Zur Geschichte des axiomatischen Vektorraumbegriffs

Diplomarbeit von Ralf Krömer,
angefertigt 1998 an der Universität des Saarlandes
nach einer Themenstellung von Prof.Dr. E.–U. Gekeler

16. August 1999

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Professor Gekeler. Am Saarbrücker Fachbereich Mathematik gibt es weder eine Tradition noch eine Infrastruktur der Mathematikhistoriographie. Herr Gekeler ging somit in der Themenstellung risikobereit über das ‚Alltägliche' hinaus; ich habe das persönlich als Entgegenkommen und Verstandenwerden empfunden. All das war auch in der Zeit der Anfertigung in zahlreichen Gesprächen zu spüren. Auch für die Unterstützung des Lehrstuhls bei den anfallenden Kosten bin ich zu Dank verpflichtet.

Ich möchte mich bedanken bei den Mitarbeitern der Universitätsbibliothek (insbesondere der häufig besuchten Fernleihstelle) und der Institutsbibliothek des Fachbereichs Mathematik für ihre kompetente und unbürokratische Beratung und Hilfe. Mein Dank gilt ferner den Professoren Schupp und Lorenz und Herrn Shahid Rahman für weiterführende Angaben. Bei der Textverarbeitung unterstützten mich Raphael Coumont, Achim Domma, Anselm Lambert, Ortwin Scheja und Bodo Wack. Philipp Werner las die Arbeit sorgfältig durch, als sie in einem noch sehr unfertigen Zustand war; manche wissenschaftstheoretischen Schlußfolgerungen dieser Arbeit hätte ich ohne seine Hinweise nicht formulieren können. Meine Mutter Ortrud Krömer half mir beim Erfassen der italienischen Texte; Wolfgang Krautmacher stellte sein *notebook* zur Verfügung. Meine Familie, Torsten Becker, Christian Belles, Benedikt Betz, Joachim Conrad, Volker Gebhard, Sven Harig, Sabine König, Marion Landry, Uwe Peters, Ulrike Schwarz und viele andere hatten immer ein offenes Ohr für die Probleme, mit denen ich mich befaßte, und viele Worte der Unterstützung.

Schließlich ist hier ist eine gute Gelegenheit, einmal der Fachschaft Mathematik Dank zu sagen für die von ihr angeregten Ringvorlesungen zur Geschichte der Mathematik, die ich als erfreuliche und nützliche Bereicherung des Vorlesungsangebots erlebt habe. Insbesondere für die Möglichkeit, in diesem Rahmen über meine Arbeit sprechen zu können, bin ich sehr dankbar.

Abkürzungsverzeichnis

$\mathcal{A}_\circ$	Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation
$\mathcal{A}_+$	Assoziativgesetz der Vektoraddition
A_1	Ausdehnungslehre von 1844 (= [71] I.1, S.1–139) bzw. 1878; eine französische Übersetzung findet man mithilfe von MR 96k 01022.
A_2	Ausdehnungslehre von 1862 (= [71] I.2, S.4–379); wegen einer französischen Übersetzung vgl. oben A_1
Am. J. Math.	American Journal of Mathematics, Johns Hopkins University Press/ Baltimore
Am. Math. Monthly	American Mathematical Monthly, MAA
AMS	American Mathematical Society, Providence/Rhode Island
Anm.	Anmerkung
Arch. Hist. Ex. Sci.	Archive for the History of Exact Sciences, Springer/Berlin
$\mathcal{B}_S$	BANACHs Axiomensystem nach SCHAUDER (vgl. S.176)
Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht	Communications of the Mathematical Institute of the Rijksuniversiteit Utrecht
Crelle	Journal für die reine und angewandte Mathematik, De Gruyter/ Berlin
$\mathcal{D}_l$	‚Linksdistributivität' (also bezüglich der Körperaddition)
$\mathcal{D}_r$	‚Rechtsdistributivität' (also bezüglich der Vektorraumaddition)
Daub	Dauben, Joseph Warren, *The history of mathematics from antiquity to the present. A selective bibliography*, Garland/NY 1985. Literaturangaben versehen mit ‚Daub', gefolgt von einer Ziffer, sind unter dieser Ziffer in Daubens Bibliographie verzeichnet und besprochen.
$\mathcal{DICK}$	DICKSONs Axiomensystem (vgl. S.173f)
DMV	Deutsche Mathematikervereinigung
ebd.	ebenda, in der zuletzt zitierten Quelle
Elem. Math.	Elementa Mathematicae, Schweizerische Mathematische Gesellschaft, Birkhäuser/Basel
EPT	École Polytechnique
f	(bei Seitenangaben) und die folgende (bei MR–*items* bezeichnet ab 1980 der Buchstabe f das Heft Nr.f des Jahrgangs)
ff	(bei Seitenangaben) und die folgenden

fs	so werden Gesamtausgaben gekennzeichnet, die die originalen Seitenzahlen (Faksimileausgaben) oder jedenfalls die originalen Seitenumbrüche (dann kann man die zugehörige Originalseitenzahl errechnen oder umgekehrt) beibehalten.
Fund. Math.	Fundamenta mathematicae, Polnische Akademie der Wissenschaften/ Warschau
GdG	Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*, in: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss–Weber–Denkmals in Göttingen, Teubner/Leipzig 1899, 1–99 (die andere in diesem Band enthaltene Arbeit beginnt allerdings mit den Seitenzahlen von vorn); JFM **52** 22
HM	Historia mathematica, Academic Press/Orlando
ICM	International Congress of Mathematicians
JFM	Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, DMV, De Gruyter/ Berlin
$\mathcal{K}_+$	Kommutativgesetz der Vektoraddition
ℓ	links (bei Spaltenangaben)
LAA	Peirce, Benjamin, *Linear associative algebra* (1870); in: Am. J. Math. **4** (1881), 97–229; JFM **13** 82
Lin. Alg. Appl.	Linear Algebra and its Applications, North Holland/NY
MAA	Mathematical Association of America, Washington/DC
Math. Ann.	Mathematische Annalen, Springer/Heidelberg
Math. Intell.	Mathematical Intelligencer, Springer/NY
Math. Z.	Mathematische Zeitschrift, Springer/Berlin
MR	Mathematical Reviews, AMS
n.s.	new series
Nieuw Arch. Wisk.	Nieuw Archief voor Wiskunde, Math. Centrum/Amsterdam
NORMAT	Nordisk matematisk tidskrift, Skand. University Press/Oslo
NTM	Schriftenreihe zur Geschichte von Naturwissenschaft, Technik und Medizin, Birkhäuser/Basel
NY	New York (bei Verlagsangaben)
o	oben (bei Seitenangaben)
r	rechts (bei Spaltenangaben)
Rend. Circ. Mat. Palermo	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo
RZM	Weyl, Hermann, *Raum, Zeit, Materie*, Springer/Berlin 1918; JFM **46** 1277. Man beachte, daß die von mir gegebenen Seitenzahlen auf die 1. und 2. (unveränderte) Auflage bezogen sind.
$\mathcal{SCH}$	SCHAUDERs Axiomensystem (vgl. S.176)
Stud. Hist. Philos. Sci.	Studies in History and Philosophy of Science, Pergamon/Oxford
$\mathcal{U}$	Unitarität
u	unten (bei Seitenangaben)

V&R	Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen
V&R–Studien	Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, V&R
$\mathcal{W}$	WEYLS Axiomensystem (vgl. S.167)
$\mathcal{WN}$	WIENERS Axiomensystem (vgl. S.170)
Zbl.	Zentralblatt für die Mathematik und ihre Grenzgebiete, Springer/Berlin

Wo von *Dimensionsaxiom* die Rede ist, ist gemeint: *Es gibt in der betrachteten Menge n linear unabhängige Elemente, aber $n+1$ sind linear abhängig*; *Basisaxiom* heißt die Forderung *Jedes Element besitzt eine Darstellung als Linearkombination einer bestimmten Menge von Elementen.* Wenn ich mich gelegentlich auf Aussagen von LORENZ beziehe, so sind dies Aussagen, die Professor Kuno Lorenz in einem Vortrag gemacht hat, den er am 23.06.1997 in Saarbrücken im Rahmen der Ringvorlesung *Geschichte der Mathematik* hielt und der sich mit den Unterschieden von klassischer und moderner Axiomatik beschäftigte (bzw. ich *glaube*, daß Herr Lorenz diese Aussagen gemacht hat; mehr kann ich nicht behaupten, wie das nun einmal mit Vortragsmitschriften so ist).

Hinweise zur Benutzung der vorliegenden Arbeit

Diese Arbeit ist ohne die Infrastruktur eines mathematikhistorischen Instituts entstanden; ihre Lektüre setzt daher diese Infrastruktur auch nicht voraus. Das bedeutet, daß ich insbesondere auch da zitiere, wo man gewöhnlich nur verweisen würde.

Auf Übersetzungen fremdsprachlicher Zitate habe ich verzichtet in der Hoffnung, daß man die nötigen Kenntnisse des Englischen, Französischen und seltener Italienischen bei den Lesern voraussetzen darf — und auch im Blick auf die mit einer Übersetzung verbundenen Gefahren[1]. Übersetzungen

Verweise auf zugrundegelegte Veröffentlichungen geschehen in der kürzestmöglichen Weise durch Anführung einer fortlaufenden, im Literaturverzeichnis wiederzufindenden Referenznummer in eckigen Klammern, und zwar nach Möglichkeit direkt vor oder hinter der Zitation (also im laufenden Text, nicht in einer Fußnote[2]). Der schließenden eckigen Klammer folgen in der Regel eine oder mehrere Zahlen. Sie haben folgende Bedeutung: Referenzen

Art der Zahlenkombination	Bedeutung
Einfache arabische oder seltener römische Zahl	Seitenzahl
Mehrere Zahlen gleicher Art durch Kommata getrennt	Seitenzahlen
Fettgedruckte arabische Zahl (gefolgt von ‚S.' und einer gewöhnlichen Zahl)	Nummer des betreffenden Aufsatzes in einem Sammelwerk (gefolgt von Seitenzahlen)
Fettgedruckte arabische Zahl, gefolgt von einem Punkt	Originalparagraph[3]
Gewöhnliche römische Zahl (gefolgt von ‚S.' und einer gewöhnlichen Zahl)	Bandnummer eines mehrbändigen Werkes oder Teil eines mehrteiligen Artikels (gefolgt von der Seitenzahl)

[1] vgl. etwa das Problem bei CROWE, das auf S.62 geschildert wird.
[2] die Fußnoten sind in der ganzen Arbeit fortlaufend numeriert.
[3] Alte Arbeiten haben häufig eine genügend feine fortlaufende Gliederung in Paragraphen, die ich den Seitenzahlen vorgezogen habe, weil sie gegen Neuausgaben unanfälliger ist; dies kann auch am §–Zeichen zu erkennen sein.

Ausgaben Ich habe mich bemüht, im Falle mehrerer mir zugänglicher Ausgaben einer Arbeit die verschiedenen Seitenzahlen aufzuführen. Ich berücksichtige auch (aber möglichst nicht nur) Gesamtausgaben, nochmalige Abdrucke in Anthologien u. dgl.; dadurch enthalten manche Nachweisungen mehrere Referenznummern, gefolgt von den jeweiligen Seitenzahlen und getrennt durch ‚bzw.' oder ein Semikolon. Oft war es mir selbst sehr hinderlich, daß ein Autor zu einer Quelle, die ich an und für sich besaß, nur Seitenzahlen mitteilte, unter denen sie in einer mir nicht zugänglichen Ausgabe abgedruckt war. Manche Gesamtausgaben sind allerdings Faksimileausgaben oder verwenden auf sonst eine Weise originale Seitenumbrüche (dann kann man die dort gemeinte Seitenzahl errechnen); solche Ausgaben sind in der Literaturliste mit einem *fs* versehen. Ich bringe dann entweder die Seitenzahl der Gesamtausgabe oder die originale (eine Vereinheitlichung habe ich nicht durchgeführt), wobei meist leicht zu entscheiden sein wird. Ich habe allerdings in der Regel, wo es nicht

Auflagen historisch geboten war, anders zu verfahren, nur eine (die älteste) Auflage eines Werks berücksichtigt. Zu erwähnen ist die Ausnahme von Bourbakis Geschichtswerk [18], wo ich sowohl die deutsche Ausgabe von 1971 als auch die französische von 1969 — die der von 1960 in den von mir benutzten Kapiteln entspricht — herangezogen habe; die beiden Seitenzahlen sind durch ‚dt.' bzw. ‚frz.' gekennzeichnet.

Die Einträge im Literaturverzeichnis sind alphabetisch nach Autoren und innerhalb eines Autors nach Erscheinungsjahr geordnet. Um die Größe des Literaturverzeichnisses zu reduzieren, haben Titel, die ich nur sporadisch benutze, keine Referenznummer erhalten; sie sind an der Stelle ihrer Verwendung nachgewiesen.

Abkürzungen An Abkürzungen verwende ich in erster Linie:

a) für die Axiome und Axiomensysteme in guter Tradition kalligraphische Großbuchstaben, etwa $\mathcal{U}$ für ‚Unitarität'.

b) für bestimmte ‚kanonische' Quellen suggestive, z.T. bereits übliche Kürzel. Diese Veröffentlichungen erhalten keine Referenznummer, das Literaturverzeichnis verweist aber auf sie.

c) für häufig wiederkehrende Zeitschriftennamen u. ä. Abkürzungen, die höchstens dann von den gebräuchlichen verschieden sind, wenn mir an einer weiteren Verkürzung gelegen war.

Ansonsten treten nur wenige Abkürzungen auf; das Abkürzungsverzeichnis gibt einen Überblick.

Kernbestand einer historischen Arbeit sind die Zitate aus Quellentexten und Sekundärliteratur. Diese Texte werden, soweit nötig, wiedergegeben und sodann nach den verschiedenen in ihnen berührten Aspekten unseres Themas untersucht. Dabei ist folgendes zu beachten:

— Ein kürzerer und gleichwohl im Sinne des Themas reichhaltiger, verschiedenen Aspekten zugehörender Text müßte mehrfach (wo immer er benötigt wird) wiedergegeben werden, was die Länge der Arbeit unnötig vergrößern würde. Daher sollte einmal der Text zitiert, sodann auf die Mitteilungsstelle verwiesen werden. Umgekehrt sollte man für einen nur einmal verwendeten Text nicht auch noch blättern müssen.

