equiv 7 \, mod \, 12$, also $p = 7, 19, 31, 43$, so gilt für $A_{l,p}$:

$$
\begin{aligned}
A_{4p+2,p} &= A_{4(p-1),p} - 2, \\
A_{4p+4,p} &= A_{4(p-1),p}, \\
A_{l,p} &= A_{l-4,p} \qquad \text{für } l > 4p+4.
\end{aligned}
$$

(iv) Ist $p \equiv 11 \, mod \, 12$, also $p = 11, 23, 47, 59$, so gilt für $A_{l,p}$:

$$
\begin{aligned}
A_{4p+2,p} &= A_{4(p-1),p} - 2, \\
A_{4p+4,p} &= A_{4(p-1),p} + 2, \\
A_{4p+6,p} &= A_{4(p-1),p} - 2, \\
A_{4p+8,p} &= A_{4(p-1),p}, \\
A_{4p+10,p} &= A_{4(p-1),p}, \\
A_{4p+12,p} &= A_{4(p-1),p}, \\
A_{l,p} &= A_{l-12,p} \qquad \text{für } l > 4p+12.
\end{aligned}
$$

Für $k = 5$ stellen wir für alle Primzahlen p mit $4 < p < 48$ fest:

$$
\begin{aligned}
A_{5(p-1),p} &= A_{4(p-1),p} + 8 \cdot \left[\frac{p}{12} \right], \\
A_{5p-3,p} &= A_{4(p-1),p}.
\end{aligned}
$$

Für $p = 3, 5$ ist $A_{5(p-1),p} = 0$. Für $p \geq 7$ ist $A_{5(p-1),p} > 0$. Betrachten wir für $p \geq 7$ den Quotienten $\frac{A_{5p-1,p}}{A_{5(p-1),p}}$, so erhalten wir folgende Werte:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
p &=& 7: \frac{3}{4} & \quad & \text{p} &=& 11: 2 \\
p &=& 13: \frac{3}{4} & & \text{p} &=& 17: \frac{19}{20} \\
p &=& 19: \frac{3}{4} & & \text{p} &=& 23: \frac{3}{4} + \frac{1}{12} \\
p &=& 29: \frac{3}{4} + \frac{1}{10} & & \text{p} &=& 31: \frac{3}{4} \\
p &=& 37: \frac{3}{4} & & \text{p} &=& 41: \frac{3}{4} + \frac{1}{15} \\
p &=& 43: \frac{3}{4} & & \text{p} &=& 47: \frac{3}{4} + \frac{1}{15}
\end{array}
$$

Wir erhalten also auffallend oft Werte um $\frac{3}{4}$ bzw. exakt $\frac{3}{4}$. Genauer gesagt erhalten wir exakt den Wert $\frac{3}{4}$ genau dann, wenn $p \equiv 1 \, mod \, 12$ oder $p \equiv 7 \, mod \, 12$ ist.

Für $5p - 1 < l < 6(p-1)$ gilt

$$0 \leq A_{l,p} - A_{5(p-1)} \leq 5.$$

Betrachten wir die berechneten Werte $A_{l,p}$ genauer, so stellen wir fest:

(i) Ist $p \equiv 1 \, mod \, 12$, also $p = 13, 37$, so gilt stets

$$A_{l,p} = A_{5(p-1),p}.$$

(ii) Ist $p \equiv 5 \, mod \, 12$, also $p = 17, 29, 41$, so gilt für $A_{l,p}$ bis auf eventuell wenige Abweichungen um 1 oder 2 nach oben:

$$
\begin{aligned}
A_{5p+1,p} &= A_{5(p-1),p}, \\
A_{5p+3,p} &= A_{5(p-1),p} + 2, \\
A_{5p+5,p} &= A_{5(p-1),p} + 4, \\
A_{l,p} &= A_{l-6,p} \qquad \text{für } l > 5p + 5.
\end{aligned}
$$

In diesem Fall wollen wir näher auf die Abweichungen eingehen:

- Für $p = 17$ treten keine Abweichungen von obigem Schema auf.
- Für $p = 29$ weichen die Werte $A_{5p+15,p} = A_{160,29}$ und $A_{5p+17,p} = A_{162,29}$ vom obigen Schema jeweils um 1 nach oben ab.
- Für $p = 41$ weichen entsprechend wie bei $p = 29$ die Werte $A_{5p+15,p} = A_{220,41}$ und $A_{5p+17,p} = A_{222,41}$ vom obigen Schema jeweils um 2 nach oben ab.

(*iii*) Ist $p \equiv 7 \, mod \, 12$, also $p = 19, 31, 43$, so gilt für $A_{l,p}$:

$$\begin{aligned} A_{5p+1,p} &= A_{5(p-1),p} + 4, \\ A_{5p+3,p} &= A_{5(p-1),p}, \\ A_{l,p} &= A_{l-4,p}. \end{aligned}$$

(*iv*) Ist $p \equiv 11 \, mod \, 12$ so stellen wir fest: Die Differenz $A_{l,p} - A_{5(p-1,p)}$ ist für $p = 11, 23, 47$ gleich, sofern $A_{l,p}$ berechnet wurde.

Für $A_{6(p-1),p}$ und $A_{6p-4,p}$ sind folgende Werte berechnet worden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} p &=& 5: && A_{24,5} &=& 4 && A_{26,5} &=& 0 \\ p &=& 7: && A_{36,7} &=& 12 && A_{38,7} &=& 4 \\ p &=& 11: && A_{60,11} &=& 18 && A_{62,11} &=& 4 \\ p &=& 13: && A_{72,19} &=& 30 && A_{74,13} &=& 20 \\ p &=& 17: && A_{96,17} &=& 38 && A_{98,17} &=& 20 \\ p &=& 19: && A_{108,19} &=& 42 && A_{110,19} &=& 24 \\ p &=& 23: && A_{132,23} &=& 48 && A_{134,23} &=& 24 \\ p &=& 29: && A_{168,29} &=& 66 && A_{170,29} &=& 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} p &=& 31: & A_{180,31} &=& 72 & A_{182,31} &=& 44 \\ p &=& 37: & A_{216,37} &=& 90 & A_{218,37} &=& 60 \\ p &=& 41: & A_{240,41} &=& 96 & A_{242,41} &=& 60 \end{array}$$

Wir definieren für $p \geq 5$

$$A'_{6(p-1),p} = \delta_p + \left[\frac{p}{12}\right] \cdot 30.$$

Dabei ist

$$\delta_p = \begin{cases} 0 & \text{wenn}\, p \equiv 1 mod\, 12 \\ 6 & \text{wenn}\, p \equiv 5\, mod\, 12 \\ 12 & \text{wenn}\, p \equiv 7\, mod\, 12 \\ 18 & \text{wenn}\, p \equiv 11\, mod\, 12. \end{cases}$$

Abgesehen von den Werten $A_{96,17}$ und $A_{24,5}$ gilt immer

$$A'_{6(p-1),p} = A_{6(p-1),p}.$$

Es ist $A_{96,17} = 38$ und $A_{24,5} = 4$. Nach obiger Formel ist $A'_{96,17} = 36$ und $A'_{24,5} = 6$. Wir stellen fest, daß

$$A_{6p-4,p} = A_{5(p-1),p}$$

gilt. Als nächstes untersuchen wir die Werte $A_{6p-2,p}$ und $A_{6p,p}$, sofern $6p-2, 6p < 7(p-1)$ ist. Dazu bilden wir die Quotienten $(A_{6p-2,p}/A'_{6(p-1),p})$, $(A_{6p,p}/A'_{6(p-1),p})$. Es gilt:

	$\frac{A_{6p-2,p}}{A_{6(p-1),p}}$	$\frac{A_{6p,p}}{A_{6(p-1),p}}$
$p = 7$:	$\frac{3}{4}$	-
$p = 11$:	$\frac{3}{4} + \frac{1}{36}$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{9}$
$p = 13$:	$\frac{3}{4} + \frac{1}{60}$	$\frac{5}{6}$
$p = 17$:	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{rclcc}
p & = & 19: & \frac{3}{4}+\frac{1}{84} & \frac{5}{6}-\frac{1}{21} \\
p & = & 23: & \frac{3}{4} & \frac{5}{6}-\frac{1}{24} \\
p & = & 29: & \frac{3}{4}+\frac{1}{132} & \frac{5}{6} \\
p & = & 31: & \frac{3}{4}+\frac{1}{72} & \frac{5}{6}-\frac{1}{36} \\
p & = & 37: & \frac{3}{4}+\frac{1}{60} & \frac{5}{6} \\
p & = & 41: & \frac{3}{4}+\frac{1}{96} & \frac{5}{6}
\end{array}$$

Die Quotienten sind also Werte um $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{5}{6}$.

Wir stellen für $6p < l < 7(p-1)$ fest:

(i) Ist $p \equiv 1 \, mod \, 12$, also $p = 13, 37$, so gilt:

$$A_{l,p} = A_{6(p-1),p}.$$

(ii) Ist $p \equiv 5 \, mod \, 12$, also $p = 17, 29$, so gilt:

$$\begin{aligned}
A_{6p+2,p} &= A'_{6(p-1),p} - 4, \\
A_{6p+4,p} &= A'_{6(p-1),p} - 2, \\
A_{6p+6,p} &= A'_{6(p-1),p}, \\
A_{l,p} &= A_{l-6,p} \quad \text{für } l > 6p+6.
\end{aligned}$$

(iii) Ist $p \equiv 7 \, mod \, 12$, also $p = 19, 31$, so gilt bis eventuell auf wenige Abweichungen um 1 nach oben

$$\begin{aligned}
A_{6p+2,p} &= A_{6(p-1),p}, \\
A_{6p+4,p} &= A_{6(p-1),p} - 4, \\
A_{l,p} &= A_{l-4,p} \quad \text{für } l > 6p+4.
\end{aligned}$$

(iv) Für $p \equiv 11 \, mod \, 12$, also $p = 19, 31$ reichen die numerischen Ergebnisse nicht aus, um ähnliche Beobachtungen wie in den anderen Fällen zu machen.

Für $A_{7(p-1),p}$ und $A_{7p-5,p}$ haben wir folgende Werte berechnet:

p	=	5 :	$A_{28,5}$	=	5	$A_{30,5}$	=	5
p	=	7 :	$A_{42,7}$	=	14	$A_{44,7}$	=	12
p	=	11 :	$A_{70,11}$	=	19	$A_{72,11}$	=	18
p	=	13 :	$A_{84,13}$	=	42	$A_{86,13}$	=	30
p	=	17 :	$A_{112,17}$	=	48	$A_{114,17}$	=	37
p	=	19 :	$A_{126,19}$	=	54	$A_{128,19}$	=	42
p	=	23 :	$A_{154,23}$	=	60	$A_{156,23}$	=	48
p	=	29 :	$A_{196,29}$	=	90	$A_{198,29}$	=	66
p	=	31 :	$A_{210,31}$	=	97	$A_{212,31}$	=	72

Wir definieren für $p \geq 5$

$$A'_{7(p-1),p} = A'_{6(p-1),p} + 12 \cdot \left[\frac{p}{12}\right].$$

Es ist $A_{42,7} = A'_{42,7} + 2$. Ansonsten unterscheiden sich die Werte $A_{7(p-1),p}$ und $A'_{7(p-1),p}$ höchstens um 1.
Es ist $A_{30,5} = 5 = A_{24,5} + 1$ und $A_{114,17} = 5 = A_{96,17} - 1$. Ansonsten gilt

$$A_{7p-5,p} = A_{6(p-1),p}.$$

Für $A_{8(p-1),p}$ und $A_{8p-6,p}$ kennen wir folgende Werte:

p	=	5 :	$A_{32,5}$	=	5	$A_{34,5}$	=	5

$$
\begin{array}{llrlrlrlr}
\text{p} & = & 7: & A_{48,7} & = & 18 & A_{50,7} & = & 15 \\
\text{p} & = & 11: & A_{80,11} & = & 30 & A_{82,11} & = & 19 \\
\text{p} & = & 13: & A_{96,13} & = & 56 & A_{98,13} & = & 42 \\
\text{p} & = & 17: & A_{128,17} & = & 62 & A_{130,17} & = & 48 \\
\text{p} & = & 19: & A_{144,19} & = & 80 & A_{146,19} & = & 54 \\
\text{p} & = & 23: & A_{176,23} & = & 86 & A_{178,23} & = & 60 \\
\text{p} & = & 29: & A_{224,29} & = & 118 & A_{226,29} & = & 90 \\
\text{p} & = & 31: & A_{240,31} & = & 136 & A_{242,31} & = & 97
\end{array}
$$

Wir definieren für $p \geq 5$

$$A'_{8(p-1),p} \quad = \quad \delta_p + \left[\frac{p}{12}\right] \cdot 56.$$

Dabei ist

$$\delta_p = \begin{cases} 0 & \text{wenn}\, p \;\equiv\; 1 mod\, 12 \\ 6 & \text{wenn}\, p \;\equiv\; 5\, mod\, 12 \\ 24 & \text{wenn}\, p \;\equiv\; 7\, mod\, 12 \\ 30 & \text{wenn}\, p \;\equiv\; 11\, mod\, 12. \end{cases}$$

Es ist $A_{48,7} = A'_{48,7} - 6$. Ansonsten unterscheiden sich die Werte $A_{8(p-1),p}$ und $A'_{8(p-1),p}$ höchstens um 1.

Wir stellen fest, daß $A_{50,7} = A_{42,7} + 1$ ist. Ansonsten gilt

$$A_{8p-6,p} = A_{7(p-1),p}.$$

Folgendes Verhalten der Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ bezüglich der Primzahl 13 ist bemerkenswert: Wie bereits definiert, sei $A_{k,13}$ die Potenz mit der 13 in $Diskr(\varphi_k^*)$ vorkommt. Es ergibt sich folgende Tabelle:

$k \cdot 12$	$2 \cdot 12$	$3 \cdot 12$	$4 \cdot 12$	$5 \cdot 12$	$6 \cdot 12$	$7 \cdot 12$	$8 \cdot 12$	$9 \cdot 12$	$10 \cdot 12$
$A_{k \cdot 12,13}$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$k \cdot 12$	$11 \cdot 12$	$12 \cdot 12$	$13 \cdot 12$	$14 \cdot 12$	$15\cdot$	$16 \cdot 12$	$17 \cdot 12$	$18 \cdot 12$
$A_{k\cdot 12,13}$	110	133	169	156	195	223	253	285

$k \cdot 12$	$19 \cdot 12$	$20 \cdot 12$
$A_{k\cdot 12,13}$	319	355

Wir betrachten nun die Differenzen $A_{(k+1)-12,13} - A_{k-12,13}$. Es ergibt sich folgende Tabelle:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$A_{(k+1)\cdot 12,13} - A_{k\cdot 12,13}$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	23	36	-13	39

k	15	16	17	18	19
$A_{(k+1)\cdot 12,13} - A_{k\cdot 12,13}$	28	30	32	34	36

Für $k \leq 10$ ist die Differenz gerade $2k$, für $k = 11, 12, 13, 14$ sind die Differenzen unregelmäßig und für $15 \leq k \leq 19$ ist die Differenz $2(k-1)$.
Bei anderen Primzahlen p wurden keine Regelmäßigkeiten dieser Art gefunden.

Unsere bisherigen Beobachtungen haben sich auf die Primteiler p der Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ bezogen, die kleiner oder gleich $\frac{k}{2}+1$ sind. Im folgenden sei p eine Primzahl, die Teiler von $Diskr(\varphi_k^*)$ ist und so, daß

$$p > \frac{k}{2} + 1$$

ist. Wir können, wenn ein solches k existiert, k minimal wählen. Wir stellen dann empirisch folgende Tatsache fest:
Ist

$$p > \frac{k+(p-1)}{2} + 1,$$

so ist p auch Primteiler von $Diskr(\varphi^*_{k+(p-1)})$ und zwar mindestens mit der gleichen Vielfachheit wie in $Diskr(\varphi_k^*)$.
Folgende Paare (p,k) mit

$$p > \frac{k+(p-1)}{2} + 1$$

wurden gefunden: $(53,38)$, $(67,52)$, $(73,52)$, $(79,66)$, $(97,42)$, $(101,62)$, $(127,52)$, $(199,44)$.

Wie man leicht nachprüfen kann, ist

$$p \leq \frac{k + l(p-1)}{2} + 1$$

für $l \geq 2$. Für

$$p \leq \frac{k + l(p-1)}{2} + 1$$

haben wir die Werte $A_{k+l(p-1),p}$ mit Hilfe der Werte $A_{m(p-1),p}$ mit $m \geq 2$ beschrieben. Allerdings gab es dort für bestimmte Werte Abweichungen von den angegebenen Formeln, und zwar fast immer nach oben. Es stellt sich insbesondere heraus, daß alle Werte $A_{k+l(p-1),p}$ eine Abweichung nach oben haben, und zwar um den Wert $A_{k,p}$.

In fast allen Fällen, in denen $p \geq 7$ ist, und wo $A_{k,p}$ mit $A_{k+(p-1),p}$ verglichen wurde, stellte sich heraus, daß

$$A_{k,p} \leq A_{k+(p-1),p}$$

gilt. Folgende Ausnahme für $p = 13$ sieht man, wenn man die vorherige Tabelle betrachtet: $A_{14\cdot(13-1),13} - A_{13\cdot(13-1),13} = -13$.

Es hat sich als sinnvoll erwiesen $A_{k,p}$ mit $A_{k+(p-1),p}$ zu vergleichen. Der Grund dafür könnte mit den Kummer-Kongruenzen zusammenhängen. Diese lauten: Wenn $k \equiv k^{'} \not\equiv 0 \, mod \, (p-1)$ ist, so gilt

$$\frac{B_k}{k} \equiv \frac{B_{k'}}{k^{'}} \, mod \, p.$$

Wir erinnern noch einmal an die rekursive Definition der Eisenstein-Reihen:

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) \cdot q^n$$

für $k \geq 4$. Es ist also

$$\frac{B_k}{2k} \cdot E_k(z) = \frac{B_k}{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) \cdot q^n$$

für $k \geq 4$. Wenn $k \equiv k^{'} \, mod \, (p-1)$ ist, etwa $k^{'} = k + t(p-1)$, so gilt

$$\sigma_{k-1}(n) \equiv \sigma_{k^{'}-1}(n) \, mod \, p$$

wegen

$$\sigma_{k^{'}-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1+t(p-1)}$$

und

$$d^{t\cdot(p-1)} \equiv 1 \, mod \, p.$$

Ist also p ein Teiler aller Koeffizienten von

$$\frac{B_k}{2k} \cdot E_k,$$

so ist p auch Teiler aller Koeffizienten von

$$\frac{B_{k'}}{2k'} \cdot E_{k'}.$$

Vielleicht läßt sich diese Aussage verwenden, um einige der beobachteten Sachverhalte beweisen zu können.

5.3.2 Primteilerberechnungen der Resultanten $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$

Im folgenden sei stets $i > j$. Für $j = 4, 6, 8, 10, 14$ gilt

$$\varphi_j^* = Z\ddot{a}hler(\frac{B_j}{2j}).$$

Ansonsten ist $deg \, \varphi_j^* \geq 1$. Die Bernoulli-Zahlen $B_4, B_6, B_8, B_{10}, B_{14}$ haben folgende Werte:

$$B_4 = -\tfrac{1}{30},\ B_6 = -\tfrac{1}{42},\ B_8 = -\tfrac{1}{30},\ B_{10} = \tfrac{5}{66},\ B_{14} = \tfrac{7}{6}.$$

In allen diesen Fällen ist $Z\ddot{a}hler(\frac{B_j}{2j}) = 1$. Wenn also $j \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$, so ist $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) = 1$.

In Anhang B findet man die Primelementzerlegung aller Resultanten $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ mit $i \leq 92$ und $j \notin \{4, 6, 8, 10, 14\}$. Außer den in Anhang B aufgeführten Berechnungen wurden weitere Primelementzerlegungen solcher Resultanten ermittelt. Die nun folgenden Beobachtungen beziehen sich auf Anhang B und manchmal darüber hinaus auf die Primelementzerlegung einiger weiterer Resultanten.

Beobachtungen:

In der Primelementzerlegung von $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ kommen in der Regel alle Primzahlen $p < i - 1$ vor. Die einzige Ausnahme bildet $p = 11$:
In der Regel tritt 11 nicht in der Primelementzerlegung von $Res(\varphi_i^*, \varphi_{22}^*)$ auf. Lediglich bei den Resultanten $Res(\varphi_{32+l\cdot(11-1)}^*, \varphi_{22}^*)$, $l \geq 0$, ist festzustellen, daß 11 ein einfacher Primteiler ist.
Außerdem ist 11 kein Primteiler folgender Resultanten: $Res(\varphi_{20}^*, \varphi_{18}^*)$, $Res(\varphi_{22}^*, \varphi_{16}^*)$, $Res(\varphi_{22}^*, \varphi_{18}^*)$, $Res(\varphi_{26}^*, \varphi_{18}^*)$ und $Res(\varphi_{32}^*, \varphi_{18}^*)$.

Weiter wurde beobachtet:

(i) Falls $j-1$ eine Primzahl ist, kommt $p=j-1$ in der Regel nicht in der Primelementzerlegung von $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ vor. Folgende Ausnahmen sind beobachtet worden: Ist $p \geq 11$ und $p \neq 13$, so ist p^e ein Teiler der Resultanten $Res(\varphi^*_{2\cdot p+l\cdot(p-1)}, \varphi^*_{p+1})$, $l \geq 0$. Dabei ist

$$e = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 11, 17, 19 \\ 2 & \text{für } p = 23, 29, 31, 37 \\ 3 & \text{für } p = 41, 43 \\ 4 & \text{für } p = 47, 53. \end{cases}$$

Größere Primzahlen wurden nicht mehr untersucht. Für $p=13$ wissen wir bereits, daß $Res(\varphi_i^*, \varphi_{p+1}^*) = Res(\varphi_i^*, \varphi_{14}^*) = 1$ ist.
Man beachte, daß für $i \geq 24$ die Primzahl 11 genau dann ein Teiler von $Res(\varphi_i^*, \varphi_{12}^*)$ ist, wenn 11 auch ein Teiler von $Res(\varphi_i^*, \varphi^*_{12+(11-1)}) = Res(\varphi_i^*, \varphi_{22}^*)$ ist.

(ii) Falls $j+1$ eine Primzahl und $j-i>2$ ist, kommt $p=j+1$ immer in der Primelementzerlegung von $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ vor.
Im Fall, daß $j+1$ eine Primzahl und $i=j+2$ ist, wurde keine Resultante $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ gefunden, für die $j+1$ ein Primteiler ist.

Bei den Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ haben wir versucht, für die Primteiler p, die kleiner als $\frac{k}{2}+1$ sind, ihre Vielfachheit in der Primelementzerlegung von $Diskr(\varphi_k^*)$ zu beschreiben. Gleiches wollen wir nun bei den Resultanten $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ tun, und zwar exemplarisch für $p=13$:
Sei $A_{i,j,13}$ die Vielfachheit von $p=13$ in der Primelementzerlegung der Resultanten $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$, $i>j$. Wir beobachten für die meisten $A_{i,j,13}$ folgende Gleichungen:

(i) Wenn $i, j \not\equiv 2 \, mod \, 12$, so ist

$$A_{i,j,13} = \left[\tfrac{i}{12}\right] \cdot \left[\tfrac{j}{12}\right].$$

(ii) Wenn $i \equiv 2 \, mod \, 12$ und $j \not\equiv 2 \, mod \, 12$, so ist

$$A_{i,j,13} = \left(\left[\tfrac{i}{12}\right] - 1\right) \cdot \left[\tfrac{j}{12}\right].$$

(iii) Wenn $i \not\equiv 2 \, mod \, 12$ und $j \equiv 2 \, mod \, 12$, so ist

$$A_{i,j,13} = \left(\left[\tfrac{i}{12}\right]\right) \cdot \left(\left[\tfrac{j}{12}\right] - 1\right).$$

(iv) Wenn $i, j \not\equiv 2 \, mod \, 12$, so ist

$$A_{i,j,13} = \left(\left[\tfrac{i}{12}\right] - 1\right) \cdot \left(\left[\tfrac{j}{12}\right] - 1\right).$$

Man kann die obige Beobachtung noch präzisieren:
Betrachtet man zum Beispiel die Werte $A_{52+12\cdot l,j,13}$, $l \geq 0$, so stellt man fest daß meistens

$$A_{52+12\cdot l,j,13} = \left(\left[\tfrac{52+12\cdot l}{12}\right] - 1\right) \cdot \left[\tfrac{j}{12}\right]$$

gilt, wenn $j \not\equiv 2 \, mod \, 12$ ist. Falls $j \equiv 2 \, mod \, 12$ ist, gilt meistens

$$A_{52+12\cdot l,j,13} = \left(\left[\tfrac{52+12\cdot l}{12}\right] - 1\right) \cdot \left(\left[\tfrac{j}{12}\right] - 1\right).$$

Weiter ist auffällig, daß für $i > 4 \cdot 13 = 52$ sehr häufig $A_{i,52,13} = \frac{3}{4} \cdot A_{4(13-1),p}$ gilt. Dies erinnert an die bei der Untersuchung der Diskriminanten gemachten Beobachtung, daß für eine Primzahl $p \geq 7$

$$A_{4p,p} = \frac{3}{4} \cdot A_{4(p-1),p}$$

gilt.

Weiter wurde folgende Beobachtung gemacht:
Ist p Primteiler einer Resultanten $Res(\varphi^*_{p-1}, \varphi^*_{j_0})$, wobei $j_0 < p - 1$ ist, so ist p auch ein Primteiler der Resultanten $Res(\varphi^*_i, \varphi^*_{j_0})$, wenn $i > p + 1$ ist und zwar mindestens in der gleichen Vielfachheit. In keinem der in Anhang B aufgeführten Berechnungen ist festzustellen, daß p Primteiler einer Resultanten $Res(\varphi^*_{p+1}, \varphi^*_j)$, $j < p + 1$ ist. Wir geben nun für jede Primzahl $p \leq 107$ jeweils die Werte j_0 an, für die p ein Teiler von $Res(\varphi^*_{p-1}, \varphi^*_{j_0})$ ist, sofern solche Werte existieren. In der dritten Spalte wird angegeben in welcher Vielfachheit p die Resultante $Res(\varphi^*_{p-1}, \varphi^*_{j_0})$ teilt:

p	j_0	Vielfachheit
59	30	1
79	22	1
	24	2
	56	2
	58	1
83	20	1
	42	1
	64	1
89	12	1
	78	1
101	40	1
	62	1
107	54	1

Folgende Tatsache ist auffällig:
Für alle Primzahlen $p \neq 79$ für die mehrere solche Werte j_0 existieren, etwa $j_{0,1}$ und $j_{0,2}$, ist ihre Differenz $j_{0,1} - j_{0,2}$ ein Vielfaches von 22.

Zum Schluss wollen wir noch folgende interessante Beobachtung mitteilen:
Wenn

$$\frac{i-j}{l} + 1$$

für $l \geq 1$ eine Primzahl ist, so kommt

$$p = \frac{i-j}{l} + 1$$

in der Primelementzerlegung von $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ vor.

5.3.3 Untersuchung der Polynome φ_k auf Irreduzibilität

Für $k \leq 446$ wurde die Irreduzibilität der Polynome φ_k mit dem Computer-Algebra-System KANT festgestellt.

5.3.4 Die Galois-Gruppe der Polynome φ_k

Die Galois-Gruppen der Polynome φ_k mit $k \leq 7$ sind die symmetrischen Gruppen, wie durch das Programm MAPLE berechnet wurde. Darüber hinaus wurden die Polynome φ_k für $k \leq 172$ mit dem Computer-Algebra-System KANT untersucht. Es gibt dort einen Parameter Genauigkeit, der mit dem Wert 1000 eingestellt wurde. Wir erhielten in allen Fällen die symmetrische Gruppe. Es liegt also die Vermutung nahe, daß alle φ_k als Galois-Gruppe die symmetrische Gruppe haben.

5.3.5 Untersuchung der Nullstellen der Polynome φ_k

Die Nullstellen der Polynome φ_k sind einfach und liegen im offenen Intervall $]0\,,\,1728[$. Dies folgt aus [14].
Für $k < 500$ wurden Näherungen für die Nullstellen der Polynome φ_k berechnet: Die Polynome φ_k wurden exakt berechnet, und die Berechnung der Nullstellen wurde mit 150 Nachkommastellen durchgeführt. Für jede berechnete Näherung x einer Nullstelle von φ_k wurde $|\varphi_k(x)| \leq 10^{-11}$ festgestellt. Für kleinere k liegt $|\varphi_k(x)|$ noch viel näher bei Null. Da die berechneten Näherungen sehr nahe bei den Nullstellen liegen, sehen wir im folgenden die Näherungen als Nullstellen an. Insgesamt wurden 5043 Nullstellen berechnet.