— Würde ein größerer Text in ebensovielen stückweisen Zitaten über die gesamte Arbeit verteilt, wie er thematischen Teilaspekten zugehört, so wäre der Text nicht mehr als Einheit (insbesondere als eine mit einer eigenen inneren Chronologie versehene Einheit) wahrnehmbar. Daher sollte zunächst ein solcher Text in der insgesamt benötigten Form an einer zentralen Stelle mitgeteilt, sodann bei Bedarf auf diese Stelle verwiesen werden. Solche Verweise können aber nicht nach den groben Angaben von Seitenzahl oder Abschnittsnummer (seien diese nun original oder durch den Ort in dieser Arbeit erklärt) geschehen, da ja gerade auf den Teil des Texts verwiesen werden soll, der einem bestimmten Teilaspekt zugehört (und der vielleicht nur einen einzigen Satz umfaßt). In kritischen Quellenausgaben ist es üblich, eine Zeilennumerierung zu geben; hier wird statt dessen folgendes Verfahren angewandt: genügend kleine

Texteinheiten werden am Rand mit Markierungen versehen, die aus dem Zeichen # und einer Zahl bestehen[4]. Diese Zahlen sind in der gesamten Arbeit fortlaufend. Dadurch werden die Verweise sehr viel kürzer. Wenn nun innerhalb der Arbeit auf eine solche Markierung Bezug genommen wird, soll natürlich das Auffinden der so bezeichneten Stelle möglichst erleichtert werden; daher gibt es auf S.179 ein Verzeichnis der Seiten, auf denen die Markierungen eingetragen sind. #–Marken

Bei den meisten Quellen genügt zur Darstellung des mathematischen Gehalts eine Mitteilung in Form einer nicht notwendig wörtlich zitierenden Zusammenfassung, weil ihr mathematischer Gehalt nicht bis zur Ebene des Wortlauts der Untersuchung bedarf. Insbesondere ist das ein vertretbares Verfahren für Quellen, die für den Leser bestens zugänglich sind. Quellen, auf die mindestens eines von beiden nicht zutrifft, die also nur schwer zugänglich sind oder die im originalen Wortlaut (im mathematischen Sinn, also auch in den originalen Notationen) benötigt werden, werden in breiterem Rahmen wörtlich wiedergegeben. Die Zusammenfassungen finden sich im ersten Kapitel, die ausführlichen Zitate im Anhang A; zur Verwendung dieses Anhangs vergleiche die zugehörigen einleitenden Bemerkungen auf S.145. In beiden Fällen dienen die mit einer Raute # versehenen Anmerkungsmarken als Bezugsstellen. Ein Text, der in den Anhang aufgenommen ist, wird im ersten Kapitel nicht etwa ganz ausgelassen, sondern der Vollständigkeit halber erwähnt; eventuell finden sich hier auch ergänzende Informationen zu einem solchen Text. Quellenanhang

Unbeschadet dieser Regelungen für mehrfach verwendeten Quellentext wird auch der laufende Text der vorliegenden Arbeit unterbrochen durch Zitate, aber auch anderen ‚Sondertext', etwa Hervorhebungen u.ä.; dieser wird folgendermaßen kenntlich gemacht: Sondertext

Art des Sondertextes	Art der Hervorhebung
Kürzere Zitate (sog. 1. Art)	in den laufenden Text eingebettet; eingerahmt in doppelte Anführungszeichen und kursiv
Längere Zitate (sog. 2. Art)	in eigenem Abschnitt beidseitig eingerückt
Originalhervorhebungen innerhalb der Zitate 1. Art	gesperrt
Originalhervorhebungen innerhalb der Zitate 2. Art	original
Zitate innerhalb der Zitate 1. Art	in einfachen Anführungszeichen
Zitate innerhalb der Zitate 2. Art	in der Originalkennzeichnung
Hervorhebungen im eigenen Text	kursiv
Fremdsprachliche Begriffe, die in deutschen Sätzen verwendet werden	kursiv
Begriffe, die nicht gebraucht, sondern erwähnt, eben angeführt, werden[5]	in einfachen Anführungszeichen

Zwischen *Quellen* (die Gegenstand der Untersuchung sind) und *Sekundärliteratur* (die selbst untersucht) unterscheide ich hierbei typographisch nicht. Die Trennungslinie zwischen beidem ist ohnedies fließend, insofern viele ‚Quellen' Untersuchungen älterer Quellen enthalten und andererseits ‚sekundäre' Texte selbst Gegenstand meiner Untersuchung sein können — zum Beispiel bezüglich ihrer Methodik.

Die Orthographie aller, auch älterer, Zitate habe ich beibehalten, ebenso die Originaldruckfehler darin (diese allerdings kommentiert durch das Zeichen ✓). Beides gilt auch für mathematische Ausdrücke. Das Zeichen ✓ erscheint auch, wenn eine Orthographie zwar richtig ist, aber im gleichen Kontext auch anders sein könnte und dann einen anderen Sinn ergäbe. Orthographie ✓

[4] die einzige Verwechslungsmöglichkeit für solche Markierungen innerhalb dieser Arbeit ergibt sich bei Verweis auf Einträge aus den *Mathematical Reviews*, die für die Bände **20** (1959) bis **58** (1979) traditionell in der Form MR **X** #Y geschehen, wobei **X** die Bandnummer, Y die Reviewnummer ist. Durch das Präfix MR **X** sollte Klarheit entstehen.

[5] hierzu sollen auch jene Fälle gezählt werden, in denen der Blick auf den etymologischen Gehalt eines Terminus gelenkt werden soll oder in denen ich mich von meiner eigenen Ausdrucksweise sozusagen distanzieren will.

[,] Innerhalb sämtlicher Zitate sind Ergänzungen von mir in eckigen Klammern [,] eingerahmt. Dabei bezeichnet [...] von mir vorgenommene Auslassungen in längeren Zitaten; Solche Angaben werden am Anfang oder Ende von Zitaten normalerweise nicht vorgenommen (weil es ja selbstverständlich ist, daß im Originaltext noch etwas vorangeht bzw. folgt). Eine Ausnahme hiervon stellen die Fälle dar, wo angezeigt werden soll, daß im ursprünglichen Text eine Satzkonstruktion oder (in Zitaten mit mehreren Abschnitten) ein Abschnitt anders begonnen hat bzw. weiterging. Schließlich habe ich in eckigen Klammern die originalen Seitenumbrüche (zur besseren Unterscheidung von den Literaturreferenznummern mit vorangestelltem ‚S.') vermerkt, um das Auffinden der Belegstellen zu erleichtern. Wo in Originaltexten eckige Klammern auftreten und somit nicht mehr zu unterscheiden wäre, was original und was von mir hinzugefügt ist, schaffen Anmerkungen Klarheit.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die vorliegende Fassung der Arbeit nicht die Urfassung ist. Von letzterer gibt es nur die vier Pflichtexemplare; ich habe zum Abgabezeitpunkt nur jene vier Exemplare anfertigen lassen, weil keine Zeit mehr war, die Druckvorlage in eine Form zu bringen, die eine Verfielfältigung im größeren Rahmen verdient hätte. In der vorliegenden Fassung sind denn auch offensichtliche Fehler orthographischer wie sachlicher Art stillschweigend berichtigt und grobe Formulierungsmängel behoben. Unbeschadet davon weicht der Text inhaltlich nicht vom Originaltext ab. Weiter habe ich mich um einen besseren Zeilen- und Seitenumbruch bemüht — wobei die originalen Seitenzahlen praktisch nicht angetastet wurden. Ebenfalls verbessert wurde die im Original unbefriedigende Positionierung der #–Markierungen. Das Literaturverzeichnis erfuhr eine Überarbeitung; dieses soll ja streng nach Autoren (alphabetisch) und innerhalb eines Autors nach Erscheinungsjahr geordnet sein, doch diese Chronologie innerhalb eines Autors war leider nicht ganz durchgehalten. Durch die Überarbeitung ergaben sich einige wenige Vertauschungen bei den Referenznummern, die hoffentlich verkraftbar sind. Neu eingeführt wurden Abkürzungen für die Axiomensysteme verschiedener Autoren.

Einleitung

Der Vektorraumbegriff ist, wenn man ihn mit den Begriffen Gruppe, Körper, Algebra vergleicht, erst seit kurzer Zeit Gegenstand mathematikhistorischer Forschung. Dies erklärt sich daraus, daß die genannten Begriffe zu einem früheren Zeitpunkt allgemein verwendet wurden. Deren einer — die Algebra — ist zwar mathematisch spezieller als der Vektorraum; das ist aber kein Widerspruch, vgl. Abschnitt 5.1.2.2. Ein Spezialfall mag zwar sachlich nachgeordnet sein, tritt aber historisch häufig früher auf, und der ideengeschichtliche Prozeß ereignet sich dann darin, daß der zugrundeliegende allgemeinere Begriff aus dem vorhandenen spezielleren herauspräpariert wird.

In weit verbreiteten Werken zur Geschichte der Mathematik ist nur wenig über die Geschichte des Vektorraumbegriffs zu finden. So erwähnt ihn Bartel Leendert VAN DER WAERDEN in *A history of algebra from al–Khwārizmī to Emmy Noether* (Zürich 1985) überhaupt nicht. Etwas besser sieht es aus, was die Rolle des Begriffs speziell in der jungen Funktionalanalysis betrifft, die bereits auf dem ICM 1928 in Bologna hervorgehoben wird; HADAMARD spricht über die Ursprünge dieses damals gerade erst voll ausgeprägten Zweiges der Mathematik und nennt als Vorreiter der *conception de vecteur dans les espaces fonctionnels* PINCHERLÉ, FRÉCHET, WIENER, BANACH (vgl. [75] 151). 1935 schreibt HELLINGER die erste kurze Geschichte der Funktionalanalysis ([89]; zu unserem Thema findet sich darin eine knappe Notiz über HAUSDORFF und BANACH auf S.123) Die Frage ist daraufhin in einer Reihe von historischen Arbeiten im funktionalanalytischen Zusammenhang berührt worden (vgl. [10] 2); MONNA wünscht sich in seiner Geschichte der Funktionalanalysis eine breitere Perspektive ([120] 88):

> a survey of the relations with algebra is a domain of research for itself and is such an ambitious program that it cannot be dealt with in this book [...] a more detailed study of the history of linear spaces, placed in the broad frame of algebra, would be highly interesting.

Zu Beginn der 80er Jahre unterstrichen zwei Autoren die Notwendigkeit einer eingehenden Untersuchung: GRAY in [73] und MACLANE in [110]. Letzterer formulierte auf S.15 seiner Arbeit geradezu die Frage, die Thema dieser Arbeit ist. Kürzlich folgten einige größere Artikel, mehrere von Jean Luc DORIER ([50], [51], [52]) und eine Arbeit von Gregory H. MOORE ([127]). Während Dorier u.a. einen *outline* der gesamten Geschichte (insbesondere der Vorgeschichte) des Vektorraumbegriffs gibt, fokussiert Moore enger auf die Frage MacLanes (zu der — was Moore nicht erwähnt — MacLane selbst in [110] ja bereits eine wenn auch keineswegs erschöpfende Antwort gibt, die ich auf S.121 dieser Arbeit wiedergebe). Eine weitgehend abschließende Monographie zum Thema (wie etwa [201] zum Gruppenbegriff oder [168] zum Begriff der Mannigfaltigkeit) liegt bisher nicht vor.

Die vorliegende Arbeit faßt die bisher in der Sekundärliteratur zu findenden Angaben zusammen, überprüft und, wo nötig und möglich, ergänzt sie. Die Arbeit hat daher über weite Strecken bibliographischen Charakter. Darüberhinaus wird insbesondere Raum sein, mathematische Sachverhalte weiter auszuführen, wenn diese — wie das in mathematikhistorischen Veröffentlichungen in der Regel der Fall ist — nur angedeutet wurden. So habe ich etwa viele der Beweise ausgeführt, die von den Autoren dem Leser überlassen worden waren. Diese haben zwar oft in der Tat nur Übungsaufgabenniveau (insbesondere im Blick darauf, daß die lineare Algebra heutzutage beinahe schon als Elementarmathematik gilt); insgesamt aber hat gerade erst diese intensive Beschäftigung mit den vermeintlich allbekannten Axiomen und ihren direkten Implikationen dazu geführt, daß die feinen Unterschiede der einzelnen Systeme sichtbar wurden und bewertet werden konnten.

Die Arbeit zerfällt methodisch in drei Teile. Im ersten Teil werden die zugrundeliegenden Quellen genannt, nachgewiesen und kurz inhaltlich beschrieben. Der dann mögliche inhaltliche Vergleich der Arbeiten führt zur Wahrnehmung ideengeschichtlicher Phänomene, die im zweiten Teil zusammengestellt und gegliedert werden. Vor dem Hintergrund dieser Ideengeschichte (die die impliziten, sachlichen Bezüge zwischen den Quellen verdeutlicht) erlaubt nun die Untersuchung der expliziten, referentiellen Bezugnahme die Beobachtung akzeptanzgeschichtlicher Phänomene. Im dritten Teil wird daher der soziale Prozeß skizziert, in dem der Begriff in seine heutige Stellung als allen Mathematikern gemeinsames Vokabular eingesetzt wurde.

Die Quellengeschichte betreffend kann man versuchsweise eine Einteilung der Geschichte des Vektorraumbegriffs in Phasen vornehmen (eine Einteilung, die die anschließenden Untersuchungen einer kritischen Prüfung unterziehen müssen). Mathematikhistoriographen bedienen sich solcher Periodisierungen — wie es ja Historiker überhaupt tun —, um so über die untersuchten Vorgänge eine Übersicht zu gewinnen, die zum Verständnis der Vorgänge beitragen kann. Zugleich kann es sein, daß in den gewählten Einteilungskriterien Vorstellungen des Historikers darüber zum Ausdruck kommen, wie der Gang der Geschichte ‚üblicherweise' sein sollte. David HILBERT äußerte sich so[6]:

> In der Geschichte einer mathematischen Theorie lassen sich meist 3 Entwicklungsperioden leicht und deutlich unterscheiden: Die naive, die formale und die kritische.

In der Bezeichnung der ersten und der letzten Phase wird Hilberts Einstellung zur Vergangenheit deutlich, wie sie ROWE pointiert hat (Rowes Formulierung gebe ich auf S.123 dieser Arbeit wieder). Der Zbl.–Referent R. COOKE erwähnt in Zbl. 627.01011 ein Modell, das nach seinen Angaben von Wissenschaftsphilosophen allgemein verwendet wird. Dieses Modell umfaßt die nunmehr vier Phasen *prehistory, formative, classical* und *modern*. Ich glaube, abgesehen vom letztgenannten Begriff, der Einteilung folgen zu können.

Ich die präzise Bedeutung nicht, die der Autor der Arbeit, die Cooke bespricht, dem Adjektiv *modern* gegeben hat. Ich empfinde das Adjektiv aber als zu immanent, zu sehr dem augenblicklichen Zustand der betroffenen Wissenschaft verpflichtet. Wer seine eigene Zeit als ‚modern' bezeichnet, scheint in größenwahnsinniger Selbstsetzung die Zeit anhalten zu wollen; daß die davon unbeeindruckt weitergegangen ist und daß konventionale Bezeichnungen irreversibel sind, hat uns die skurrile ‚Postmoderne' beschert (und neuerdings sogar die ‚Postpostmoderne' — wird man Geschichtsforschung bald mit vollständiger Induktion betreiben können?). Gleichzeitig hat dieses Adjektiv den Nachteil der ungeklärten Bedeutung[7].

Die als *prehistory* bezeichnete Phase ist dadurch geprägt, daß die Grundideen nur implizit in anderen (aus heutiger Sicht engeren) Zusammenhängen angelegt, quasi verborgen sind; vgl. Abschnitt 3.1.2.1. Im Falle des abstrakten Vektorraumbegriffs beginnt diese Phase noch in der ersten Hälfte des 19.Jahrhunderts mit GRASSMANN und HAMILTON und reicht bei manchen Autoren bis in die zwanziger und dreißiger Jahre unseres Jahrhunderts.

[6] *Über die Theorie der algebraischen Invarianten*, in: Proc. ICM Chicago 1893 (erschienen bei MacMillan/NY 1896), 116–124, hier S.124, oder in [91] II S.376–383, hier S.383

[7] [136] 223 *„It is the historical point of view which demonstrates the relativity and transience with which one may attribute the term "modernness" to any body of scientific knowledge; during the life of the generation which created it, modern knowledge is usually replaced by an even more modern knowlegde."*. [12] 773 *„the abstract approach adopted by v.d.Waerden for algebra [...] had come to seem no longer modern but classical"*. Zur weiteren Diskussion vgl. die Anmerkung 55 oder den Abschnitt 5.1.3 zum Begriff ‚moderne Algebra'.

Die zweite, als *formative* bezeichnete Phase stellt die Zeit der erstmaligen Formulierungen des Begriffs dar. Abgesehen von der Frage des Grundkörpers ist das bei PEANO der Fall. Dieser ist die zentrale Gestalt meiner Untersuchung. Einerseits greift er die Ausdehnungslehre GRASSMANNs auf und versucht eine Darstellung und Fortspinnung dieses Systems in klarer, gewinnender Form. Das IX.Kapitel seines *Calcolo* erreicht die Isolation des in der Ausdehnungslehre implizit enthaltenen Begriffs des $\mathbb{R}$–Vektorraums; damit führt es die Ausdehnungslehre (aus der nachträglichen Sicht der heutigen Mathematik) zu einem ihrer ‚eigentlichen Ziele'. Man kann daher Peanos Buch als vorläufigen Schlußpunkt einer historischen Entwicklung auffassen. Zugleich entwickelt das IX.Kapitel rudimentär Begriff und Theorie der linearen Abbildung und damit das Handwerkszeug der späteren Funktionalanalysis; PINCHERLÉ nähert sich in den folgenden Jahren unter Bezug auf Peano den algebraischen Gesichtspunkten dieser wichtigen Theorie bereits stärker. In diesem Feld erscheint Peanos Buch nun als bescheidener Anfangspunkt, undeutliche Vorahnung einer sich erst anbahnenden historischen Entwicklung; es besteht eine schmerzliche Parallele zu GRASSMANN, da beide Beiträge zunächst lange ungenutzt liegenbleiben und erst nach Jahrzehnten einen Platz in der akzeptierten Mathematik bekommen — wonach man dann versucht ist zu sagen, man habe erst nach Jahrzehnten ihre ‚wahre Relevanz' erkannt. Insgesamt ist Peanos IX.Kapitel also Angelpunkt, verbindendes Element zweier Stränge mathematischer Bemühung, denen rückblickend genau der Begriff gemeinsam ist, der im IX.Kapitel eingeführt wird.