Teilen wir das Intervall $]0\,,\,1728[$ in 100 Teilintervalle auf und bestimmen die Anzahl der Nullstellen für jedes Teilintervall, so erhalten wir folgendes Ergebnis:

[651, 197, 137, 114, 93, 87, 75, 72, 65, 60, 58, 53, 53, 48, 49, 47, 45, 42, 47, 32, 42, 39, 39, 35, 38, 35, 37, 32, 37, 31, 32, 32, 34, 33, 30, 31, 31, 33, 30, 27, 32, 29, 30, 29, 29, 30, 25, 31, 28, 30, 27, 29, 28, 30, 27, 31, 26, 28, 28, 29, 28, 28, 30, 27, 29, 28, 30, 31, 28, 31, 30, 30, 30, 31, 30, 34, 30, 33, 32, 33, 34, 33, 37, 36, 36, 38, 40, 39, 42, 43, 45, 48, 50, 55, 55, 64, 71, 85, 108, 202]

Dies bedeutet das im Intervall $]0\,,\,17.28]$ 651 Nullstellen liegen, im Intervall $]17.28\,,\,2\cdot 17.28]$ 197 Nullstellen usw.
Wir sehen, daß im Intervall $]0\,,\,17.28]$ mit Abstand die meisten Nullstellen liegen. Auch in den folgenden Intervallen $]17.28\,,\,2\cdot 17.28]$, $]2\cdot 17.28\,,\,3\cdot 17.28], \ldots$ liegen relativ viele Nullstellen, allerdings in abnehmender Anzahl. In den meisten Intervallen liegen um die 30 Nullstellen. Die Anzahl der Nullstellen in den Teilintervallen steigt zum Ende hin wieder an. Im letzten Teilintervall liegen dann 202 Nullstellen.
Von den 651 Nullstellen im Intervall $]0\,,\,17.28]$ liegen sogar 58 im Intervall $]0\,,\,0.1]$: Jedes Polynom φ_{252+6n}, $n \geq 0$, enthält eine Nullstelle x_{252+6n}, die im Intervall $]0\,,\,0.1]$ liegt. Dabei ist $x_{252} > x_{258} > x_{264} > \ldots > x_{498}$. Ebenfalls enthält jedes Polynom φ_{406+6n}, $n \geq 0$, eine Nullstelle x_{406+6n}, die im Intervall $]0\,,\,0.1]$ liegt. Es gilt ebenfalls $x_{406} > x_{412} > x_{418} > \ldots > x_{496}$.

Sei x_1 Nullstelle eines Polynoms φ_n. Unter allen Nullstellen von φ_{3n} sei x_2 diejenige, mit dem geringsten Abstand zu x_1. Weiter sei x_3 diejenige Nullstelle von φ_{5n} mit dem geringsten Abstand zu x_2, x_4 diejenige Nullstelle von φ_{7n} mit dem geringsten Abstand zu x_3 usw. Betrachtet man nun die Differenzen $x_{l+1} - x_l$, so stellt man fest, daß diese sehr schnell gegen Null gehen. Ist $x_{l+1} - x_l$ positiv, so ist $x_{l+2} - x_{l+1}$ negativ und ist $x_{l+1} - x_l$ negativ, so ist $x_{l+2} - x_{l+1}$ positiv. In Anhang C haben wir einige Beispiele aufgelistet. Aufgrund dieser Beobachtungen ist zu vermuten, daß die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Zum Schluß präzisieren wir noch obige Beobachtung:
Wir bezeichnen mit $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,m}$ die Nullstellen eines Polynoms φ_n vom Grad m. Die Bezeichnungen sollen so gewählt sein, daß $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,m}$ gilt. Sei nun $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie oben dargestellt, mit $x_1 = x_{n,j}$ $(1 \leq j \leq deg\,\varphi_n)$. Dann gilt für die Glieder x_i, $i \geq 2$:

(i) Wenn $n \equiv 0\, mod\, 6$ ist:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{3n,j+1\cdot(2j-1)}, \\ x_3 &= x_{5n,j+2\cdot(2j-1)}, \\ x_4 &= x_{7n,j+3\cdot(2j-1)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

(ii) Wenn $n \equiv \; 2\, mod\, 6$ ist:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_{3n, j+1\cdot(2j+1)} \\
x_3 &= x_{5n, j+1\cdot(2j+1)+1\cdot 2j}, \\
x_4 &= x_{7n, j+1\cdot(2j+1)+2\cdot 2j}, \\
\\
x_5 &= x_{9n, j+2\cdot(2j+1)+2\cdot 2j}, \\
x_6 &= x_{11n, j+2\cdot(2j+1)+3\cdot 2j}, \\
x_7 &= x_{13n, j+2\cdot(2j+1)+4\cdot 2j}, \\
\\
x_8 &= x_{15n, j+3\cdot(2j+1)+4\cdot 2j}, \\
x_9 &= x_{17n, j+3\cdot(2j+1)+5\cdot 2j}, \\
x_{10} &= x_{19n, j+3\cdot(2j+1)+6\cdot 2j}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(iii) Wenn $n \equiv \; 4\, mod\, 6$ ist:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_{3n, j+1\cdot 2j}, \\
x_3 &= x_{5n, j+1\cdot 2j+1\cdot(2j-1)}, \\
x_4 &= x_{7n, j+2\cdot 2j+1\cdot(2j-1)}, \\
\\
x_5 &= x_{9n, j+3\cdot 2j+1\cdot(2j-1)}, \\
x_6 &= x_{11n, j+3\cdot 2j+2\cdot(2j-1)}, \\
x_7 &= x_{13n, j+4\cdot 2j+2\cdot(2j-1)}, \\
\\
x_8 &= x_{15n, j+5\cdot 2j+2\cdot(2j-1)}, \\
x_9 &= x_{17n, j+5\cdot 2j+3\cdot(2j-1)}, \\
x_{10} &= x_{19n, j+6\cdot 2j+3\cdot(2j-1)}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Anhang A

Berechnung der Primelementzerlegungen der Diskriminanten $Diskr(\varphi_k^*)$ für $k = 24$ und $28 \leq k \leq 250$:
In folgender Tabelle ist c_n eine n-stellige Zahl, die keine kleineren Primteiler mehr enthält.

k	$Diskr(\varphi_k^*)$
24	$2^{17} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 398053$
28	$2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 281827873$
30	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 39468318601$
32	$2^{20} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 1229 \cdot 7512797$
34	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 235056672407$
36	$2^{46} \cdot 3^{30} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^2 \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot c_{33}$
38	$2^{16} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 53 \cdot 7200899 \cdot 103069$
40	$2^{47} \cdot 3^{25} \cdot 5^{19} \cdot 7^9 \cdot 11^4 \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 2116586922759274359726734491176481\cdot$ 2137
42	$2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{14} \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 97 \cdot 223 \cdot c_{38}$
44	$2^{47} \cdot 3^{27} \cdot 5^{12} \cdot 7^{12} \cdot 11^3 \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 199 \cdot 541\cdot$ $70813940916377378215184131 \cdot 2153 \cdot 1020163$
46	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^9 \cdot 11^2 \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot c_{48}$
48	$2^{101} \cdot 3^{51} \cdot 5^{27} \cdot 7^{18} \cdot 11^6 \cdot 13^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot c_{81}$
50	$2^{50} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{15} \cdot 11^4 \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot c_{49}$
52	$2^{92} \cdot 3^{53} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^4 \cdot 13^9 \cdot 17^6 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 127 \cdot 1481 \cdot c_{81}$
54	$2^{96} \cdot 3^{60} \cdot 5^{32} \cdot 7^{21} \cdot 11^8 \cdot 13^{13} \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 23^2 \cdot c_{74} \cdot 44373930049$
56	$2^{96} \cdot 3^{55} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^8 \cdot 13^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29^4 \cdot c_{83} \cdot 7022117 \cdot 12810961$
58	$2^{107} \cdot 3^{51} \cdot 5^{31} \cdot 7^{21} \cdot 11^6 \cdot 13^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 23^2 \cdot c_{102}$
60	$2^{156} \cdot 3^{86} \cdot 5^{55} \cdot 7^{35} \cdot 11^{18} \cdot 13^{20} \cdot 17^6 \cdot 19^9 \cdot 23^2 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot c_{160} \cdot 3037$
62	$2^{104} \cdot 3^{55} \cdot 5^{31} \cdot 7^{21} \cdot 11^4 \cdot 13^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 23^2 \cdot 29^5 \cdot 101 \cdot c_{96} \cdot 3318571 \cdot 28099$
64	$2^{176} \cdot 3^{88} \cdot 5^{46} \cdot 7^{35} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^{12} \cdot 19^8 \cdot 23^2 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot c_{158}$
66	$2^{160} \cdot 3^{85} \cdot 5^{51} \cdot 7^{35} \cdot 11^{13} \cdot 13^{20} \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 23^6 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 79 \cdot c_{175} \cdot 21467 \cdot 1987$
68	$2^{156} \cdot 3^{90} \cdot 5^{45} \cdot 7^{35} \cdot 11^{14} \cdot 13^{20} \cdot 17^9 \cdot 19^8 \cdot 23^2 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot c_{167} \cdot 124633133$
70	$2^{160} \cdot 3^{86} \cdot 5^{51} \cdot 7^{33} \cdot 11^{19} \cdot 13^{20} \cdot 17^{12} \cdot 19^6 \cdot 23^6 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 127 \cdot 313 \cdot c_{180}\cdot$ $29837 \cdot 6311$
72	$2^{242} \cdot 3^{136} \cdot 5^{70} \cdot 7^{53} \cdot 11^{18} \cdot 13^{30} \cdot 17^{15} \cdot 19^{16} \cdot 23^8 \cdot 29^4 \cdot 31^6 \cdot 37^6 \cdot c_{272} \cdot 1867$

74	$2^{160} \cdot 3^{95} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{13} \cdot 13^{20} \cdot 17^{12} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{204}$
76	$2^{234} \cdot 3^{132} \cdot 5^{75} \cdot 7^{48} \cdot 11^{21} \cdot 13^{23} \cdot 17^{12} \cdot 19^{12} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot c_{260}$
78	$2^{240} \cdot 3^{129} \cdot 5^{77} \cdot 7^{53} \cdot 11^{22} \cdot 13^{25} \cdot 17^{14} \cdot 19^{14} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 53 \cdot$ $283 \cdot c_{283} \cdot 3319$
80	$2^{245} \cdot 3^{147} \cdot 5^{80} \cdot 7^{53} \cdot 11^{30} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{16} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot c_{296}$
82	$2^{240} \cdot 3^{135} \cdot 5^{77} \cdot 7^{48} \cdot 11^{19} \cdot 13^{30} \cdot 17^{12} \cdot 19^{14} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 887 \cdot c_{321}$
84	$2^{330} \cdot 3^{189} \cdot 5^{99} \cdot 7^{84} \cdot 11^{31} \cdot 13^{42} \cdot 17^{19} \cdot 19^{16} \cdot 23^{8} \cdot 29^{12} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $c_{390} \cdot 67796269$
86	$2^{245} \cdot 3^{135} \cdot 5^{77} \cdot 7^{53} \cdot 11^{21} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{14} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 191 \cdot 239 \cdot$ $c_{309} \cdot 5639 \cdot 512849$
88	$2^{335} \cdot 3^{186} \cdot 5^{99} \cdot 7^{68} \cdot 11^{31} \cdot 13^{33} \cdot 17^{22} \cdot 19^{16} \cdot 23^{16} \cdot 29^{12} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $59 \cdot c_{427}$
90	$2^{336} \cdot 3^{198} \cdot 5^{105} \cdot 7^{68} \cdot 11^{42} \cdot 13^{35} \cdot 17^{24} \cdot 19^{24} \cdot 23^{6} \cdot 29^{12} \cdot 31^{12} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $53 \cdot c_{429}$
92	$2^{332} \cdot 3^{189} \cdot 5^{98} \cdot 7^{75} \cdot 11^{30} \cdot 13^{42} \cdot 17^{20} \cdot 19^{16} \cdot 23^{12} \cdot 29^{12} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot c_{437} \cdot 11268613$
94	$2^{336} \cdot 3^{183} \cdot 5^{105} \cdot 7^{70} \cdot 11^{31} \cdot 13^{42} \cdot 17^{22} \cdot 19^{18} \cdot 23^{14} \cdot 29^{12} \cdot 31^{12} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 229 \cdot c_{426}$
96	$2^{465} \cdot 3^{245} \cdot 5^{133} \cdot 7^{91} \cdot 11^{43} \cdot 13^{56} \cdot 17^{38} \cdot 19^{28} \cdot 23^{18} \cdot 29^{12} \cdot 31^{14} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot c_{556} \cdot 1038589$
98	$2^{344} \cdot 3^{189} \cdot 5^{105} \cdot 7^{77} \cdot 11^{33} \cdot 13^{42} \cdot 17^{20} \cdot 19^{24} \cdot 23^{14} \cdot 29^{12} \cdot 31^{12} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 191 \cdot c_{451} \cdot 1949$
100	$2^{441} \cdot 3^{249} \cdot 5^{154} \cdot 7^{99} \cdot 11^{58} \cdot 13^{45} \cdot 17^{27} \cdot 19^{28} \cdot 23^{16} \cdot 29^{12} \cdot 31^{14} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 79 \cdot 89 \cdot c_{593}$
102	$2^{448} \cdot 3^{244} \cdot 5^{144} \cdot 7^{98} \cdot 11^{42} \cdot 13^{47} \cdot 17^{30} \cdot 19^{24} \cdot 23^{16} \cdot 29^{12} \cdot 31^{12} \cdot 37^{6} \cdot 41^{8} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 79^{2} \cdot 83 \cdot 127 \cdot c_{610} \cdot 22307$
104	$2^{448} \cdot 3^{252} \cdot 5^{132} \cdot 7^{99} \cdot 11^{45} \cdot 13^{49} \cdot 17^{32} \cdot 19^{28} \cdot 23^{16} \cdot 29^{12} \cdot 31^{14} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot c_{632}$
106	$2^{448} \cdot 3^{248} \cdot 5^{144} \cdot 7^{99} \cdot 11^{43} \cdot 13^{57} \cdot 17^{34} \cdot 19^{24} \cdot 23^{14} \cdot 29^{12} \cdot 31^{12} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 239 \cdot c_{653} \cdot 1931$
108	$2^{568} \cdot 3^{342} \cdot 5^{172} \cdot 7^{126} \cdot 11^{57} \cdot 13^{72} \cdot 17^{36} \cdot 19^{42} \cdot 23^{18} \cdot 29^{12} \cdot 31^{14} \cdot 37^{18} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 769 \cdot c_{808}$
110	$2^{448} \cdot 3^{252} \cdot 5^{140} \cdot 7^{99} \cdot 11^{64} \cdot 13^{56} \cdot 17^{32} \cdot 19^{24} \cdot 23^{24} \cdot 29^{12} \cdot 31^{12} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot c_{700} \cdot 2377$
112	$2^{583} \cdot 3^{316} \cdot 5^{172} \cdot 7^{122} \cdot 11^{58} \cdot 13^{59} \cdot 17^{48} \cdot 19^{32} \cdot 23^{16} \cdot 29^{24} \cdot 31^{14} \cdot 37^{18} \cdot 41^{7} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot c_{842} \cdot 8941 \cdot 75169$
114	$2^{599} \cdot 3^{317} \cdot 5^{180} \cdot 7^{126} \cdot 11^{59} \cdot 13^{61} \cdot 17^{37} \cdot 19^{33} \cdot 23^{22} \cdot 29^{12} \cdot 31^{12} \cdot 37^{18} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot c_{817}$
116	$2^{568} \cdot 3^{324} \cdot 5^{171} \cdot 7^{127} \cdot 11^{61} \cdot 13^{63} \cdot 17^{37} \cdot 19^{42} \cdot 23^{28} \cdot 29^{18} \cdot 31^{14} \cdot 37^{18} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 1181 \cdot c_{838} \cdot 2089$
118	$2^{576} \cdot 3^{318} \cdot 5^{180} \cdot 7^{121} \cdot 11^{61} \cdot 13^{72} \cdot 17^{40} \cdot 19^{38} \cdot 23^{26} \cdot 29^{24} \cdot 31^{12} \cdot 37^{18} \cdot 41^{6} \cdot$

	$43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 67 \cdot c_{828} \cdot 13857608719$
120	$2^{721} \cdot 3^{396} \cdot 5^{226} \cdot 7^{158} \cdot 11^{80} \cdot 13^{90} \cdot 17^{52} \cdot 19^{43} \cdot 23^{32} \cdot 29^{26} \cdot 31^{28} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 773 \cdot c_{1024} \cdot 2441$
122	$2^{596} \cdot 3^{324} \cdot 5^{189} \cdot 7^{127} \cdot 11^{64} \cdot 13^{72} \cdot 17^{46} \cdot 19^{38} \cdot 23^{24} \cdot 29^{24} \cdot 31^{12} \cdot 37^{18} \cdot 41^{6} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot c_{877} \cdot 3019$
124	$2^{710} \cdot 3^{399} \cdot 5^{215} \cdot 7^{149} \cdot 11^{86} \cdot 13^{75} \cdot 17^{48} \cdot 19^{42} \cdot 23^{30} \cdot 29^{24} \cdot 31^{21} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 73 \cdot 83^{3} \cdot c_{985} \cdot 1704727 \cdot 1445071$
126	$2^{740} \cdot 3^{404} \cdot 5^{244} \cdot 7^{169} \cdot 11^{83} \cdot 13^{77} \cdot 17^{52} \cdot 19^{54} \cdot 23^{28} \cdot 29^{26} \cdot 31^{26} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot c_{1065} \cdot 59407 \cdot 19583$
128	$2^{766} \cdot 3^{405} \cdot 5^{225} \cdot 7^{159} \cdot 11^{79} \cdot 13^{79} \cdot 17^{62} \cdot 19^{42} \cdot 23^{28} \cdot 29^{24} \cdot 31^{28} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{6} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 1459 \cdot c_{1088}$
130	$2^{720} \cdot 3^{396} \cdot 5^{225} \cdot 7^{149} \cdot 11^{88} \cdot 13^{81} \cdot 17^{48} \cdot 19^{42} \cdot 23^{26} \cdot 29^{24} \cdot 31^{26} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{6} \cdot 53^{9} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot c_{1142}$
132	$2^{870} \cdot 3^{488} \cdot 5^{275} \cdot 7^{186} \cdot 11^{88} \cdot 13^{110} \cdot 17^{57} \cdot 19^{51} \cdot 23^{48} \cdot 29^{26} \cdot 31^{28} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{20} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot c_{1286} \cdot 17923$
134	$2^{720} \cdot 3^{406} \cdot 5^{225} \cdot 7^{159} \cdot 11^{85} \cdot 13^{90} \cdot 17^{52} \cdot 19^{54} \cdot 23^{24} \cdot 29^{24} \cdot 31^{26} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 79^{2} \cdot c_{1142}$
136	$2^{879} \cdot 3^{493} \cdot 5^{275} \cdot 7^{185} \cdot 11^{100} \cdot 13^{93} \cdot 17^{59} \cdot 19^{60} \cdot 23^{36} \cdot 29^{24} \cdot 31^{28} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{20} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 79 \cdot c_{1340}$
138	$2^{880} \cdot 3^{484} \cdot 5^{275} \cdot 7^{183} \cdot 11^{96} \cdot 13^{95} \cdot 17^{70} \cdot 19^{54} \cdot 23^{38} \cdot 29^{26} \cdot 31^{26} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 97 \cdot c_{1406}$
140	$2^{870} \cdot 3^{496} \cdot 5^{287} \cdot 7^{194} \cdot 11^{110} \cdot 13^{97} \cdot 17^{64} \cdot 19^{60} \cdot 23^{44} \cdot 29^{40} \cdot 31^{28} \cdot 37^{18} \cdot 41^{19} \cdot$ $43^{20} \cdot 47^{6} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 101 \cdot c_{1405} \cdot 9277$
142	$2^{885} \cdot 3^{485} \cdot 5^{275} \cdot 7^{187} \cdot 11^{88} \cdot 13^{99} \cdot 17^{66} \cdot 19^{54} \cdot 23^{42} \cdot 29^{24} \cdot 31^{26} \cdot 37^{18} \cdot 41^{20} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{9} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot c_{1410}$
144	$2^{1069} \cdot 3^{595} \cdot 5^{319} \cdot 7^{220} \cdot 11^{126} \cdot 13^{133} \cdot 17^{91} \cdot 19^{80} \cdot 23^{48} \cdot 29^{34} \cdot 31^{28} \cdot 37^{36} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{20} \cdot 47^{20} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79 \cdot 1367 \cdot c_{1613}$
146	$2^{882} \cdot 3^{500} \cdot 5^{275} \cdot 7^{196} \cdot 11^{100} \cdot 13^{110} \cdot 17^{62} \cdot 19^{54} \cdot 23^{40} \cdot 29^{40} \cdot 31^{26} \cdot 37^{18} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{8} \cdot 59^{9} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 83 \cdot c_{1443} \cdot 107599$
148	$2^{1047} \cdot 3^{585} \cdot 5^{318} \cdot 7^{234} \cdot 11^{118} \cdot 13^{114} \cdot 17^{71} \cdot 19^{64} \cdot 23^{46} \cdot 29^{42} \cdot 31^{28} \cdot 37^{27} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{20} \cdot 47^{20} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot c_{1659}$
150	$2^{1056} \cdot 3^{582} \cdot 5^{330} \cdot 7^{231} \cdot 11^{132} \cdot 13^{115} \cdot 17^{76} \cdot 19^{63} \cdot 23^{44} \cdot 29^{44} \cdot 31^{44} \cdot 37^{36} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 113 \cdot 1193 \cdot c_{1714}$
152	$2^{1058} \cdot 3^{594} \cdot 5^{330} \cdot 7^{234} \cdot 11^{110} \cdot 13^{118} \cdot 17^{73} \cdot 19^{70} \cdot 23^{44} \cdot 29^{40} \cdot 31^{28} \cdot 37^{36} \cdot 41^{18}$ $\cdot 43^{20} \cdot 47^{20} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{11} \cdot 73^{12} \cdot c_{1707}$
154	$2^{1056} \cdot 3^{591} \cdot 5^{330} \cdot 7^{225} \cdot 11^{122} \cdot 13^{119} \cdot 17^{86} \cdot 19^{74} \cdot 23^{60} \cdot 29^{42} \cdot 31^{33} \cdot 37^{36} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{8} \cdot 59^{9} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 313 \cdot c_{1713}$
156	$2^{1237} \cdot 3^{690} \cdot 5^{392} \cdot 7^{273} \cdot 11^{146} \cdot 13^{169} \cdot 17^{91} \cdot 19^{80} \cdot 23^{48} \cdot 29^{44} \cdot 31^{48} \cdot 37^{36} \cdot 41^{19} \cdot$ $43^{20} \cdot 47^{20} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot c_{2017}$
158	$2^{1056} \cdot 3^{606} \cdot 5^{330} \cdot 7^{234} \cdot 11^{118} \cdot 13^{133} \cdot 17^{82} \cdot 19^{74} \cdot 23^{46} \cdot 29^{40} \cdot 31^{44} \cdot 37^{36} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{8} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot c_{1796}$
160	$2^{1271} \cdot 3^{699} \cdot 5^{404} \cdot 7^{265} \cdot 11^{158} \cdot 13^{135} \cdot 17^{108} \cdot 19^{80} \cdot 23^{56} \cdot 29^{43} \cdot 31^{48} \cdot 37^{36} \cdot 41^{36} \cdot$

	$43^{20} \cdot 47^{20} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 107 \cdot 1213 \cdot c_{2005}$
162	$2^{1248} \cdot 3^{740} \cdot 5^{390} \cdot 7^{273} \cdot 11^{132} \cdot 13^{137} \cdot 17^{91} \cdot 19^{97} \cdot 23^{64} \cdot 29^{45} \cdot 31^{44} \cdot 37^{36} \cdot 41^{18} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 101^{2} \cdot c_{2102} \cdot 29021$
164	$2^{1236} \cdot 3^{705} \cdot 5^{379} \cdot 7^{276} \cdot 11^{141} \cdot 13^{139} \cdot 17^{87} \cdot 19^{80} \cdot 23^{64} \cdot 29^{40} \cdot 31^{48} \cdot 37^{36} \cdot 41^{27} \cdot$ $43^{20} \cdot 47^{20} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{13} \cdot 83^{12} \cdot 127 \cdot c_{2097}$
166	$2^{1248} \cdot 3^{693} \cdot 5^{390} \cdot 7^{263} \cdot 11^{146} \cdot 13^{141} \cdot 17^{92} \cdot 19^{78} \cdot 23^{60} \cdot 29^{42} \cdot 31^{44} \cdot 37^{36} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 89 \cdot 197 \cdot 1061 \cdot c_{2160}$
168	$2^{1457} \cdot 3^{806} \cdot 5^{446} \cdot 7^{334} \cdot 11^{168} \cdot 13^{156} \cdot 17^{101} \cdot 19^{89} \cdot 23^{70} \cdot 29^{66} \cdot 31^{48} \cdot 37^{36} \cdot 41^{38} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{20} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{11} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 971 \cdot c_{2375} \cdot 2496313$
170	$2^{1259} \cdot 3^{705} \cdot 5^{391} \cdot 7^{276} \cdot 11^{158} \cdot 13^{169} \cdot 17^{95} \cdot 19^{84} \cdot 23^{58} \cdot 29^{40} \cdot 31^{44} \cdot 37^{36} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{18} \cdot 47^{18} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot c_{2183}$
172	$2^{1446} \cdot 3^{810} \cdot 5^{441} \cdot 7^{306} \cdot 11^{158} \cdot 13^{169} \cdot 17^{108} \cdot 19^{104} \cdot 23^{66} \cdot 29^{50} \cdot 31^{48} \cdot 37^{36} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{30} \cdot 47^{20} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 509 \cdot c_{2460} \cdot 6089$
174	$2^{1456} \cdot 3^{805} \cdot 5^{457} \cdot 7^{307} \cdot 11^{164} \cdot 13^{169} \cdot 17^{114} \cdot 19^{96} \cdot 23^{64} \cdot 29^{55} \cdot 31^{44} \cdot 37^{36} \cdot 41^{38} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{18} \cdot 53^{24} \cdot 59^{24} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot c_{2462} \cdot 65179 \cdot$ $951787 \cdot 9283$
176	$2^{1469} \cdot 3^{819} \cdot 5^{455} \cdot 7^{322} \cdot 11^{172} \cdot 13^{169} \cdot 17^{128} \cdot 19^{104} \cdot 23^{86} \cdot 29^{62} \cdot 31^{48} \cdot 37^{36} \cdot 41^{37} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{21} \cdot 53^{24} \cdot 59^{8} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot c_{2524} \cdot 3517$
178	$2^{1456} \cdot 3^{806} \cdot 5^{457} \cdot 7^{308} \cdot 11^{168} \cdot 13^{169} \cdot 17^{108} \cdot 19^{96} \cdot 23^{60} \cdot 29^{64} \cdot 31^{44} \cdot 37^{37} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{18} \cdot 53^{24} \cdot 59^{24} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{13} \cdot 83^{12} \cdot 127 \cdot c_{2587} \cdot 3863 \cdot$ $6203 \cdot 122149$
180	$2^{1666} \cdot 3^{946} \cdot 5^{540} \cdot 7^{357} \cdot 11^{216} \cdot 13^{195} \cdot 17^{119} \cdot 19^{131} \cdot 23^{76} \cdot 29^{66} \cdot 31^{72} \cdot 37^{60} \cdot 41^{40} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{20} \cdot 53^{24} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{14} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot c_{2906}$
182	$2^{1464} \cdot 3^{819} \cdot 5^{456} \cdot 7^{319} \cdot 11^{158} \cdot 13^{169} \cdot 17^{110} \cdot 19^{97} \cdot 23^{68} \cdot 29^{62} \cdot 31^{44} \cdot 37^{36} \cdot 41^{38} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{18} \cdot 53^{25} \cdot 59^{24} \cdot 61^{10} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot c_{2648}$
184	$2^{1680} \cdot 3^{934} \cdot 5^{515} \cdot 7^{358} \cdot 11^{191} \cdot 13^{195} \cdot 17^{119} \cdot 19^{108} \cdot 23^{80} \cdot 29^{64} \cdot 31^{55} \cdot 37^{45} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{40} \cdot 53^{24} \cdot 59^{27} \cdot 61^{30} \cdot 67^{11} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{13} \cdot 89^{15} \cdot c_{2851}$
186	$2^{1680} \cdot 3^{932} \cdot 5^{526} \cdot 7^{354} \cdot 11^{194} \cdot 13^{195} \cdot 17^{127} \cdot 19^{105} \cdot 23^{88} \cdot 29^{66} \cdot 31^{58} \cdot 37^{60} \cdot 41^{38} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{18} \cdot 53^{24} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 151 \cdot c_{2865} \cdot$ $49943 \cdot 12893$
188	$2^{1671} \cdot 3^{948} \cdot 5^{510} \cdot 7^{369} \cdot 11^{198} \cdot 13^{195} \cdot 17^{131} \cdot 19^{114} \cdot 23^{86} \cdot 29^{62} \cdot 31^{72} \cdot 37^{60} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{30} \cdot 53^{24} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{15} \cdot 113 \cdot c_{2883} \cdot$ 132529
190	$2^{1680} \cdot 3^{939} \cdot 5^{526} \cdot 7^{362} \cdot 11^{217} \cdot 13^{195} \cdot 17^{134} \cdot 19^{113} \cdot 23^{84} \cdot 29^{64} \cdot 31^{68} \cdot 37^{60} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{38} \cdot 53^{24} \cdot 59^{25} \cdot 61^{30} \cdot 67^{10} \cdot 71^{11} \cdot 73^{13} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot c_{3000} \cdot 5651$
192	$2^{1969} \cdot 3^{1067} \cdot 5^{585} \cdot 7^{405} \cdot 11^{216} \cdot 13^{223} \cdot 17^{168} \cdot 19^{130} \cdot 23^{94} \cdot 29^{67} \cdot 31^{72} \cdot 37^{60} \cdot 41^{38} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{42} \cdot 53^{24} \cdot 59^{26} \cdot 61^{31} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 499 \cdot$ $619 \cdot c_{3390}$
194	$2^{1702} \cdot 3^{945} \cdot 5^{526} \cdot 7^{371} \cdot 11^{191} \cdot 13^{195} \cdot 17^{128} \cdot 19^{122} \cdot 23^{80} \cdot 29^{62} \cdot 31^{68} \cdot 37^{60} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{38} \cdot 53^{25} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 277 \cdot c_{3088} \cdot$ 160481
196	$2^{1904} \cdot 3^{1067} \cdot 5^{584} \cdot 7^{414} \cdot 11^{221} \cdot 13^{223} \cdot 17^{139} \cdot 19^{130} \cdot 23^{90} \cdot 29^{90} \cdot 31^{72} \cdot 37^{60} \cdot 41^{36} \cdot$

	$43^{40} \cdot 47^{40} \cdot 53^{24} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{13} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 103 \cdot$ $127 \cdot 131^2 \cdot c_{3422} \cdot 369793$
198	$2^{1925} \cdot 3^{1079} \cdot 5^{600} \cdot 7^{420} \cdot 11^{227} \cdot 13^{223} \cdot 17^{146} \cdot 19^{150} \cdot 23^{114} \cdot 29^{66} \cdot 31^{68} \cdot 37^{60} \cdot 41^{38} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{40} \cdot 53^{24} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{11} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 673 \cdot$ $c_{3531} \cdot 3931^2$
200	$2^{1920} \cdot 3^{1080} \cdot 5^{630} \cdot 7^{426} \cdot 11^{250} \cdot 13^{223} \cdot 17^{139} \cdot 19^{131} \cdot 23^{86} \cdot 29^{70} \cdot 31^{72} \cdot 37^{60} \cdot 41^{60} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{40} \cdot 53^{24} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{10} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ c_{3576}
202	$2^{1920} \cdot 3^{1065} \cdot 5^{602} \cdot 7^{410} \cdot 11^{217} \cdot 13^{223} \cdot 17^{147} \cdot 19^{126} \cdot 23^{90} \cdot 29^{75} \cdot 31^{68} \cdot 37^{60} \cdot 41^{36} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{38} \cdot 53^{24} \cdot 59^{25} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{11} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 179 \cdot c_{3544}$
204	$2^{2160} \cdot 3^{1208} \cdot 5^{669} \cdot 7^{476} \cdot 11^{253} \cdot 13^{253} \cdot 17^{154} \cdot 19^{139} \cdot 23^{104} \cdot 29^{94} \cdot 31^{73} \cdot 37^{60} \cdot 41^{49} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{42} \cdot 53^{24} \cdot 59^{27} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{15} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot 167 \cdot 1129 \cdot c_{3833} \cdot 12511$
206	$2^{1920} \cdot 3^{1082} \cdot 5^{602} \cdot 7^{426} \cdot 11^{221} \cdot 13^{223} \cdot 17^{157} \cdot 19^{132} \cdot 23^{94} \cdot 29^{88} \cdot 31^{68} \cdot 37^{60} \cdot 41^{60} \cdot$ $43^{38} \cdot 47^{38} \cdot 53^{24} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{15} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $347 \cdot c_{3579} \cdot 10273$
208	$2^{2191} \cdot 3^{1210} \cdot 5^{664} \cdot 7^{464} \cdot 11^{255} \cdot 13^{243} \cdot 17^{192} \cdot 19^{145} \cdot 23^{118} \cdot 29^{91} \cdot 31^{72} \cdot 37^{60} \cdot 41^{62} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{40} \cdot 53^{48} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot 139 \cdot c_{3897}$
210	$2^{2176} \cdot 3^{1210} \cdot 5^{682} \cdot 7^{493} \cdot 11^{284} \cdot 13^{253} \cdot 17^{168} \cdot 19^{150} \cdot 23^{114} \cdot 29^{94} \cdot 31^{97} \cdot 37^{60} \cdot 41^{64} \cdot$ $43^{64} \cdot 47^{40} \cdot 53^{24} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot c_{4059} \cdot 56417$
212	$2^{2163} \cdot 3^{1225} \cdot 5^{663} \cdot 7^{482} \cdot 11^{250} \cdot 13^{253} \cdot 17^{161} \cdot 19^{160} \cdot 23^{115} \cdot 29^{88} \cdot 31^{72} \cdot 37^{60} \cdot 41^{60} \cdot$ $43^{40} \cdot 47^{40} \cdot 53^{36} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{10} \cdot 73^{12} \cdot 79^{14} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot 107^{16} \cdot c_{4033} \cdot 4960270267$
214	$2^{2176} \cdot 3^{1208} \cdot 5^{680} \cdot 7^{462} \cdot 11^{253} \cdot 13^{253} \cdot 17^{168} \cdot 19^{150} \cdot 23^{110} \cdot 29^{90} \cdot 31^{75} \cdot 37^{60} \cdot 41^{62} \cdot$ $43^{48} \cdot 47^{38} \cdot 53^{48} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{12} \cdot 79^{13} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot c_{4011} \cdot 55603 \cdot 2153$
216	$2^{2449} \cdot 3^{1396} \cdot 5^{748} \cdot 7^{520} \cdot 11^{287} \cdot 13^{285} \cdot 17^{179} \cdot 19^{192} \cdot 23^{122} \cdot 29^{94} \cdot 31^{86} \cdot 37^{90} \cdot 41^{64} \cdot$ $43^{68} \cdot 47^{42} \cdot 53^{50} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{33} \cdot 73^{36} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 127 \cdot c_{4410}$
218	$2^{2176} \cdot 3^{1247} \cdot 5^{680} \cdot 7^{482} \cdot 11^{254} \cdot 13^{253} \cdot 17^{169} \cdot 19^{150} \cdot 23^{106} \cdot 29^{88} \cdot 31^{96} \cdot 37^{60} \cdot 41^{60} \cdot$ $43^{64} \cdot 47^{38} \cdot 53^{48} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{12} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 149 \cdot 197 \cdot c_{4099}$
220	$2^{2430} \cdot 3^{1368} \cdot 5^{764} \cdot 7^{521} \cdot 11^{346} \cdot 13^{262} \cdot 17^{176} \cdot 19^{164} \cdot 23^{148} \cdot 29^{90} \cdot 31^{102} \cdot 37^{69} \cdot 41^{64} \cdot$ $43^{68} \cdot 47^{40} \cdot 53^{48} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{32} \cdot 73^{36} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 179 \cdot c_{4402} \cdot 55673$
222	$2^{2448} \cdot 3^{1359} \cdot 5^{765} \cdot 7^{520} \cdot 11^{284} \cdot 13^{286} \cdot 17^{200} \cdot 19^{159} \cdot 23^{114} \cdot 29^{94} \cdot 31^{96} \cdot 37^{75} \cdot 41^{66} \cdot$ $43^{64} \cdot 47^{40} \cdot 53^{50} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{13} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$ $103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 163 \cdot 167 \cdot c_{4516}$
224	$2^{2482} \cdot 3^{1377} \cdot 5^{754} \cdot 7^{536} \cdot 11^{289} \cdot 13^{285} \cdot 17^{218} \cdot 19^{170} \cdot 23^{120} \cdot 29^{118} \cdot 31^{102} \cdot 37^{90} \cdot 41^{60} \cdot$ $43^{68} \cdot 47^{40} \cdot 53^{48} \cdot 59^{26} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{32} \cdot 73^{36} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{15} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot$

	$103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{19} \cdot 113^{18} \cdot 151 \cdot 167^{2} \cdot c_{4544}$
226	$2^{2495} \cdot 3^{1368} \cdot 5^{769} \cdot 7^{523} \cdot 11^{289} \cdot 13^{285} \cdot 17^{192} \cdot 19^{165} \cdot 23^{120} \cdot 29^{90} \cdot 31^{96} \cdot 37^{90} \cdot 41^{62} \cdot 43^{64} \cdot 47^{38} \cdot 53^{48} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 151 \cdot c_{4650}$
228	$2^{2718} \cdot 3^{1521} \cdot 5^{837} \cdot 7^{584} \cdot 11^{327} \cdot 13^{319} \cdot 17^{205} \cdot 19^{176} \cdot 23^{136} \cdot 29^{102} \cdot 31^{102} \cdot 37^{90} \cdot 41^{64} \cdot 43^{68} \cdot 47^{42} \cdot 53^{50} \cdot 59^{27} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{32} \cdot 73^{36} \cdot 79^{12} \cdot 83^{13} \cdot 89^{14} \cdot 97^{17} \cdot 101^{17} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{19} \cdot 127 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 211 \cdot c_{5013} \cdot 11423$
230	$2^{2448} \cdot 3^{1377} \cdot 5^{769} \cdot 7^{536} \cdot 11^{304} \cdot 13^{285} \cdot 17^{193} \cdot 19^{182} \cdot 23^{127} \cdot 29^{99} \cdot 31^{96} \cdot 37^{90} \cdot 41^{60} \cdot 43^{64} \cdot 47^{64} \cdot 53^{48} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot c_{4739}$
232	$2^{2735} \cdot 3^{1521} \cdot 5^{837} \cdot 7^{589} \cdot 11^{322} \cdot 13^{294} \cdot 17^{203} \cdot 19^{193} \cdot 23^{149} \cdot 29^{108} \cdot 31^{102} \cdot 37^{90} \cdot 41^{62} \cdot 43^{68} \cdot 47^{40} \cdot 53^{48} \cdot 59^{52} \cdot 61^{30} \cdot 67^{32} \cdot 71^{32} \cdot 73^{37} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{17} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot c_{5188}$
234	$2^{2736} \cdot 3^{1539} \cdot 5^{855} \cdot 7^{581} \cdot 11^{335} \cdot 13^{311} \cdot 17^{214} \cdot 19^{216} \cdot 23^{146} \cdot 29^{126} \cdot 31^{96} \cdot 37^{90} \cdot 41^{64} \cdot 43^{64} \cdot 47^{52} \cdot 53^{51} \cdot 59^{24} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{36} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{17} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot 191 \cdot c_{5164}$
236	$2^{2718} \cdot 3^{1575} \cdot 5^{836} \cdot 7^{600} \cdot 11^{330} \cdot 13^{319} \cdot 17^{200} \cdot 19^{192} \cdot 23^{144} \cdot 29^{118} \cdot 31^{102} \cdot 37^{90} \cdot 41^{60} \cdot 43^{68} \cdot 47^{68} \cdot 53^{48} \cdot 59^{39} \cdot 61^{31} \cdot 67^{32} \cdot 71^{32} \cdot 73^{36} \cdot 79^{12} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{17} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot 167 \cdot 191 \cdot 211 \cdot c_{5151} \cdot 160627 \cdot 27197$
238	$2^{2736} \cdot 3^{1530} \cdot 5^{856} \cdot 7^{581} \cdot 11^{326} \cdot 13^{319} \cdot 17^{213} \cdot 19^{186} \cdot 23^{140} \cdot 29^{122} \cdot 31^{96} \cdot 37^{90} \cdot 41^{62} \cdot 43^{64} \cdot 47^{66} \cdot 53^{49} \cdot 59^{50} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{36} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot c_{5288} \cdot 89329 \cdot 274223$
240	$2^{3062} \cdot 3^{1691} \cdot 5^{951} \cdot 7^{646} \cdot 11^{378} \cdot 13^{355} \cdot 17^{270} \cdot 19^{201} \cdot 23^{154} \cdot 29^{126} \cdot 31^{136} \cdot 37^{90} \cdot 41^{96} \cdot 43^{68} \cdot 47^{72} \cdot 53^{50} \cdot 59^{54} \cdot 61^{60} \cdot 67^{32} \cdot 71^{33} \cdot 73^{36} \cdot 79^{38} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{17} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot c_{5801} \cdot 39341 \cdot 53117$
242	$2^{2782} \cdot 3^{1575} \cdot 5^{864} \cdot 7^{602} \cdot 11^{328} \cdot 13^{319} \cdot 17^{218} \cdot 19^{192} \cdot 23^{168} \cdot 29^{118} \cdot 31^{97} \cdot 37^{90} \cdot 41^{60} \cdot 43^{64} \cdot 47^{64} \cdot 53^{48} \cdot 59^{50} \cdot 61^{30} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{37} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot 179 \cdot 199 \cdot c_{5381} \cdot 16231$
244	$2^{3020} \cdot 3^{1710} \cdot 5^{930} \cdot 7^{657} \cdot 11^{389} \cdot 13^{328} \cdot 17^{231} \cdot 19^{207} \cdot 23^{148} \cdot 29^{122} \cdot 31^{109} \cdot 37^{90} \cdot 41^{73} \cdot 43^{68} \cdot 47^{70} \cdot 53^{48} \cdot 59^{52} \cdot 61^{45} \cdot 67^{32} \cdot 71^{32} \cdot 73^{36} \cdot 79^{38} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{17} \cdot 103^{16} \cdot 107^{17} \cdot 109^{19} \cdot 113^{18} \cdot c_{5733} \cdot 1192699 \cdot 25621$
246	$2^{3040} \cdot 3^{1710} \cdot 5^{950} \cdot 7^{665} \cdot 11^{383} \cdot 13^{334} \cdot 17^{241} \cdot 19^{198} \cdot 23^{152} \cdot 29^{126} \cdot 31^{110} \cdot 37^{90} \cdot 41^{80} \cdot 43^{64} \cdot 47^{68} \cdot 53^{51} \cdot 59^{52} \cdot 61^{60} \cdot 67^{30} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{36} \cdot 83^{36} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{19} \cdot 113^{18} \cdot 173^{2} \cdot 277 \cdot 1129 \cdot c_{5824} \cdot 30931$
248	$2^{3040} \cdot 3^{1710} \cdot 5^{930} \cdot 7^{675} \cdot 11^{374} \cdot 13^{355} \cdot 17^{229} \cdot 19^{228} \cdot 23^{154} \cdot 29^{118} \cdot 31^{119} \cdot 37^{90} \cdot 41^{93} \cdot 43^{68} \cdot 47^{68} \cdot 53^{48} \cdot 59^{52} \cdot 61^{60} \cdot 67^{32} \cdot 71^{33} \cdot 73^{36} \cdot 79^{38} \cdot 83^{12} \cdot 89^{14} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot 1291 \cdot c_{5858} \cdot 16889 \cdot 72931$
250	$2^{3090} \cdot 3^{1700} \cdot 5^{969} \cdot 7^{652} \cdot 11^{396} \cdot 13^{355} \cdot 17^{239} \cdot 19^{216} \cdot 23^{154} \cdot 29^{122} \cdot 31^{130} \cdot 37^{90} \cdot 41^{94} \cdot 43^{64} \cdot 47^{66} \cdot 53^{48} \cdot 59^{50} \cdot 61^{60} \cdot 67^{31} \cdot 71^{30} \cdot 73^{36} \cdot 79^{36} \cdot 83^{36} \cdot 89^{16} \cdot 97^{16} \cdot 101^{16} \cdot 103^{16} \cdot 107^{16} \cdot 109^{18} \cdot 113^{18} \cdot 941 \cdot c_{5977}$

Anhang B

Berechnung der Primelementzerlegungen der Resultanten $Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)$ für $i = 12$, $16 \leq i \leq 92$ und $j = 12$, $16 \leq j < i$:
In den folgenden Tabellen ist c_n eine n-stellige Zahl, die keine kleineren Primteiler mehr enthält.

$i = 16$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$

$i = 18$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$
16	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 71$

$i = 20$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13$
16	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
18	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 3041$

$i = 22$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$
16	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17$
18	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 19$
20	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 719$

$i = 24$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{14} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 1571$
16	$2^{15} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 101$
18	$2^{15} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 5393$
20	$2^{14} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 20323$
22	$2^{15} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 25819$

$i = 26$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13^2$
16	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
18	$2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 19$
20	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
22	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$
24	$2^{15} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 204871$

$i = 28$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{16} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 127$
16	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 1049$
18	$2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 8287$
20	$2^{20} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 3067$
22	$2^{15} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 14869$

24	$2^{29} \cdot 3^{16} \cdot 5^8 \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^4 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 97 \cdot 543793$
26	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 12953$

$i = 30$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 15803$
16	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 14087$
18	$2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 134291$
20	$2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 22596479$
22	$2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 71 \cdot 1571$
24	$2^{30} \cdot 3^{16} \cdot 5^8 \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^5 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 1141098617$
26	$2^{16} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 40031$
28	$2^{30} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^4 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 71 \cdot c_{12}$

$i = 32$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 43 \cdot 3457$
16	$2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 4273$
18	$2^{16} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 593 \cdot 208337$
20	$2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 352939$
22	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 2441$
24	$2^{30} \cdot 3^{16} \cdot 5^8 \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 8332111 \cdot 14369$
26	$2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 41131$
28	$2^{33} \cdot 3^{19} \cdot 5^{10} \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 103 \cdot 52267$
30	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^8 \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 421 \cdot 577 \cdot c_{13}$

$i = 34$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{14} \cdot 3^{10} \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 23 \cdot 53 \cdot 67$
16	$2^{16} \cdot 3^{11} \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19$
18	$2^{16} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21503$
20	$2^{14} \cdot 3^9 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 131 \cdot 51503$
22	$2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 83 \cdot 3461$

24	$2^{30} \cdot 3^{16} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11^{4} \cdot 13^{4} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 422581 \cdot 166297$
26	$2^{16} \cdot 3^{9} \cdot 5^{5} \cdot 7^{3} \cdot 11 \cdot 13^{2} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 499 \cdot 1291$
28	$2^{30} \cdot 3^{17} \cdot 5^{10} \cdot 7^{6} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 1667 \cdot 174329$
30	$2^{32} \cdot 3^{17} \cdot 5^{12} \cdot 7^{6} \cdot 11^{4} \cdot 13^{4} \cdot 17 \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 31^{2} \cdot 67 \cdot 1471 \cdot 7591$
32	$2^{32} \cdot 3^{17} \cdot 5^{10} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 113 \cdot 433 \cdot 12928987541$

$i = 36$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{23} \cdot 3^{15} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 13^{3} \cdot 1789 \cdot 1861$
16	$2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 241 \cdot 67021$
18	$2^{24} \cdot 3^{15} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 19^{2} \cdot 571 \cdot 732967$
20	$2^{25} \cdot 3^{16} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11^{3} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 626392079$
22	$2^{24} \cdot 3^{12} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 43 \cdot 7824077$
24	$2^{44} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot 7^{12} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 61 \cdot 1657 \cdot 1972011481199$
26	$2^{23} \cdot 3^{15} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 41 \cdot 3326971$
28	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 2037764460582881$
30	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 31^{2} \cdot 1447065300878936881$
32	$2^{46} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 1087 \cdot 57962942700323 \cdot 60029$
34	$2^{46} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{17} \cdot 2293$

$i = 38$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{14} \cdot 3^{9} \cdot 5^{5} \cdot 7^{4} \cdot 13^{2} \cdot 1427 \cdot 23801$
16	$2^{16} \cdot 3^{8} \cdot 5^{5} \cdot 7^{4} \cdot 11 \cdot 13^{2} \cdot 17^{2} \cdot 23 \cdot 6793$
18	$2^{16} \cdot 3^{9} \cdot 5^{5} \cdot 7^{4} \cdot 11 \cdot 13^{2} \cdot 19^{2} \cdot 1117 \cdot 1879$
20	$2^{14} \cdot 3^{9} \cdot 5^{5} \cdot 7^{4} \cdot 11^{2} \cdot 13^{2} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 317 \cdot 2539$
22	$2^{16} \cdot 3^{8} \cdot 5^{5} \cdot 7^{4} \cdot 13^{2} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 23 \cdot 1783667$
24	$2^{30} \cdot 3^{16} \cdot 5^{8} \cdot 7^{8} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 478469489 \cdot 2549$
26	$2^{16} \cdot 3^{9} \cdot 5^{5} \cdot 7^{4} \cdot 11 \cdot 13^{2} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 23 \cdot 73 \cdot 78607$
28	$2^{30} \cdot 3^{19} \cdot 5^{10} \cdot 7^{6} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 59 \cdot 683 \cdot 8568787$
30	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{11} \cdot 7^{10} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31^{2} \cdot 67 \cdot 482483 \cdot 4733$
32	$2^{32} \cdot 3^{19} \cdot 5^{10} \cdot 7^{8} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{4} \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot c_{16}$
34	$2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 5^{11} \cdot 7^{6} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{2} \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29^{3} \cdot 31^{2} \cdot 499 \cdot 8513429$
36	$2^{46} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{25}$

$i = 40$:

j	$\|Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\|$
12	$2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^{10} \cdot 7^{5} \cdot 13^{3} \cdot 29 \cdot 577 \cdot 228799$
16	$2^{26} \cdot 3^{12} \cdot 5^{9} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 401 \cdot 853$
18	$2^{23} \cdot 3^{13} \cdot 5^{10} \cdot 7^{5} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 189239 \cdot 23497$
20	$2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^{9} \cdot 7^{5} \cdot 11^{4} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 1231 \cdot 219675523$
22	$2^{23} \cdot 3^{15} \cdot 5^{9} \cdot 7^{5} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 163 \cdot 173 \cdot 23509$
24	$2^{49} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot 7^{10} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot c_{18}$
26	$2^{24} \cdot 3^{13} \cdot 5^{9} \cdot 7^{5} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 286049 \cdot 8447$
28	$2^{45} \cdot 3^{26} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 83 \cdot c_{16}$
30	$2^{46} \cdot 3^{29} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{7} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 31^{2} \cdot c_{22}$
32	$2^{48} \cdot 3^{26} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{2} \cdot 29^{3} \cdot 5190429333388331791303$
34	$2^{46} \cdot 3^{25} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{8} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 97 \cdot 93607 \cdot 27494297 \cdot 44711$
36	$2^{67} \cdot 3^{39} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^{9} \cdot 13^{9} \cdot 17^{5} \cdot 19^{7} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 53 \cdot 14141189 \cdot 4392769 \cdot 2399 \cdot 18307$
38	$2^{46} \cdot 3^{26} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 1109 \cdot 1459 \cdot c_{22}$

$i = 42$:

j	$\|Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\|$
12	$2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 31 \cdot 73 \cdot 223 \cdot 4583$
16	$2^{24} \cdot 3^{12} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 3762033287$
18	$2^{24} \cdot 3^{15} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 19^{2} \cdot 113 \cdot 85313113$
20	$2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 23 \cdot 83 \cdot 1226531 \cdot 11443$
22	$2^{24} \cdot 3^{12} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 619218031$
24	$2^{45} \cdot 3^{26} \cdot 5^{12} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot c_{17} \cdot 9337$
26	$2^{24} \cdot 3^{14} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 139 \cdot 1613098339$
28	$2^{45} \cdot 3^{25} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 23 \cdot 29^{3} \cdot c_{18} \cdot 17467$
30	$2^{48} \cdot 3^{25} \cdot 5^{16} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 31^{2} \cdot 168978975989075611 \cdot 3229$
32	$2^{48} \cdot 3^{25} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot c_{27}$
34	$2^{48} \cdot 3^{25} \cdot 5^{16} \cdot 7^{9} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{24}$
36	$2^{69} \cdot 3^{39} \cdot 5^{24} \cdot 7^{18} \cdot 11^{6} \cdot 13^{9} \cdot 17^{6} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{3} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 660699298972988 2811 \cdot 3709 \cdot 2875643$
38	$2^{48} \cdot 3^{25} \cdot 5^{16} \cdot 7^{12} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{27}$
40	$2^{69} \cdot 3^{37} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^{7} \cdot 13^{9} \cdot 17^{5} \cdot 19^{6} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot c_{34} \cdot 5531$

$i = 44$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{23} \cdot 3^{14} \cdot 5^{7} \cdot 7^{6} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 149 \cdot 41245849$
16	$2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^{7} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 29 \cdot 22511 \cdot 2909$
18	$2^{24} \cdot 3^{14} \cdot 5^{7} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 19^{2} \cdot 43 \cdot 9260501 \cdot 2851$
20	$2^{26} \cdot 3^{16} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{3} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 313 \cdot 10906243$
22	$2^{24} \cdot 3^{12} \cdot 5^{7} \cdot 7^{6} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 7907587 \cdot 1931$
24	$2^{44} \cdot 3^{24} \cdot 5^{14} \cdot 7^{12} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 1812291412965562678109$
26	$2^{23} \cdot 3^{14} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 617 \cdot 652999$
28	$2^{49} \cdot 3^{29} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 35333753837341027$
30	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{13} \cdot 7^{12} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 31^{2} \cdot 233 \cdot 5452115646497699789 \cdot$ 39761
32	$2^{46} \cdot 3^{28} \cdot 5^{13} \cdot 7^{12} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 24014855863 \cdot 398267 \cdot$ $34061 \cdot 96821$
34	$2^{46} \cdot 3^{26} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{24}$
36	$2^{74} \cdot 3^{43} \cdot 5^{20} \cdot 7^{21} \cdot 11^{7} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{6} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 47 \cdot$ $888360691761916071189 \cdot 20443$
38	$2^{46} \cdot 3^{28} \cdot 5^{13} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot c_{27}$
40	$2^{67} \cdot 3^{39} \cdot 5^{21} \cdot 7^{15} \cdot 11^{8} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{6} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot$ $8845463737415577640705613 3\cdot 40177$
42	$2^{69} \cdot 3^{38} \cdot 5^{20} \cdot 7^{18} \cdot 11^{5} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 239 \cdot c_{37} \cdot 426061$

$i = 46$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^{8} \cdot 7^{5} \cdot 13^{3} \cdot 263708911 \cdot 26801$
16	$2^{24} \cdot 3^{12} \cdot 5^{9} \cdot 7^{5} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 31 \cdot 71 \cdot 3436241$
18	$2^{26} \cdot 3^{13} \cdot 5^{8} \cdot 7^{5} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 19^{2} \cdot 29 \cdot 71 \cdot 9110509189$
20	$2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^{8} \cdot 7^{5} \cdot 11^{3} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 650360087721137$
22	$2^{25} \cdot 3^{12} \cdot 5^{9} \cdot 7^{7} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 79093981$
24	$2^{45} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot 7^{10} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 11307021529693871 \cdot 49711$
26	$2^{24} \cdot 3^{13} \cdot 5^{8} \cdot 7^{5} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 23 \cdot 6836243 \cdot 34519$
28	$2^{45} \cdot 3^{26} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot c_{24}$
30	$2^{51} \cdot 3^{26} \cdot 5^{16} \cdot 7^{10} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 31^{2} \cdot 557 \cdot 160230911627 \cdot 3401929 \cdot$ 96233
32	$2^{48} \cdot 3^{26} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 1281839171883623594152 7\cdot$ 489521693
34	$2^{50} \cdot 3^{25} \cdot 5^{16} \cdot 7^{9} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{25}$

36	$2^{70} \cdot 3^{39} \cdot 5^{23} \cdot 7^{15} \cdot 11^{8} \cdot 13^{9} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot$ $1906980679389541034473059161 \cdot 227377 \cdot 56093$
38	$2^{50} \cdot 3^{26} \cdot 5^{18} \cdot 7^{10} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23 \cdot 29^{3} \cdot 31^{2} \cdot c_{23} \cdot 62603$
40	$2^{69} \cdot 3^{38} \cdot 5^{24} \cdot 7^{14} \cdot 11^{9} \cdot 13^{9} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{36}$
42	$2^{72} \cdot 3^{37} \cdot 5^{24} \cdot 7^{15} \cdot 11^{6} \cdot 13^{9} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23 \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot c_{40}$
44	$2^{70} \cdot 3^{39} \cdot 5^{20} \cdot 7^{15} \cdot 11^{7} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 293 \cdot c_{41}$