In der *formative*–Phase gelangte also der Begriff nicht zu seiner allgemeinen Anerkennung; das ist der nächsten Phase vorbehalten, als WEYL, BANACH, VON NEUMANN, die Vertreter der modernen Algebra in ihren Arbeiten die *Nützlichkeit* des Begriffes in vielen verschiedenen Fragestellungen verdeutlichen (*classical*). Ausdruck der allgemeinen Anerkennung ist dann das Eindringen in die Lehrbücher in der letzten Phase. In dieser letzten Phase findet dann auch erst eine historische Würdigung des Begriffs statt (was, wie oben gesagt, beim Gruppenbegriff usw. früher der Fall war); insofern kann man die letzte Phase — unter Entlehnung des HILBERTschen Terminus — *critical* nennen. Die Lehrbücher sind in dieser Hinsicht allerdings gerade das Gegenteil von *critical*; sie haben eher eine immanente kritische Funktion, indem ihnen daran gelegen ist, den Begriff ‚auf den Punkt zu bringen'.

Was die Gliederung der Ideengeschichte betrifft, so stelle ich zuerst dar, was aus historischer und systematischer Sicht die Charakteristika der durch die Vektorraumtheorie vertretenen Strukturmathematik sind. Dann untersuche ich die Fragen ‚Was versteht man heute mathematisch unter einem Vektorraum?' und ‚Inwiefern ist dieser heutige Vektorraumbegriff in den jeweiligen Quellen verwirklicht?'. Es handelt sich beim Vektorraumbegriff um einen Komplex verschiedener einfacherer Begriffe; die Herausbildung des Gesamtkomplexes ereignet sich in der Herausbildung der einzelnen Begriffe — in ihrer Wahrnehmung und in ihrer Unterscheidung von den übrigen. Das Ergebnis ist die abstrakte Vektorraumtheorie. Ein weiterer Strang der Untersuchung befaßt sich mit den erkenntnistheoretischen Aspekten der verschiedenen historischen Stadien dieser Theorie, insbesondere mit ihren Verbindungen zur Geometrie in erkenntnistheoretischer Hinsicht. Es ist dabei schwierig, immanent mathematische Probleme von philosophischen zu unterscheiden (z.B. hängt der Gedanke, den Vektorraum als eine Menge ungeachtet aller konkreten Details aufzufassen, mit dem Gedanken zusammen, nicht mehr den Realitätsbezug der Theorie zu thematisieren); darin liegt die Dialektik des Themas.

Der dritte akzeptanzgeschichtliche Teil der Arbeit versucht zunächst auf allgemeiner Ebene eine Anwendung der Theorie KUHNs auf die Mathematik, woraus sich einige Erklärungsversuche für unter der erkenntnistheoretischen Fragestellung gemachte Beobachtungen ergeben. Die Arbeit schließt mit Untersuchungen zum Verhältnis von Akzeptanz und Rezeption des Begriffs an den Beispielen von GRASSMANN und PEANO.

Die Arbeit geht, wie das Gesagte ahnen läßt, in ihren letzten drei Kapiteln über immanent mathematische Fragestellungen hinaus. Ich habe dies für nötig gehalten, um die ideengeschichtlichen Phänomene tatsächlich interpretieren zu können. So ist es bei einer historischen Arbeit beispielsweise wichtig, zur gegenwärtigen Mathematik Distanz zu halten, um nicht stehen zu bleiben bei *a posteriori*–Beurteilungen aus einer der heutigen Mathematik immanenten Perspektive, die etwa die Übereinstimmung mit dem heute vorfindlichen Begriff (*nearly exact*) oder die rückblickende Wirkmächtigkeit der Formulierung (*anticipation*) über ihre Faktizität hinaus in eine historische Kausalität zwingen. Monna drückt das Problem ungefähr so aus ([124] 2): der Historiker weiß schon, was nach den Ereignissen geschah, die er besprechen will, woraus sich die Gefahr der Projektion ergibt. Ich versuche insofern, keine Wertung der dargelegten Fakten vorzunehmen.

Wie wohl bereits bei der Lektüre dieser Einleitung klar wird, konfrontiert diese Arbeit den Leser sozusagen mit einem Dimensionsphänomen: Ein Buch ist ein eindimensionaler Raum von Gedanken, den man von vorne nach hinten durchläuft; der Fluß der Lektüre wird aber durch zahlreiche Querverweise und Bezüge auf anderswo dargestellte Quellen unterbrochen, die das Buch zu einer komplizierten topologischen Struktur machen. Für den Ärger, den dieser Umstand dem Leser bereiten mag, kann ich ihn nur um Verzeihung bitten; zugleich appelliere ich an seine Begierde, komplizierte topologische Strukturen zu untersuchen. Letztlich gilt für den Leser wohl dasselbe wie für den TEX–Compiler: Erst nach dem zweiten Lesen sind die Bezüge klar.

Teil I

Quellengeschichte des Vektorraumbegriffs

Bibliographische und inhaltliche Charakterisierung der Quellen

Kapitel 1

Primärquellen

Dieses Kapitel stellt den historischen Quellenbefund zusammen, der für das Thema der Arbeit relevant ist. Die Anführung erfolgt chronologisch. Im Rest der Arbeit wird ständig der Inhalt dieses Kapitels benutzt; wem aber die detailreichen Angaben zu den einzelnen Quellen als Einstieg in die Lektüre zu ermüdend sind, der kann gleich mit der Lektüre von Kapitel 3 beginnen und sich auf das Verweisnetz verlassen.

Eine Reihe von Quellen habe ich nicht eingesehen; sie werden also in der Arbeit nicht untersucht. Sie werden hier der Vollständigkeit halber nachrichtlich erwähnt — wo möglich, gebe ich Sekundärliteratur an — und sind mit dem Buchstaben **N** gekennzeichnet. Aus mit dem Buchstaben **A** gekennzeichneten Quellen teilt der Anhang die relevanten Abschnitte ausführlich und wörtlich mit. Daher beschränkt sich ihre Beschreibung im vorliegenden Kapitel einerseits auf Grundsätzliches, andererseits auf Ergänzendes, und wirkt dadurch vielleicht etwas uneinheitlich. Die Auswahl der **N**– und **A**–Quellen ist teilweise sachlich gerechtfertigt, teilweise aber auch durch die Saarbrücker Verhältnisse bedingt. Zu den übrigen Quellen ist eine kleine möglichst nah am Original bleibende Inhaltsangabe (die sich natürlich auf das in unserem Zusammenhang Interessante beschränkt) gegeben.

Es bietet sich im Rahmen der Sichtung des Quellenmaterials an, Beobachtungen darüber zu notieren, welche Namen für welche Gebilde von den Autoren verwendet wurden. Allerdings gehört die genaue Untersuchung dieser Nomenklatur zur Ideengeschichte, wo erst eine detaillierte Analyse der Gebilde vorgenommen wird.

1679

Leibniz befaßt sich mit metrikfreien Methoden in der Geometrie; in einer Preisaufgabe der Jablo- **N**
nowskischen Gesellschaft aus dem Jahr 1847 (die Grassmann in seiner *Geometrischen Analyse* #1
löst; näheres dazu steht [71] I,1 S.415–420) heißt es (zitiert nach [71] III,2 S.109):

> Es sind noch einige Bruchstücke einer von Leibnitz erfundnen geometrischen Charakteristik übrig [...], in welcher die gegenseitigen Lagen der Orte, ohne die Größe von Linien und Winkeln zu Hilfe zu ziehen, unmittelbar durch einfache Symbole bezeichnet und durch deren Verbindung bestimmt werden, und die daher von unserer algebraischen und analytischen Geometrie gänzlich verschieden ist. [...]

Eine Darstellung dieses Leibnizschen Kalküls gibt [25] 3ff; die dortige Anm.11 verweist wegen einer *fuller exposition* auf Leibniz' *Mathematische Schriften* (erschienen bei Gerhard/Halle 1858) Bd.V, 141–171. Peano ([144] V) verweist auf auf die Gesamtausgabe aus dem Jahr 1849, Bd.II S.17.

1827

N Möbius veröffentlicht seinen *Barycentrischen Calcül*; vgl. [25], [201].

1843

In diesem Jahr erarbeitet Hamilton die Quaternionen. Darstellungen von Hamiltons Gedankengang geben [25], [54] 162, [136] 173ff, [140] 226ff, [184].

1844

A_1 — Grassmann veröffentlicht seine *Lineale Ausdehnungslehre.* Er sieht die Ausdehnungslehre als neue Wissenschaft und versucht eine von Analysis und Arithmetik unabhängige Grundlegung; insofern verzichtet er auch auf das Konzept der Zahl und somit auf eine Skalarmultiplikation (vgl. [50] 178); erst in §68 führt er ‚Zahlgrössen' auf der Grundlage seiner Ausdehnungsgrößen ein. Statt der bekannten Mathematik bedient sich Grassmann eines philosophischen Unterbaus; sein Ausgangspunkt sind die Begriffe ‚Element' und ‚Änderung'; Engel sagt über den Versuch der unabhängigen Grundlegung, daß er *„gescheitert ist und scheitern mußte, da die Be*[S.96]*griffe „Element" und „Änderung", aus denen Alles hergeleitet wird, viel zu inhaltslos sind, als daß sich aus ihnen die Folgerungen ziehen ließen, die G r a ß m a n n gezogen hat"* ([71] III,2 S.95f; Engel verweist auf [71] I,1 S.404ff, wo er das näher untersuche). Grassmann entwickelt weiter die dialektische Gegenüberstellung von stetig/diskret (S.XXIV) und gleich/verschieden (S.XXV; vgl. dazu auch [136] 180 bzw. [25] 66). Er betrachtet synthetische (z.B. Addition, Multiplikation) und analytische (z.B. Subtraktion, Division) Verknüpfungen (§§1–12); diese Idee findet sich übrigens lt. [136] 197 schon bei De Morgan. Grassmanns Ausdehnungsgrößen sind nicht a priori vorhanden, sondern
#2 werden erzeugt (die A_1 hebt auf S.XXIIIf den Unterschied von ‚erzeugen' einerseits, ‚setzen und verknüpfen' andererseits hervor). Diese Erzeugung geschieht durch verschiedene ‚Grundänderungen' bzw. ‚Erzeugungsweisen'. Algebraisch wird das ausgedrückt durch progressive Produktbildung[8]. Durch dieses genetische Verfahren gelingt es Grassmann lt. [50] 178 „[to] *prevent the temptation of using* […] *a coordinate system".* Die Zahl der Erzeugungsweisen („Stufe") entspricht begrifflich nur bedingt der Dimension (vgl. meine Ergänzungen zu #101 auf S.149). Grassmann bemerkt (§20 S.30; vgl. [50] 179) dazu, daß das Erzeugnis von den Erzeugungsmethoden unabhängig ist; auch zeigt er die Eindeutigkeit der Darstellung bzgl. eines Erzeugendensystems (ebd. S.32). Metrische
#3 Betrachtungen sind einem geplanten zweiten Teil vorbehalten; vgl. [96] I S.175. Dieudonné hält den Inhalt von Grassmanns *Geometrischer Analyse* aus dem Jahr 1847 (vgl. #1) für den Inhalt dieses zweiten Teils ([43] 8).

Grassmann bespricht die Ausdehnungslehre selbst[9]; auf diese Besprechung weist er in A_2 S.III (bzw. [71] I,2 S.3) hin. Sie ist in der 1878er A_1 enthalten als Anhang III (S.277–293). Lt. Engel ([71] III,2 S.103) schrieb Grunert am 09.12.1844 an Grassmann in seinem Dankesschreiben für das übersendete Exemplar der A_1, Grassmann hätte besser nach seinem ursprünglichen Plan die
#4 euklidische Form beibehalten. Damit bezieht er sich auf S.XIV des Vorworts der A_1. Die Ausdehnungslehre bleibt nahezu völlig unbeachtet; die wenigen, denen (meist durch Grassmann selbst) das Buch bekannt ist, beklagen den ‚unmathematischen' philosophischen Aufbau und die schwere Lesbarkeit oder äußern sich überhaupt nicht. Erst gegen Ende von Grassmanns Leben besteht Bedarf nach einer zweiten Auflage der A_1, die 1878 erscheint.

[8] interessant in diesem Zusammenhang Peanos Äußerung unter #170: Er bezeichnet das progressive Produkt als originär geometrische Operation ohne *correspondente in algebra.* Er will meines Erachtens an die Vorstellung seiner Leser von der vorfindlichen Algebra gemahnen; für uns heute ist eine Produktbildung deshalb eine algebraische Operation, weil sich unsere Vorstellung von Algebra gewandelt hat.

[9] in: Grunert's Archiv der Mathematik und Physik **6** (1845), 337–350 (bzw. [71] I,1, 297–312)

1853

[81] — Hamilton betrachtet allgemeine n–dimensionale hyperkomplexe Zahlensysteme in Koordinatenschreibweise mit den üblichen Verknüpfungen, charakterisiert durch die Strukturkonstanten der Multiplikation. **N**

1861

[188] — Weierstrass gibt 1883 in einem Brief an, bereits im Jahr 1861 den Beweis vorgetragen zu haben, daß es kein hyperkomplexes Zahlensystem gibt, in dem neue Resultate möglich sind (S.328). Der Ort dieser Untersuchung im historischen Gesamtzusammenhang wird in Abschnitt 5.1.2.2 besprochen. Dedekind antwortet mit der Arbeit [32].

1862

A_2 — Grassmanns A_2 ist eine Neubearbeitung des Stoffs in anderem Stil (vgl. #90); Grassmann nimmt den geringen Anklang der A_1 dazu zum Anlaß. Grassmann wählt, dazu vielleicht von Grunert veranlaßt (vgl. #4), die *„strenge Euklidische Form“* für die A_2 (vgl. #91). Engel charakterisiert das als verhängnisvollen Mißgriff, da diese Form nicht geeignet sei, *„seinen Ideen Anhänger zu gewinnen, geschweige denn die zu bekehren, die seine erste Ausdehnungslehre nicht* #5 *hatten lesen wollen,* [...]“ ([71] III,2 S.231). So kommt es, daß das Werk, diesmal aus dem entgegengesetzten Grund (zu wenig Motivation, zu strenge mathematische Form), ebenfalls wenig Anklang hat. **A**

Es handelt sich bei der A_2 nicht um den geplanten zweiten Teil der A_1 (vgl. dazu #3, #89), der nach Klein (s. #3) und Zaddach hätte Metrik und Winkel behandeln sollen. Die A_2 geht über die A_1 hinaus im zweiten Abschnitt „Funktionenlehre“. Bereits in Grassmanns Brief an Möbius vom 22.05.1853 (mitgeteilt in Engels Biographie) wird die Wandlung deutlich. Das Verhältnis der A_2 zur A_1 ist aber auch nicht das einer zweiten Auflage zur ersten. Grassmann selbst betont unter #92 die Unähnlichkeit, wie es auch Dieudonné in #6 tut. Allerdings gilt schon, was Dorier in [51] 246 sagt: „*the mathematical content was not drastically changed in 1862* [gegenüber A_1]“. Grassmann verzichtet auf den Versuch einer von der übrigen Mathematik unabhängigen Grundlegung in der A_2 von vorneherein (vgl. [71] III,2 S.230). In [43] 8 schreibt Dieudonné:

> This new AL [A_2] was very different from the first [...] Belatedly realizing that he #6
> [Grassmann] had no chance [...] as Möbius had warned him, Grassmann reluctantly abandoned his idea of defining vector space and exterior algebra intrinsically and starts #7
> as Hamilton (although independently) by defining a vector space of dim n as the set of linear combinations of n “ursprüngliche Einheiten” $e_1, \dots, e_n$ assumed to be linear independent. [...] in the absence of the set–theoretical language which enables us to give the intrinsic definitions which he vainly sought, he had no other alternative open to him.

Dieudonné meint hier nicht, die Idee des intrinsischen Konzepts sei in der A_1 vorhanden gewesen, denn er schreibt in [43] 4 in einer Fußnote: *„neither he* [damit kann sowohl Grassmann als auch Hamilton gemeint sein; es spricht jedoch mehr für Grassmann] *nor Cayley* [...] *ever came to the concept of an intrinsically defined vector space“. Abandoned* (vgl. #7) klingt daher so, als sei es eine Idee für 1862 gewesen, die Möbius ihm ausredete. Bezieht sich Dieudonné etwa auf den Briefwechsel? Die bei Engel mitgeteilten Briefstellen geben dazu keinen Anhalt: In seinem Brief vom 02.09.1853 ermutigt Möbius Grassmann zur A_2, am 17.06.1854 wünscht er sich Klarheit für dieselbe. Möbius' schließliche Reaktion auf die A_2 ist unbekannt ([71] III,2 S.223f). Woher weiß Dieudonné, daß Grassmann irgendetwas ‚vergeblich suchte‘? Er weiß wohl, daß und warum es vergeblich war[10], aber woher weiß er, daß Grassmann etwas suchte? Kennt er irgendwelche Dokumente?