$i = 48$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{28} \cdot 3^{17} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 13^{4} \cdot 19 \cdot 37 \cdot 109^{2} \cdot 48422802067$
16	$2^{31} \cdot 3^{16} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 79 \cdot c_{12}$
18	$2^{31} \cdot 3^{17} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 19^{2} \cdot 31 \cdot 73 \cdot 331 \cdot 4620343850611$
20	$2^{28} \cdot 3^{17} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{4} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 29 \cdot 59 \cdot 139 \cdot 146512206045727$
22	$2^{31} \cdot 3^{16} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 41 \cdot c_{15}$
24	$2^{60} \cdot 3^{32} \cdot 5^{16} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 7279003825884033088447593933401$
26	$2^{31} \cdot 3^{17} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 569 \cdot 635290909219559$
28	$2^{59} \cdot 3^{34} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{6} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 80411994012248261074 7\cdot$ 24888229
30	$2^{62} \cdot 3^{34} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{8} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 31^{2} \cdot c_{35}$
32	$2^{62} \cdot 3^{34} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{8} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot c_{40}$
34	$2^{62} \cdot 3^{33} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot$ $3535507743488761453100191817 \cdot 6353$
36	$2^{90} \cdot 3^{51} \cdot 5^{27} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot c_{47}$
38	$2^{62} \cdot 3^{34} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{6} \cdot 13^{8} \cdot 17^{6} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{42}$
40	$2^{91} \cdot 3^{50} \cdot 5^{27} \cdot 7^{18} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{6} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{44} \cdot 79559$
42	$2^{93} \cdot 3^{49} \cdot 5^{27} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{3} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot 61 \cdot c_{50} \cdot 4217$
44	$2^{90} \cdot 3^{51} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{48} \cdot 834607$
46	$2^{93} \cdot 3^{51} \cdot 5^{27} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 83 \cdot c_{54}$

$i = 50$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{21} \cdot 3^{14} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 13^{3} \cdot 196825873 \cdot 185749$
16	$2^{26} \cdot 3^{12} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 73 \cdot 229 \cdot 1459 \cdot 33181$
18	$2^{25} \cdot 3^{15} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19^{2} \cdot 22900493123351$
20	$2^{21} \cdot 3^{14} \cdot 5^{10} \cdot 7^{6} \cdot 11^{4} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 31 \cdot 229 \cdot 2876609 \cdot 4957$
22	$2^{26} \cdot 3^{12} \cdot 5^{8} \cdot 7^{6} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29 \cdot 90002071513$

24	$2^{45} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot 7^{12} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 41764900158848507465499037 73$
26	$2^{26} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 2484258421$
28	$2^{47} \cdot 3^{27} \cdot 5^{17} \cdot 7^{9} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 76666610345329 \cdot 188189 \cdot$ 7549
30	$2^{50} \cdot 3^{28} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{6} \cdot 17^{2} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 31^{2} \cdot 73 \cdot$ $262739094817104645032695885 3$
32	$2^{52} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot$ $100002002392795075647788542 7$
34	$2^{48} \cdot 3^{26} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot c_{21} \cdot 572419$
36	$2^{70} \cdot 3^{42} \cdot 5^{23} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{12} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 113 \cdot 1213 \cdot c_{32}$
38	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 383 \cdot$ $27856081496182550505602115818 11$
40	$2^{71} \cdot 3^{40} \cdot 5^{24} \cdot 7^{15} \cdot 11^{11} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{39}$
42	$2^{72} \cdot 3^{39} \cdot 5^{23} \cdot 7^{21} \cdot 11^{7} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot c_{43}$
44	$2^{70} \cdot 3^{41} \cdot 5^{22} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{5} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 103 \cdot$ $686796796499736639688108685332763202491$
46	$2^{73} \cdot 3^{39} \cdot 5^{23} \cdot 7^{15} \cdot 11^{10} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot c_{37}$
48	$2^{93} \cdot 3^{51} \cdot 5^{27} \cdot 7^{18} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{5} \cdot 23^{5} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $127 \cdot 257 \cdot 121950764837418866505096576179208369470060225509486256669869$

$i = 52$:

j	$\|Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\|$
12	$2^{30} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 41 \cdot 261263915125403$
16	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{3} \cdot 19 \cdot 37 \cdot 719 \cdot 42712807$
18	$2^{31} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 19^{2} \cdot 1352675204344537584 01$
20	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{4} \cdot 13^{3} \cdot 17^{3} \cdot 16256448457448437 31$
22	$2^{31} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11 \cdot 13^{3} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 31 \cdot 787 \cdot 1083749 \cdot 108061$
24	$2^{59} \cdot 3^{32} \cdot 5^{16} \cdot 7^{14} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 29^{2} \cdot 439 \cdot$ $18500964228476629838611 49 \cdot$ 78653
26	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 419 \cdot 1206537193 \cdot 475103$
28	$2^{64} \cdot 3^{35} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{4} \cdot 29^{2} \cdot c_{22} \cdot 67622941$
30	$2^{62} \cdot 3^{35} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{7} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23^{3} \cdot 31^{2} \cdot c_{33} \cdot 88339$
32	$2^{64} \cdot 3^{35} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{3} \cdot$ $594135419393160317452651566135587 \cdot 10193$
34	$2^{62} \cdot 3^{36} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{6} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 131 \cdot$ $713935476554042809345809043 \cdot 4751$
36	$2^{95} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{9} \cdot 13^{9} \cdot 17^{8} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot$ $98240442057415615669095522980976695407328021029 3$

38	$2^{62} \cdot 3^{35} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{5} \cdot 13^{6} \cdot 17^{6} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 89 \cdot 109 \cdot 211 \cdot c_{34} \cdot$ 4649
40	$2^{91} \cdot 3^{51} \cdot 5^{30} \cdot 7^{19} \cdot 11^{14} \cdot 13^{9} \cdot 17^{7} \cdot 19^{6} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{39} \cdot$ 49858381
42	$2^{93} \cdot 3^{50} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{8} \cdot 13^{9} \cdot 17^{8} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot c_{57}$
44	$2^{94} \cdot 3^{53} \cdot 5^{26} \cdot 7^{21} \cdot 11^{8} \cdot 13^{9} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 23^{7} \cdot 29^{2} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 1427 \cdot c_{50}$
46	$2^{93} \cdot 3^{51} \cdot 5^{30} \cdot 7^{19} \cdot 11^{9} \cdot 13^{9} \cdot 17^{7} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot$ $89 \cdot c_{54}$
48	$2^{121} \cdot 3^{67} \cdot 5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{11} \cdot 19^{6} \cdot 23^{7} \cdot 29^{2} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot 827 \cdot$ $5564249395337515321530341751750437665758145704895359907331946530011967 9$
50	$2^{95} \cdot 3^{53} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{11} \cdot 13^{9} \cdot 17^{6} \cdot 19^{5} \cdot 23^{5} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{4} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3}$ $\cdot 4668449529089930088284247290200452209632025617481614215 49$

$i = 54$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{28} \cdot 3^{20} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 13^{4} \cdot 43 \cdot 18063872722132649$
16	$2^{32} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 2417683 \cdot 987793 \cdot 5689$
18	$2^{32} \cdot 3^{20} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 19^{3} \cdot 37 \cdot 1944708060733579$
20	$2^{28} \cdot 3^{20} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 2259946934836503498871$
22	$2^{32} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 41 \cdot 1084884569887189$
24	$2^{60} \cdot 3^{32} \cdot 5^{16} \cdot 7^{14} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 31^{2} \cdot 1039 \cdot 1549 \cdot 11209435619 \cdot$ $94841 \cdot 1110019 \cdot 20399$
26	$2^{32} \cdot 3^{20} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29 \cdot 67 \cdot 739 \cdot 659591 \cdot 9677$
28	$2^{60} \cdot 3^{36} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 11^{5} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot c_{32}$
30	$2^{64} \cdot 3^{36} \cdot 5^{22} \cdot 7^{14} \cdot 11^{7} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 31^{2} \cdot c_{36}$
32	$2^{64} \cdot 3^{36} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{3} \cdot 13^{8} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 43 \cdot 313 \cdot$ $5204588676535648358071527901437 7 \cdot 2450551$
34	$2^{64} \cdot 3^{36} \cdot 5^{22} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 179 \cdot 647 \cdot$ $2452505163661735253 71 \cdot 439777571$
36	$2^{92} \cdot 3^{62} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{9} \cdot 13^{13} \cdot 17^{8} \cdot 19^{8} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 89 \cdot c_{40} \cdot$ 3041
38	$2^{64} \cdot 3^{36} \cdot 5^{22} \cdot 7^{14} \cdot 11^{5} \cdot 13^{8} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot$ $451724651494297689764300029342155826630 1 \cdot 2699$
40	$2^{92} \cdot 3^{52} \cdot 5^{30} \cdot 7^{19} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{8} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{56}$
42	$2^{96} \cdot 3^{52} \cdot 5^{32} \cdot 7^{21} \cdot 11^{7} \cdot 13^{13} \cdot 17^{8} \cdot 19^{7} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot 823 \cdot c_{36} \cdot$ $606521 \cdot 2087 \cdot 190403$
44	$2^{92} \cdot 3^{56} \cdot 5^{26} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{10} \cdot 23^{5} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot$ $24974691176090536960197157727883449863048169852268352 3$
46	$2^{96} \cdot 3^{52} \cdot 5^{32} \cdot 7^{19} \cdot 11^{9} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{7} \cdot 23^{2} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot$

	$83 \cdot c_{53}$
48	$2^{124} \cdot 3^{68} \cdot 5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{12} \cdot 13^{16} \cdot 17^{12} \cdot 19^{8} \cdot 23^{7} \cdot 29^{3} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $83 \cdot c_{69} \cdot 11831$
50	$2^{96} \cdot 3^{56} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{13} \cdot 17^{6} \cdot 19^{7} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot$ $61 \cdot c_{44} \cdot 13545824909$
52	$2^{124} \cdot 3^{72} \cdot 5^{40} \cdot 7^{28} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{11} \cdot 19^{8} \cdot 23^{6} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot c_{80}$

$i := 56$

12	$2^{28} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 13^{4} \cdot 23 \cdot 251 \cdot 449 \cdot 701 \cdot 72400452731$
16	$2^{32} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 41 \cdot c_{15}$
18	$2^{31} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11 \cdot 13^{4} \cdot 19^{2} \cdot 967 \cdot 79632618474655557253$
20	$2^{28} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{5} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19 \cdot 37 \cdot 251 \cdot 265661389519 \cdot 8933$
22	$2^{31} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 13^{4} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 101 \cdot 3279723607323181$
24	$2^{64} \cdot 3^{32} \cdot 5^{16} \cdot 7^{14} \cdot 11^{7} \cdot 13^{9} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 79^{2} \cdot c_{32}$
26	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 31 \cdot 238608263627830181$
28	$2^{60} \cdot 3^{37} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 11^{6} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot$ $1829797013064567766826462972 3 \cdot 12239$
30	$2^{62} \cdot 3^{36} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{8} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{2} \cdot 23^{2} \cdot 31^{2} \cdot 67 \cdot$ $400016716838505062113213658094265 1 \cdot 26357 \cdot 2341$
32	$2^{64} \cdot 3^{37} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{5} \cdot 13^{8} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot$ $379940897206617079 \cdot 3533 \cdot 15907 \cdot 6329 \cdot 24266369 \cdot 2069$
34	$2^{62} \cdot 3^{34} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{2} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{3} \cdot 67 \cdot 103 \cdot 929 \cdot c_{29}$
36	$2^{90} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{11} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{9} \cdot 23^{3} \cdot 29^{5} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 61^{2} \cdot c_{47}$
38	$2^{62} \cdot 3^{37} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{6} \cdot 13^{9} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 103 \cdot c_{36} \cdot 4813$
40	$2^{100} \cdot 3^{52} \cdot 5^{30} \cdot 7^{19} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{7} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{46} \cdot 4001$
42	$2^{93} \cdot 3^{50} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 43^{4} \cdot 349 \cdot c_{62}$
44	$2^{90} \cdot 3^{55} \cdot 5^{26} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 211 \cdot c_{57}$
46	$2^{93} \cdot 3^{52} \cdot 5^{30} \cdot 7^{19} \cdot 11^{11} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot$ $6377729491864296274506629968778184531893979253481032983509$
48	$2^{122} \cdot 3^{68} \cdot 5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{14} \cdot 13^{16} \cdot 17^{10} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $1289 \cdot c_{75} \cdot 23831$
50	$2^{95} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{5} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot$ $197 \cdot c_{60}$
52	$2^{123} \cdot 3^{70} \cdot 5^{40} \cdot 7^{30} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{3} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot 47^{4} \cdot 53^{4} \cdot$ $97 \cdot 659 \cdot c_{60} \cdot 4657$
54	$2^{124} \cdot 3^{72} \cdot 5^{40} \cdot 7^{28} \cdot 11^{12} \cdot 13^{16} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{4} \cdot$ $163 \cdot 12360472590319950295101899957768049479410238353675595223496614833461665769634772106 21$

$i = 58$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{28} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^7 \cdot 13^5 \cdot 47 \cdot 109 \cdot 15106112325551173$
16	$2^{32} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^7 \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 43 \cdot 16148739418433123$
18	$2^{36} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^7 \cdot 11^2 \cdot 13^4 \cdot 19^3 \cdot 41 \cdot 48244579 \cdot 10909547353$
20	$2^{28} \cdot 3^{23} \cdot 5^{10} \cdot 7^7 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 191 \cdot 53943341292019 \cdot 61643$
22	$2^{35} \cdot 3^{19} \cdot 5^{10} \cdot 7^7 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 56003 \cdot 109840849$
24	$2^{60} \cdot 3^{32} \cdot 5^{16} \cdot 7^{14} \cdot 11^8 \cdot 13^8 \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 661 \cdot$ $95084285978053518923495386145838629$
26	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^7 \cdot 11^2 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 73 \cdot 620117 \cdot 37199 \cdot 912287$
28	$2^{60} \cdot 3^{36} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 11^6 \cdot 13^8 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^4 \cdot 31^2 \cdot 853 \cdot$ $3935574058035024638291 \cdot 23417$
30	$2^{74} \cdot 3^{35} \cdot 5^{21} \cdot 7^{14} \cdot 11^8 \cdot 13^8 \cdot 17^4 \cdot 19^3 \cdot 23^4 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 59 \cdot$ $3628836549088181 \cdot 20173 \cdot 3335249 \cdot 50021$
32	$2^{64} \cdot 3^{38} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^4 \cdot 13^8 \cdot 17^6 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot c_{44}$
34	$2^{64} \cdot 3^{34} \cdot 5^{21} \cdot 7^{12} \cdot 11^7 \cdot 13^8 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot$ $8713793997681617416965638532865164954197$
36	$2^{98} \cdot 3^{55} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^8 \cdot 19^8 \cdot 23^4 \cdot 29^2 \cdot 31^3 \cdot 37^3 \cdot c_{53}$
38	$2^{64} \cdot 3^{36} \cdot 5^{21} \cdot 7^{14} \cdot 11^8 \cdot 13^8 \cdot 17^6 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 73 \cdot$ $1853394365817889945169354878650500736539243$
40	$2^{92} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{19} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^7 \cdot 19^8 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot c_{55} \cdot 2221$
42	$2^{96} \cdot 3^{50} \cdot 5^{31} \cdot 7^{21} \cdot 11^8 \cdot 13^{12} \cdot 17^8 \cdot 19^7 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 43^3 \cdot$ $155838205198671856478744777718835676833684280404711 \cdot 37987507 \cdot 29027$
44	$2^{97} \cdot 3^{56} \cdot 5^{26} \cdot 7^{21} \cdot 11^9 \cdot 13^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^8 \cdot 23^5 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot c_{58} \cdot 92993$
46	$2^{100} \cdot 3^{51} \cdot 5^{31} \cdot 7^{19} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^7 \cdot 19^7 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot 47^3 \cdot$ $1279 \cdot c_{57}$
48	$2^{124} \cdot 3^{67} \cdot 5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{14} \cdot 13^{16} \cdot 17^{11} \cdot 19^8 \cdot 23^6 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot$ $109 \cdot 137 \cdot c_{83}$
50	$2^{99} \cdot 3^{53} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^7 \cdot 23^5 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot 47^3 \cdot$ $c_{59} \cdot 3863 \cdot 1831$
52	$2^{124} \cdot 3^{69} \cdot 5^{40} \cdot 7^{29} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^{11} \cdot 19^8 \cdot 23^6 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot 47^3 \cdot$ $53^4 \cdot 71 \cdot c_{76}$
54	$2^{128} \cdot 3^{72} \cdot 5^{42} \cdot 7^{28} \cdot 11^{12} \cdot 13^{16} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^6 \cdot 29^2 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot 47^3 \cdot 263 \cdot$ $c_{72} \cdot 36007$
56	$2^{124} \cdot 3^{71} \cdot 5^{40} \cdot 7^{29} \cdot 11^{14} \cdot 13^{16} \cdot 17^{10} \cdot 19^8 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 31^2 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot 47^3 \cdot$ $53^4 \cdot c_{87}$

$i = 60$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{37} \cdot 3^{23} \cdot 5^{15} \cdot 7^{12} \cdot 13^{5} \cdot 17 \cdot 439 \cdot 1151 \cdot 4645941439 \cdot 17419$
16	$2^{39} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{3} \cdot 23 \cdot 101 \cdot c_{20}$
18	$2^{40} \cdot 3^{23} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 11^{2} \cdot 13^{5} \cdot 19^{4} \cdot 43 \cdot 97 \cdot 131 \cdot 3458844591490218893$
20	$2^{41} \cdot 3^{23} \cdot 5^{14} \cdot 7^{10} \cdot 11^{6} \cdot 13^{5} \cdot 17^{3} \cdot 41 \cdot 1451 \cdot 1643479199749870489$
22	$2^{40} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14} \cdot 7^{9} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 41 \cdot c_{23}$
24	$2^{74} \cdot 3^{42} \cdot 5^{20} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 37^{2} \cdot 101 \cdot$ $1411271530543825618277461963301025774441 \cdot 53861$
26	$2^{39} \cdot 3^{23} \cdot 5^{14} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 53 \cdot c_{24}$
28	$2^{82} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 1087 \cdot$ $4423829307807813188289763711621022239 \cdot 9739$
30	$2^{80} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{13} \cdot 13^{11} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 31^{4} \cdot c_{50}$
32	$2^{78} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{6} \cdot 13^{10} \cdot 17^{6} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 631 \cdot c_{49} \cdot 142453$
34	$2^{78} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 1303 \cdot 1327 \cdot c_{38} \cdot 12269$
36	$2^{119} \cdot 3^{69} \cdot 5^{40} \cdot 7^{27} \cdot 11^{16} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{9} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 233 \cdot 373 \cdot c_{56}$
38	$2^{78} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{57}$
40	$2^{113} \cdot 3^{63} \cdot 5^{43} \cdot 7^{24} \cdot 11^{18} \cdot 13^{15} \cdot 17^{7} \cdot 19^{10} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{71}$
42	$2^{117} \cdot 3^{65} \cdot 5^{41} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{9} \cdot 23^{3} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot 101 \cdot$ $393234828448816948830236154194355230348541527268596556529901$ 4798634977121
44	$2^{120} \cdot 3^{66} \cdot 5^{34} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^{7} \cdot 19^{9} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43 \cdot$ $c_{69} \cdot 15959 \cdot 2549$
46	$2^{118} \cdot 3^{63} \cdot 5^{39} \cdot 7^{24} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^{7} \cdot 19^{8} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot$ $\cdot 19478674787312348995350441413012729490592231209703497033882314796$ 203151992964799
48	$2^{152} \cdot 3^{83} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{20} \cdot 13^{20} \cdot 17^{12} \cdot 19^{9} \cdot 23^{8} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{4} \cdot c_{105}$
50	$2^{118} \cdot 3^{66} \cdot 5^{39} \cdot 7^{27} \cdot 11^{18} \cdot 13^{15} \cdot 17^{6} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{84}$
52	$2^{156} \cdot 3^{86} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{18} \cdot 13^{15} \cdot 17^{11} \cdot 19^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 383 \cdot c_{93} \cdot 64081$
54	$2^{156} \cdot 3^{92} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{17} \cdot 13^{21} \cdot 17^{12} \cdot 19^{12} \cdot 23^{7} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot c_{101} \cdot 42569$
56	$2^{152} \cdot 3^{86} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{21} \cdot 13^{20} \cdot 17^{11} \cdot 19^{9} \cdot 23^{6} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{5} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 1613 \cdot c_{101}$
58	$2^{160} \cdot 3^{86} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{20} \cdot 13^{20} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 66380464479966126550636825638514412622786869438159411$ $3940614840900253600489476578699970362382305861615565462247489407$

$i = 62$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{28} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11 \cdot 13^{4} \cdot 73 \cdot 661 \cdot 17937052014809 \cdot 14449$
16	$2^{32} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 47 \cdot 571 \cdot 811410768061073$
18	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11 \cdot 13^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23 \cdot 103 \cdot 569 \cdot 800036369338818433$
20	$2^{28} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{4} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 43 \cdot 33379717936398487 \cdot 4259 \cdot 2591$
22	$2^{32} \cdot 3^{16} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11 \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 41 \cdot 652273408780114439$
24	$2^{60} \cdot 3^{32} \cdot 5^{16} \cdot 7^{14} \cdot 11^{6} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 409 \cdot c_{37} \cdot 83023$
26	$2^{32} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10} \cdot 7^{7} \cdot 11^{2} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 37 \cdot 61 \cdot 1472112182113053353$
28	$2^{60} \cdot 3^{37} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 11^{5} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot c_{30} \cdot 202393837$
30	$2^{64} \cdot 3^{36} \cdot 5^{21} \cdot 7^{14} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot 67 \cdot 233 \cdot c_{38}$
32	$2^{64} \cdot 3^{37} \cdot 5^{20} \cdot 7^{14} \cdot 11^{5} \cdot 13^{8} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 1609 \cdot$ $250119021979542700800860071 \cdot 2677 \cdot 3331 \cdot 9127$
34	$2^{68} \cdot 3^{34} \cdot 5^{21} \cdot 7^{12} \cdot 11^{6} \cdot 13^{8} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{5} \cdot 31^{2} \cdot 1549 \cdot c_{28} \cdot 7349 \cdot 78569$
36	$2^{92} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{9} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{8} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 89 \cdot 173 \cdot c_{61}$
38	$2^{70} \cdot 3^{37} \cdot 5^{21} \cdot 7^{14} \cdot 11^{5} \cdot 13^{8} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{5} \cdot 31^{2} \cdot 67 \cdot c_{44}$
40	$2^{92} \cdot 3^{52} \cdot 5^{30} \cdot 7^{19} \cdot 11^{11} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{8} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 79 \cdot$ $101 \cdot 241 \cdot c_{56}$
42	$2^{96} \cdot 3^{50} \cdot 5^{31} \cdot 7^{21} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{7} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot 73 \cdot c_{68}$
44	$2^{92} \cdot 3^{55} \cdot 5^{26} \cdot 7^{21} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{9} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 233 \cdot$ $401 \cdot c_{60} \cdot 18521$
46	$2^{100} \cdot 3^{52} \cdot 5^{31} \cdot 7^{19} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{7} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot$ $5357723163176252674908894540866660885668893709969522827313 1 \cdot 3217$
48	$2^{124} \cdot 3^{68} \cdot 5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{12} \cdot 13^{20} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot 179 \cdot$ $541 \cdot 1129 \cdot c_{75} \cdot 1759 \cdot 296071$
50	$2^{96} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{21} \cdot 11^{15} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{7} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{66}$
52	$2^{124} \cdot 3^{70} \cdot 5^{40} \cdot 7^{29} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 243959452455058570699002601616877386194715554799540342$ $48173528756848497 \cdot 151929616409 \cdot 3571$
54	$2^{128} \cdot 3^{72} \cdot 5^{42} \cdot 7^{28} \cdot 11^{10} \cdot 13^{16} \cdot 17^{10} \cdot 19^{11} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 193 \cdot c_{79} \cdot 7187 \cdot 4909 \cdot 110323$
56	$2^{124} \cdot 3^{75} \cdot 5^{40} \cdot 7^{29} \cdot 11^{13} \cdot 13^{16} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{8} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot c_{88}$
58	$2^{128} \cdot 3^{71} \cdot 5^{42} \cdot 7^{29} \cdot 11^{12} \cdot 13^{16} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{2} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot c_{83}$
60	$2^{156} \cdot 3^{86} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{18} \cdot 13^{20} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{5} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 293 \cdot c_{124}$

$i = 64$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{35} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 13^{4} \cdot 53 \cdot 5495462716251259 \cdot 294846917$
16	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^{11} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{4} \cdot 534112315957379 \cdot 2713$
18	$2^{40} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{2} \cdot 13^{5} \cdot 19^{4} \cdot 47 \cdot 373 \cdot 2614645889 \cdot 3891259 \cdot 4447$
20	$2^{35} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{5} \cdot 13^{4} \cdot 17^{4} \cdot 23 \cdot 83 \cdot 113 \cdot c_{14} \cdot 18637 \cdot 53051$
22	$2^{40} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 43 \cdot 383 \cdot 419 \cdot 44320976653545479$
24	$2^{75} \cdot 3^{40} \cdot 5^{22} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{8} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 41^{2} \cdot 479 \cdot c_{42}$
26	$2^{43} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot c_{24}$
28	$2^{78} \cdot 3^{45} \cdot 5^{23} \cdot 7^{15} \cdot 11^{8} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 37^{2} \cdot c_{41}$
30	$2^{80} \cdot 3^{44} \cdot 5^{23} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{8} \cdot 17^{5} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot c_{54}$
32	$2^{86} \cdot 3^{45} \cdot 5^{23} \cdot 7^{18} \cdot 11^{5} \cdot 13^{8} \cdot 17^{8} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot$ $575934983124622764608356186396690210294637448228 1 \cdot 845017$
34	$2^{80} \cdot 3^{42} \cdot 5^{23} \cdot 7^{15} \cdot 11^{9} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 53 \cdot 541 \cdot 641 \cdot$ $863 \cdot 991 \cdot c_{37}$
36	$2^{115} \cdot 3^{66} \cdot 5^{36} \cdot 7^{27} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{9} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 43 \cdot 89 \cdot c_{61} \cdot$ $4013 \cdot 1951$
38	$2^{80} \cdot 3^{46} \cdot 5^{23} \cdot 7^{18} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{53} \cdot 4451$
40	$2^{120} \cdot 3^{64} \cdot 5^{39} \cdot 7^{26} \cdot 11^{14} \cdot 13^{12} \cdot 17^{9} \cdot 19^{9} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 139 \cdot c_{70}$
42	$2^{120} \cdot 3^{62} \cdot 5^{36} \cdot 7^{27} \cdot 11^{9} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot 83 \cdot 179 \cdot c_{76}$
44	$2^{115} \cdot 3^{67} \cdot 5^{35} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{10} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{71} \cdot 69439$
46	$2^{120} \cdot 3^{65} \cdot 5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{9} \cdot 19^{8} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{4} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 17399623141886826991812044246969945726177702345916094764$ $3515547957700625837558 81$
48	$2^{155} \cdot 3^{85} \cdot 5^{43} \cdot 7^{30} \cdot 11^{16} \cdot 13^{16} \cdot 17^{15} \cdot 19^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot c_{108}$
50	$2^{126} \cdot 3^{66} \cdot 5^{36} \cdot 7^{27} \cdot 11^{14} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{82} \cdot 7643$
52	$2^{160} \cdot 3^{86} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^{14} \cdot 19^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot c_{96}$
54	$2^{160} \cdot 3^{88} \cdot 5^{46} \cdot 7^{35} \cdot 11^{17} \cdot 13^{16} \cdot 17^{15} \cdot 19^{13} \cdot 23^{6} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 6888401188842883107208993025145685115513183134136846440 59$ $83373317074289108423077527273311505603429183698177537$
56	$2^{162} \cdot 3^{89} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{17} \cdot 13^{16} \cdot 17^{13} \cdot 19^{9} \cdot 23^{6} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot c_{107}$
58	$2^{160} \cdot 3^{87} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{16} \cdot 13^{16} \cdot 17^{14} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot c_{107} \cdot 130241$
60	$2^{195} \cdot 3^{106} \cdot 5^{62} \cdot 7^{44} \cdot 11^{23} \cdot 13^{20} \cdot 17^{16} \cdot 19^{16} \cdot 23^{7} \cdot 29^{9} \cdot 31^{10} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 61^{5} \cdot 311 \cdot 521 \cdot c_{116} \cdot 5003 \cdot 2917$
62	$2^{160} \cdot 3^{89} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{14} \cdot 13^{16} \cdot 17^{13} \cdot 19^{12} \cdot 23^{5} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$

	$47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 89 \cdot c_{119}$

$i = 66$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{35} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14} \cdot 7^9 \cdot 13^5 \cdot 19 \cdot 1223 \cdot 45876162537678355367 \cdot 3491$
16	$2^{40} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot 11^3 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot c_{25}$
18	$2^{40} \cdot 3^{24} \cdot 5^{14} \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \cdot 13^5 \cdot 17 \cdot 19^3 \cdot 173 \cdot c_{24}$
20	$2^{35} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot 11^5 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot$ $47 \cdot 132323843847381392220767 \cdot 3821 \cdot 3529$
22	$2^{40} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 41 \cdot 743991650573107583 \cdot 159403$
24	$2^{75} \cdot 3^{40} \cdot 5^{20} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 43^2 \cdot$ $83207528480382704534179129924772235929716600969 \cdot 2137$
26	$2^{40} \cdot 3^{23} \cdot 5^{13} \cdot 7^{10} \cdot 11^3 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 193 \cdot 389 \cdot 467 \cdot$ $744917 \cdot 10331 \cdot 91711$
28	$2^{75} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^7 \cdot 13^{10} \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^4 \cdot 29^4 \cdot$ $13090225375364362318897557149432243508350983 \cdot 14503 \cdot 2789$
30	$2^{80} \cdot 3^{43} \cdot 5^{26} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 23^4 \cdot 31^4 \cdot 37^2 \cdot 59 \cdot 181 \cdot 593 \cdot c_{40} \cdot 12611$
32	$2^{80} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^5 \cdot 13^{10} \cdot 17^6 \cdot 19^4 \cdot 23^4 \cdot 29^4 \cdot c_{54} \cdot 14510557$
34	$2^{80} \cdot 3^{42} \cdot 5^{26} \cdot 7^{15} \cdot 11^9 \cdot 13^{10} \cdot 17^4 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 431 \cdot$ $28494012772317841347047657859240562482880625561$
36	$2^{115} \cdot 3^{66} \cdot 5^{43} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^8 \cdot 19^8 \cdot 23^5 \cdot 29^5 \cdot 31^5 \cdot 37^3 \cdot 41 \cdot c_{62} \cdot 7817 \cdot$ 978697
38	$2^{80} \cdot 3^{43} \cdot 5^{26} \cdot 7^{18} \cdot 11^8 \cdot 13^{10} \cdot 17^6 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 103 \cdot 389 \cdot c_{57}$
40	$2^{115} \cdot 3^{63} \cdot 5^{40} \cdot 7^{24} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^7 \cdot 19^8 \cdot 23^4 \cdot 29^4 \cdot 31^5 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 419 \cdot c_{75} \cdot 11087$
42	$2^{120} \cdot 3^{64} \cdot 5^{40} \cdot 7^{27} \cdot 11^{10} \cdot 13^{15} \cdot 17^8 \cdot 19^7 \cdot 23^4 \cdot 29^5 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \cdot 43^3 \cdot 131 \cdot c_{83}$
44	$2^{115} \cdot 3^{65} \cdot 5^{33} \cdot 7^{27} \cdot 11^{12} \cdot 13^{15} \cdot 17^6 \cdot 19^8 \cdot 23^8 \cdot 29^4 \cdot 31^5 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot c_{88}$
46	$2^{120} \cdot 3^{64} \cdot 5^{39} \cdot 7^{24} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^7 \cdot 19^7 \cdot 23^3 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot c_{80} \cdot 534943$
48	$2^{155} \cdot 3^{85} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{17} \cdot 13^{20} \cdot 17^{16} \cdot 19^9 \cdot 23^{10} \cdot 29^5 \cdot 31^5 \cdot 37^3 \cdot 41^5 \cdot 43^3 \cdot$ $6064386798750902926625591886231864307282187614081474393391959$ $227760108311459949103194350476737287351573827$
50	$2^{120} \cdot 3^{66} \cdot 5^{38} \cdot 7^{27} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^7 \cdot 19^7 \cdot 23^7 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 223 \cdot c_{88}$
52	$2^{155} \cdot 3^{85} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^{11} \cdot 19^8 \cdot 23^9 \cdot 29^4 \cdot 31^5 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 197 \cdot c_{106} \cdot 658897$
54	$2^{160} \cdot 3^{88} \cdot 5^{52} \cdot 7^{35} \cdot 11^{16} \cdot 13^{20} \cdot 17^{12} \cdot 19^{11} \cdot 23^{10} \cdot 29^5 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \cdot 41^4 \cdot 43^3 \cdot$ $47^4 \cdot c_{102} \cdot 19875658177$
56	$2^{155} \cdot 3^{86} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{18} \cdot 13^{20} \cdot 17^{10} \cdot 19^8 \cdot 23^8 \cdot 29^8 \cdot 31^5 \cdot 37^3 \cdot 41^4 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 846534001028623960894410928604369274021122146$

	$1475121150674794308501945504329637078223263885074312674006213164835 51$
58	$2^{160} \cdot 3^{85} \cdot 5^{52} \cdot 7^{35} \cdot 11^{18} \cdot 13^{20} \cdot 17^{11} \cdot 19^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot c_{117}$
60	$2^{195} \cdot 3^{106} \cdot 5^{65} \cdot 7^{44} \cdot 11^{25} \cdot 13^{25} \cdot 17^{12} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^{10} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 61^{5} \cdot c_{138}$
62	$2^{160} \cdot 3^{86} \cdot 5^{52} \cdot 7^{35} \cdot 11^{15} \cdot 13^{20} \cdot 17^{10} \cdot 19^{11} \cdot 23^{7} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot c_{112} \cdot 692830799 \cdot 5407$
64	$2^{200} \cdot 3^{107} \cdot 5^{59} \cdot 7^{44} \cdot 11^{21} \cdot 13^{20} \cdot 17^{15} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 106465338311490254846353569788355844581014520$ $172998534261774935323668831889676556355380401728654433106345041252874335797653284887375271946541$

$i = 68$:

j	$\|Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\|$
12	$2^{37} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^{10} \cdot 13^{5} \cdot 29 \cdot 421 \cdot c_{15} \cdot 7023353$
16	$2^{39} \cdot 3^{20} \cdot 5^{12} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{3} \cdot 53 \cdot c_{19} \cdot 31267$
18	$2^{39} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^{9} \cdot 11^{2} \cdot 13^{5} \cdot 19^{3} \cdot c_{29}$
20	$2^{39} \cdot 3^{24} \cdot 5^{14} \cdot 7^{10} \cdot 11^{6} \cdot 13^{5} \cdot 17^{3} \cdot 1117 \cdot 1746947801994685068 5287$
22	$2^{39} \cdot 3^{20} \cdot 5^{12} \cdot 7^{9} \cdot 13^{5} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot$ $47 \cdot 797 \cdot 1031 \cdot 55436979177716979893$
24	$2^{74} \cdot 3^{40} \cdot 5^{20} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{5} \cdot 23^{2} \cdot 457 \cdot 463 \cdot c_{43}$
26	$2^{39} \cdot 3^{23} \cdot 5^{14} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 43 \cdot 1499 \cdot 13926421101143 \cdot$ 53137321
28	$2^{78} \cdot 3^{45} \cdot 5^{23} \cdot 7^{15} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{3} \cdot 19^{6} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 41^{2} \cdot c_{42}$
30	$2^{78} \cdot 3^{45} \cdot 5^{23} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot c_{55}$
32	$2^{78} \cdot 3^{45} \cdot 5^{23} \cdot 7^{18} \cdot 11^{6} \cdot 13^{10} \cdot 17^{6} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 37^{2} \cdot c_{57}$
34	$2^{80} \cdot 3^{43} \cdot 5^{23} \cdot 7^{15} \cdot 11^{9} \cdot 13^{10} \cdot 17^{3} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 113 \cdot 277 \cdot c_{43} \cdot 212281$
36	$2^{119} \cdot 3^{70} \cdot 5^{35} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{9} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot c_{75}$
38	$2^{80} \cdot 3^{45} \cdot 5^{23} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{6} \cdot 19^{3} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{61}$
40	$2^{113} \cdot 3^{65} \cdot 5^{36} \cdot 7^{24} \cdot 11^{17} \cdot 13^{15} \cdot 17^{7} \cdot 19^{9} \cdot 23^{3} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 89 \cdot$ $97363396413879994795029978888915568024563393137738869443299046305645768537$
42	$2^{117} \cdot 3^{63} \cdot 5^{35} \cdot 7^{27} \cdot 11^{10} \cdot 13^{16} \cdot 17^{8} \cdot 19^{9} \cdot 23^{2} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot c_{86}$
44	$2^{117} \cdot 3^{69} \cdot 5^{34} \cdot 7^{27} \cdot 11^{12} \cdot 13^{15} \cdot 17^{6} \cdot 19^{9} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 79 \cdot c_{76}$
46	$2^{119} \cdot 3^{65} \cdot 5^{35} \cdot 7^{24} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^{7} \cdot 19^{8} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{78} \cdot 3739$
48	$2^{152} \cdot 3^{85} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{18} \cdot 13^{20} \cdot 17^{11} \cdot 19^{9} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{4} \cdot$ $c_{110} \cdot 4583$
50	$2^{117} \cdot 3^{68} \cdot 5^{37} \cdot 7^{27} \cdot 11^{16} \cdot 13^{15} \cdot 17^{6} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$

	$47^3 \cdot 97 \cdot 131 \cdot 347 \cdot 523 \cdot c_{80}$
52	$2^{157} \cdot 3^{88} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{17} \cdot 13^{15} \cdot 17^{11} \cdot 19^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 1627 \cdot c_{87} \cdot 22283 \cdot 2083 \cdot 3007009$
54	$2^{156} \cdot 3^{92} \cdot 5^{46} \cdot 7^{35} \cdot 11^{15} \cdot 13^{21} \cdot 17^{11} \cdot 19^{13} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^4 \cdot c_{119}$
56	$2^{152} \cdot 3^{90} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{19} \cdot 13^{20} \cdot 17^{10} \cdot 19^{9} \cdot 23^{6} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^5 \cdot 53^4 \cdot c_{111}$
58	$2^{156} \cdot 3^{89} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{18} \cdot 13^{20} \cdot 17^{11} \cdot 19^{14} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot c_{114}$
60	$2^{195} \cdot 3^{109} \cdot 5^{59} \cdot 7^{45} \cdot 11^{26} \cdot 13^{25} \cdot 17^{11} \cdot 19^{14} \cdot 23^{6} \cdot 29^{8} \cdot 31^{10} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 61^5 \cdot c_{141}$
62	$2^{160} \cdot 3^{90} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{16} \cdot 13^{20} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{5} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 1103 \cdot 1373 \cdot c_{118}$
64	$2^{195} \cdot 3^{110} \cdot 5^{56} \cdot 7^{45} \cdot 11^{21} \cdot 13^{20} \cdot 17^{14} \cdot 19^{14} \cdot 23^{6} \cdot 29^{8} \cdot 31^{10} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 83 \cdot c_{132}$
66	$2^{195} \cdot 3^{108} \cdot 5^{58} \cdot 7^{44} \cdot 11^{22} \cdot 13^{25} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 109 \cdot c_{153}$

$i = 70$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{35} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 13^{5} \cdot 59 \cdot 263 \cdot 1489 \cdot 547510906072957 \cdot 5449 \cdot 45319$
16	$2^{40} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{5} \cdot 19 \cdot c_{22}$
18	$2^{40} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{2} \cdot 13^{6} \cdot 19^{3} \cdot 53 \cdot c_{24} \cdot 277531$
20	$2^{35} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{6} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 863618674537774718063084 07660397$
22	$2^{40} \cdot 3^{20} \cdot 5^{15} \cdot 7^{9} \cdot 13^{7} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot c_{18} \cdot 782839$
24	$2^{75} \cdot 3^{40} \cdot 5^{20} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 47^{2} \cdot c_{55}$
26	$2^{40} \cdot 3^{22} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 191 \cdot c_{26}$
28	$2^{75} \cdot 3^{46} \cdot 5^{25} \cdot 7^{17} \cdot 11^{9} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 43^{2} \cdot c_{46}$
30	$2^{80} \cdot 3^{45} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{13} \cdot 13^{11} \cdot 17^{5} \cdot 19^{3} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 41^{2} \cdot 59 \cdot 479 \cdot 1699 \cdot c_{40} \cdot 20051$
32	$2^{80} \cdot 3^{45} \cdot 5^{26} \cdot 7^{18} \cdot 11^{6} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot c_{56} \cdot 3008633$
34	$2^{80} \cdot 3^{44} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{2} \cdot$ $1090985998640292378116248376434896 27848359 \cdot 1490893$
36	$2^{115} \cdot 3^{66} \cdot 5^{38} \cdot 7^{27} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 283 \cdot c_{76}$
38	$2^{80} \cdot 3^{45} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{57} \cdot 4392317$
40	$2^{115} \cdot 3^{65} \cdot 5^{39} \cdot 7^{24} \cdot 11^{18} \cdot 13^{15} \cdot 17^{9} \cdot 19^{8} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot c_{74} \cdot 651509 \cdot 5857$
42	$2^{120} \cdot 3^{62} \cdot 5^{38} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{7} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot c_{89}$
44	$2^{115} \cdot 3^{68} \cdot 5^{33} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{8} \cdot 23^{8} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 97 \cdot$ $64023253822019869678356623725039252734681043544457123764596866$ $23404319700278406929 \cdot 4421$

46	$2^{120} \cdot 3^{64} \cdot 5^{39} \cdot 7^{24} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{7} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{81} \cdot 9389467$
48	$2^{155} \cdot 3^{84} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{20} \cdot 13^{20} \cdot 17^{15} \cdot 19^{8} \cdot 23^{10} \cdot 29^{5} \cdot 31^{6} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot c_{118}$
50	$2^{120} \cdot 3^{67} \cdot 5^{38} \cdot 7^{27} \cdot 11^{18} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{7} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot c_{88} \cdot 3557$
52	$2^{155} \cdot 3^{88} \cdot 5^{50} \cdot 7^{33} \cdot 11^{18} \cdot 13^{15} \cdot 17^{14} \cdot 19^{9} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot c_{110} \cdot 85667$
54	$2^{160} \cdot 3^{88} \cdot 5^{50} \cdot 7^{33} \cdot 11^{17} \cdot 13^{21} \cdot 17^{15} \cdot 19^{11} \cdot 23^{9} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot 73 \cdot c_{121}$
56	$2^{155} \cdot 3^{89} \cdot 5^{50} \cdot 7^{33} \cdot 11^{21} \cdot 13^{20} \cdot 17^{13} \cdot 19^{8} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot c_{117} \cdot 444841$
58	$2^{160} \cdot 3^{87} \cdot 5^{50} \cdot 7^{33} \cdot 11^{20} \cdot 13^{20} \cdot 17^{15} \cdot 19^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 167 \cdot 342991299995395576037096836456982219960914745029425985391306018162481611338910884043896039673317226936883810249175567873$
60	$2^{195} \cdot 3^{106} \cdot 5^{64} \cdot 7^{42} \cdot 11^{31} \cdot 13^{26} \cdot 17^{15} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{145} \cdot 2663$
62	$2^{160} \cdot 3^{89} \cdot 5^{50} \cdot 7^{33} \cdot 11^{18} \cdot 13^{20} \cdot 17^{13} \cdot 19^{11} \cdot 23^{7} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 593 \cdot 1669 \cdot c_{125}$
64	$2^{200} \cdot 3^{109} \cdot 5^{59} \cdot 7^{42} \cdot 11^{25} \cdot 13^{21} \cdot 17^{20} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 89 \cdot 877 \cdot c_{140}$
66	$2^{205} \cdot 3^{106} \cdot 5^{63} \cdot 7^{42} \cdot 11^{25} \cdot 13^{25} \cdot 17^{15} \cdot 19^{11} \cdot 23^{13} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot c_{136} \cdot 2557$
68	$2^{195} \cdot 3^{110} \cdot 5^{58} \cdot 7^{42} \cdot 11^{26} \cdot 13^{25} \cdot 17^{14} \cdot 19^{12} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 829 \cdot 240055382710612105674533792473788173009063658498383721406299110601441190052980926230673217631461578410005650607316722475432864013087337264793212531877728053 3$

$i = 72$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{42} \cdot 3^{26} \cdot 5^{14} \cdot 7^{11} \cdot 11 \cdot 13^{6} \cdot 31 \cdot 61 \cdot 1382704496714334130015755087 07 \cdot 4561$
16	$2^{47} \cdot 3^{24} \cdot 5^{14} \cdot 7^{11} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 29 \cdot 593 \cdot 7359209130418019878282717 \cdot 6691$
18	$2^{48} \cdot 3^{26} \cdot 5^{14} \cdot 7^{11} \cdot 11^{2} \cdot 13^{6} \cdot 19^{4} \cdot 173 \cdot c_{37}$
20	$2^{42} \cdot 3^{26} \cdot 5^{14} \cdot 7^{11} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 53 \cdot 977 \cdot c_{32} \cdot 46901$
22	$2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{14} \cdot 7^{11} \cdot 11 \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 41 \cdot 89 \cdot 779618650876311377102773 3 \cdot$ 2341
24	$2^{94} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{24} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 787 \cdot c_{42} \cdot 4099 \cdot 1979 \cdot 256129 \cdot 56167$
26	$2^{47} \cdot 3^{26} \cdot 5^{14} \cdot 7^{11} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 47 \cdot 53 \cdot 449 \cdot c_{31}$
28	$2^{89} \cdot 3^{52} \cdot 5^{28} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{4} \cdot 19^{6} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 229 \cdot c_{64}$

30	$2^{96} \cdot 3^{52} \cdot 5^{28} \cdot 7^{22} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 43^{2} \cdot 59 \cdot$ $1118652358658244868164474067888759366023282501657528051539182464239$
32	$2^{94} \cdot 3^{52} \cdot 5^{28} \cdot 7^{24} \cdot 11^{7} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{6} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 41^{2} \cdot c_{73}$
34	$2^{94} \cdot 3^{50} \cdot 5^{28} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{59} \cdot 3453234643 \cdot 3347$
36	$2^{138} \cdot 3^{78} \cdot 5^{42} \cdot 7^{33} \cdot 11^{16} \cdot 13^{18} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 97 \cdot 823 \cdot c_{90}$
38	$2^{94} \cdot 3^{52} \cdot 5^{28} \cdot 7^{22} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{83}$
40	$2^{145} \cdot 3^{76} \cdot 5^{42} \cdot 7^{29} \cdot 11^{18} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 643 \cdot c_{87} \cdot$ $312989 \cdot 2273$
42	$2^{141} \cdot 3^{74} \cdot 5^{42} \cdot 7^{33} \cdot 11^{14} \cdot 13^{18} \cdot 17^{11} \cdot 19^{10} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{7} \cdot 37^{6} \cdot 43^{3} \cdot 173 \cdot 929 \cdot$ $56159120560230902022553547591080664112141192391308904602234599115113$ $3849510173624613456309187989 \cdot 2593$
44	$2^{138} \cdot 3^{78} \cdot 5^{38} \cdot 7^{33} \cdot 11^{13} \cdot 13^{18} \cdot 17^{8} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot c_{106}$
46	$2^{142} \cdot 3^{78} \cdot 5^{42} \cdot 7^{29} \cdot 11^{15} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{106} \cdot 202049$
48	$2^{184} \cdot 3^{102} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{20} \cdot 13^{24} \cdot 17^{16} \cdot 19^{12} \cdot 23^{11} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{4} \cdot$ $c_{139} \cdot 1789$
50	$2^{142} \cdot 3^{78} \cdot 5^{42} \cdot 7^{33} \cdot 11^{18} \cdot 13^{18} \cdot 17^{8} \cdot 19^{10} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{111} \cdot 23656783$
52	$2^{183} \cdot 3^{102} \cdot 5^{56} \cdot 7^{42} \cdot 11^{19} \cdot 13^{18} \cdot 17^{15} \cdot 19^{12} \cdot 23^{11} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{5} \cdot 53^{4} \cdot c_{134} \cdot 4787$
54	$2^{188} \cdot 3^{104} \cdot 5^{56} \cdot 7^{42} \cdot 11^{17} \cdot 13^{24} \cdot 17^{16} \cdot 19^{16} \cdot 23^{10} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot c_{146} \cdot 75017$
56	$2^{195} \cdot 3^{104} \cdot 5^{56} \cdot 7^{42} \cdot 11^{21} \cdot 13^{24} \cdot 17^{15} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot c_{130} \cdot 11131392403 \cdot 130043$
58	$2^{192} \cdot 3^{102} \cdot 5^{56} \cdot 7^{42} \cdot 11^{20} \cdot 13^{24} \cdot 17^{15} \cdot 19^{16} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 1511 \cdot 27186009892185298248027232722697596035927791$ $09336973927901376490137492999752014140141155485115784119412314$ $978040124940191624540486747013386701 \cdot 2909 \cdot 12409$
60	$2^{235} \cdot 3^{126} \cdot 5^{70} \cdot 7^{53} \cdot 11^{35} \cdot 13^{30} \cdot 17^{17} \cdot 19^{18} \cdot 23^{11} \cdot 29^{10} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{5} \cdot 53^{5} \cdot 61^{5} \cdot 241 \cdot c_{172}$
62	$2^{188} \cdot 3^{104} \cdot 5^{56} \cdot 7^{42} \cdot 11^{19} \cdot 13^{24} \cdot 17^{14} \cdot 19^{16} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot c_{162}$
64	$2^{235} \cdot 3^{130} \cdot 5^{66} \cdot 7^{53} \cdot 11^{23} \cdot 13^{24} \cdot 17^{20} \cdot 19^{18} \cdot 23^{10} \cdot 29^{9} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot c_{182}$
66	$2^{235} \cdot 3^{128} \cdot 5^{70} \cdot 7^{53} \cdot 11^{25} \cdot 13^{30} \cdot 17^{16} \cdot 19^{16} \cdot 23^{15} \cdot 29^{10} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{5} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{5} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 173 \cdot c_{175}$
68	$2^{230} \cdot 3^{130} \cdot 5^{68} \cdot 7^{53} \cdot 11^{26} \cdot 13^{30} \cdot 17^{15} \cdot 19^{18} \cdot 23^{10} \cdot 29^{8} \cdot 31^{12} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot c_{188}$
70	$2^{235} \cdot 3^{128} \cdot 5^{70} \cdot 7^{51} \cdot 11^{31} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{16} \cdot 23^{14} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot c_{191} \cdot 589639$

$i = 74$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{35} \cdot 3^{24} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 13^{5} \cdot 43 \cdot 744367129704962727046954663 7$
16	$2^{41} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 59 \cdot 2513439738593045653 \cdot 5514211$
18	$2^{43} \cdot 3^{25} \cdot 5^{13} \cdot 7^{10} \cdot 11^{2} \cdot 13^{5} \cdot 19^{3} \cdot 29 \cdot 73 \cdot 79 \cdot c_{19} \cdot 215141$
20	$2^{35} \cdot 3^{24} \cdot 5^{17} \cdot 7^{9} \cdot 11^{5} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19 \cdot 953286636071415967488137 \cdot 97549$
22	$2^{41} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^{9} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 53 \cdot 883 \cdot 298715151278370821 \cdot 2147281$
24	$2^{75} \cdot 3^{40} \cdot 5^{20} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot c_{60}$
26	$2^{42} \cdot 3^{26} \cdot 5^{16} \cdot 7^{10} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 5037870690899592269 \cdot 113093$
28	$2^{83} \cdot 3^{45} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^{7} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot$ $47^{2} \cdot 367 \cdot c_{43} \cdot 36871$
30	$2^{83} \cdot 3^{45} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{11} \cdot 17^{5} \cdot 19^{3} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot 227 \cdot c_{49} \cdot 8467 \cdot 12007$
32	$2^{83} \cdot 3^{45} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{5} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 43^{2} \cdot 383 \cdot$ $226521022595402053476529080642604113541077209985249276590471$
34	$2^{80} \cdot 3^{44} \cdot 5^{25} \cdot 7^{15} \cdot 11^{9} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 41^{2} \cdot 227 \cdot c_{46} \cdot 1328143$
36	$2^{116} \cdot 3^{72} \cdot 5^{38} \cdot 7^{27} \cdot 11^{12} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot c_{76} \cdot 2417$
38	$2^{80} \cdot 3^{45} \cdot 5^{25} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{2} \cdot c_{61}$
40	$2^{116} \cdot 3^{65} \cdot 5^{39} \cdot 7^{24} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^{9} \cdot 19^{8} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot$ $614900538148580253259521343319590787758025977903968112 49$ $40684001660175139102928260979273561$
42	$2^{120} \cdot 3^{65} \cdot 5^{38} \cdot 7^{27} \cdot 11^{9} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{7} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3} \cdot c_{95} \cdot 2251$
44	$2^{116} \cdot 3^{69} \cdot 5^{35} \cdot 7^{27} \cdot 11^{13} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{9} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 227 \cdot c_{79} \cdot$ $9221 \cdot 115901$
46	$2^{122} \cdot 3^{65} \cdot 5^{38} \cdot 7^{24} \cdot 11^{12} \cdot 13^{15} \cdot 17^{9} \cdot 19^{7} \cdot 23^{3} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 780682880738900562263764069192698802376091892098996704727 2$ $1496630288602784736798888189399317 7$
48	$2^{155} \cdot 3^{85} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{16} \cdot 13^{20} \cdot 17^{14} \cdot 19^{8} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{6} \cdot 37^{3} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $73 \cdot 1279 \cdot c_{125}$
50	$2^{123} \cdot 3^{71} \cdot 5^{40} \cdot 7^{27} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{7} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 701 \cdot c_{90} \cdot 33461$
52	$2^{156} \cdot 3^{90} \cdot 5^{52} \cdot 7^{36} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^{14} \cdot 19^{8} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot c_{121}$
54	$2^{160} \cdot 3^{96} \cdot 5^{50} \cdot 7^{35} \cdot 11^{17} \cdot 13^{21} \cdot 17^{14} \cdot 19^{15} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{110} \cdot 50131 \cdot 1120849$
56	$2^{156} \cdot 3^{90} \cdot 5^{50} \cdot 7^{36} \cdot 11^{17} \cdot 13^{20} \cdot 17^{13} \cdot 19^{9} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 89 \cdot c_{121} \cdot 79349$
58	$2^{164} \cdot 3^{89} \cdot 5^{50} \cdot 7^{36} \cdot 11^{17} \cdot 13^{20} \cdot 17^{14} \cdot 19^{12} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 277 \cdot c_{120} \cdot 2741$
60	$2^{196} \cdot 3^{112} \cdot 5^{64} \cdot 7^{44} \cdot 11^{23} \cdot 13^{31} \cdot 17^{14} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$

	$47^3 \cdot 53^4 \cdot 61^5 \cdot 1303 \cdot c_{145} \cdot 297076081$
62	$2^{160} \cdot 3^{90} \cdot 5^{50} \cdot 7^{36} \cdot 11^{14} \cdot 13^{20} \cdot 17^{13} \cdot 19^{11} \cdot 23^{7} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 181 \cdot c_{137}$
64	$2^{203} \cdot 3^{110} \cdot 5^{59} \cdot 7^{45} \cdot 11^{22} \cdot 13^{20} \cdot 17^{20} \cdot 19^{13} \cdot 23^{9} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot c_{150}$
66	$2^{200} \cdot 3^{110} \cdot 5^{63} \cdot 7^{45} \cdot 11^{22} \cdot 13^{25} \cdot 17^{14} \cdot 19^{11} \cdot 23^{14} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^6 \cdot 67^5 \cdot 89 \cdot 181 \cdot c_{148}$
68	$2^{195} \cdot 3^{114} \cdot 5^{60} \cdot 7^{45} \cdot 11^{21} \cdot 13^{25} \cdot 17^{14} \cdot 19^{13} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot c_{165}$
70	$2^{200} \cdot 3^{110} \cdot 5^{63} \cdot 7^{42} \cdot 11^{23} \cdot 13^{26} \cdot 17^{19} \cdot 19^{11} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{3} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 71^5 \cdot c_{148} \cdot 2087$
72	$2^{236} \cdot 3^{130} \cdot 5^{70} \cdot 7^{53} \cdot 11^{23} \cdot 13^{30} \cdot 17^{19} \cdot 19^{16} \cdot 23^{13} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot c_{215}$