Die unter #110 eingeführte Schreibweise und die Einheitenschreibweise überhaupt treten bereits in Grassmanns Brief an Möbius vom 01.08.1854 auf. Einzig auf die dort untersuchten Probleme scheint die numerische Ableitung von Funktionen denn auch angewandt zu werden; daß die Funktionen ein Ausdehnungsgebiet bilden, wird höchstens implizit gesagt. Grassmann erkennt allerdings $\mathbb{C}$ als Ausdehnungsgebiet: Auf S.VI der A_2 steht ein Vergleich von $\mathbb{C}$ mit Ausdehnungsgrößen 2.Stufe; in **151.** und ähnlich in **413.** stellt er fest, daß 1 und $\sqrt{-1}$ die Einheiten einer imaginären Zahl $a+b\sqrt{-1}$ sind. **20.** enthält den Steinitzschen Austauschsatz; **25.** bringt die Dimensionsformel $\dim(U \cup V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. Die Paragraphen **34.**ff bzw. **134.**ff enthalten Anwendungen der Ausdehnungslehre auf lineare Gleichungssysteme. Beiläufig tritt in **86.** der Name *Hauptgebiet* für *Basis* auf.

Ab S.28 bzw. 20 (**37.**) bespricht Grassmann seine diversen Arten von Produkten; in **94.** fällt der Begriff „progressiv“ (vgl. auch [96] I S.179). Zunächst betrachtet Grassmann allgemeine Produkte ohne Festlegung der Einheitenprodukte (Bestimmungsgleichung), später anhand der jeweiligen Bestimmungsgleichung das kombinatorische Produkt (**52.**ff), das äußere (**78.**ff) und das innere (**137.**ff). Engel merkt zu **48.–51.** an, daß Grassmann durch sein „Princip“ (daß nämlich jedes durch eine Gleichung ausdrückbare Gesetz auch bestehen bleibt, wenn man statt der Einheiten beliebige aus ihnen abgeleitete Größen setzt; vgl. S.37 bzw. 31) von vorneherein die Betrachtung von Zahlbeziehungen zwischen den Einheitsprodukten und den ursprünglichen Einheiten ausschließe und sich auf Zahlbeziehungen zwischen Einheitsprodukten von gleich vielen Faktoren beschränke,
#8 wodurch Grassmann sich den Weg zu den Systemen von höheren complexen Zahlen versperre (S.399ff). Auch betrachte er merkwürdigerweise nur Einheitsprodukte aus zwei, nie aus drei Faktoren. Klein führt unter [96] I S.187 ebenfalls als einen Hauptunterschied zwischen Grassmann und Hamilton an, daß bei ersterem die Einheitenprodukte nicht auf die Einheiten selbst zurückgeführt werden; Klein spricht in [96] I S.179 allerdings auch von höheren komplexen Zahlen im Zusam-
#9 menhang mit Grassmann. Whitehead hält Ausdrücke der Form $e_1 + e_1e_2$ gar für *meaningless* ([56] 812). Vgl. auch #53. Übersichtliche Darstellungen der Produkte bei Grassmann findet man bei [23] 71. Nach [25] 62f sind das heutige Vektorprodukt und Skalarprodukt bereits in Grassmanns Arbeit zur Theorie von Ebbe und Flut von 1840 enthalten (die allerdings vor ihrer Aufnahme in die Engelsche Gesamtausgabe Anfang des 20.Jahrhunderts nicht veröffentlicht wird). Der Artikel von Alfred Lotze in der Enzyklopädie (1923) III, 1425–1550 stellt die Ausdehnungslehre dar und befaßt sich auf S.1442ff mit den Produkten.

1867

A [82] — Hankels *Theorie der complexen Zahlensysteme* vereint Hamiltonsche und Grassmannsche Tradition. Hankel gibt im Gegensatz zu A_2 zahlreiche Kommentare zur Vorgehensweise; bezugnehmend auf die synthetischen und analytischen Verknüpfungen der A_1 prägt er in §2 auf S.4 die philologisch etwas fragwürdigen Kunstbegriffe ‚thetischer‘ und ‚lytischer‘ Verknüpfungen Θ, λ; die §§4ff auf S.18ff sind der Betrachtung allgemeiner ‚thetischer‘ und ‚lytischer‘ Verknüpfungen Θ, λ gewidmet.

Hankels Produktbildung ist allgemeiner als bei Grassmann (so sind beispielsweise beliebig viele Faktoren zugelassen, vgl. #125). Er vermeidet die Verwirrung durch den Begriff ‚Stufe‘ (vgl. meine Ergänzungen zu #101 auf S.149), indem er im einen Fall von *Grad*, im anderen von *Ordnung* spricht, vg. #124. Die ‚Quaternionen‘ sind bei Hankel eine vierdimensionale $\mathbb{C}$–Algebra (vgl. §42 auf S.141), was Hamiltons *bi–quaternions* entspricht. Auf S.143 spricht Hankel vom *Vector–Theil*

[10] Es fällt auf, daß Grassmanns Begriff „Element“ der A_1, den Engel für zu inhaltslos hält, in der Sprache der modernen Mengenlehre eine große Rolle spielt. Wegen der Entwicklung der *set–theoretical language* vgl. z.B. [44] 8, wonach das kartesische Produkt von Mengen bei Cantor und Peano auftritt, und auch #51.

(im Hamiltonschen Sinne), im §43 auf S.146 wie selbstverständlich von „*Vectoren*“. Der §45 (S.153) ist betitelt „*Algebra der Quaternionen*“ und behandelt Wurzeln algebraischer Gleichungen über den Quaternionen.

Hankel tritt wegen des Buchs mit Grassmann in Verbindung ([71] III,2 S.269ff); er bittet ihn um bestimmte Beweise und vor allem um eine Besprechung des Werks in Grunert's Archiv. Grassmann kommt dieser Bitte zwar nach; die Besprechung erscheint jedoch nicht, und auch das Manuskript gilt als verloren ([71] III,2 S.278). Hankels Buch hat aber das Schicksal der Ausdehnungslehre wohl nicht geteilt, denn SCHLOTE sieht seine Bedeutung darin, daß es erstmals in lesbarer Form viele Mathematiker des europäischen Festlandes mit den Forschungen im englischen Sprachraum (Hamilton, *british symbolical algebra*) bekannt machte ([166] 5).

1870

LAA — Benjamin PEIRCE formuliert in seiner Arbeit *Linear Associative Algebra* erstmals zentrale Begriffe der modernen Algebrentheorie (den Begriff der Algebra selbst, nilpotent, idempotent, einfache Algebra; vgl. [153] 546); wie bei A_1 nimmt das philosophische ‚Gewand‘ einen breiten Raum ein. Peirce gebraucht — wie schon die *british symbolical algebraists* — den Begriff Algebra zunächst determiniert (etwa im Gegensatz zur Analysis) und erst in zweiter Linie (und nie deutlich getrennt) indeterminiert für eine Menge mit Struktur. Die lineare Struktur arbeitet er nicht deutlich heraus; insbesondere unterscheidet er nicht zwischen Skalar- und Algebrenmultiplikation (29.). Krönung des Werkes ist die Angabe aller Algebren bis einschließlich 6 Dimensionen via Multiplikationstafeln.

Das Werk bleibt zunächst in Europa nahezu unbekannt und wird 1881 nochmal aufgelegt. Eine weitere Arbeit von Peirce zu diesem Thema ist *On the uses and transformations of Linear Algebra*; **N**
in: Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences n.s. **2** (May 1875), 395–400

Eine ausführliche gerade noch zeitgenössische Besprechung dieses Werks stellt *Estimate of Peirce's Linear Associative Algebra* von Herbert Hawkes im Am. J. Math. **24** (1902), 87–95 dar.

1878

[22] — CANTOR befaßt sich mit stetigen n–fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. Dazu verweist er (S.244) auf RIEMANNS Habilitationsschrift (dessen Werke S.254ff) sowie auf Arbeiten von HELMHOLTZ aus dem Jahre 1868. Zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit und den Wertsystemen $x_1, \ldots, x_n$ (die $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet er als *„von einander unabhängige, reelle, stetige Coordinaten“*) gibt es eine Correspondenz derart, daß jedem Element ein Wertsystem entspricht
und umgekehrt. Die Stetigkeit dieser Correspondenz (also daß unendlich kleinen Änderungen #10
des Wertsystems unendlich kleine Änderungen der Elemente entsprechen und umgekehrt) werde #11
meist stillschweigend vorausgesetzt. Cantor kündigt an, die Frage zu beantworten, ob diese Voraussetzung der Stetigkeit dieser Correspondenz ausreicht, um den Begriff der n–fachen stetigen #12
Mannigfaltigkeit widerspruchsfrei zu machen. Ob dieser Ankündigung Taten folgten, kann eventuell mithilfe der Bemerkungen untersucht werden, die bei der Besprechung von BROUWERS Arbeit weiter unten gemacht werden. Im hier besprochenen Artikel stellt Cantor zunächst klar, daß,

> wenn sie [die genannte Voraussetzung] fallen gelassen wird, [...] alsdann jenes von den Autoren als wesentlich bezeichnete Merkmal (wonach eine n–fache stetige Mannigfaltigkeit eine solche ist, deren Elemente aus n voneinander unabhängigen reellen stetigen Coordinaten sich bestimmen lassen) durchaus hinfällig wird. #13
>
> [...] Wenn hinsichtlich der Correspondenz zwischen der Mannigfaltigkeit und ihren Coordinaten keinerlei Beschränkung gemacht wird, [...] ist es [...] möglich, die [S.245] Elemente einer n–fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit durch eine

> einzige, reelle stetige Coordinate t eindeutig und vollständig zu bestimmen. Daraus folgt alsdann, dass wenn für die Art der Correspondenz keine Voraussetzungen gestellt werden, die Anzahl der unabhängigen, stetigen, reellen Coordinaten, welche zur eindeutigen und vollständigen Bestimmung der Elemente einer n–fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit zu benutzen sind, auf jede vorgegebene Zahl gebracht werden kann und also *nicht* als unveränderliches Merkmal einer gegebenen Mannigfaltigkeit anzusehen ist.

Statt ‚n–fach ausgedehnt' sagt er auch ‚von n Dimensionen'. S.248 fällt der Begriff einer linearen Mannigfaltigkeit reeller Zahlen, d.i. eine *„wohldefinierte Mannigfaltigkeit reeller, von einander verschiedener, d.i. ungleicher, Zahlen* [...], *so dass eine und dieselbe Zahl in einer linearen Mannigfaltigkeit nicht öfter, als einmal als Element vorkommt"*; ähnlich S.257 — dort sind die linearen Mannigfaltigkeiten allerdings durchweg unendlich. S.256 befaßt er sich mit der Mächtigkeit von
#14 Mannigfaltigkeiten von abzählbar unendlich vielen Dimensionen und ermittelt, daß sie der aller $\mathbb{R}^n$ gleich ist. S.257 äußert er, daß mit solchen Mannigfaltigkeiten eine Grenze der Verallgemeinerung des Satzes erreicht ist; er denkt also auch an überabzählbar viele Dimensionen oder Ausdehnungen. S.257f kündigt er noch an, daß unendliche lineare Mannigfaltigkeiten nur in zweierlei Mächtigkeit auftreten (er spricht hier über *unendliche* und nicht über unendlich*dimensionale* M.); auch hier wäre zu untersuchen, ob er das weiterverfolgt hat.

Die Rolle dieser Arbeit im Denken Cantors stellt [118] 31ff ausführlich dar. [127] 264 erwähnt zwar Cantors *Lehre des Transfiniten* von 1887, aber nicht die hier besprochene Arbeit.

1881

[31] 184ff — Dedekind befaßt sich mit der Basis des Körpers Ω aller rationalen Funktionen von θ und z, wobei θ algebraische Funktion vom Grade n der unabhängigen Veränderlichen z ist; er nennt θ dann algebraische Funktion, wenn sie einer irreduziblen algebraischen Gleichung $F(\theta, z) = 0$ genügt, wobei $F = a_0\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\theta + a_n$ ist und $a_0, \ldots, a_n$ teilerfremde ganze rationale Funktionen von z sind. Er zeigt S.186ff, daß sich jedes $\zeta \in \Omega$ bezüglich der Menge $\{1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}, \theta^n\}$ darstellen läßt, wobei die Koeffizienten rationale Funktionen von z sind. Er gibt auch Bedingungen für einen Basiswechsel an.

1888

A [144] — Peanos *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann* befaßt sich primär dem Titel entsprechend mit der Aufstellung eines geometrischen Kalküls im Anschluß an die *Ausdehnungslehre*. Dieser Kalkül beruht im wesentlichen auf der Theorie der *formazioni*. Diese ausführlich darzustellen würde etwas vom Thema abführen; ganz auf eine Darstellung zu verzichten würde uns um einige wertvolle Einsichten in die Bedeutung des Grassmannschen Systems für die Vektorraumtheorie bringen. Ich habe einige grundlegende Begriffe und Sätze ab S.164 mitgeteilt.

Der Einleitung des Buches folgt ein Kapitel ohne Nummer mit dem Titel **Operazioni della logica deduttiva**. Hier beginnt die arabische Seitenzählung; das Kapitel zerfällt in §1–11. Darin gibt Peano eine Definition seiner logischen Zeichen $=, \cap, <$. Peano äußert auf S.VII seine Hoffnung, daß die Inhalte dieses Kapitels *„può servire in molte ricerche"*. Die eigentlichen Kapitel des Buches sind

Kapitel	Titel	beginnend auf S.
Capitolo I.	**Formazioni geometriche.**	21
Capitolo II.	**Formazioni di prima specie.**	33
Capitolo III.	**Formazioni di seconda specie.**	49

Mit Cap. I beginnt die fortlaufende Abschnittzählung in Fettdruck (von **1.** bis **90.**). Cap. II–IX verfügen über je einen Abschnitt *Applicazioni*, der an der fortlaufenden Abschnittnumerierung teilhat.

Im letzten Kapitel seines Buches bringt Peano die axiomatische Definition der Begriffe $\mathbb{R}$–Vektorraum (er spricht von *sistema lineare*) und lineare Abbildung (er spricht von *operazione distributive*). Folgende Beispiele für *sistema lineare* nennt Peano:

Beispiel	Fundstelle
$\mathbb{R}$	#148
Formazioni di prima, seconda, terza specie nello spazio	#148
Formazioni di prima specie su d'una retta	#149
Formazioni di prima specie nel piano	#149
$\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ (Peano spricht an der angegebenen Stelle von den *vettori nel piano o nello spazio*; zur Identifikation mit $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ vgl. #150)	#149
$\mathbb{C}$	#150
$\mathcal{L}(A, B)$ (A, B sistemi lineari; speziell $\mathcal{L}(A, A)$) (vgl. #163)	#159
physikalische Kräfte auf *una figura di forma invariabile*	**81.** 1. (S.154)
Ganze algebraische Funktionen (gemeint sind wohl Polynome, da ein Grad angegeben wird) mit den üblichen Verknüpfungen (Peano erklärt auch Gleichheit und Null); er stellt fest, daß die betreffenden Funktionen vom Grade $\leq n$ ein *sistema lineare* mit $n+1$ *dimensioni*, die Funktionen von beliebigem Grad hingegen ein unendlichdimensionales *sistema* bilden.	**81.** 2. (S.154)
Ein Erzeugendensystem für $\mathcal{L}(A, A)$, wobei A zweidimensional ist	**83.** 14.; vgl. die Anmerkungen zu #141 auf S.163

[52] 270 behauptet, Peanos einziges Beispiel eines unendlichdimensionalen Vektorraums seien die *séries entières*. Diese sind den ganzen algebraischen Funktionen vermutlich isomorph.