$i = 76$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{44} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 13^{5} \cdot 17 \cdot 2343090711183893563467795482673 77$
16	$2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{4} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 31 \cdot 61 \cdot c_{26}$
18	$2^{47} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{2} \cdot 13^{5} \cdot 19^{3} \cdot 59 \cdot 1482183586050254856570 91 \cdot 48487 \cdot$ 32660279
20	$2^{47} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{6} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 29 \cdot c_{22} \cdot 46933 \cdot 15919 \cdot 79427$
22	$2^{47} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot c_{26} \cdot 250829$
24	$2^{89} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{20} \cdot 11^{10} \cdot 13^{10} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 53^{2} \cdot$ $3135405952718109914473646721641841231800288172240280870479 1 \cdot 16759$
26	$2^{51} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{4} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 41 \cdot$ $617689825671180443728912192171 1$
28	$2^{96} \cdot 3^{53} \cdot 5^{31} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot c_{55}$
30	$2^{94} \cdot 3^{53} \cdot 5^{30} \cdot 7^{20} \cdot 11^{11} \cdot 13^{10} \cdot 17^{5} \cdot 19^{3} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 47^{2} \cdot 59 \cdot$ $2887357370050682406634178300914962081592002206180622345451 \cdot 2693 \cdot 67943$
32	$2^{97} \cdot 3^{53} \cdot 5^{31} \cdot 7^{20} \cdot 11^{6} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{5} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 131 \cdot c_{70}$
34	$2^{96} \cdot 3^{51} \cdot 5^{30} \cdot 7^{20} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{4} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 43^{2} \cdot c_{58}$
36	$2^{140} \cdot 3^{81} \cdot 5^{46} \cdot 7^{30} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot c_{85}$
38	$2^{96} \cdot 3^{53} \cdot 5^{30} \cdot 7^{20} \cdot 11^{8} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 113 \cdot c_{77}$
40	$2^{137} \cdot 3^{81} \cdot 5^{45} \cdot 7^{28} \cdot 11^{17} \cdot 13^{15} \cdot 17^{9} \cdot 19^{9} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot c_{98}$
42	$2^{141} \cdot 3^{75} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{11} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 43^{3} \cdot c_{109}$
44	$2^{142} \cdot 3^{80} \cdot 5^{39} \cdot 7^{30} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^{9} \cdot 19^{9} \cdot 23^{9} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot$ $448466528449896304309270689450964367496261108698197576969 0$ $753419680480137452834857794240628093022457$
46	$2^{143} \cdot 3^{77} \cdot 5^{45} \cdot 7^{28} \cdot 11^{15} \cdot 13^{15} \cdot 17^{9} \cdot 19^{8} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$

	$47^3 \cdot 281 \cdot c_{103}$
48	$2^{183} \cdot 3^{101} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{19} \cdot 13^{20} \cdot 17^{15} \cdot 19^{9} \cdot 23^{11} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $227 \cdot c_{132} \cdot 9319$
50	$2^{143} \cdot 3^{80} \cdot 5^{46} \cdot 7^{30} \cdot 11^{17} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{8} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 827 \cdot c_{105} \cdot 2239$
52	$2^{188} \cdot 3^{105} \cdot 5^{60} \cdot 7^{40} \cdot 11^{17} \cdot 13^{18} \cdot 17^{14} \cdot 19^{9} \cdot 23^{10} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot c_{117} \cdot 876823 \cdot 20963 \cdot 7057$
54	$2^{188} \cdot 3^{108} \cdot 5^{60} \cdot 7^{41} \cdot 11^{19} \cdot 13^{20} \cdot 17^{15} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot c_{144}$
56	$2^{184} \cdot 3^{106} \cdot 5^{60} \cdot 7^{40} \cdot 11^{21} \cdot 13^{20} \cdot 17^{13} \cdot 19^{9} \cdot 23^{10} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 60438208312625629969171664647981449338163417137781299393063579537169517689459563242544947282922488367968915787966997012383705662077619545138067$
58	$2^{188} \cdot 3^{107} \cdot 5^{60} \cdot 7^{40} \cdot 11^{19} \cdot 13^{20} \cdot 17^{14} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot c_{143} \cdot 10067$
60	$2^{235} \cdot 3^{129} \cdot 5^{75} \cdot 7^{50} \cdot 11^{28} \cdot 13^{25} \cdot 17^{16} \cdot 19^{14} \cdot 23^{11} \cdot 29^{9} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 61^5 \cdot 127 \cdot c_{177}$
62	$2^{192} \cdot 3^{106} \cdot 5^{60} \cdot 7^{40} \cdot 11^{17} \cdot 13^{20} \cdot 17^{13} \cdot 19^{12} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot c_{148} \cdot 16632037 \cdot 22961$
64	$2^{238} \cdot 3^{130} \cdot 5^{69} \cdot 7^{50} \cdot 11^{25} \cdot 13^{23} \cdot 17^{19} \cdot 19^{14} \cdot 23^{10} \cdot 29^{9} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot c_{166} \cdot 52321$
66	$2^{235} \cdot 3^{128} \cdot 5^{75} \cdot 7^{50} \cdot 11^{26} \cdot 13^{25} \cdot 17^{15} \cdot 19^{12} \cdot 23^{14} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot c_{180}$
68	$2^{240} \cdot 3^{133} \cdot 5^{69} \cdot 7^{50} \cdot 11^{25} \cdot 13^{25} \cdot 17^{14} \cdot 19^{14} \cdot 23^{9} \cdot 29^{8} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 113 \cdot c_{177} \cdot 443273$
70	$2^{235} \cdot 3^{130} \cdot 5^{76} \cdot 7^{48} \cdot 11^{28} \cdot 13^{25} \cdot 17^{19} \cdot 19^{12} \cdot 23^{14} \cdot 29^{10} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot c_{160} \cdot 400741889 \cdot 570827 \cdot 109481$
72	$2^{277} \cdot 3^{154} \cdot 5^{84} \cdot 7^{60} \cdot 11^{28} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{18} \cdot 23^{16} \cdot 29^{9} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 73^6 \cdot c_{215} \cdot 8693$
74	$2^{237} \cdot 3^{135} \cdot 5^{75} \cdot 7^{50} \cdot 11^{25} \cdot 13^{25} \cdot 17^{18} \cdot 19^{12} \cdot 23^{13} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 523 \cdot c_{191}$

$i = 78$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 13^{5} \cdot 23 \cdot 67 \cdot 89 \cdot 683 \cdot c_{25} \cdot 38959$
16	$2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot c_{34}$
18	$2^{49} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 19^{4} \cdot 31 \cdot 61 \cdot$ $1126332554700913488921171036707522$9
20	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{6} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 59 \cdot 1571 \cdot c_{36}$

22	$2^{51} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 79 \cdot 97 \cdot c_{26}$
24	$2^{90} \cdot 3^{52} \cdot 5^{24} \cdot 7^{22} \cdot 11^{11} \cdot 13^{10} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 79^{2} \cdot$ $29321026310123044282356382418977163136311548709602935375439 \cdot 231331$
26	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{3} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 53 \cdot 379 \cdot c_{26} \cdot 29569$
28	$2^{90} \cdot 3^{52} \cdot 5^{30} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 853 \cdot c_{65}$
30	$2^{98} \cdot 3^{52} \cdot 5^{31} \cdot 7^{24} \cdot 11^{14} \cdot 13^{10} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot c_{68}$
32	$2^{96} \cdot 3^{52} \cdot 5^{30} \cdot 7^{22} \cdot 11^{6} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot$ $47^{2} \cdot c_{71} \cdot 10709821$
34	$2^{96} \cdot 3^{51} \cdot 5^{31} \cdot 7^{18} \cdot 11^{11} \cdot 13^{10} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 67 \cdot c_{68}$
36	$2^{139} \cdot 3^{81} \cdot 5^{45} \cdot 7^{33} \cdot 11^{16} \cdot 13^{15} \cdot 17^{11} \cdot 19^{11} \cdot 23^{6} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 43^{4} \cdot c_{91}$
38	$2^{96} \cdot 3^{52} \cdot 5^{31} \cdot 7^{24} \cdot 11^{9} \cdot 13^{10} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 41^{2} \cdot$ $3190407943431666923368304807921181602109585198880\,7$ $195453810666812817123328623$
40	$2^{138} \cdot 3^{76} \cdot 5^{45} \cdot 7^{29} \cdot 11^{19} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{11} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot c_{106}$
42	$2^{144} \cdot 3^{77} \cdot 5^{46} \cdot 7^{33} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^{11} \cdot 19^{10} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 43^{3} \cdot 83 \cdot c_{108}$
44	$2^{139} \cdot 3^{79} \cdot 5^{39} \cdot 7^{33} \cdot 11^{14} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 157 \cdot$ $c_{108} \cdot 24251$
46	$2^{145} \cdot 3^{76} \cdot 5^{46} \cdot 7^{29} \cdot 11^{16} \cdot 13^{15} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 30718906752043784657791715531723209292627895851044913250396$ $1974185567334452360326373748010856465974683498855227\,09$
48	$2^{186} \cdot 3^{100} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{22} \cdot 13^{20} \cdot 17^{16} \cdot 19^{11} \cdot 23^{10} \cdot 29^{5} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \cdot 41^{5} \cdot 43^{3} \cdot$ $59 \cdot 127 \cdot 821 \cdot c_{141}$
50	$2^{146} \cdot 3^{79} \cdot 5^{45} \cdot 7^{33} \cdot 11^{19} \cdot 13^{15} \cdot 17^{8} \cdot 19^{10} \cdot 23^{7} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 97 \cdot 103 \cdot 127 \cdot 233 \cdot 983 \cdot c_{98} \cdot 5399 \cdot 183439$
52	$2^{186} \cdot 3^{104} \cdot 5^{60} \cdot 7^{42} \cdot 11^{19} \cdot 13^{18} \cdot 17^{15} \cdot 19^{11} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 131 \cdot c_{140} \cdot 7459$
54	$2^{192} \cdot 3^{108} \cdot 5^{62} \cdot 7^{42} \cdot 11^{19} \cdot 13^{20} \cdot 17^{16} \cdot 19^{15} \cdot 23^{9} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot 167 \cdot 823 \cdot c_{146}$
56	$2^{186} \cdot 3^{104} \cdot 5^{60} \cdot 7^{42} \cdot 11^{22} \cdot 13^{20} \cdot 17^{14} \cdot 19^{11} \cdot 23^{9} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 79^{2} \cdot c_{155}$
58	$2^{195} \cdot 3^{103} \cdot 5^{62} \cdot 7^{42} \cdot 11^{22} \cdot 13^{20} \cdot 17^{15} \cdot 19^{16} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 79 \cdot 853 \cdot c_{145} \cdot 2671$
60	$2^{235} \cdot 3^{131} \cdot 5^{75} \cdot 7^{53} \cdot 11^{32} \cdot 13^{25} \cdot 17^{16} \cdot 19^{17} \cdot 23^{10} \cdot 29^{10} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 61^{5} \cdot$ $10584855755168278602891186691141357269108918747244991640220312283$ $21911843477171190636110586977859181399501814755595921104938284908$ $0952813385330612924931194812098655431753310202997189842157\,1$
62	$2^{192} \cdot 3^{104} \cdot 5^{62} \cdot 7^{42} \cdot 11^{19} \cdot 13^{20} \cdot 17^{14} \cdot 19^{16} \cdot 23^{7} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot c_{160} \cdot 4079$
64	$2^{240} \cdot 3^{128} \cdot 5^{69} \cdot 7^{53} \cdot 11^{25} \cdot 13^{23} \cdot 17^{20} \cdot 19^{17} \cdot 23^{10} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{5} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{188}$

66	$2^{245} \cdot 3^{127} \cdot 5^{77} \cdot 7^{53} \cdot 11^{27} \cdot 13^{25} \cdot 17^{16} \cdot 19^{15} \cdot 23^{14} \cdot 29^{10} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{6} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot c_{180}$
68	$2^{234} \cdot 3^{131} \cdot 5^{69} \cdot 7^{53} \cdot 11^{28} \cdot 13^{25} \cdot 17^{15} \cdot 19^{17} \cdot 23^{8} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{5} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{203}$
70	$2^{245} \cdot 3^{128} \cdot 5^{75} \cdot 7^{51} \cdot 11^{32} \cdot 13^{25} \cdot 17^{20} \cdot 19^{15} \cdot 23^{13} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 337 \cdot c_{182} \cdot 2683 \cdot 2521$
72	$2^{283} \cdot 3^{152} \cdot 5^{84} \cdot 7^{64} \cdot 11^{32} \cdot 13^{30} \cdot 17^{22} \cdot 19^{22} \cdot 23^{15} \cdot 29^{10} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{4} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{5} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 73^{6} \cdot c_{229}$
74	$2^{241} \cdot 3^{136} \cdot 5^{75} \cdot 7^{53} \cdot 11^{25} \cdot 13^{25} \cdot 17^{19} \cdot 19^{15} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 151 \cdot c_{198}$
76	$2^{282} \cdot 3^{156} \cdot 5^{90} \cdot 7^{60} \cdot 11^{30} \cdot 13^{28} \cdot 17^{20} \cdot 19^{17} \cdot 23^{15} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot c_{210} \cdot 20703961 \cdot 1973$

$i = 80$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{16} \cdot 7^{11} \cdot 13^{6} \cdot c_{41}$
16	$2^{49} \cdot 3^{24} \cdot 5^{16} \cdot 7^{11} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19839018762791080189863797849674 87$
18	$2^{47} \cdot 3^{27} \cdot 5^{16} \cdot 7^{11} \cdot 11^{2} \cdot 13^{6} \cdot 19^{4} \cdot c_{30} \cdot 1150073 \cdot 4501381$
20	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{16} \cdot 7^{11} \cdot 11^{8} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 31 \cdot 61 \cdot c_{33} \cdot 441523$
22	$2^{47} \cdot 3^{24} \cdot 5^{16} \cdot 7^{11} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 59 \cdot$ $516389485754168816241575775009200789$
24	$2^{90} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{24} \cdot 11^{13} \cdot 13^{13} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 29^{2} \cdot 757 \cdot$ $215759426674695922994395704810402149795279448654152123023522821040 21$
26	$2^{51} \cdot 3^{27} \cdot 5^{16} \cdot 7^{11} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 1559 \cdot c_{33}$
28	$2^{93} \cdot 3^{57} \cdot 5^{30} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{6} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 53^{2} \cdot 503 \cdot 1319 \cdot c_{59}$
30	$2^{94} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{22} \cdot 11^{14} \cdot 13^{13} \cdot 17^{7} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot c_{77}$
32	$2^{100} \cdot 3^{57} \cdot 5^{30} \cdot 7^{24} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot c_{77}$
34	$2^{94} \cdot 3^{51} \cdot 5^{30} \cdot 7^{18} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 47^{2} \cdot 541 \cdot c_{72}$
36	$2^{136} \cdot 3^{81} \cdot 5^{46} \cdot 7^{33} \cdot 11^{20} \cdot 13^{18} \cdot 17^{12} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 79 \cdot 107 \cdot$ $1289 \cdot c_{90} \cdot 9511 \cdot 2017$
38	$2^{94} \cdot 3^{58} \cdot 5^{30} \cdot 7^{22} \cdot 11^{11} \cdot 13^{13} \cdot 17^{10} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 43^{2} \cdot c_{81}$
40	$2^{139} \cdot 3^{78} \cdot 5^{48} \cdot 7^{29} \cdot 11^{22} \cdot 13^{18} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot$ $853 \cdot c_{97} \cdot 54059$
42	$2^{141} \cdot 3^{75} \cdot 5^{46} \cdot 7^{33} \cdot 11^{14} \cdot 13^{18} \cdot 17^{12} \cdot 19^{10} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 43^{3} \cdot c_{125}$
44	$2^{136} \cdot 3^{84} \cdot 5^{40} \cdot 7^{33} \cdot 11^{16} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot c_{111}$
46	$2^{141} \cdot 3^{78} \cdot 5^{46} \cdot 7^{29} \cdot 11^{18} \cdot 13^{18} \cdot 17^{11} \cdot 19^{10} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 331 \cdot c_{115}$
48	$2^{194} \cdot 3^{102} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{24} \cdot 13^{24} \cdot 17^{18} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{4} \cdot c_{152}$
50	$2^{145} \cdot 3^{81} \cdot 5^{46} \cdot 7^{33} \cdot 11^{22} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$

	$47^3 \cdot 1697 \cdot c_{115}$
52	$2^{185} \cdot 3^{105} \cdot 5^{60} \cdot 7^{43} \cdot 11^{22} \cdot 13^{18} \cdot 17^{17} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^6 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^4 \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 277 \cdot c_{140} \cdot 15359$
54	$2^{188} \cdot 3^{108} \cdot 5^{60} \cdot 7^{42} \cdot 11^{20} \cdot 13^{24} \cdot 17^{18} \cdot 19^{17} \cdot 23^9 \cdot 29^4 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot c_{151} \cdot 101617911427$
56	$2^{186} \cdot 3^{111} \cdot 5^{60} \cdot 7^{43} \cdot 11^{26} \cdot 13^{24} \cdot 17^{16} \cdot 19^{12} \cdot 23^9 \cdot 29^8 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^4 \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot c_{150} \cdot 47933$
58	$2^{188} \cdot 3^{108} \cdot 5^{60} \cdot 7^{43} \cdot 11^{25} \cdot 13^{24} \cdot 17^{17} \cdot 19^{17} \cdot 23^9 \cdot 29^4 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot c_{156}$
60	$2^{230} \cdot 3^{129} \cdot 5^{80} \cdot 7^{53} \cdot 11^{36} \cdot 13^{30} \cdot 17^{18} \cdot 19^{18} \cdot 23^{10} \cdot 29^8 \cdot 31^{10} \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^4 \cdot$ $47^5 \cdot 53^4 \cdot 61^5 \cdot 197 \cdot c_{192} \cdot 2663$
62	$2^{188} \cdot 3^{111} \cdot 5^{60} \cdot 7^{43} \cdot 11^{22} \cdot 13^{24} \cdot 17^{16} \cdot 19^{16} \cdot 23^8 \cdot 29^8 \cdot 31^4 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 229 \cdot 806723577913696214955032491593400671214085890405984374656712813419264328933607517189838068623195841498931525671887887541628085380418496762671352598867667860682158751739$
64	$2^{241} \cdot 3^{136} \cdot 5^{72} \cdot 7^{54} \cdot 11^{28} \cdot 13^{24} \cdot 17^{23} \cdot 19^{18} \cdot 23^{10} \cdot 29^8 \cdot 31^{11} \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^4 \cdot$ $47^5 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 127 \cdot 541 \cdot c_{183}$
66	$2^{235} \cdot 3^{129} \cdot 5^{76} \cdot 7^{53} \cdot 11^{31} \cdot 13^{30} \cdot 17^{18} \cdot 19^{16} \cdot 23^{13} \cdot 29^8 \cdot 31^9 \cdot 37^6 \cdot 41^7 \cdot 43^3 \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 79 \cdot c_{200}$
68	$2^{230} \cdot 3^{135} \cdot 5^{70} \cdot 7^{54} \cdot 11^{32} \cdot 13^{30} \cdot 17^{17} \cdot 19^{19} \cdot 23^9 \cdot 29^8 \cdot 31^{10} \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^4 \cdot$ $47^5 \cdot 53^4 \cdot 59^6 \cdot 61^5 \cdot 461 \cdot 577 \cdot 1321 \cdot c_{191}$
70	$2^{235} \cdot 3^{135} \cdot 5^{76} \cdot 7^{51} \cdot 11^{36} \cdot 13^{30} \cdot 17^{23} \cdot 19^{17} \cdot 23^{13} \cdot 29^8 \cdot 31^9 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 149 \cdot c_{186} \cdot 37547 \cdot 2663$
72	$2^{278} \cdot 3^{156} \cdot 5^{84} \cdot 7^{66} \cdot 11^{36} \cdot 13^{36} \cdot 17^{24} \cdot 19^{24} \cdot 23^{15} \cdot 29^8 \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^7 \cdot 43^4 \cdot$ $47^4 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 73^7 \cdot c_{235} \cdot 12101$
74	$2^{239} \cdot 3^{135} \cdot 5^{76} \cdot 7^{54} \cdot 11^{29} \cdot 13^{30} \cdot 17^{22} \cdot 19^{17} \cdot 23^{13} \cdot 29^8 \cdot 31^9 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot c_{203} \cdot 2087 \cdot 2143$
76	$2^{281} \cdot 3^{159} \cdot 5^{90} \cdot 7^{60} \cdot 11^{34} \cdot 13^{30} \cdot 17^{23} \cdot 19^{18} \cdot 23^{15} \cdot 29^8 \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^6 \cdot 43^4 \cdot$ $47^5 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 71^6 \cdot 73^6 \cdot c_{222}$
78	$2^{282} \cdot 3^{156} \cdot 5^{90} \cdot 7^{64} \cdot 11^{38} \cdot 13^{30} \cdot 17^{24} \cdot 19^{22} \cdot 23^{13} \cdot 29^8 \cdot 31^9 \cdot 37^{12} \cdot 41^6 \cdot 43^3 \cdot$ $47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 73^6 \cdot 167 \cdot c_{251}$

$i = 82$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11 \cdot 13^7 \cdot 71 \cdot 2059556537046867433257445624058183047$
16	$2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^3 \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 23 \cdot 67 \cdot 107 \cdot c_{32}$
18	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^2 \cdot 13^6 \cdot 17 \cdot 19^4 \cdot c_{36} \cdot 70571$
20	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^6 \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 83 \cdot c_{42}$
22	$2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11 \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 79 \cdot$

	$47297761305276116873098054745809$
24	$2^{90} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{20} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{6} \cdot 59^{2} \cdot 79^{2} \cdot c_{65} \cdot 175447$
26	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{10} \cdot 11^{3} \cdot 13^{7} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29 \cdot c_{23} \cdot 119921 \cdot 2239 \cdot 32429$
28	$2^{90} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{18} \cdot 11^{9} \cdot 13^{12} \cdot 17^{4} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 109 \cdot c_{65} \cdot 53527$
30	$2^{96} \cdot 3^{55} \cdot 5^{31} \cdot 7^{20} \cdot 11^{13} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 53^{2} \cdot 59 \cdot c_{74}$
32	$2^{96} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{20} \cdot 11^{7} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 593 \cdot c_{79} \cdot 3499$
34	$2^{96} \cdot 3^{51} \cdot 5^{31} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot c_{75}$
36	$2^{138} \cdot 3^{81} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{15} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{11} \cdot 23^{5} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 47^{3} \cdot 139 \cdot$ $2367783050617775585203376796358609975967009701544208005882186430770792515770639440938771961 \cdot 8224543 \cdot 3313$
38	$2^{96} \cdot 3^{54} \cdot 5^{31} \cdot 7^{20} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot c_{86}$
40	$2^{138} \cdot 3^{79} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{18} \cdot 13^{18} \cdot 17^{9} \cdot 19^{11} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{3} \cdot$ $c_{97} \cdot 2063$
42	$2^{144} \cdot 3^{75} \cdot 5^{46} \cdot 7^{30} \cdot 11^{14} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{4} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $83 \cdot 353 \cdot 521 \cdot c_{107}$
44	$2^{138} \cdot 3^{81} \cdot 5^{39} \cdot 7^{30} \cdot 11^{13} \cdot 13^{18} \cdot 17^{8} \cdot 19^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 47 \cdot$ $c_{110} \cdot 1922533 \cdot 425057$
46	$2^{144} \cdot 3^{78} \cdot 5^{46} \cdot 7^{28} \cdot 11^{15} \cdot 13^{18} \cdot 17^{9} \cdot 19^{10} \cdot 23^{3} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{120}$
48	$2^{186} \cdot 3^{102} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{20} \cdot 13^{24} \cdot 17^{15} \cdot 19^{11} \cdot 23^{10} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ c_{163}
50	$2^{144} \cdot 3^{82} \cdot 5^{45} \cdot 7^{30} \cdot 11^{18} \cdot 13^{18} \cdot 17^{9} \cdot 19^{10} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 313 \cdot c_{117} \cdot 37049 \cdot 2393$
52	$2^{186} \cdot 3^{105} \cdot 5^{60} \cdot 7^{40} \cdot 11^{19} \cdot 13^{18} \cdot 17^{14} \cdot 19^{11} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{5} \cdot c_{158}$
54	$2^{192} \cdot 3^{108} \cdot 5^{62} \cdot 7^{40} \cdot 11^{17} \cdot 13^{24} \cdot 17^{15} \cdot 19^{15} \cdot 23^{9} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{165}$
56	$2^{186} \cdot 3^{108} \cdot 5^{60} \cdot 7^{40} \cdot 11^{21} \cdot 13^{24} \cdot 17^{13} \cdot 19^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 79^{2} \cdot 89 \cdot 983 \cdot c_{157} \cdot 72221$
58	$2^{192} \cdot 3^{105} \cdot 5^{62} \cdot 7^{40} \cdot 11^{20} \cdot 13^{25} \cdot 17^{14} \cdot 19^{15} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 79 \cdot c_{166}$
60	$2^{234} \cdot 3^{129} \cdot 5^{75} \cdot 7^{50} \cdot 11^{31} \cdot 13^{30} \cdot 17^{16} \cdot 19^{17} \cdot 23^{11} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 61^{5} \cdot 151 \cdot c_{197} \cdot 533909 \cdot 6101$
62	$2^{192} \cdot 3^{108} \cdot 5^{62} \cdot 7^{40} \cdot 11^{19} \cdot 13^{24} \cdot 17^{13} \cdot 19^{15} \cdot 23^{7} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot c_{177}$
64	$2^{240} \cdot 3^{132} \cdot 5^{69} \cdot 7^{50} \cdot 11^{24} \cdot 13^{24} \cdot 17^{25} \cdot 19^{17} \cdot 23^{9} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 83 \cdot c_{195} \cdot 10657$
66	$2^{240} \cdot 3^{129} \cdot 5^{77} \cdot 7^{51} \cdot 11^{25} \cdot 13^{30} \cdot 17^{16} \cdot 19^{15} \cdot 23^{13} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{5} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 89 \cdot 5274422218615974880394810675420720082460533940854999046266298725489757625776018641276057138379073853924868381254389905467806367817324069814659866467094732312918208416476284559501195484166841973133935169$

68	$2^{234} \cdot 3^{135} \cdot 5^{69} \cdot 7^{50} \cdot 11^{26} \cdot 13^{30} \cdot 17^{14} \cdot 19^{17} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{216} \cdot 4931$
70	$2^{240} \cdot 3^{134} \cdot 5^{75} \cdot 7^{48} \cdot 11^{35} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{15} \cdot 23^{14} \cdot 29^{10} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{6} \cdot c_{194}$
72	$2^{282} \cdot 3^{156} \cdot 5^{84} \cdot 7^{60} \cdot 11^{32} \cdot 13^{36} \cdot 17^{20} \cdot 19^{22} \cdot 23^{14} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{6} \cdot 67^{5} \cdot 73^{6} \cdot 311 \cdot c_{243} \cdot 23293 \cdot 59119$
74	$2^{240} \cdot 3^{135} \cdot 5^{75} \cdot 7^{50} \cdot 11^{23} \cdot 13^{30} \cdot 17^{19} \cdot 19^{15} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 89 \cdot c_{216} \cdot 14083$
76	$2^{282} \cdot 3^{159} \cdot 5^{90} \cdot 7^{58} \cdot 11^{28} \cdot 13^{30} \cdot 17^{19} \cdot 19^{17} \cdot 23^{14} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{3} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot c_{241}$
78	$2^{288} \cdot 3^{156} \cdot 5^{94} \cdot 7^{60} \cdot 11^{32} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{21} \cdot 23^{13} \cdot 29^{9} \cdot 31^{9} \cdot 37^{13} \cdot 41^{3} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot c_{234}$
80	$2^{282} \cdot 3^{162} \cdot 5^{90} \cdot 7^{60} \cdot 11^{36} \cdot 13^{36} \cdot 17^{23} \cdot 19^{22} \cdot 23^{13} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot c_{269}$

$i = 84$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{51} \cdot 3^{33} \cdot 5^{19} \cdot 7^{14} \cdot 13^{7} \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 459129349118433193 \cdot 451723 \cdot 535361 \cdot$ 5146513
16	$2^{55} \cdot 3^{28} \cdot 5^{18} \cdot 7^{14} \cdot 11^{4} \cdot 13^{7} \cdot 17^{4} \cdot c_{39}$
18	$2^{55} \cdot 3^{32} \cdot 5^{22} \cdot 7^{14} \cdot 11^{3} \cdot 13^{7} \cdot 19^{4} \cdot 23 \cdot 67 \cdot 1697 \cdot c_{36}$
20	$2^{53} \cdot 3^{32} \cdot 5^{18} \cdot 7^{14} \cdot 11^{7} \cdot 13^{8} \cdot 17^{4} \cdot c_{41} \cdot 31249$
22	$2^{55} \cdot 3^{28} \cdot 5^{18} \cdot 7^{14} \cdot 13^{7} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 41 \cdot 79 \cdot 307 \cdot c_{32} \cdot 255127$
24	$2^{104} \cdot 3^{56} \cdot 5^{30} \cdot 7^{28} \cdot 11^{13} \cdot 13^{14} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 31^{2} \cdot 61^{2} \cdot 79^{2} \cdot c_{71}$
26	$2^{55} \cdot 3^{32} \cdot 5^{18} \cdot 7^{14} \cdot 11^{4} \cdot 13^{7} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 53 \cdot 59 \cdot$ $525895486622818739598045390080356566743$
28	$2^{108} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{14} \cdot 17^{4} \cdot 19^{6} \cdot 23^{5} \cdot 29^{6} \cdot c_{75}$
30	$2^{110} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{28} \cdot 11^{14} \cdot 13^{14} \cdot 17^{7} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot 641 \cdot c_{84}$
32	$2^{110} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{28} \cdot 11^{7} \cdot 13^{14} \cdot 17^{8} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{6} \cdot 53^{2} \cdot c_{77} \cdot 33617 \cdot 89513 \cdot 5569$
34	$2^{110} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{21} \cdot 11^{13} \cdot 13^{14} \cdot 17^{4} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot c_{85}$
36	$2^{164} \cdot 3^{96} \cdot 5^{52} \cdot 7^{42} \cdot 11^{18} \cdot 13^{21} \cdot 17^{12} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{7} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 61 \cdot c_{111}$
38	$2^{110} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{28} \cdot 11^{10} \cdot 13^{14} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 47^{2} \cdot$ $353843772257757595045448910172234154552420320830923$0 $789616548968584926789948808531045203 \cdot 63697 \cdot 2141$
40	$2^{159} \cdot 3^{91} \cdot 5^{55} \cdot 7^{35} \cdot 11^{21} \cdot 13^{21} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 149 \cdot 181 \cdot$ $241 \cdot c_{116}$
42	$2^{171} \cdot 3^{88} \cdot 5^{52} \cdot 7^{42} \cdot 11^{14} \cdot 13^{21} \cdot 17^{12} \cdot 19^{10} \cdot 23^{4} \cdot 29^{7} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $73 \cdot 83 \cdot 239 \cdot 487 \cdot c_{122}$
44	$2^{163} \cdot 3^{95} \cdot 5^{48} \cdot 7^{42} \cdot 11^{18} \cdot 13^{21} \cdot 17^{8} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 809 \cdot c_{124}$

46	$2^{165} \cdot 3^{91} \cdot 5^{51} \cdot 7^{35} \cdot 11^{18} \cdot 13^{21} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{3} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 321610408610609071139959724434709675537173685395309658308$ $211753167077507324412296008448542238063765012146316790856731$ 285312729785169
48	$2^{214} \cdot 3^{119} \cdot 5^{61} \cdot 7^{42} \cdot 11^{27} \cdot 13^{28} \cdot 17^{16} \cdot 19^{13} \cdot 23^{11} \cdot 29^{7} \cdot 31^{5} \cdot 37^{7} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $c_{167} \cdot 94153$
50	$2^{165} \cdot 3^{95} \cdot 5^{51} \cdot 7^{42} \cdot 11^{21} \cdot 13^{21} \cdot 17^{8} \cdot 19^{10} \cdot 23^{8} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{125} \cdot 618157411 \cdot 25423$
52	$2^{220} \cdot 3^{123} \cdot 5^{66} \cdot 7^{49} \cdot 11^{21} \cdot 13^{21} \cdot 17^{16} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 1627 \cdot c_{171}$
54	$2^{220} \cdot 3^{128} \cdot 5^{66} \cdot 7^{49} \cdot 11^{24} \cdot 13^{28} \cdot 17^{16} \cdot 19^{16} \cdot 23^{10} \cdot 29^{7} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot c_{156} \cdot 38145691 \cdot 15813797 \cdot 878789$
56	$2^{214} \cdot 3^{126} \cdot 5^{66} \cdot 7^{49} \cdot 11^{25} \cdot 13^{29} \cdot 17^{14} \cdot 19^{12} \cdot 23^{9} \cdot 29^{12} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 79^{2} \cdot 1039 \cdot c_{174} \cdot 2179$
58	$2^{220} \cdot 3^{123} \cdot 5^{66} \cdot 7^{49} \cdot 11^{24} \cdot 13^{28} \cdot 17^{17} \cdot 19^{16} \cdot 23^{9} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 79 \cdot c_{186}$
60	$2^{273} \cdot 3^{152} \cdot 5^{90} \cdot 7^{63} \cdot 11^{35} \cdot 13^{35} \cdot 17^{16} \cdot 19^{18} \cdot 23^{11} \cdot 29^{14} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{8} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{5} \cdot 53^{5} \cdot 61^{5} \cdot c_{208} \cdot 2317267$
62	$2^{220} \cdot 3^{126} \cdot 5^{66} \cdot 7^{49} \cdot 11^{21} \cdot 13^{28} \cdot 17^{14} \cdot 19^{16} \cdot 23^{9} \cdot 29^{12} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 73 \cdot 241 \cdot c_{194}$
64	$2^{275} \cdot 3^{154} \cdot 5^{84} \cdot 7^{63} \cdot 11^{31} \cdot 13^{28} \cdot 17^{20} \cdot 19^{18} \cdot 23^{10} \cdot 29^{13} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{5} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 127 \cdot c_{213} \cdot 278363$
66	$2^{275} \cdot 3^{151} \cdot 5^{85} \cdot 7^{63} \cdot 11^{31} \cdot 13^{35} \cdot 17^{16} \cdot 19^{17} \cdot 23^{15} \cdot 29^{14} \cdot 31^{11} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot c_{221}$
68	$2^{274} \cdot 3^{158} \cdot 5^{79} \cdot 7^{63} \cdot 11^{31} \cdot 13^{35} \cdot 17^{19} \cdot 19^{18} \cdot 23^{9} \cdot 29^{12} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 331 \cdot 1627 \cdot c_{226}$
70	$2^{275} \cdot 3^{154} \cdot 5^{84} \cdot 7^{64} \cdot 11^{35} \cdot 13^{35} \cdot 17^{20} \cdot 19^{16} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 499 \cdot c_{226} \cdot 240007$
72	$2^{324} \cdot 3^{182} \cdot 5^{94} \cdot 7^{77} \cdot 11^{35} \cdot 13^{42} \cdot 17^{22} \cdot 19^{24} \cdot 23^{17} \cdot 29^{14} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{8} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{6} \cdot 53^{5} \cdot 59^{6} \cdot 61^{5} \cdot 67^{6} \cdot 73^{6} \cdot c_{267} \cdot 1414993$
74	$2^{275} \cdot 3^{159} \cdot 5^{84} \cdot 7^{63} \cdot 11^{31} \cdot 13^{35} \cdot 17^{20} \cdot 19^{16} \cdot 23^{13} \cdot 29^{12} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 977 \cdot c_{245}$
76	$2^{328} \cdot 3^{186} \cdot 5^{99} \cdot 7^{70} \cdot 11^{36} \cdot 13^{35} \cdot 17^{20} \cdot 19^{18} \cdot 23^{16} \cdot 29^{13} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{6} \cdot 71^{7} \cdot 73^{6} \cdot c_{263}$
78	$2^{330} \cdot 3^{183} \cdot 5^{99} \cdot 7^{77} \cdot 11^{38} \cdot 13^{35} \cdot 17^{22} \cdot 19^{22} \cdot 23^{15} \cdot 29^{15} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 83 \cdot c_{254} \cdot 10939 \cdot 4119055741$
80	$2^{324} \cdot 3^{189} \cdot 5^{104} \cdot 7^{77} \cdot 11^{42} \cdot 13^{42} \cdot 17^{25} \cdot 19^{24} \cdot 23^{16} \cdot 29^{12} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{6} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot 127 \cdot c_{284}$
82	$2^{330} \cdot 3^{189} \cdot 5^{99} \cdot 7^{70} \cdot 11^{35} \cdot 13^{42} \cdot 17^{20} \cdot 19^{22} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot c_{307}$

$i = 86$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 13^{6} \cdot 53 \cdot c_{41}$
16	$2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 71 \cdot c_{31} \cdot 1777$
18	$2^{51} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{2} \cdot 13^{6} \cdot 19^{4} \cdot 43 \cdot$ $71 \cdot c_{32} \cdot 87616253$
20	$2^{42} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{6} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 23 \cdot 67 \cdot 83 \cdot c_{32} \cdot 62909941$
22	$2^{50} \cdot 3^{24} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 79 \cdot 109 \cdot 115449218970825753540033591737 \cdot$ 20021
24	$2^{90} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{22} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{6} \cdot 79^{2} \cdot 1429 \cdot c_{70} \cdot 4649$
26	$2^{48} \cdot 3^{27} \cdot 5^{15} \cdot 7^{11} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 31 \cdot 61 \cdot 367 \cdot 571 \cdot 701 \cdot c_{28}$
28	$2^{90} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{18} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 59^{2} \cdot c_{64} \cdot 748509841$
30	$2^{106} \cdot 3^{55} \cdot 5^{31} \cdot 7^{24} \cdot 11^{11} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{2} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot c_{74}$
32	$2^{96} \cdot 3^{54} \cdot 5^{30} \cdot 7^{22} \cdot 11^{6} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 491 \cdot c_{84}$
34	$2^{96} \cdot 3^{51} \cdot 5^{31} \cdot 7^{18} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 53^{2} \cdot c_{76}$
36	$2^{140} \cdot 3^{81} \cdot 5^{45} \cdot 7^{33} \cdot 11^{15} \cdot 13^{18} \cdot 17^{12} \cdot 19^{11} \cdot 23^{5} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot c_{112}$
38	$2^{96} \cdot 3^{54} \cdot 5^{31} \cdot 7^{24} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 59 \cdot 1021 \cdot c_{78} \cdot 56131$
40	$2^{138} \cdot 3^{79} \cdot 5^{45} \cdot 7^{29} \cdot 11^{17} \cdot 13^{18} \cdot 17^{11} \cdot 19^{11} \cdot 23^{4} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 47^{3} \cdot c_{100} \cdot$ $14543 \cdot 11093$
42	$2^{144} \cdot 3^{75} \cdot 5^{46} \cdot 7^{33} \cdot 11^{11} \cdot 13^{18} \cdot 17^{12} \cdot 19^{10} \cdot 23^{5} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $83 \cdot 383 \cdot c_{116}$
44	$2^{140} \cdot 3^{81} \cdot 5^{39} \cdot 7^{33} \cdot 11^{15} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot c_{112}$
46	$2^{147} \cdot 3^{78} \cdot 5^{46} \cdot 7^{29} \cdot 11^{15} \cdot 13^{18} \cdot 17^{11} \cdot 19^{11} \cdot 23^{3} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 71 \cdot 419 \cdot c_{106} \cdot 2099 \cdot 190921$
48	$2^{186} \cdot 3^{102} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{19} \cdot 13^{24} \cdot 17^{18} \cdot 19^{11} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot c_{170}$
50	$2^{146} \cdot 3^{83} \cdot 5^{45} \cdot 7^{33} \cdot 11^{17} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{4} \cdot c_{125}$
52	$2^{186} \cdot 3^{105} \cdot 5^{60} \cdot 7^{43} \cdot 11^{17} \cdot 13^{18} \cdot 17^{17} \cdot 19^{11} \cdot 23^{9} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{8} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 887 \cdot c_{156}$
54	$2^{192} \cdot 3^{108} \cdot 5^{62} \cdot 7^{42} \cdot 11^{19} \cdot 13^{24} \cdot 17^{18} \cdot 19^{15} \cdot 23^{8} \cdot 29^{4} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{163} \cdot 2056319$
56	$2^{186} \cdot 3^{108} \cdot 5^{60} \cdot 7^{43} \cdot 11^{21} \cdot 13^{24} \cdot 17^{16} \cdot 19^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{12} \cdot 31^{6} \cdot 37^{7} \cdot 41^{6} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 79^{2} \cdot c_{149} \cdot 8103967$
58	$2^{202} \cdot 3^{105} \cdot 5^{62} \cdot 7^{43} \cdot 11^{19} \cdot 13^{24} \cdot 17^{17} \cdot 19^{15} \cdot 23^{8} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 79 \cdot c_{154} \cdot 994393$
60	$2^{236} \cdot 3^{129} \cdot 5^{75} \cdot 7^{53} \cdot 11^{28} \cdot 13^{30} \cdot 17^{18} \cdot 19^{17} \cdot 23^{9} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{4} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{212} \cdot 33749$
62	$2^{192} \cdot 3^{108} \cdot 5^{62} \cdot 7^{43} \cdot 11^{17} \cdot 13^{24} \cdot 17^{16} \cdot 19^{15} \cdot 23^{7} \cdot 29^{8} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61 \cdot c_{178}$

64	$2^{240} \cdot 3^{132} \cdot 5^{69} \cdot 7^{55} \cdot 11^{25} \cdot 13^{24} \cdot 17^{23} \cdot 19^{17} \cdot 23^{10} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{5} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 83 \cdot c_{195} \cdot 13877 \cdot 8677$
66	$2^{240} \cdot 3^{129} \cdot 5^{77} \cdot 7^{53} \cdot 11^{26} \cdot 13^{30} \cdot 17^{18} \cdot 19^{15} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot c_{199} \cdot 498304981 \cdot 95107$
68	$2^{234} \cdot 3^{135} \cdot 5^{69} \cdot 7^{54} \cdot 11^{25} \cdot 13^{30} \cdot 17^{17} \cdot 19^{17} \cdot 23^{8} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{223}$
70	$2^{240} \cdot 3^{133} \cdot 5^{75} \cdot 7^{51} \cdot 11^{28} \cdot 13^{30} \cdot 17^{23} \cdot 19^{15} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 1109 \cdot c_{208}$
72	$2^{284} \cdot 3^{156} \cdot 5^{84} \cdot 7^{64} \cdot 11^{28} \cdot 13^{42} \cdot 17^{25} \cdot 19^{22} \cdot 23^{13} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 73^{6} \cdot c_{253} \cdot 60589$
74	$2^{243} \cdot 3^{135} \cdot 5^{75} \cdot 7^{54} \cdot 11^{25} \cdot 13^{30} \cdot 17^{22} \cdot 19^{15} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 1499 \cdot c_{213} \cdot 4783$
76	$2^{282} \cdot 3^{159} \cdot 5^{90} \cdot 7^{60} \cdot 11^{32} \cdot 13^{30} \cdot 17^{23} \cdot 19^{17} \cdot 23^{13} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{6} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 307 \cdot c_{231} \cdot 5879 \cdot 8167$
78	$2^{290} \cdot 3^{156} \cdot 5^{94} \cdot 7^{66} \cdot 11^{30} \cdot 13^{30} \cdot 17^{24} \cdot 19^{21} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 139 \cdot 283 \cdot 601 \cdot c_{240}$
80	$2^{282} \cdot 3^{162} \cdot 5^{90} \cdot 7^{65} \cdot 11^{34} \cdot 13^{36} \cdot 17^{28} \cdot 19^{22} \cdot 23^{13} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 223 \cdot 311 \cdot c_{260}$
82	$2^{288} \cdot 3^{165} \cdot 5^{94} \cdot 7^{60} \cdot 11^{28} \cdot 13^{36} \cdot 17^{23} \cdot 19^{21} \cdot 23^{12} \cdot 29^{8} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{3} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 83^{6} \cdot c_{243} \cdot 1343597$
84	$2^{330} \cdot 3^{189} \cdot 5^{99} \cdot 7^{77} \cdot 11^{36} \cdot 13^{42} \cdot 17^{24} \cdot 19^{22} \cdot 23^{13} \cdot 29^{12} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot c_{303} \cdot 4639$

$i = 88$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*) \rvert$
12	$2^{49} \cdot 3^{31} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 13^{6} \cdot 89 \cdot 349 \cdot c_{43}$
16	$2^{58} \cdot 3^{32} \cdot 5^{18} \cdot 7^{14} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19 \cdot 37 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 337 \cdot$ $869370086707130721712462 7 \cdot 4691$
18	$2^{56} \cdot 3^{31} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 19^{4} \cdot 71 \cdot c_{40} \cdot 310033837$
20	$2^{49} \cdot 3^{31} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{7} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 83 \cdot c_{50}$
22	$2^{56} \cdot 3^{28} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 41 \cdot 67 \cdot 79 \cdot c_{40}$
24	$2^{109} \cdot 3^{56} \cdot 5^{28} \cdot 7^{24} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{6} \cdot 79^{2} \cdot 431 \cdot$ $605027921727498933100857990814527406198658543836623817141560049718 3 \cdot$ $35591 \cdot 2383 \cdot 226764191$
26	$2^{56} \cdot 3^{31} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{6} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 97 \cdot c_{43}$
28	$2^{105} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{7} \cdot 23^{6} \cdot 29^{6} \cdot 31^{2} \cdot 61^{2} \cdot c_{75}$
30	$2^{112} \cdot 3^{62} \cdot 5^{33} \cdot 7^{24} \cdot 11^{14} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{4} \cdot 23^{5} \cdot 31^{4} \cdot 59^{2} \cdot 137 \cdot c_{91}$
32	$2^{112} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{24} \cdot 11^{7} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{6} \cdot 23^{6} \cdot 29^{6} \cdot c_{100}$
34	$2^{110} \cdot 3^{62} \cdot 5^{33} \cdot 7^{21} \cdot 11^{12} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 163 \cdot 229 \cdot c_{85}$

36	$2^{161} \cdot 3^{93} \cdot 5^{51} \cdot 7^{36} \cdot 11^{18} \cdot 13^{18} \cdot 17^{13} \cdot 19^{12} \cdot 23^{7} \cdot 29^{7} \cdot 31^{5} \cdot 37^{7} \cdot 53^{3} \cdot 239 \cdot 569 \cdot c_{118}$
38	$2^{110} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{24} \cdot 11^{10} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{4} \cdot 23^{4} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 1091 \cdot c_{98} \cdot 5393$
40	$2^{172} \cdot 3^{90} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{21} \cdot 13^{18} \cdot 17^{12} \cdot 19^{12} \cdot 23^{6} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 53 \cdot c_{111} \cdot$ $33311 \cdot 14087$
42	$2^{165} \cdot 3^{87} \cdot 5^{51} \cdot 7^{36} \cdot 11^{14} \cdot 13^{18} \cdot 17^{13} \cdot 19^{10} \cdot 23^{5} \cdot 29^{7} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 83^{2} \cdot 359 \cdot 18468223932501335127435553143180359359289636174028582$ $627001452401701767090909649344571905760115507808648106069357746233$ 141242770365963
44	$2^{161} \cdot 3^{94} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{17} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{12} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 227 \cdot c_{136}$
46	$2^{166} \cdot 3^{90} \cdot 5^{51} \cdot 7^{36} \cdot 11^{18} \cdot 13^{21} \cdot 17^{12} \cdot 19^{11} \cdot 23^{4} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 71 \cdot$ $479728720920676959757618328551551708212011137606083139655028327$ $37081072566836046412910097478599226649233827556095249857868933290453$
48	$2^{215} \cdot 3^{118} \cdot 5^{63} \cdot 7^{42} \cdot 11^{24} \cdot 13^{24} \cdot 17^{19} \cdot 19^{12} \cdot 23^{15} \cdot 29^{7} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $c_{167} \cdot 4583 \cdot 10459 \cdot 6121$
50	$2^{168} \cdot 3^{93} \cdot 5^{51} \cdot 7^{36} \cdot 11^{21} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{10} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 73 \cdot c_{144}$
52	$2^{215} \cdot 3^{123} \cdot 5^{66} \cdot 7^{47} \cdot 11^{21} \cdot 13^{21} \cdot 17^{18} \cdot 19^{13} \cdot 23^{14} \cdot 29^{6} \cdot 31^{5} \cdot 37^{7} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot c_{170} \cdot 1997$
54	$2^{220} \cdot 3^{124} \cdot 5^{66} \cdot 7^{47} \cdot 11^{22} \cdot 13^{24} \cdot 17^{19} \cdot 19^{16} \cdot 23^{12} \cdot 29^{7} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{181} \cdot 10995307 \cdot 2851$
56	$2^{228} \cdot 3^{126} \cdot 5^{66} \cdot 7^{47} \cdot 11^{25} \cdot 13^{24} \cdot 17^{17} \cdot 19^{12} \cdot 23^{13} \cdot 29^{12} \cdot 31^{5} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 79^{2} \cdot c_{178}$
58	$2^{224} \cdot 3^{122} \cdot 5^{66} \cdot 7^{47} \cdot 11^{24} \cdot 13^{24} \cdot 17^{18} \cdot 19^{16} \cdot 23^{11} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 37^{8} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 79 \cdot c_{188}$
60	$2^{274} \cdot 3^{149} \cdot 5^{87} \cdot 7^{59} \cdot 11^{35} \cdot 13^{30} \cdot 17^{19} \cdot 19^{18} \cdot 23^{14} \cdot 29^{14} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{228} \cdot 897647 \cdot 4871$
62	$2^{220} \cdot 3^{126} \cdot 5^{66} \cdot 7^{47} \cdot 11^{21} \cdot 13^{24} \cdot 17^{17} \cdot 19^{16} \cdot 23^{10} \cdot 29^{12} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 317 \cdot c_{204}$
64	$2^{280} \cdot 3^{153} \cdot 5^{82} \cdot 7^{61} \cdot 11^{29} \cdot 13^{27} \cdot 17^{24} \cdot 19^{18} \cdot 23^{13} \cdot 29^{13} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 83 \cdot c_{226}$
66	$2^{275} \cdot 3^{149} \cdot 5^{84} \cdot 7^{59} \cdot 11^{30} \cdot 13^{30} \cdot 17^{19} \cdot 19^{16} \cdot 23^{19} \cdot 29^{14} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot c_{232} \cdot 1248893 \cdot 39241$
68	$2^{269} \cdot 3^{155} \cdot 5^{81} \cdot 7^{59} \cdot 11^{31} \cdot 13^{30} \cdot 17^{18} \cdot 19^{18} \cdot 23^{12} \cdot 29^{12} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{6} \cdot c_{239} \cdot 28439 \cdot 4583$
70	$2^{275} \cdot 3^{155} \cdot 5^{84} \cdot 7^{57} \cdot 11^{35} \cdot 13^{30} \cdot 17^{24} \cdot 19^{17} \cdot 23^{18} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{8} \cdot 1153 \cdot c_{231}$
72	$2^{342} \cdot 3^{180} \cdot 5^{96} \cdot 7^{71} \cdot 11^{35} \cdot 13^{36} \cdot 17^{26} \cdot 19^{24} \cdot 23^{21} \cdot 29^{14} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{6} \cdot 73^{6} \cdot c_{279} \cdot 557041$
74	$2^{277} \cdot 3^{155} \cdot 5^{84} \cdot 7^{59} \cdot 11^{29} \cdot 13^{30} \cdot 17^{23} \cdot 19^{16} \cdot 23^{17} \cdot 29^{12} \cdot 31^{9} \cdot 37^{7} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{5} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 103 \cdot 227 \cdot c_{253}$

76	$2^{325} \cdot 3^{183} \cdot 5^{99} \cdot 7^{68} \cdot 11^{36} \cdot 13^{33} \cdot 17^{24} \cdot 19^{18} \cdot 23^{20} \cdot 29^{13} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{6} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot c_{265} \cdot 6182359$
78	$2^{331} \cdot 3^{180} \cdot 5^{99} \cdot 7^{73} \cdot 11^{38} \cdot 13^{33} \cdot 17^{26} \cdot 19^{22} \cdot 23^{20} \cdot 29^{14} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 89 \cdot c_{281}$
80	$2^{327} \cdot 3^{189} \cdot 5^{102} \cdot 7^{71} \cdot 11^{42} \cdot 13^{36} \cdot 17^{30} \cdot 19^{24} \cdot 23^{19} \cdot 29^{12} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{13} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{6} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot c_{295} \cdot 6359$
82	$2^{330} \cdot 3^{186} \cdot 5^{99} \cdot 7^{68} \cdot 11^{35} \cdot 13^{36} \cdot 17^{24} \cdot 19^{22} \cdot 23^{18} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 83^{6} \cdot c_{303}$
84	$2^{379} \cdot 3^{217} \cdot 5^{115} \cdot 7^{84} \cdot 11^{43} \cdot 13^{42} \cdot 17^{28} \cdot 19^{24} \cdot 23^{21} \cdot 29^{20} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{13} \cdot 43^{14} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{6} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot 79^{7} \cdot c_{325} \cdot 21481$
86	$2^{332} \cdot 3^{186} \cdot 5^{99} \cdot 7^{71} \cdot 11^{36} \cdot 13^{36} \cdot 17^{29} \cdot 19^{23} \cdot 23^{17} \cdot 29^{12} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 83^{6} \cdot 587 \cdot c_{296} \cdot 2113$

$i = 90$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{49} \cdot 3^{32} \cdot 5^{20} \cdot 7^{12} \cdot 13^{6} \cdot 79 \cdot c_{48}$
16	$2^{56} \cdot 3^{28} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot c_{41} \cdot 47051$
18	$2^{56} \cdot 3^{35} \cdot 5^{19} \cdot 7^{12} \cdot 11^{3} \cdot 13^{6} \cdot 19^{5} \cdot 37 \cdot 73 \cdot c_{45}$
20	$2^{49} \cdot 3^{32} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{8} \cdot 13^{7} \cdot 17^{5} \cdot 71 \cdot 83 \cdot c_{49}$
22	$2^{56} \cdot 3^{28} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 41 \cdot 79 \cdot c_{44}$
24	$2^{105} \cdot 3^{56} \cdot 5^{28} \cdot 7^{24} \cdot 11^{14} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{7} \cdot 23^{2} \cdot 67^{2} \cdot 79^{2} \cdot 431 \cdot 195115139907467261$ $492764242937457646020867569293622156837782163008048729566173370 9$
26	$2^{56} \cdot 3^{33} \cdot 5^{18} \cdot 7^{12} \cdot 11^{4} \cdot 13^{6} \cdot 17^{5} \cdot 19^{6} \cdot 23^{3} \cdot 53 \cdot c_{42} \cdot 5683$
28	$2^{105} \cdot 3^{63} \cdot 5^{35} \cdot 7^{21} \cdot 11^{11} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{7} \cdot 23^{4} \cdot 29^{6} \cdot 569 \cdot c_{82} \cdot 10631$
30	$2^{112} \cdot 3^{66} \cdot 5^{35} \cdot 7^{24} \cdot 11^{17} \cdot 13^{12} \cdot 17^{7} \cdot 19^{5} \cdot 23^{4} \cdot 31^{6} \cdot 59 \cdot 61^{2} \cdot c_{85}$
32	$2^{112} \cdot 3^{63} \cdot 5^{35} \cdot 7^{24} \cdot 11^{8} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{7} \cdot 23^{4} \cdot 29^{7} \cdot 59^{2} \cdot 643 \cdot c_{98}$
34	$2^{112} \cdot 3^{60} \cdot 5^{35} \cdot 7^{21} \cdot 11^{14} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 11966594596771891379 1$ $6067389148785083593484125707429246092684838968828780 71 \cdot 57193 \cdot 194209831$ $\cdot 3919$
36	$2^{161} \cdot 3^{96} \cdot 5^{54} \cdot 7^{36} \cdot 11^{21} \cdot 13^{18} \cdot 17^{14} \cdot 19^{14} \cdot 23^{5} \cdot 29^{7} \cdot 31^{7} \cdot 37^{6} \cdot 47 \cdot c_{127}$
38	$2^{112} \cdot 3^{63} \cdot 5^{35} \cdot 7^{24} \cdot 11^{11} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 19^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 53^{2} \cdot 127 \cdot c_{93} \cdot 11880289$
40	$2^{161} \cdot 3^{94} \cdot 5^{55} \cdot 7^{33} \cdot 11^{25} \cdot 13^{18} \cdot 17^{12} \cdot 19^{14} \cdot 23^{4} \cdot 29^{7} \cdot 31^{7} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot c_{125} \cdot 11941$
42	$2^{168} \cdot 3^{90} \cdot 5^{54} \cdot 7^{39} \cdot 11^{17} \cdot 13^{18} \cdot 17^{14} \cdot 19^{12} \cdot 23^{4} \cdot 29^{7} \cdot 31^{8} \cdot 37^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $83 \cdot c_{125} \cdot 15667 \cdot 7417$
44	$2^{161} \cdot 3^{95} \cdot 5^{46} \cdot 7^{36} \cdot 11^{18} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{14} \cdot 23^{8} \cdot 29^{6} \cdot 31^{7} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 47^{3} \cdot c_{135} \cdot 8837$
46	$2^{168} \cdot 3^{91} \cdot 5^{53} \cdot 7^{33} \cdot 11^{21} \cdot 13^{18} \cdot 17^{12} \cdot 19^{13} \cdot 23^{5} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot c_{129} \cdot 45491$
48	$2^{217} \cdot 3^{119} \cdot 5^{63} \cdot 7^{46} \cdot 11^{28} \cdot 13^{24} \cdot 17^{20} \cdot 19^{14} \cdot 23^{10} \cdot 29^{7} \cdot 31^{7} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $73 \cdot c_{178} \cdot 3313$