Liste der Beispiele für *operazione distributive* in [144]:

Beispiel	Fundstelle
Multiplikation in $\mathbb{R}$	#153
progressives/regressives Produkt geeigneter *formazioni*	#153
$\perp$, $\mid$ (zur Bedeutung dieser Zeichen vgl. meine Bemerkung zu #154)	#154
Skalarmultiplikation in jedem *sistema lineare*	#155
Projektion auf Koordinaten (vgl. **73.** (3), (4))	#155
Summe zweier *operazione distributive*	#157
Hintereinanderausführung zweier *operazione distributive*	#158
Differentialoperator aus **79.**	#164

82. auf S.154ff bringt Anwendungen der Transformationstheorie; dieser Paragraph ist insbesondere $\mathbb{R}$–wertigen *funzione distributive* (also Funktionalen) auf diversen Beispielräumen gewidmet. **87.** bringt die Anwendung des Differentialoperators aus **79.**

Auf das IX.Kapitel wird in den kommenden Jahren nur wenig Bezug genommen. Die Besprechung in JFM **20**, 689–692 ist begeistert, aber unzureichend: *„Man kennt ein gewisses Wesen 0, dessen Product mit jedem Elemente des Systems gleich 0 ist"* — als wäre nicht der Nullvektor, sondern die Null von $\mathbb{Z}$ als neu charakterisiert hervorzuheben. Es könnte ein Übersetzungsproblem sein (dem Übersetzer Lampe wird wohl außer der italienischen Besprechung nichts vorgelegen haben); statt dessen müßte es heißen ‚so daß das Product der (gewöhnlichen) 0 mit jedem Element des Systems gleich dieser 0 ist'. Das ist einigermaßen unwahrscheinlich. Ist die italienische Originalbesprechung irgendwo veröffentlicht? Man beachte auch die große Nähe der Ausdrucksweise zu Peanos Originalformulierung unter #146. Des weiteren verweist PINCHERLÉ in [149] 330 auf [144]; er verdeutlicht, daß der Akzent — gemäß der Kapitelüberschrift — auf Operatoren, nicht Räumen liegt. Weitere Bezugnahmen bleiben auf Italien beschränkt, vgl. unten die Angaben zu PINCHERLÉ und BURALI–FORTI.

In späterer Zeit erwähnt FRÉCHET in [60] das Buch von PINCHERLÉ [150], wo wiederum [144] erwähnt wird (beides s.u.); daß das Fréchet nicht entgangen ist, geht lt. MOORE ([127] 281) aus Fréchets Arbeit *Les espaces vectoriels abstraits*[11] hervor. Das wäre dann wohl der erstmalige Hinweis auf [144] aus der Perspektive der neu entwickelten Theorie in den 20er Jahren.

Kurios ist, daß GRAY in [73], obwohl er [18] zitiert, [144] nicht erwähnt. Dabei ist in [18] 84dt. bzw. 89frz. das Wesentliche gesagt; daran ändert auch nichts, daß es in der Darstellung in [18] von der 1.Auflage 1960 zur 3.Auflage 1975 (die mir nicht vorliegt) eine Entwicklung gegeben haben könnte, vgl. [73] 6.

Das zeitgenössische Echo auf [144] insgesamt (unter Nichtbeachtung des IX.Kapitels) ist schon etwas breiter. So wird er bereits von KLEIN in [96] II, S.48 erwähnt; das von mir eingesehene Exemplar stammt aus der Universitätsbibliothek Göttingen und wurde dort 1905 *„aus dem vom vorgesetzten Ministerium für Professor Dr. Fel. Klein bewilligten mathematischen Extrafonds"* angeschafft. Klein behauptet in [96] II, Peano habe sich auf drei Dimensionen beschränkt, was natürlich nur auf die ersten acht Kapitel zutrifft (in Wahrheit hat sich also wohl Klein auf deren Lektüre beschränkt). Klein beabsichtigte, seinen *Vorlesungen* einen Abschnitt anzufügen, in dem die *logica deduttiva* ihren Platz gehabt hätte, konnte nach Mitteilung des posthumen Herausgebers diesen Abschnitt jedoch nicht mehr vollenden. Der oben bei der A_2 erwähnte Enzyklopädieartikel geht auf S.1543–1546 ausführlich auf [144] ein, sofern Peanos Werk die Ausdehnungslehre betrifft; das IX. Kapitel kommt nicht zur Sprache.

Calcolo ist in den *opere scelte* nicht enthalten, was ja wegen des Buchformats nicht verwunderlich ist; [24] 291 behauptet, Peanos Bearbeitung von GRASSMANN, der ein Kapitel über *operazioni della logica deduttiva* voranstehe, sei in den *opere scelte* enthalten. Peano veröffentlichte kürzere Bearbeitungen von Grassmanns Kalkül ([146] im Jahr 1891 und [147] im Jahr 1896) *„without taking an axiomatic approach to vectors or even mentioning his linear systems"* ([127] 269). Noch im Jahr 1891 gibt A. Schepp in Leipzig unter dem Titel *Die Grundzüge des geometrischen Kalküls* die deutsche Fassung von [146] heraus; nach [204] 91 hat dieses Werk 42 Seiten, so daß ich vermute, daß auch hier das IX.Kapitel von [144] nicht enthalten ist. Auf Schepps Werk verweist sogar die 1.Auflage der GdG (vgl. auch [178] 53, 283); der Verweis geschieht in einer Fußnote auf S.3, die auf der entsprechenden S.1 der 9.Auflage nicht mehr vorhanden ist (wegen der verschiedenen Auflagen vgl. [62]). G. Temple erwähnt in *100 Years of Mathematics* (Duckworth, London 1981) auf S.50 nur [147].

[11]in: Bulletin of the Calcutta Mathematical Society **15** (1925), 51–62; Moore verläßt sich übrigens betreffend dieser Erwähnung von [144] in [150] auf Fréchet, während ich umgekehrt [150] selbst eingesehen habe, aber wegen Fréchets indischem Artikel auf [127] angewiesen bin.

Andere Arbeiten Peanos enthalten die Definition des IX.Kapitels nicht. GRAY behauptet zwar: „[in [145]] *Peano gave an explicit axiomatic definition of an n–dimensional vector space over the reals*“ ([73] 66); die Definition in [145] liest sich allerdings völlig koordinatenweise und unaxiomatisch. Das gilt nach [127] 266 auch für das italienische Original, MOORE weist daher in einer Fußnote Grays Behauptung zurück. Eine weitere, sehr geometrische Axiomatisierung Peanos aus dem Jahre 1898 (die auch ein inneres Produkt umfaßt und in der Peano sogar eine Unabhängigkeitsprüfung vornimmt) stellt Moore in [127] 271f dar ([148] III 187–207).

1894

[34] 33ff (§164) — DEDEKIND definiert in seinem 11. Supplement zu Dirichlets Zahlentheorie einen Vektorraum (*„Schar“*[12]) Ω als Menge aller Linearkombinationen eines linear unabhängigen Erzeugendensystems, das er als *Basis* bezeichnet (er spricht auf S.35 von der Gesamtheit der bezüglich eines Systems $\omega_1, \dots, \omega_n$ und eines Körpers A reduziblen Zahlen). Dedekind folgert aus seiner Definition die Abgeschlossenheit von Ω unter Addition, Subtraktion und Skalarmultiplikation sowie das Dimensionsaxiom. Auf S.37 gibt er an, wann Ω seinerseits ein Körper ist: wenn die Einheitenprodukte wieder in Ω liegen. Er stellt fest, daß dann Ω ein Oberkörper von A ist, und definiert #15
den Grad der Erweiterung.

Auf S.60 (§168) bezeichnet er als Modul ein System beliebiger reeller oder komplexer Zahlen, das abgeschlossen ist unter Subtraktion. #16

DORIER verlegt dieses 11.Supplement ins Jahr 1893 (vgl. [51] S.248f; er behauptet auch, 1871 sei die *1. edition*); ebenso [44] 13.

1897

[149] — Auf S.330 verweist PINCHERLÉ auf [144]: *„Peano donne les proprietés les plus simples des opérations distributives appliquées à des éléments déterminés par n coordonnées“*, Auf S.333 stellt er vermutlich fest, daß die Operationen auf einem Funktionalraum einen Vektorraum bilden (vgl. [127] 270 zu BURALI–FORTI).

1901

[150] — PINCHERLÉ schließt zwar die Vektorraumstruktur betreffend eng an PEANO an (er verweist auf S.1 auch auf [144] Kapitel IX), hat aber in seinem Buch nicht wie Peano den GRASSMANNschen Kalkül, sondern die (von Peano für diesen Kalkül entwickelten) *operazioni distributive* selbst und ihre Anwendung auf die Analysis zum Thema. In **1.** (S.1) nennt er als Ausgangspunkt der Definition eine Menge S von nicht weiter bestimmten *elementi*. Die zu verwendenden Zahlen können reell oder komplex sein. In **2.** (S.1f) fordert er, daß auf S eine *relazione* mit Namen *ugualianza* transitiv und #17
symmetrisch gegeben sein soll (diese Eigenschaften werden allerdings nur explizit hingeschrieben, nicht benannt). Er behauptet auf S.2, aus diesen Eigenschaften folge bereits die Reflexivität. In **3.** (S.2) fordert er das Vorhandensein einer kommutativen und assoziativen Addition, in **4.** (S.2) in Abweichung von Peano das Vorhandensein eines neutralen Elements ω; er legt Wert auf die Unterscheidung zwischen ω und der 0. In **5.** (S.2f) dehnt er die kanonische Skalarmultiplikation #18
für natürliche Zahlen auf beliebige Zahlen aus; die Unitarität nennt er nicht ausdrücklich; sie #19
ist aber in der kanonischen Skalarmultiplikation enthalten. Er nennt $0\alpha = 0$ (weiterhin an die Unterscheidung erinnernd). In **6.** (S.3f) folgt die Angabe der Bedeutung des Minuszeichens; er nennt eine Menge mit diesen Eigenschaften *insieme* oder *spazio lineare*.

Als Beispiel bringt er zunächst $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (**7.** (S.4)), dann (in determiniertem Sprachgebrauch) die *vettori dello spazio* (**8.** (S.4f)). Auf diesen erklärt er die Skalarmultiplikation über ihre *lun-*

[12] in [35]. Im Original ist die Orthographie noch ‚Schaar‘.

#20 *ghezza, fissata una unita di misura*. In **9.** (S.5f) erklärt er den Begriff der Linearkombination und der linearen Abhängigkeit. Ein *insieme lineare* heißt „ad n dimensioni“ (das erste Kapitel ist überschrieben *„L'insieme lineare generale ad n dimensioni“*), wenn WEYLS Dimensionsaxiom erfüllt ist (**11.** (S.7)); aus diesem Axiom folgt, daß jedes Element bezüglich n linear unabhängigen Elementen dargestellt werden kann (**12.** (S.8)). Eine Basis bezeichnet er als *sistema fondamentale* (**13.** (S.8)); es gibt beliebig viele Basen (**16.** (S.10)). In **17.** (S.10) wird ein *elemento* alternativ als *vettore* bezeichnet; dieser Abschnitt bringt das Verfahren des Basiswechsels.

Das zweite Kapitel führt die *operazioni* (Abbildungen) zwischen zwei Räumen ein; eine solche heißt *univoche*, wenn sie jedem Element nur ein Element zuordnet (**22.** (S.17)). Pincherlé führt nun Gleichheit, Nulloperation, Addition und Skalarmultiplikation auf solchen *operazioni* ein und stellt fest, daß sie ein *insieme lineare* bilden (**29.** (S.20)). In **42.** (S.25f) erklärt er den Begriff der distributiven (heute: linearen) Operation (hier ohne auf Peano zu verweisen), indem er Additivität fordert und daraus zuerst kanonische und dann auch rationale Homogenität erhält; er kommentiert
#21 nun, daß er die volle Homogenität über Stetigkeit erhalten könne, fordert sie aber statt dessen. Daß die distributiven Operationen ebenfalls einen Vektorraum bilden, sagt er nicht.

Im dritten Kapitel entwickelt er die Theorie der Operationen weiter als Peano. In **49.** (S.30f) stellt er implizit fest, daß eine lineare Abbildung bereits durch ihre Wirkung auf die Basisvekto-
#22 ren festgelegt ist; explizit erarbeitet er, daß die Dimension des Bildes höchstens die des Urbildes ist. In **50.** (S.31f) kommt entsprechend der Begriff des Kerns (*spazio di radici*); in **58.** (S.35) der des Eigenvektors (*elemento invariante*). Im fünften Kapitel bringt er als weiteres Beispiel
#23 den Raum der Zahlenfolgen; er erarbeitet, daß dieser von unendlichvielen Dimensionen ist (**95.** (S.70f)), und behauptet, es handele sich um abzählbar unendlichviele (Die Mächtigkeit des Raumes ist überabzählbar; seine Dimension ist abzählbar, wenn es höchstens abzählbar viele linear unabhängige Folgen in ihm gibt. Das hängt davon ab, ob unendlich viele Folgen zur Linearkombination zugelassen sind).

KREYSZIG behauptet unter [102] 29, Pincherlé habe 1895 etwas über unendlichdimensionale Räume gesagt. Welche Arbeit Kreyszig meint, ist mir unklar; die von Pincherlé selbst angegebene Bibliographie (vgl. *Notice sur les travaux*, in: Acta Mathematica **46** (1925), 341–362) nennt in diesem Jahr fünf Arbeiten.

DORIER ([52] 270) hält Pincherlés Beiträge für bedeutsamer als Peanos; ersterer habe den besseren Dimensionsbegriff und die Theorie der Operatoren ausführlicher behandelt (ebd. 273).

1903

#24 [36] — DICKSON verwendet beliebige Körper als Koeffizientenmengen; sein primäres Ziel dabei ist *to avoid the double phraseology*, die durch die übliche Verwendung reeller sowie komplexer Koordinaten entsteht (S.21).

Die uns interessierende lineare Struktur und auch die Algebrenmultiplikation werden zunächst herkömmlich über Koordinaten bezüglich linear unabhängiger Einheiten bzw. mit HAMILTONschen Strukturkonstanten (S.21f) erklärt. Will man in dieser Definition Assoziativität der Multiplikation und die Möglichkeit einer eindeutigen Division (daß also die Gleichungen $ax = b$ bzw. $ya = b$ in x bzw. y eindeutig lösbar sind) erreichen, so muß man an die Strukturkonstanten zusätzliche Bedingungen (*conditions*) stellen (S.22). Den Beweis, daß die von ihm gegebenen Bedingungen das Gewünschte leisten, deutet er an; ausführlich befaßt er sich mit der Unabhängigkeit der Bedingungen (S.23f).

Es schließt sich eine zweite Definition eines *system of complex numbers* an (S.24). Die Objekte
#25 sind nun Tupel von Körperelementen — und nichts mehr als das (also keine Kurzschreibweisen für Linearkombinationen bezüglich Einheiten). Die Addition wird wie üblich definiert, die additive Gruppenstruktur wird aus der des Körpers erschlossen. Die Multiplikation wird über *postulates* definiert — wohl die erste Definition dieser Art. Dickson zeigt, daß jedes dieser zweiten Definition

genügende *system of complex numbers* eines im HAMILTONschen Sinne ist, und behauptet auch die #26
Umkehrung. Bei der Überprüfung der Unabhängigkeit der *postulates* kommt ihm die Vorarbeit #27
an den *conditions* zugute; manche dort gegebenen Instanzen lassen sich übertragen, da ja auch die *postulates* in etwa das fordern, was die *conditions* garantieren. Das hängt natürlich damit zusammen, daß die beiden Definitionen den gleichen Umfang haben.

1905

[80] — HAMEL gibt eine Basis aller (reellen) Zahlen (über $\mathbb{Q}$) an (mithilfe des Auswahlaxioms) und bestimmt anhand dieser Basis eine unstetige reelle Funktion f, die der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ genügt. Er legt Wert darauf, daß in einer Linearkombination nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind; man spricht von Hamelbasis. Vgl. [127] 273ff

---

[37] — DICKSON möchte das Konzept *hypercomplex number system* verallgemeinern und zählt
einige Möglichkeiten auf: beliebige Körper (Verweis auf 1903) oder Teilmengen solcher als Ko- #28
effizientenmengen (Beispiel: die ganzen Quaternionen). Eine weitere Idee ist, den zu verschiedenen #29
Einheiten gehörenden Koeffizienten verschiedene *ranges* zu geben; so betrachtet er alle Ausdrücke #30
vom Typ $(a + 2b\sqrt{2})e_1 + (c + 4d\sqrt{2})e_2$, wobei a, b, c, d beliebige ganze Zahlen sein sollen, und gibt eine geeignete Multiplikation an. Dickson fährt fort (S.344):

> If we make these generalizations on the coördinates, but retain the usual conception
> of the units e_i, we obtain only subsystems of the usual number systems, the case of #31
> modular fields being an exception. It is otherwise if we generalize our conception of the units themselves, freeing them from the restriction [...] of linear independence
> with respect to the set of all ordinary complex numbers, and assuming their linear #32
> independence with respect to the given field F.
>
> [S.345] By this generalization we may regard an algebraic field [...] as a number system; in particular, all ordinary complex numbers form a number system [...] with respect to the set of all real numbers, the units being $1, i$.