50	$2^{168} \cdot 3^{101} \cdot 5^{53} \cdot 7^{39} \cdot 11^{25} \cdot 13^{18} \cdot 17^{10} \cdot 19^{12} \cdot 23^{7} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 37^{7} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot 9880449995957501765329461606511427837031677141221698380935$ $2014438003019923491191510143794112365111258118925477855754821 2$ $83283882054071 \cdot 439409$
52	$2^{217} \cdot 3^{123} \cdot 5^{70} \cdot 7^{45} \cdot 11^{25} \cdot 13^{21} \cdot 17^{19} \cdot 19^{14} \cdot 23^{9} \cdot 29^{7} \cdot 31^{7} \cdot 37^{7} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 199 \cdot c_{175} \cdot 49033$
54	$2^{224} \cdot 3^{128} \cdot 5^{70} \cdot 7^{45} \cdot 11^{24} \cdot 13^{24} \cdot 17^{20} \cdot 19^{19} \cdot 23^{10} \cdot 29^{7} \cdot 31^{6} \cdot 37^{7} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot c_{188}$
56	$2^{217} \cdot 3^{126} \cdot 5^{70} \cdot 7^{45} \cdot 11^{29} \cdot 13^{24} \cdot 17^{17} \cdot 19^{14} \cdot 23^{8} \cdot 29^{12} \cdot 31^{7} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 79^{2} \cdot c_{180} \cdot 415427 \cdot 50969 \cdot 8737$
58	$2^{224} \cdot 3^{123} \cdot 5^{70} \cdot 7^{45} \cdot 11^{28} \cdot 13^{24} \cdot 17^{19} \cdot 19^{19} \cdot 23^{8} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 79 \cdot 373 \cdot 1031 \cdot c_{187} \cdot 86341$
60	$2^{273} \cdot 3^{152} \cdot 5^{90} \cdot 7^{57} \cdot 11^{42} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{21} \cdot 23^{10} \cdot 29^{14} \cdot 31^{14} \cdot 37^{6} \cdot 41^{8} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 61^{5} \cdot c_{220} \cdot 79147 \cdot 96451 \cdot 1188409$
62	$2^{224} \cdot 3^{126} \cdot 5^{70} \cdot 7^{45} \cdot 11^{25} \cdot 13^{24} \cdot 17^{17} \cdot 19^{19} \cdot 23^{7} \cdot 29^{12} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 349 \cdot c_{204} \cdot 14419$
64	$2^{280} \cdot 3^{154} \cdot 5^{82} \cdot 7^{57} \cdot 11^{32} \cdot 13^{27} \cdot 17^{25} \cdot 19^{21} \cdot 23^{9} \cdot 29^{13} \cdot 31^{14} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 83 \cdot 349 \cdot c_{231} \cdot 7723$
66	$2^{280} \cdot 3^{153} \cdot 5^{89} \cdot 7^{57} \cdot 11^{35} \cdot 13^{30} \cdot 17^{20} \cdot 19^{19} \cdot 23^{19} \cdot 29^{14} \cdot 31^{13} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{6} \cdot 67^{5} \cdot 347 \cdot c_{227}$
68	$2^{273} \cdot 3^{158} \cdot 5^{81} \cdot 7^{57} \cdot 11^{36} \cdot 13^{30} \cdot 17^{19} \cdot 19^{21} \cdot 23^{10} \cdot 29^{12} \cdot 31^{16} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{5} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot c_{248}$
70	$2^{280} \cdot 3^{157} \cdot 5^{88} \cdot 7^{57} \cdot 11^{42} \cdot 13^{30} \cdot 17^{25} \cdot 19^{19} \cdot 23^{13} \cdot 29^{14} \cdot 31^{13} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot c_{241}$
72	$2^{329} \cdot 3^{182} \cdot 5^{98} \cdot 7^{69} \cdot 11^{42} \cdot 13^{36} \cdot 17^{27} \cdot 19^{28} \cdot 23^{15} \cdot 29^{14} \cdot 31^{15} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 73^{6} \cdot 599 \cdot c_{286} \cdot 396043 \cdot 3613$
74	$2^{280} \cdot 3^{160} \cdot 5^{88} \cdot 7^{57} \cdot 11^{32} \cdot 13^{30} \cdot 17^{24} \cdot 19^{19} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{13} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{6} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73 \cdot c_{243} \cdot 10463 \cdot 924431 \cdot 13841$
76	$2^{329} \cdot 3^{186} \cdot 5^{105} \cdot 7^{66} \cdot 11^{39} \cdot 13^{33} \cdot 17^{25} \cdot 19^{21} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{14} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{7} \cdot 647 \cdot c_{283}$
78	$2^{336} \cdot 3^{183} \cdot 5^{105} \cdot 7^{69} \cdot 11^{45} \cdot 13^{35} \cdot 17^{27} \cdot 19^{26} \cdot 23^{14} \cdot 29^{14} \cdot 31^{13} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{6} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 181 \cdot c_{274}$
80	$2^{329} \cdot 3^{189} \cdot 5^{106} \cdot 7^{69} \cdot 11^{50} \cdot 13^{36} \cdot 17^{30} \cdot 19^{28} \cdot 23^{13} \cdot 29^{12} \cdot 31^{14} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 463 \cdot c_{311}$
82	$2^{336} \cdot 3^{192} \cdot 5^{105} \cdot 7^{66} \cdot 11^{42} \cdot 13^{36} \cdot 17^{25} \cdot 19^{26} \cdot 23^{13} \cdot 29^{13} \cdot 31^{13} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 83^{6} \cdot c_{285} \cdot 493897 \cdot 15247163 \cdot 9629$
84	$2^{385} \cdot 3^{221} \cdot 5^{118} \cdot 7^{84} \cdot 11^{49} \cdot 13^{43} \cdot 17^{28} \cdot 19^{28} \cdot 23^{15} \cdot 29^{21} \cdot 31^{14} \cdot 37^{12} \cdot 41^{14} \cdot 43^{13} \cdot$ $47^{4} \cdot 53^{5} \cdot 59^{5} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{6} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot c_{333} \cdot 1831$
86	$2^{336} \cdot 3^{195} \cdot 5^{105} \cdot 7^{69} \cdot 11^{39} \cdot 13^{36} \cdot 17^{30} \cdot 19^{26} \cdot 23^{12} \cdot 29^{12} \cdot 31^{13} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^{7} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{5} \cdot 67^{5} \cdot 71^{5} \cdot 73^{6} \cdot 79^{6} \cdot 83^{6} \cdot 131 \cdot 719 \cdot 809 \cdot c_{293}$
88	$2^{385} \cdot 3^{217} \cdot 5^{117} \cdot 7^{78} \cdot 11^{49} \cdot 13^{39} \cdot 17^{33} \cdot 19^{28} \cdot 23^{19} \cdot 29^{20} \cdot 31^{14} \cdot 37^{12} \cdot 41^{13} \cdot 43^{13} \cdot$

	$47^3 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 73^6 \cdot 79^6 \cdot 83^6 \cdot 431 \cdot c_{348}$

$i = 92$:

j	$\lvert Res(\varphi_i^*, \varphi_j^*)\rvert$
12	$2^{51} \cdot 3^{32} \cdot 5^{17} \cdot 7^{13} \cdot 11 \cdot 13^7 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 89 \cdot 439 \cdot c_{40}$
16	$2^{55} \cdot 3^{28} \cdot 5^{17} \cdot 7^{13} \cdot 11^4 \cdot 13^8 \cdot 17^5 \cdot 151 \cdot c_{37} \cdot 6337$
18	$2^{56} \cdot 3^{32} \cdot 5^{17} \cdot 7^{13} \cdot 11^2 \cdot 13^7 \cdot 19^4 \cdot 3731381551120927212706184687691043755$ 491091153353429
20	$2^{57} \cdot 3^{34} \cdot 5^{19} \cdot 7^{13} \cdot 11^8 \cdot 13^7 \cdot 17^5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 139 \cdot c_{21} \cdot 1192063991 \cdot 99721651$
22	$2^{56} \cdot 3^{28} \cdot 5^{17} \cdot 7^{13} \cdot 11 \cdot 13^7 \cdot 17^5 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 113 \cdot 1279 \cdot$ $184899510896027039709191656123970206 33$
24	$2^{104} \cdot 3^{56} \cdot 5^{28} \cdot 7^{26} \cdot 11^{13} \cdot 13^{14} \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 79^2 \cdot c_{90}$
26	$2^{55} \cdot 3^{32} \cdot 5^{19} \cdot 7^{13} \cdot 11^4 \cdot 13^7 \cdot 17^5 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 67 \cdot c_{45}$
28	$2^{110} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{14} \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^6 \cdot c_{85}$
30	$2^{112} \cdot 3^{64} \cdot 5^{33} \cdot 7^{26} \cdot 11^{14} \cdot 13^{14} \cdot 17^6 \cdot 19^4 \cdot 23^4 \cdot 31^4 \cdot 59 \cdot 71 \cdot c_{89} \cdot 50773 \cdot 16649$
32	$2^{110} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{26} \cdot 11^9 \cdot 13^{14} \cdot 17^{10} \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^6 \cdot 31^2 \cdot 61^2 \cdot c_{88} \cdot 234977$
34	$2^{112} \cdot 3^{60} \cdot 5^{33} \cdot 7^{21} \cdot 11^{12} \cdot 13^{14} \cdot 17^5 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^6 \cdot 31^4 \cdot 59^2 \cdot 367 \cdot$ $4461615513970556604373687851210761956459574513921004239 0$ $1310404932746210303615341378386 39$
36	$2^{167} \cdot 3^{97} \cdot 5^{50} \cdot 7^{42} \cdot 11^{19} \cdot 13^{21} \cdot 17^{12} \cdot 19^{12} \cdot 23^6 \cdot 29^7 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 53 \cdot 113 \cdot c_{118} \cdot$ 3290473
38	$2^{112} \cdot 3^{63} \cdot 5^{33} \cdot 7^{26} \cdot 11^{11} \cdot 13^{14} \cdot 17^{10} \cdot 19^5 \cdot 23^3 \cdot 29^6 \cdot 31^4 \cdot c_{105}$
40	$2^{159} \cdot 3^{92} \cdot 5^{51} \cdot 7^{34} \cdot 11^{22} \cdot 13^{21} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^5 \cdot 29^6 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 53^3 \cdot 139 \cdot c_{130}$
42	$2^{165} \cdot 3^{88} \cdot 5^{50} \cdot 7^{39} \cdot 11^{15} \cdot 13^{21} \cdot 17^{12} \cdot 19^{10} \cdot 23^4 \cdot 29^7 \cdot 31^4 \cdot 37^6 \cdot 43^6 \cdot$ $83^2 \cdot 619 \cdot 1291 \cdot c_{139}$
44	$2^{167} \cdot 3^{97} \cdot 5^{48} \cdot 7^{42} \cdot 11^{16} \cdot 13^{21} \cdot 17^{11} \cdot 19^{12} \cdot 23^9 \cdot 29^6 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot c_{137}$
46	$2^{168} \cdot 3^{91} \cdot 5^{50} \cdot 7^{34} \cdot 11^{18} \cdot 13^{21} \cdot 17^{11} \cdot 19^{10} \cdot 23^3 \cdot 29^6 \cdot 31^4 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^6 \cdot$ $47^6 \cdot 809 \cdot 775869278428127471065851630295072944618093020197379 23$ $6045485104044123191101167040932351790526328722947943440527447 6$ $990885664941572313 \cdot 171263$
48	$2^{214} \cdot 3^{119} \cdot 5^{63} \cdot 7^{42} \cdot 11^{24} \cdot 13^{28} \cdot 17^{18} \cdot 19^{12} \cdot 23^{11} \cdot 29^7 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^7 \cdot 43^7 \cdot$ $137 \cdot 139 \cdot c_{171} \cdot 443533 \cdot 78737803 \cdot 3529$
50	$2^{166} \cdot 3^{96} \cdot 5^{52} \cdot 7^{39} \cdot 11^{22} \cdot 13^{21} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^8 \cdot 29^6 \cdot 31^4 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^6 \cdot$ $47^6 \cdot 113 \cdot c_{136} \cdot 169693$
52	$2^{218} \cdot 3^{123} \cdot 5^{66} \cdot 7^{50} \cdot 11^{23} \cdot 13^{21} \cdot 17^{17} \cdot 19^{12} \cdot 23^{10} \cdot 29^6 \cdot 31^5 \cdot 37^6 \cdot 41^7 \cdot 43^7 \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 263 \cdot c_{175} \cdot 51991$
54	$2^{220} \cdot 3^{128} \cdot 5^{66} \cdot 7^{49} \cdot 11^{20} \cdot 13^{28} \cdot 17^{18} \cdot 19^{16} \cdot 23^{10} \cdot 29^7 \cdot 31^4 \cdot 37^6 \cdot 41^6 \cdot 43^6 \cdot$ $47^6 \cdot 67 \cdot c_{188} \cdot 285841 \cdot 2251$
56	$2^{214} \cdot 3^{126} \cdot 5^{66} \cdot 7^{50} \cdot 11^{26} \cdot 13^{28} \cdot 17^{16} \cdot 19^{13} \cdot 23^9 \cdot 29^{12} \cdot 31^5 \cdot 37^7 \cdot 41^6 \cdot 43^7 \cdot$

	$47^7 \cdot 53^4 \cdot 79^2 \cdot c_{186}$
58	$2^{230} \cdot 3^{125} \cdot 5^{66} \cdot 7^{51} \cdot 11^{25} \cdot 13^{28} \cdot 17^{17} \cdot 19^{16} \cdot 23^{9} \cdot 29^{6} \cdot 31^{4} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 79 \cdot c_{187} \cdot 6079$
60	$2^{277} \cdot 3^{152} \cdot 5^{84} \cdot 7^{62} \cdot 11^{36} \cdot 13^{35} \cdot 17^{19} \cdot 19^{18} \cdot 23^{11} \cdot 29^{13} \cdot 31^{15} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 61^5 \cdot 227 \cdot 439 \cdot c_{232}$
62	$2^{224} \cdot 3^{126} \cdot 5^{66} \cdot 7^{50} \cdot 11^{23} \cdot 13^{28} \cdot 17^{16} \cdot 19^{16} \cdot 23^{8} \cdot 29^{12} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot c_{204}$
64	$2^{275} \cdot 3^{154} \cdot 5^{79} \cdot 7^{63} \cdot 11^{28} \cdot 13^{28} \cdot 17^{23} \cdot 19^{18} \cdot 23^{10} \cdot 29^{13} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 83 \cdot c_{237} \cdot 2417$
66	$2^{275} \cdot 3^{151} \cdot 5^{83} \cdot 7^{62} \cdot 11^{31} \cdot 13^{35} \cdot 17^{18} \cdot 19^{16} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot c_{248} \cdot 372497$
68	$2^{277} \cdot 3^{159} \cdot 5^{82} \cdot 7^{63} \cdot 11^{32} \cdot 13^{35} \cdot 17^{17} \cdot 19^{18} \cdot 23^{9} \cdot 29^{12} \cdot 31^{10} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 227 \cdot c_{245}$
70	$2^{275} \cdot 3^{156} \cdot 5^{83} \cdot 7^{60} \cdot 11^{36} \cdot 13^{35} \cdot 17^{23} \cdot 19^{16} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^6 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 269 \cdot 1697 \cdot c_{240}$
72	$2^{326} \cdot 3^{182} \cdot 5^{98} \cdot 7^{75} \cdot 11^{37} \cdot 13^{42} \cdot 17^{24} \cdot 19^{30} \cdot 23^{16} \cdot 29^{13} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 73^6 \cdot 751 \cdot c_{290}$
74	$2^{276} \cdot 3^{159} \cdot 5^{85} \cdot 7^{63} \cdot 11^{29} \cdot 13^{35} \cdot 17^{22} \cdot 19^{17} \cdot 23^{13} \cdot 29^{12} \cdot 31^{9} \cdot 37^{6} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 1229 \cdot c_{254}$
76	$2^{333} \cdot 3^{186} \cdot 5^{99} \cdot 7^{70} \cdot 11^{34} \cdot 13^{35} \cdot 17^{24} \cdot 19^{18} \cdot 23^{16} \cdot 29^{14} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 71^6 \cdot 73^6 \cdot c_{273} \cdot 467611 \cdot 1831$
78	$2^{331} \cdot 3^{183} \cdot 5^{99} \cdot 7^{75} \cdot 11^{38} \cdot 13^{35} \cdot 17^{25} \cdot 19^{22} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{7} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 73^6 \cdot 79^6 \cdot 89 \cdot 271 \cdot c_{297}$
80	$2^{324} \cdot 3^{189} \cdot 5^{100} \cdot 7^{76} \cdot 11^{50} \cdot 13^{42} \cdot 17^{28} \cdot 19^{24} \cdot 23^{15} \cdot 29^{12} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{7} \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 71^6 \cdot 73^6 \cdot c_{303}$
82	$2^{330} \cdot 3^{193} \cdot 5^{99} \cdot 7^{70} \cdot 11^{37} \cdot 13^{42} \cdot 17^{23} \cdot 19^{22} \cdot 23^{14} \cdot 29^{13} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{6} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 73^6 \cdot 79^6 \cdot 83^6 \cdot 643 \cdot c_{301} \cdot 2389$
84	$2^{383} \cdot 3^{221} \cdot 5^{112} \cdot 7^{91} \cdot 11^{42} \cdot 13^{49} \cdot 17^{24} \cdot 19^{24} \cdot 23^{16} \cdot 29^{19} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{13} \cdot 43^{14} \cdot$ $47^7 \cdot 53^4 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 71^6 \cdot 73^6 \cdot 79^7 \cdot 257 \cdot c_{338} \cdot 6337$
86	$2^{332} \cdot 3^{192} \cdot 5^{99} \cdot 7^{76} \cdot 11^{34} \cdot 13^{42} \cdot 17^{28} \cdot 19^{22} \cdot 23^{13} \cdot 29^{12} \cdot 31^{9} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{6} \cdot$ $47^6 \cdot 53^5 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^6 \cdot 73^6 \cdot 79^6 \cdot 83^6 \cdot 1693 \cdot c_{301} \cdot 26227$
88	$2^{381} \cdot 3^{217} \cdot 5^{114} \cdot 7^{83} \cdot 11^{42} \cdot 13^{42} \cdot 17^{29} \cdot 19^{24} \cdot 23^{20} \cdot 29^{19} \cdot 31^{10} \cdot 37^{12} \cdot 41^{13} \cdot 43^{14} \cdot$ $47^7 \cdot 53^5 \cdot 59^5 \cdot 61^5 \cdot 67^6 \cdot 71^6 \cdot 73^6 \cdot 79^7 \cdot 83^7 \cdot 89^7 \cdot c_{331}$
90	$2^{385} \cdot 3^{224} \cdot 5^{116} \cdot 7^{81} \cdot 11^{50} \cdot 13^{42} \cdot 17^{30} \cdot 19^{28} \cdot 23^{14} \cdot 29^{19} \cdot 31^{14} \cdot 37^{12} \cdot 41^{12} \cdot 43^{13} \cdot$ $47^6 \cdot 53^4 \cdot 59^4 \cdot 61^5 \cdot 67^5 \cdot 71^5 \cdot 73^6 \cdot 79^6 \cdot 83^6 \cdot 587 \cdot c_{366}$

Anhang C

Beispiele zu 5.3.5:

Wir listen die Differenzen $x_{l+1} - x_l$ mit 50 Nachkommastellen auf.

n=12:

$$x_1 = 625.180897250361794500723589001447178002894356005821$$

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= -42.455609584989212168295648828503677719142076413588 \\
x_3 - x_2 &= 0.126280374552007801013308429677865113650276697459 \\
x_4 - x_3 &= -0.000673322384579604601091889074386505162258291307 \\
x_5 - x_4 &= 0.000004274539538418511890269058231272222229027213 \\
x_6 - x_5 &= -0.000000029542596199192203616459153134270162905459 \\
x_7 - x_6 &= 0.000000000214760613568481552198621734412146248667 \\
x_8 - x_7 &= -0.000000000001614475804485176168529336237171694856 \\
x_9 - x_8 &= 0.000000000000012430617908761762905109780616738708 \\
x_{10} - x_9 &= -0.000000000000000097438702214014820178311106785975 \\
x_{11} - x_{10} &= 0.000000000000000000774487147302209688171821930997 \\
x_{12} - x_{11} &= -0.000000000000000000006224855144791649951990310246 \\
x_{13} - x_{12} &= 0.000000000000000000000050488952944908498264681303 \\
x_{14} - x_{13} &= -0.000000000000000000000000412625346977536874102070 \\
x_{15} - x_{14} &= 0.000000000000000000000000003393913188416617040723 \\
x_{16} - x_{15} &= -0.000000000000000000000000000028069362895085615024 \\
x_{17} - x_{16} &= 0.0000000000000000000000000000002332560167403238 \\
x_{18} - x_{17} &= -0.000000000000000000000000000000001946448397052096 \\
x_{19} - x_{18} &= 0.000000000000000000000000000000000016302328600807 \\
x_{20} - x_{19} &= -0.000000000000000000000000000000000000136985817029 \\
x_{21} - x_{20} &= 0.000000000000000000000000000000000000001154439748
\end{aligned}$$

$$x_{21} = 582.850898962750111219871358661775325480274442747596$$

n=16:

$$x_1 = 955.48797345866740392590544650262648603815316560703$$

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= 8.8660937484126167042242500375067393008125610784 59 \\
x_3 - x_2 &= -0.0013743580243381911409220184826960246181748185 89 \\
x_4 - x_3 &= 0.0000004053322790837647888764455782375669997405 4 \\
x_5 - x_4 &= -0.0000000001423188170059572408905892169810929370 86 \\
x_6 - x_5 &= 0.0000000000000544116829694328833990930093195103 97 \\
x_7 - x_6 &= -0.0000000000000000218833412912069518430354470878 38 \\
x_8 - x_7 &= 0.0000000000000000000091019202323989702575387698 39 \\
x_9 - x_8 &= -0.0000000000000000000000038775208970626124571535 01 \\
x_{10} - x_9 &= 0.0000000000000000000000000016817630589530457419 81 \\
x_{11} - x_{10} &= -0.0000000000000000000000000000007396528750991237 92 \\
x_{12} - x_{11} &= 0.0000000000000000000000000000000003289498589714 92 \\
x_{13} - x_{12} &= -0.0000000000000000000000000000000000001476346602 46 \\
x_{14} - x_{13} &= 0.0000000000000000000000000000000000000000667638 96 \\
x_{15} - x_{14} &= -0.0000000000000000000000000000000000000000000304 09 \\
x_{16} - x_{15} &= 0.0000000000000000000000000000000000000000000002 56
\end{aligned}$$

$$x_{16} = 964.35269325424569709555633234327449122743265037242 9$$

n=20:

$$x_1 = 1199.92440338810269685185927576154995962453682757679 2$$

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= -1.6055715158087210168706239122166934267455074799 91 \\
x_3 - x_2 &= 0.0000147523537171656154384278106115617623272253 49 \\
x_4 - x_3 &= -0.0000000002535151029442476465302222579804132115 81 \\
x_5 - x_4 &= 0.0000000000000518680668916108046939260425773691 \\
x_6 - x_5 &= -0.0000000000000000011555257491426507575660300966 3 \\
x_7 - x_6 &= 0.0000000000000000000000270802913153113213258589 2 \\
x_8 - x_7 &= -0.0000000000000000000000000006563363418705224823 \\
x_9 - x_8 &= 0.0000000000000000000000000000000001629304559013679
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{10} - x_9 &= -0.000000000000000000000000000000000000041178288817 \\
x_{11} - x_{10} &= 0.00000000000000000000000000000000000000000105553 \\
x_{12} - x_{11} &= 0
\end{aligned}
$$

$$x_{12} = 1198.31884662439418308435098192474335934462935095587$$

n=36:

$$x_1 = 29.989506640370716618972217831385997999196341357432$$

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= -1.891977393632113373901445888837791832979655610257 \\
x_3 - x_2 &= 0.00367890072255859075125067063170920047469727649 \\
x_4 - x_3 &= -0.000012424305936195003311730326907751487617547397 \\
x_5 - x_4 &= 0.00000004995166135415002601372691699677393577368 \\
x_6 - x_5 &= -0.000000000218652445333107974646140637738710910403 \\
x_7 - x_6 &= 0.00000000000100675265109571371144376389192036048
\end{aligned}
$$

$$x_7 = 28.101195772889241302286724635645227738130910700025$$

n=36:

$$x_1 = 582.725287665372582332427940172943500283752279592233$$

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= 0.125611326706966614924106809661709880710247433365 \\
x_3 - x_2 &= -0.000000029329450061428207240429060736095188351648 \\
x_4 - x_3 &= 0.00000000000001233395369369505029461964133188373 \\
x_5 - x_4 &= -0.000000000000000000006174778817193718990599731013 \\
x_6 - x_5 &= 0.000000000000000000000000003366077081538271749499 \\
x_7 - x_6 &= -0.000000000000000000000000000000001930283054268318
\end{aligned}
$$

$$x_7 = 582.850898962750111219871358661775325480273288307848$$

n=36:

$$x_1 = 1547.285205694251450041414853772800531825511534164384$$

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= -0.002256679623393089534417091024409172409452417764 \\
x_3 - x_2 &= 0.000000000000279722020866702186168337679934319427 \\
x_4 - x_3 &= -0.000000000000000000000006508527450445674758454 0547 \\
x_5 - x_4 &= 0.000000000000000000000000000000018029929923347487 \\
x_6 - x_5 &= -0.000000000000000000000000000000000000000005438413 \\
x_7 - x_6 &= 0
\end{aligned}$$

$$x_7 := 1547.282949014628336673901238298687804563964349434574$$

Literaturverzeichnis

[1] B. Buchberger, G.E. Collins, R. Loos, Computer Algebra, Symbolic and Algebraic Computation, Springer, Wien, 1982, 115-138

[2] G. Cornelissen, Dissertationsarbeit, Geometric Properties of modular forms over rational function fields, Universität Gent, 1997

[3] G. Cornelissen, Zeroes of Eisenstein series, quadratic class numbers and supersingularity for rational function fields, Math. Ann. 314, 1999, 175-196

[4] J. Fresnel, M. Van der Put, Géométrie Analytique Rigide et Applications, Progress in Mathematics, vol.18,Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart,1981

[5] E.U. Gekeler, On the coefficients of Drinfeld modular forms, Invent. Math. 93, No.3, 1988, 667-700

[6] E.U. Gekeler, Zur Arithmetik von Drinfeld-Moduln, Math. Ann. 262, 1983, 167-182

[7] E.U. Gekeler, M. Reversat, Jacobians of Drinfeld modular curves, J. Reine Angew. Math. 476, , 1996, 27-93

[8] D. Goss, Basic structures of function field arithmetic, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol.35, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1996

[9] D. Goss, Modular Forms for $\mathbb{F}_r[T]$, J. Reine Angew. Math. 317, 1980, 16-39

[10] D.R. Hayes, A brief introduction to Drinfeld modules, The arithmetic of function fields (D. Goss, D.R. Hayes, and M.I. Rosen, eds.), W. de Gruyter, Berlin - New York, 1992, 1-32

[11] N. Koblitz, Introduction to elliptic curves and modular forms, Springer, Berlin -Heidelberg-New York, 1984

[12] B. López, Analytic theory of Drinfeld modules (E.U. Gekeler, M. Van der Put, M. Reversat, J. Van Geel), Proceedings of the workshop on Drinfeld modules, modular schemes and applications, Alden-Biesen, Belgien, 9-14 September 1996, World Scientific, Singapur, 1997, 32-43

[13] R.A. Rankin, The zeros of Eisenstein series, Publications of the Ramanujan Institute 1, 1969, 137-144

[14] F.K.C. Rankin, H.P.F. Swinnerton-Dyer, On the zeros of Eisenstein series, Bull. London Math. Soc. 2, 169-170

[15] J.P. Serre, A Course in Arithmetic, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973

[16] H.P.F. Swinnerton-Dyer, On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms, Lecture notes in mathematics, Band 350, Modular functions of one variable III, Proceedings international summer school, 17 Juli- 3 August 1972, Universität Antwerpen, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973

[17] B.L. van der Waerden, Algebra, Erster Teil, Paragraph 31: Die Resultante als symmetrische Funktion der Wurzeln, Springer