Auf S.345 führt er *closed systems of n–tuple elements* ein, vgl. #25; er erklärt, was unter der Gleich-
heit zweier Tupel zu verstehen ist, und stellt Postulate für solche *systems* auf: die Abgeschlossenheit #33
unter der üblichen Addition, das Enthaltensein der Null, das Vorhandensein von Inversen (d.h. er geht nicht etwa *a priori* davon aus, daß jedes semiotisch mögliche Tupel zu der Menge gehört). Er
stellt fest, daß ein *closed system* insbesondere eine additive abelsche Gruppe ist. Die Multiplikation #34
führt er nicht etwa auf durch Strukturkonstanten bestimmte Einheitenprodukte zurück, sondern (da seiner Tupelschreibweise ja nichts zugrundeliegt) direkt auf die Strukturkonstanten. Zuletzt stellt er sicher, daß das *closed system* n–dimensional ist, indem er folgendes eigenartige Postulat aufstellt:

> If $\tau_1, \ldots, \tau_n$ are marks of F such that $\tau_1 a_1 + \ldots + \tau_n a_n = 0$ for every element $(a_1, \ldots a_n)$ of the system, then $\tau_1 = 0, \ldots, \tau_n = 0$.

Dieses Postulat sagt ihm insbesondere, daß das *system* mindestens ein von Null verschiedenes Element enthält. Es gelingt ihm, nur mit diesen Postulaten zu zeigen, daß das *system* n linear unabhängige Elemente enthält (er formuliert die Aussage in Determinantensprache).

Auf S.346 überprüft er, daß ein *closed system* ein herkömmliches *hypercomplex number system* ist (erst jetzt kommt er auf die Skalarmultiplikation zu sprechen); die umgekehrte Richtung kommt
nicht zur Sprache. Er zeigt die Unabhängigkeit seiner Postulate, wobei er einige Spezialfälle aus- #35
schließen muß. Eine der in diesem Beweis eingesetzten Instanzen verwendet Galoisfelder. #36

Auf S.347f wird schließlich die Möglichkeit diskutiert, statt eines Körpers auch andere Koeffizientenmengen zu betrachten.

1907

[186] — Wedderburn veröffentlicht seine Dissertation, die als bedeutendste Arbeit in der Algebrentheorie gilt. *„The definition of the term algebra* [...] *is now so well known that it is unnecessary to give here a formal set of postulates“.* Die Menge aller Linearkombinationen von Einheiten *„linearly independent in a given field“ F* nennt er Algebra, wenn die Addition koordinatenweise erklärt ist, die Produkte zweier Elemente stets lineare Funktionen der Einheiten sind und diese Produktbildung assoziativ und distributiv ist.

1908

[165] — Schimmack faßt die Bemühungen um das Kräfteparallelogramm (vgl. Abschnitt 5.1.1) zusammen. Aus der Einleitung der Schimmackschen Arbeit (S.5ff):

> Eine erste Aufgabe, wenn es sich um eine strenge Grundlegung eines Satzes oder einer Gruppe von Sätzen handelt, ist die genaue Formulierung der Voraussetzungen, aus denen sich jener Satz bzw. jene Sätze rein deduktiv ergeben. Wir nennen die Voraussetzungen „Axiome“. Die Aufstellung eines Systems von Axiomen unterliegt stets
> #37 einer erheblichen Willkür. Die Axiome sind nicht absolut gegebene „unbeweisbare“ Grundsätze, sondern sind die nach Maßgabe der Zweckmäßigkeit und des Geschmacks gewählten Endpunkte eines Prozesses, irgendwoher gewonnene Sätze immer weiter in
> #38 Bestandteile zu spalten, — eines Prozesses, der unbegrenzt fortsetzbar zu denken ist. Gleichwohl wird man bei der Aufstellung eines Axiomensystems [S.6] gern als subjek-
> #39 tive Leitsätze diese nehmen: die Axiome sollen, einzeln genommen, nicht offenkundig mehr postulieren als für den jeweiligen Zweck nötig; und die Axiome sollen so weit
> #40 gespalten sein, daß sich nicht aus einem allein schon ein wesentlicher Schluß ziehen läßt.
>
> An zweiter Stelle pflegt man das System der Axiome vornehmlich der Forderung
> #41 der Unabhängigkeit zu unterwerfen [...]. Diese Forderung hat eine objektiven Charakter, und die Frage, ob ein Axiomensystem ihr genügt, verlangt eine präzise Beantwortung. [...]
>
> Übrigens ist nicht gemeint, daß mit der axiomatischen Untersuchung eines Satzes oder eines Systems von Sätzen alles beantwortet sei, was berechtigtermaßen über den Satz bezw. die Sätze gefragt werden kann. Vielmehr liefert die Axiomatik dies und nur dieses: Der und der Satz ist dann und nur dann richtig, wenn die Axiome es sind (und wenn
> #42 die Logik [S.7] es ist). Über die Herkunft und über die Richtigkeit der Axiome wird so
> #43 wenig etwas bewiesen als behauptet — wie man denn auch darin, daß die Axiomatiker die Axiome gern als willkürliche Festsetzungen bezeichnen, nur die reinliche Scheidung dessen, womit es die Axiomatik zu tun hat, von den übrigen hier bleibenden Fragen zum Ausdruck gebracht sehen möge.

1909

Burali–Forti ist neben Pincherlé einer der wenigen Nachfolger Peanos (vgl. [127] 269). Seine
N Arbeit *Omografie vettoriali* von 1909 beginnt lt. [51] 247 mit einer axiomatischen Definition, die nach [50] 185 *redundant and incomplete* ist. In der Arbeit *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alle meccanica e alla Fisica–Mathematica* (veröffentlicht im gleichen Jahr zusammen mit Marcolongo in Bologna) findet sich vermutlich keine solche Definition, denn Moore bemerkt zu der Arbeit *Éléments du calcul vectoriel* (Lattes/Paris 1910), *„linear systems were not defined axiomatically, but Grassmannian geometric forms were shown to have*

the properties that would make them a linear system" ([127] 270); diese Arbeit ist aber nach [25] 235 die französische Übersetzung der italienischen Arbeit *Elementi*[13]. Auch [204] 92 erwähnt, daß letztere sofort ins Französische übersetzt wurde.

---

[180] — TOEPLITZ gibt auf S.88 drei Sätze an, *„deren Inhalt den Determinantenbegriff garnicht enthält"*. Auf S.90 sagt er: *„Ich unterwerfe das Lösungssystem keinerlei Convergenzeinschränkung; dafür muss ich die Coeffizienten jeder einzelnen Gleichung der stärksten nur möglichen Convergenzeinschränkung unterwerfen, nämlich der, daß nur endlichviele unter ihnen von 0 verschieden sind"*; Toeplitz spricht dann von *„zeilenfiniten Systemen"*. Auf S.96 schließt er: *„Man kann* [das] *Ergebnis auch so aussprechen, dass die linearen Transformationen des ≪Gesamtraumes≫ der abzählbar unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$ in denjenigen Fragen denen von endlichvielen Variablen sich genau analog verhalten, die vom Begriff des Ranges beherrscht werden* [...]". Toeplitz weist darauf hin, daß sich die Ergebnisse auf einen beliebigen *„Rationalitätsbereich"* übertragen lassen.

MOORE ([127] S.286) glaubt die Behauptungen BOURBAKIs zurückweisen zu müssen, wonach Toeplitz hiermit den allgemeinsten Vektorraum via Koordinaten über den reellen Zahlen einführe, aber auch feststelle, daß statt dessen jeder kommutative Körper in Frage käme (vgl. [18] 89frz. bzw. 84dt.). Zwar ist es nicht gut, ohne weiteres einen *„Rationalitätsbereich"* mit einem kommutativen Körper gleichzusetzen (mathematisch ist es korrekt, aber historisch etwas schief); ich gebe aber Bourbaki recht. Nach [44] 13 ist Toeplitz der erste, der explizit auf Determinanten verzichtet.

1910

[173] — STEINITZ definiert in seiner für die moderne Algebra bahnbrechenden Arbeit *Algebraische Theorie der Körper* die Dimension wie PEANO und BURALI–FORTI als Maximalzahl linear unabhängiger Elemente; eine Bekanntschaft ist aber sehr unwahrscheinlich ([50] 192). Steinitz beweist, daß die Mächtigkeit eines vollständigen Erzeugendensystems nicht geringer als die Dimension sein kann ([50] 193).

---

[59] — FRÉCHET führt einen abstrakten (topologischen, nicht linearen) Dimensionsbegriff ein. S.145:

> La définition de la puissance d'un ensemble comporte un si haut degré d'abstraction qu'elle ne fait intervenir en aucune façon les relations mutuelles des divers éléments de l'ensemble. #44

S.146: Wenn G_1 und G_2 *ensembles* sind, so bedeutet $dG_1 \leq dG_2$, daß G_1 in irgend einer Weise als *image de* G_2 *„ou d'une partie de cet autre* [ensemble]" aufgefaßt werden kann; liegt keine Homöomorphie[14] vor, so gilt $dG_1 < dG_2$. Er bringt den Begriff des direkten Produktes zweier Mengen. Sein Dimensionsbegriff erlaubt auch fraktale Dimension (S.152ff werden Dimensionen $d < 1$, S.157ff solche zwischen 1 und 2 untersucht). Er stellt fest, daß $d\mathbb{R} \leq d\mathbb{R}^2 \leq \ldots \leq d\mathbb{R}^n$ und daß (S.159f) für die Dimension d aller Funktionen auf $(0,1)$ (bzw. aller stetigen Funktionen auf diesem Intervall) gilt $d > d\mathbb{R}^n \; \forall n$.

[13] erstaunlich ist, daß Moore dieses Original nicht nennt, da er [25] zitiert.
[14] Der Begriff *„homöomorph"* geht lt. S.146 auf HADAMARD zurück.

1911

[21] — Brouwer weist nach, daß es keinen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ gibt (daß bei Fréchet also $<$ statt $\leq$ stehen kann). In einer Fußnote auf S.161 verweist er *„hinsichtlich der Fehlschlüsse in den von [...] Cantor für den allgemeinen Fall versuchten Beweisen“* auf eine Arbeit von E.Jürgens in den DMV–Berichten **7** Heft 1, S.50–55 und auf Schoenflies, *Bericht über die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* II, S.167. Diese *„von Cantor versuchten Beweise“* sind mir nicht bekannt, stehen aber vermutlich mit dessen Ankündigung in #12 in Zusammenhang.

1912

Burali–Forti kommt in seinem Werk *Transformations linéaires* (Mattei/Pavia 1912) noch einmal auf die Vektorraumdefinition zurück; er versteigt sich sogar zu der Meinung *„Generally, these matters are familiar in large part“* (S.1; hier zitiert nach [127] 270).

1913

[174] — Steinitz zeigt in dieser Arbeit den auf S.129 formulierten Satz, daß der Summenbereich (d.h. die Menge der möglichen Grenzwerte) einer bedingt konvergenten Reihe beliebiger hyperkomplexer Zahlen stets lineare Mannigfaltigkeit ist. Dazu gibt er auf S.131 die Definition n–dimensionaler *„Systeme komplexer Zahlen“* P via Einheiten mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$: jedes Element
#45 von P ist als Linearkombination von n Einheiten darstellbar; daß umgekehrt jede Linearkombination dieser Einheiten Element von P ist, wird nicht gesagt. Erst die Auffassung von P als Modul (s.u.) verdeutlicht das. Steinitz weiter:

> [die Tatsachen aus der n–dimensionalen Geometrie] hätten als bekannt vorausgesetzt werden können; ich habe es aber vorgezogen, sie nochmals abzuleiten. [...]
>
> [...] Die beiden Zahlenarten [gemeint sind $\mathbb{R}$ — Steinitz schreibt R — und P] werden als vollkommen ver[S.132]schieden betrachtet; es soll also nicht R als Teilsystem von P
> #46 angesehen werden.

Als *„Modul“* bezeichnet Steinitz S.132 ein System komplexer Zahlen (also eine Teilmenge von P), das abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist. Der Schnitt einer Famile von
#47 Moduln ist ein Modul. Steinitz folgert, daß jeder Modul die 0 enthält. Der von einer Menge A erzeugte Modul $Md.A$ (also alle aus A komponierbaren Elemente) ist der Durchschnitt aller
#48 Moduln, die A enthalten; dann heißt A *„Basis“* von $Md.A$.

Auf S.133 steht der Steinitzsche Austauschsatz explizit[15], der in [173] schon gelegentlich benutzt, aber nicht formuliert wird. Die *„Dimension“* eines Moduls ist die Maximalzahl linear unabhängiger Zahlen; diese sei in jedem Modul höchstens so hoch wie die Zahl der Basiselemente (im obigen Sinn). S.134 stellt er fest, daß in einem r–dimensionalen Modul r Zahlen dann und nur dann Basis sind, wenn sie linear unabhängig sind. Er erkennt, daß (in heutiger Terminologie) $\mathbb{R}^n$ der einzige $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension n ist, und führt das Skalarprodukt unter dem Namen *Grassmanns inneres Produkt* ein. S.135 stellt er fest, daß die *„linearen Funktionen“* (das sind nach S.134 lineare Abbildungen komplexer Zahlen im Steinitzschen Sinn) abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation sind. Als *„komplementären“* Modul zu einem vorliegenden Modul bezeichnet er den Modul, dessen Skalarprodukt mit dem vorliegenden gleich Null ist. Eine *„lineare Mannigfaltigkeit“* ist auf S.136f als Restklasse eines Moduls erklärt, wobei $\alpha, \beta \in \mathsf{P}$ kongruent heißen, wenn $\alpha - \beta \in M$. Eine lineare Mannigfaltigkeit muß nicht die Null enthalten. Das alles sei auch über beliebigem Körper möglich (S.140); es wird eine Metrik via Skalarprodukt

[15] Dorier äußert, er habe den Steinitzschen Austauschsatz bei Steinitz selbst nie explizit formuliert gefunden ([50] 194), scheint also diese Quelle nicht zu kennen.

eingeführt (dies sei eine Betrachtungsweise, die zu $\mathbb{R}$ gehört) sowie auf S.144ff ein Konvergenzbegriff.

---

[158] — Riesz arbeitet über den Hilbertraum (d.i. der Raum der quadratsummierbaren Zahlenfolgen) und betrachtet darin *vecteurs.* Vgl. [20] 335, [127] 285

1914

[38] — Dickson liefert noch einmal eine Definition (S.5f), die von den diversen 1903 und 1905 gegebenen leicht abweicht. Während er nun wie in 1905 die Addition auf *a priori* gegebenen Tupeln erklärt, führt er zur Erklärung der Multiplikation statt *a priori* gegebener Strukturkonstanten wieder Einheiten ein und die Strukturkonstanten zur Festlegung von deren Produkten. Im Vorwort auf S.V findet sich ein Hinweis auf die französische Encyclopédie von 1908, Tome 1, Vol.1, 369–378 (vgl. Daub S.5).

1918

RZM — Weyl veröffentlicht mit *Raum — Zeit — Materie* den mathematischen Unterbau der Relativitätstheorie, wobei zentrale Begriffe Tensoren und der euklidische Raum sind. Dennoch trennt Weyl zunächst die rein affine Geometrie von der metrischen. Das Buch beginnt mit einer anschaulichen Untersuchung der Translationsgeometrie; es folgt (als Ergebnis dieser Untersuchungen, aber unabhängig davon formuliert) die Aufstellung der Axiome eines affinen reellen Vektorraums, wobei die affine Struktur von der additiv–linearen sauber getrennt ist. Weyl betont, daß die so erklärte affine Geometrie nichts enthält, was sie nicht z.B. mit der Theorie linearer Gleichungssysteme gemein hat (S.23). Er bringt ein Beispiel aus der Chemie: Er bezeichnet Quanten eines Gasgemisches — charakterisiert durch die Angabe, wieviel Gramm von jedem Gas in dem Quantum enthalten ist — als *„Vektoren"*; *„Namen können wir geben, wie wir wollen"* (S.21). **A** #49

Weyl gibt keine Quelle an; er erwähnt Grassmann als Pionier der n–dimensionalen Geometrie (S.228). In den folgenden Jahren erwächst in Zusammenarbeit mit anderen Mathematikern (Robert König) die heutige lineare Algebra ([204] 8). Weyls Buch wurde bis 1933 praktisch nicht zitiert ([127] 277 Anm.8).

---

[159] — Riesz arbeitet über Funktionalräume; auf S.71 legt er das Ziel der Arbeit dar: es geht ihm nicht um neue Resultate, sondern um elementare Methoden. Als Funktionalraum bezeichnet er auf S.72 die Gesamtheit der auf $a \leq x \leq b$ erklärten überall stetigen Funktionen $f(x)$. Er hat einen Normbegriff; lineare Transformationen werden als distributiv und beschränkt erklärt. Nach S.74 ist eine *lineare Mannigfaltigkeit* eine unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossene Menge, in der gleichmäßig konvergente Folgen einen Grenzwert haben. Es folgen Beispiele.

1920

[6] — Im Vorwort (S.134 bzw. [8] II, S.305)) seiner Dissertation verdeutlicht Banach das Hauptinteresse seiner neuen axiomatischen Methode: In der Tradition von Fréchet beweist er nicht grundlegende Sätze zu einzelnen Räumen jeweils neu (*ce qui serait bien penible*), sondern entwickelt eine übergeordnete Theorie.

Banach legt eine axiomatische Definition eines $\mathbb{R}$–Vektorraums zugrunde (Banach gibt den *ensembles d'éléments* allerdings keinen Namen). Er erwähnt Pincherlé namentlich; Heuser meint dazu ([90] 645f):

> Es kann kaum einem Zweifel unterliegen, daß der Pole sie [die Vektorraumaxiome] *en bloc* von dem Italiener übernommen hat.

M.E. unterliegt das sehr wohl einem Zweifel, weil nämlich Pincherlé andere Axiome gibt als Banach. Banach fordert (S.135 bzw. 306f) für die Addition die Wohldefiniertheit, $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{K}_+$, die Kürzungsregel und die Existenz und Eindeutigkeit des Neutralen θ, für die Skalarmultiplikation die Wohldefiniertheit, $\mathcal{D}_l, \mathcal{D}_r, \mathcal{U}$ und $\mathcal{A}_\circ$ und nennt ferner $aX = \theta \Leftrightarrow X = \theta$ oder $a = 0$, $a \neq 0 : aX = aY \Rightarrow X = Y$, $X \neq \theta : aX = bX \Rightarrow a = b$. Die Subtraktion wird via Minuszeichenkonvention eingeführt. Als Beispiele nennt er *„les vecteurs“*, *„les formes de Grassmann“*, $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ *„etc.“*.

Eine zweite Axiomengruppe führt zum Begriff des vollständigen normierten Raumes. Die me-
#50 trische Struktur im Sinne von Fréchet wird nicht isoliert; [127] 280: *„Here it would have been natural to express matters in terms of a metric space, but he did not do so in this paper“*. Auch eine affine Struktur oder die Begriffe Dimension und Basis kommen in der Arbeit nicht vor.

Die Arbeit wird 1922 in den *Fundamenta* veröffentlicht; Wiener reagiert mit [197]. Das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* enthält ein Referat zu Banachs Arbeit von Rosenthal (JFM **48** 201f). Dort heißt es: „*Die Einheitlichkeit* [der Darstellung verschiedener Funktionenräume] *wird ermöglicht durch eine axiomatische Definition des betrachteten abstrakten Raumes E; offenbar dient das System der Vektoren als Vorbild (so daß nicht etwa, wie bei Fréchet, der Entfernungsbegriff die zentrale Rolle spielt)* [...] *Es wird zunächst in der üblichen Weise axiomatisch eingeführt: Die Addition der Elemente von E und die Multiplikation mit einer reellen Zahl* [...]“.

A [194], [195], [196] — Wiener veröffentlicht drei Arbeiten, in denen er *vector systems* axiomatisch einführt. Die Axiome in der Fassung der letztgenannten Arbeit (die übrigen beiden weichen davon nur redaktionell ab) sind im Anhang mitgeteilt.

In [194] nennt er folgende Beispiele: $\mathbb{R}^n$, den Raum der gleichförmig konvergenten Folgen, ℓ^2, $C(a, b)$ (im Sinne gleichförmiger Konvergenz). In dieser Arbeit wird auch die Motivation für die Einführung der *restricted vector systems* (vgl. Anhang) deutlich.

Wiener gibt in allen Arbeiten auch Axiomensysteme für bestimmte topologische Räume; er untersucht, in welcher Beziehung die verschiedenen Axiomensysteme zueinander stehen, und befaßt sich auch mit Unabhängigkeitsfragen.

1921

[170] — Scorza veröffentlicht eine algebrentheoretische Arbeit mit postulatorischen Definitionen (Dickson weist noch auf ein Buch unter dem Titel *Corpi Numerici e Algebre*, herausgegeben in Messina im selben Jahr, hin, vgl. [39] 13; dort stehe eine vergleichbare Definition auf S.180). Die lineare Struktur wird (erstmals in der Algebrentheorie und wieder in Italien) auf S.7 axiomatisch über einem beliebigen Körper (explizit auch über einem endlichen Körper) eingeführt. Dazu fordert er $\mathcal{A}_\circ, \mathcal{D}_l$ und $\mathcal{D}_r$, während er $\mathcal{U}$ aus seinem Basisaxiom (eindeutige Darstellung jedes Elements bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems) folgert. Bei der additiven Struktur begnügt er sich mit einer abelschen Halbgruppe; Null und Inverse werden mithilfe des Basisaxioms hergeleitet.

Scorza nennt keine Quelle; für eine Beziehung zu Peano, Pincherlé, Burali–Forti gibt es kein Indiz.

---

[132] — Noethers *Idealtheorie in Ringbereichen* bringt auf S.54f (§9) erstmals den Begriff des Moduls über einem Ring in der heute üblichen Weise; sie spricht allerdings von dem System T mit Ring Σ. Als Modul in (Σ, T) bezeichnet sie eine unter Skalarmultiplikation und Subtraktion

abgeschlossene Teilmenge von T; sie stellt fest, daß T selbst einen Modul in (Σ, T) in diesem Sinne bildet. Sie stellt noch nicht heraus, daß T insbesondere abelsche Gruppe ist.

1922

[197] — Wiener geht auf S.138 zu $\mathbb{C}$–Vektorräumen über. In einer Fußnote auf S.143 stellt er fest, daß Banachs System zu seinem eigenen von 1920 äquivalent ist (was nicht ganz stimmt), erkennt aber gleichzeitig an, daß Banachs Axiome *„are in a form more immediately adopted to the treatment of the problem in hand"*. Banach erwähnt in der 1922er Veröffentlichung seiner Dissertation Wieners Arbeiten von 1920 nicht. Man spricht noch eine Zeitlang von ‚Banach–Wiener–Räumen'.

---

[76] — Hahn liefert eine Definition linearer Räume mit denselben Axiomen wie Peano (also nichtredundant, vgl. [52] 295), aber etwas anders angeordnet (er nennt seltsamerweise bereits die Konvention $(-1)a = -a$, bevor er die additive Struktur erwähnt hat); es folgen eine axiomatische Norm(„Metrik")definition und der Begriff der Vollständigkeit. Hahn gibt keinerlei Verweise.

1923

[39] — Dickson gibt nun eine vollständig postulatorische Definition einer endlichdimensionalen **A**
Algebra. Er verweist auf S.13 auf Scorza und auf die französische Encyclopédie von 1908, Tome 1, Vol.1, 369–378, wo im wesentlichen dieselbe Definition wie bei Scorza, allerdings über $\mathbb{R}$, enthalten sei. Das wäre dann die früheste postulatorische Definition der linearen Struktur außerhalb Italiens; ich habe es bisher nicht nachprüfen können.

Obwohl Dickson auf seine früheren Arbeiten hinweist, erwähnt Moore [37] und [38] nicht und verfolgt auch die gegebenen Verweise auf Scorza nicht.

1924

[187] — Wedderburn schreibt über *algebras without a finite basis.* Er will seine Ergebnisse von 1907 verallgemeinern, wo er sich durch das Benutzen von Induktion oft an endliche Basen gebunden hat. Auf S.395 betont er „[the] *little place the finiteness of the basis — or indeed the presence of any basis at all — has in the principle theorems of linear algebras*"; dies sei erstmals wirklich erforderlich im Beweis des Satzes, daß in einer Algebra, die Elemente von endlichem Rang, nicht nilpotent, besitzt, primitive idempotente Elemente existieren, oder auch der Sätze, daß, wenn A nicht nilpotent ist, A ein idempotentes Element enthält, oder daß „[a]*maximal nilpotent invariant Subalgebra can be separated from the rest of A*".

Zunächst weist Wedderburn auf S.396 auf die Hamiltonsche Definition hin und modifiziert
diese sodann derart, daß G eine beliebige Indexmenge von Indizes t ist und ξ eine Funktion von t,
die t auf ein Element eines beliebigen Körpers (oder gar eine andere Algebra; das gäbe dann das
direkte Produkt) abbildet. Zwei solche Funktionen ξ, η heißen dann gleich, wenn sie auf jedem t #51
übereinstimmen, ihre Summe auf einem t ist durch die Addition des Körpers erklärt, ihr Produkt #52
auf einem t muß assoziativ und distributiv sein, und die Menge, auf der das Produkt erklärt
ist, abgeschlossen unter diesem Produkt. *„If this condition does not hold in a given set, as in
Grassmann's calculus, the set may always be so extended that it has this property"*. Er führt dann #53
mithilfe charakteristischer Funktionen eine Darstellung der Funktion $\xi(t)$ durch eine Summation
über G ein, wobei die genaue Bedeutung des Summenzeichens offengelassen wird; als Beispiele
führt er auf S.397 gewöhnliche Summation an, wenn G abzählbar ist (ein Spezialfall sind *algebras
with a finite basis*) sowie eine Art Stieltjessches Faltungsintegral, wenn G ein Intervall von $\mathbb{R}$ ist. #54

Ansonsten bezeichnet er als *basis* eine Menge, bezüglich der man *„every function of the algebra"* $\xi(t)$ darstellen kann, fordert aber nicht, daß nur endlich viele Koeffizienten von 0 verschieden sind; vgl. auch S.400.

Auf S.399 bringt er eine *more abstract definition.* Er verzichtet bewußt auf Unabhängigkeitsuntersuchungen, *„the aim being descriptive rather than analytical"*. Die Menge soll mindestens 2 Elemente enthalten. Er axiomatisiert zunächst die Gruppen- und Algebrenstruktur. Skalarmultiplikation mit natürlichen Zahlen wird kanonisch eingeführt; falls eine kleinste natürliche Zahl m
#55 mit $ma = 0$ für $0 \neq a \in A$ existiert, so ist es eine Primzahl, falls keine existiert, so fordert er, daß für alle von Null verschiedenen a und für alle natürlichen m die Gleichung $a = mb$ lösbar ist. Diese Forderung sei *„sufficient for many purposes, but the following one, which includes it, will usually be more convenient"*. Er fordert dann auf S.400 eine (1,1)–Korrespondenz zwischen einem Körper und (für jedes $0 \neq a \in A$) einer Untermenge A_a von A, wobei a der 1 und die Null von A der Null des Körpers entsprechen soll; es soll dann $\mathcal{D}_l$ gelten; ferner fordert er erstens $0 \neq b \in A_a : A_b = A_a, \xi_2 b = \xi_1 a \Rightarrow a = (\xi_1\xi_2^{-1})b$ [✓] $(\xi_2 \neq 0)$, zweitens $\xi_3(\xi_1 a+\xi_2 b) = \xi_3\xi_1 a+\xi_3\xi_2 b$ (undeutlich, ob nur für die vorherigen b) und schließlich $\xi a \cdot b = a \cdot \xi b = \xi(ab)$. Damit entsprächen dann die Elemente von A einer affinen Geometrie, deren Punkte diese Elemente, oder einer projektiven Geometrie, deren Punkte die Mengen A_a sind.

Anschließend stellt er einige Postulate für unendliche Summen auf — dazu offenbar gezwungen durch seinen Verzicht auf die Finitheit der Linearkombination und die Tatsache, daß die genannten Postulate nur für *„a finite number* [...] *of applications of the fundamental operations"* Aussagen machen. Der §5 gibt Postulate, die für Algebren ohne endliche Basis *„peculiar"* (S.396) sind, z.B. auf S.406 die Forderung: A enthält idempotente Elemente $\Rightarrow A$ enthält mindestens ein primitives
#56 idempotentes Element (womit er vermutlich die Lücke im Beweis des eingangs erwähnten Satzes schließen kann). Ab S.420 diskutiert er einige Beispiele.

$\mathcal{D}_r$ ist aus den gegebenen Forderungen leicht abzuleiten; für $\mathcal{A}_\circ$ setze in ‚zweitens' $b = 0$.

1925

[60] — Fréchet verallgemeinert den Begriff des normierten Raumes; er untersucht nun (im Anschluß an seine früheren Arbeiten zu metrischen Räumen) metrisierbare, aber nicht normierte Vektorräume und sogar solche mit nicht metrisierbaren Topologien (S.40). Er verweist auf Pincherlés Arbeit [150] und sowohl auf Banachs Dissertation [6] wie Wieners Arbeit [195]. Die hier besprochene Arbeit habe er in den *Comptes Rendus* vom 9.2.1925, t.180, p.419–421 angekündigt.

Zwei Zitate von S.26 bzw. 27 verdeutlichen, worauf es Fréchet ankommt:

> Le fait que le nombre de coordonnées [...] n'est déterminé que si on fait intervenir
> #57 des considérations de continuité était ignoré ou méconnu. [...] ces auteurs [Banach, Wiener] leur [systèmes d'axiomes] ont lié nettement les considérations de continuité que leurs prédécesseurs avaient cru habile d'écarter.
>
> [...] *une Distinction* [...] *entre les notions de distance de deux points et de longueur*
> #58 *d'un vecteur* [...] permet de mettre en évidence que, si la conception de l'espace
> #59 abstrait affine est logiquement indépendante des considérations de continuité (sauf sur
> #60 chaque droite prise isolément), on n'obtiendra pourtant des résultats intéressants qu'en
> #61 rétablissant des liens naturels entre ces deux ordres d'idées.

Die von Fréchet gegebenen Begründungen für diese Behauptungen folgen weiter unten. S.27 unterscheidet er zwischen Punkt- und Vektorstruktur und korreliert zur ersten die metrische, zur zweiten die Normstruktur.

Fréchet gibt zwei Definitionen eines abstrakten Raumes. Die erste *vectorielle* (S.28f) erklärt eine *famille des vecteurs abstraits* mit einer redundanten, Banach verpflichteten Liste von Axiomen für einen normierten Vektorraum, wobei die Dreiecksungleichung bewußt fehlt; die Koeffizienten sind aus $\mathbb{R}$. Zu einem *espace abstrait affine* wird eine solche *famille*, wenn sie derart mit einer Punktstruktur versehen ist, daß folgende Axiome erfüllt sind: WIENERS Axiome (9) und (12), eine stärkere Fassung von Axiom (11) (mit Eindeutigkeit von ξ) und eine schwächere Fassung von (13) (die Norm von AA ist 0, *quelque soit* A). Es folgen Beispiele für solche affinen Räume. Die zweite Definition (S.33f) bezeichnet er als *géométrique*. Gemäß einer Anmerkung auf S.34 war ihm hier Anschaulichkeit wichtiger als Unabhängigkeit. Auf S.35 wird der Zusammenhang der beiden Definitionen geklärt; wegen des Beweises ihrer Äquivalenz verweist er auf seinen Artikel in den Annales de la Societé Mathématique Polonaise **4** (1925). Auf ein unabhängiges System im geometrischen Fall habe er verzichtet.

Auf S.36 stellt er nun erneut fest, daß diese Begriffe, soweit bis dahin eingeführt, von Stetigkeitsbetrachtungen unabhängig sind. Er erklärt nun, wieso dadurch die Wirkmächtigkeit der Begriffe eingeschränkt ist:

> *Si on ne fait pas intervenir une notion analogue à celle du voisinage ou de la convergence d'une suite de points, tout ensemble ayant la puissance du continu, par exemple, pourra être regardé comme un espace affine.* C'est–à–dire qu'on pourra associer à cet espace une familles des vecteurs, des droites, des plans, ... de la façon indiquée plus haut [im Rahmen der zweiten Definition].
>
> On arrivera alors à des conceptions contre nature, et croyant introduire un certain ordre dans un espace déterminé, on y introduira le désordre. #62

Als Beleg verweist er auf CANTORS Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3$, die zu einer *géométrie logique, mais contraire du bon sens* (S.37) führen würde dergestalt, daß als „Geraden“ bzw. „Ebenen“ in $\mathbb{R}$ die Bilder der Geraden bzw. Ebenen in $\mathbb{R}^3$ aufgefaßt würden (auf die Begriffe „Gerade“ und „Ebene“ war er im Zusammenhang seiner *definition géométrique* eingegangen). Dieses Ergebnis läßt ihn darüber staunen, daß *même certains* [auteurs] *ont explicitement déclaré qu'ils voulaient exclure de leurs définitions les considérations de continuité*; er nennt hier keine Namen — es ist also unklar, ob er an WEYLS RZM denkt (vgl. dazu #175). #63

Er fordert nunmehr die Dreiecksungleichung für die *distance* (diese Ungleichung ist ja gewissermaßen die Stetigkeit der Addition des Raumes) und: Es soll dafür, daß eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ gegen A geht, notwendig und hinreichend sein, daß die *distance* von A_n und A gegen Null geht. Wohlgemerkt: Er definiert nicht etwa die Ausdrucksweise *gegen A gehen*. Vielmehr soll die *distance*–Abbildung so beschaffen sein, daß sie solch einem Vorgang Rechnung trägt. Auf S.38 schließen sich die Dreiecksungleichung für die Norm und der Begriff der Vollständigkeit an; von letzterer hebt er hervor, daß sie hier Forderung, nicht Satz ist. Einen Vektorraum, der durch eine Norm zum metrischen Raum wird, bezeichnet er als *espace (D) vectoriel*; diese Bezeichnung habe er auch schon vor dem Congrès de la Societé des Savantes in Dijon im Jahre 1924 benutzt.

---

[105] — KRULL betrachtet S.161 sogenannte *verallgemeinerte abelsche Gruppen* (kurz v.a.G.);

> Die verallgemeinerten abelschen Gruppen [...] entstehen [...] aus den gewöhnlichen [...] dadurch, daß wir neben den infolge der Gruppeneigenschaft auftretenden ganzen Zahlen noch weitere distributive Operatoren Θ aus einem im übrigen völlig willkürlichen Operatorenbereich $\mathcal{O}$ zulassen, und ein Elementesystem nur dann als Gruppe bezeichnen, wenn es nicht nur hinsichtlich der Addition Gruppeneigenschaft besitzt, sondern auch gleichzeitig mit einem Element α stets jedes Element $\Theta\alpha$ für beliebiges Θ aus $\mathcal{O}$ enthält.

Besonderes Augenmerk legt er auf die endlichen v.a.G., die in Analogie zu einer Eigenschaft endlicher abelscher Gruppen dadurch charakterisiert sind, daß es keine unendlichen Untergruppenketten gibt. $\mathcal{O}$ enthält nicht notwendig $\mathbb{Z}$. Er spezialisiert auf S.173 die Menge $\mathcal{O}$ als zerfallend in $\mathcal{O}'$ beliebig und einen Körper $\mathcal{K}$. Im Anschluß erklärt er die Begriffe der linearen Unabhängigkeit und der Basis, stellt das Dimensionsaxiom auf und zeigt die Grassmannsche Dimensionsformel.

---

[92] — Mark INGRAHAM veröffentlicht seine *thesis*, in der der Begriff des Bimoduls über einem Divisionsring axiomatisch eingeführt wird (S.167). Seine Axiomenliste ist redundant; er führt auch keine Unabhängigkeitsdiskussion. Als Beispiele nennt er Algebren über beliebigen Körpern und Funktionen in Mengen, die er auf S.163 als Verallgemeinerung des Konzeptes Divisionsalgebra bezeichnet. Kernthema der Arbeit sind *linear sets*, das sind unter Linearkombination abgeschlossene Mengen (S.170).

Ingraham hat mit dieser Arbeit bei MOORE in Chicago promoviert, und zwar bereits 1924. Das geht hervor aus der Nationalbiographie *American Men of Science ... The Physical & Biological Sciences*, herausgegeben von Jaques Cattell an der Arizona State University, hier in der 10.Auflage von 1960, S.1948. MACLANE verlegt die Arbeit ins Jahr 1926 ([110] 17)

1927

A [164] — SCHAUDERs Artikel bringt den Begriff des Banachraumes mit Schauderbasis (er spricht von *Vektorfeld*). Er stellt fest, daß sich aus der Vollständigkeit ein großer Teil der Vektorraum- und Normstruktur ableiten läßt. Er zeigt auf, daß viele bekannten Funktionalräume solche Vektorfelder sind.

Im selben Band der Mathematischen Zeitschrift auf S.417–431 macht Schauder Bemerkungen zu [164], die in unserem Zusammenhang nicht von Bedeutung sind.

---

[4] — ARTIN betrachtet hyperkomplexe Zahlensysteme vom Standpunkt der modernen Algebra aus. S.307: Moduln sind unter Subtraktion abgeschlossene Teilmengen von Ringen; speziell sind R–Moduln Moduln, die kommutativ mit einem Ring verbunden sind. Hyperkomplexe Zahlensysteme sind Moduln, die unter Multiplikation abgeschlossen sind. Artin will die bisherige Theorie (DICKSON, WEDDERBURN) auf Bereiche ausdehnen, in denen die vorhandenen Ergebnisse auch gelten, die aber den bisher gegebenen Definitionen nicht genügen (etwa Restklassen nach einer Primzahlpotenz). Die lineare Struktur spielt (als Spezialfall, für den jene Ergebnisse auch, aber nicht nur, gelten) keine Rolle. Den Grund für die Übertragbarkeit der Ergebnisse erläutert Artin in [5] 67: ein hyperkomplexes Zahlensystem ist ein endlichdimensionaler Vektorraum und erfüllt damit die Bedingung, daß auf– und absteigende Ketten von Unterräumen abbrechen; daher sind NOETHERsche Methoden anwendbar.

Die Arbeit ist auf den Januar 1927 datiert; laut *Collected Papers* stammt Bd.5 der *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* aus dem Jahr 1928. MOORE verlegt diesen ins Jahr 1927; Artin selbst nennt in [5] 67 das Jahr 1926.

---

[77] — HAHN kommt auf S.214 auf seine Definition von 1922 zurück und verweist auf BANACH.

---

[189] — Der spätere Bourbakist André WEIL hält und veröffentlicht in Italien einen Vortrag *sul calcolo funzionale lineare*; die axiomatische Definition eines *spazio affine* auf S.773 umfaßt die additive und lineare Struktur eines $\mathbb{R}$–Vektorraums. Genauer fordert er die Abgeschlossenheit von $+$, $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{K}_+$, $\mathcal{D}_l$, $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{A}_\circ$ und ferner $0P = 0Q$. Er verweist auf Fréchets [60] wegen des *spazio topologico affine.*

1928

[191] — WEYL klagt auf S.3:

> Es ist ein wenig langweilig, daß man die lineare Algebra, deren Grundbegriffe überall in der Mathematik und Physik auftauchen und deren Kenntnis darum eigentlich dieselbe Verbreitung haben sollte wie die Elemente der Differential- und Integralrechnung, heute immer noch von neuem auseinandersetzen muß.

Die auf S.4 gegebenen Axiome sind identisch mit denen von 1918, wobei die affine Struktur entfällt (aber dennoch von *„affiner Vektorgeometrie“* die Rede ist). Er spricht nun von *Vektorraum* (Überschrift §1). Der Axiomatisierung geht eine Motivation mit Tupeln voran; er nennt als entscheidenden Unterschied, daß bei axiomatischer Einführung alle Koordinatensysteme gleichberechtigt sind (S.6). Nach vorheriger koordinatenmäßiger Motivation folgt auf S.12ff der axiomatische Begriff der linearen Abbildung und der koordinatenweise des dualen Vektorraums. Skalare werden zunächst als ‚Zahlen‘ bezeichnet; im Zusammenhang der Einführung der euklidischen Metrik auf S.15ff macht Weyl die Bemerkung, daß der Inhalt der vorigen Paragraphen nur daran gebunden sei, daß der Zahlbereich ein Körper ist; fortan solle der Körper $\mathbb{C}$ und daher die hermitesche statt der quadratischen Einheitsform benutzt werden. Auf S.20ff werden die Begriffe Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum erarbeitet.

Ab S.29ff befaßt sich Weyl mit Räumen unendlicher Dimension; er unterscheidet zwischen abzählbar und kontinuierlich unendlichvielen Dimensionen. Sein erstes Beispiel ist der Hilbertsche Folgenraum (als komplexer Raum nicht quadrat-, sondern hermitesch summierbar); diesen faßt er als abzählbar unendlichdimensional auf; es ist nämlich für Weyl nicht die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren, sondern die Zahl der zur Darstellung eines Elements erforderlichen Koeffizienten bestimmend. Entsprechend weist er dem Raum der stetigen 2π–periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — im folgenden kurz $\mathcal{F}$ — kontinuierlich unendlichviele Dimensionen zu, wobei (wegen der Periodizität kann modulo 2π gerechnet werden) die Stellen s auf der Kreisperipherie die Rolle der Indizes übernehmen und der Wert der Funktion an einer solchen Stelle s der zugehörige Koeffizient ist. Er führt auf S.30 ein geeignetes Skalarprodukt, sodann auf S.31 als *„unitär–orthogonales Koordinatensystem“* von $\mathcal{F}$ die (abzählbar vielen) Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ns}$ ein, bezüglich welchen er wegen der Parsevalschen Gleichung alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ mit ihrer Fourierreihe darstellen kann (er spricht trotz der unendlich vielen von Null verschiedenen Fourierkoeffizienten von einer Linearkombination). Weyl sagt daraufhin: *„Wir lernen aus diesem Beispiel, daß zwischen einem Raum* #64 *von abzählbar und von kontinuierlich unendlichvielen Dimensionen kein Unterschied besteht“.* Auf S.269 erscheint der abstrakte Begriff der Algebra.

Meine Angaben stammen aus der 2.Auflage von 1930, in der lt. dem Vorwort (S.VII) der algebraische Standpunkt auf Betreiben von ARTIN/NOETHER stärker hervorgekehrt ist als in der von 1928 (die mir nicht vorliegt).

---

[167] — SCHMIDT schließt an KRULL an; diesem gegenüber entfällt die Kommutativität der Gruppe.

1929

[134], [133] — NOETHER kommt in zwei Arbeiten auf den Modulbegriff zurück. Die erstgenannte geht von KRULLS Begriffen von 1925 aus; der Ring hat nicht ausdrücklich eine 1, folglich fehlt $\mathcal{U}$. Im §2 der zweitgenannten Arbeit erscheint der heutige Modulbegriff — mit dem Namen Modul, obgleich unter Verweis auf [132] §9. T im Sinne jener Arbeit von 1921 wird nun auch als abelsche Gruppe erkannt.

1930

[128], [129] — VON NEUMANN veröffentlicht zwei Arbeiten, in denen der allgemeine Hilbertraumbegriff (also nicht mehr nur ℓ^2) entwickelt wird. In der erstgenannten Arbeit formuliert er die lineare Struktur so (S.370): *„Mit diesen* [Elementen des als bekannt vorausgesetzten Hilbertraumes] *kann man wie mit Vektoren rechnen, so daß der Sinn von Bildungen wie $f \pm g, af$ ohne weiteres einleuchtet“*. In der zweiten Arbeit entspricht die Axiomengruppe A eines Hilbertraums auf S.64 (vgl. [130]) der linearen Struktur. Von Neumann gemahnt hier an die *„Rechenregeln der gewöhnlichen Vektoralgebra“*; eine lineare Mannigfaltigkeit ist eine Teilmenge abgeschlossen unter Linearkombination.

1931

[86] — HAUSDORFF formuliert unter dem Begriff des linearen Raumes auf S.294 eine der heutigen entsprechende Fassung der Axiome. Diese umfassen eine additive abelsche Gruppe mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ „macht keine wesentlichen Unterschiede, soll hier aber nicht behandelt werden“), $\mathcal{D}_l$, $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{A}_\circ$ sowie $0x = 0$. Er erklärt anschließend wie üblich den Begriff der linearen Menge. Auf S.295 wird die lineare Hülle einer Menge von Elementen definiert als kleinster Raum, der die Menge enthält; sie wird erkannt als die Menge aller endlichen Linearkombinationen. Basen können endlicher, abzählbarer oder „unabzählbarer“ Mächtigkeit sein.

Das Vorwort verdeutlicht das Anliegen der Arbeit: Vollständigkeit soll als Forderung dort
#65 relativiert werden, wo sie bisher in funktionalanalytischen Zusammenhängen benutzt wurde, aber schwächere Forderungen (etwa von zweiter Kategorie zu sein) ausgereicht hätten.

1934

[98] — Der Artikel von KOETHE und TOEPLITZ beginnt in Koordinatensprache (sog. lineare Koordinatenräume mit komplexen Koordinaten); sie zitieren dann S.195 die Definition von HAUSDORFF aus [86] (und verweisen auf BANACHs Buch von 1932) und sagen S.196, daß die Koordinatenräume Instanzen dieser Definition sind. Ihr Dualitätsbegriff ist koordinatenbestimmt; gelegentlich sei die
#66 Unterscheidung von dualem und konjugiertem Raum erforderlich (S.195). Der Hilbertsche Raum (also der Raum der quadratsummierbaren Zahlenfolgen, S.197) ist der einzige selbstduale Raum (S.216)

1941

[68] — GELFAND führt den Begriff der Banachalgebra (er spricht von *„normierten Ringen“*) ein.

Kapitel 2

Lehrbücher

Neben den Primärquellen — die oft genug dem Übersehenwerden anheimgefallen sind — spielen natürlich die Lehrbücher eine hervorragende Rolle. In ihnen ist zwar sicher nicht die erste Formulierung eines Begriffs zu finden; wohl aber hält ein Begriff, der neu geprägt wurde und zuerst nur wenigen Spezialisten vertraut ist, über Vorlesungen und eben auch Lehrbücher Einzug in die Ausbildung neuer Mathematiker und damit in das gemeinsame Vokabular einer (sich ständig selbst verjüngenden) Forschergemeinschaft. Erst wo das geschehen ist, kann man sagen, daß ein Begriff allgemein akzeptiert ist.

Im ausgehenden 19.Jahrhundert wurde lineare Algebra in Form von analytischer Geometrie und Determinantentheorie[16] betrieben und gelehrt. Zwar war sich CAYLEY schon 1854 bewußt, daß die Theorie der Matrizen der der Determinanten vorausgeht ([136] 172 Anm.17), doch blieben die Determinanten bis in unser Jahrhundert in ihrer Schlüsselstellung innerhalb der linearen Algebra — zum Schaden derselben: *La théorie des déterminants* [...] *a pu être un obstacle épistémologique à une bonne perception du concept de rang* ([49] 173). Dessen ungeachtet erfreuten sich die Determinanten einer breiten Beliebtheit (vgl. [43] 10 und [88] 150); nur FROBENIUS ging lt. [49] 180 auf Distanz verglichen mit SMITH. Daher war auch die Determinanten- und Matrizentheorie *background* der Theorie der Funktionenräume und nicht die axiomatische lineare Algebra ([10] 3; ähnlich DORIER). Vollends behauptete die Determinantentheorie diese Rolle in der Didaktik, so daß noch MONNA in seinen frühen Jahren (er spricht von der *old world*) mit ausgedehnten Determinantenberechnungen beschäftigt wurde ([125] 278).

Lehrbücher dieser Prägung sind etwa das Lehrbuch der Determinanten von BALTZER 1857, das auch ins Französische übersetzt wurde, oder die Lehrbücher der analytischen Geometrie von SALMON/FIEDLER (1860) oder Otto HESSE (1861), beide genannt von [109] 135; ebd. 310 werden noch Lehrbücher von KILLING, L.HEFFTER/E.KOEHLER und O.STAUDE erwähnt; die analytische Geometrie sei in Frankreich sogar bereits vor dem Hochschulstudium gelehrt worden.

Ähnlich sehen auch die Lehrbücher aus dem beginnenden 20.Jahrhundert aus ([12] 762: *„real and complex algebra dominated the textbook literature 1830–1930“*); bei BIRKHOFF und MACLANE findet sich ein Buch von Fricke ([15] 27r). Außerdem ist hier die *Einführung in die Determinantentheorie* von Gerhard KOWALEWSKY zu nennen, die 1909 bei De Gruyter in Berlin erschien. DIEUDONNÉ bescheinigt der *Einführung in die höhere Algebra* von M.BÔCHER (erschienen bei Teubner in Leipzig im Jahre 1907), daß sie schon wesentlich breiter und weniger vergangenheits-

[16] einen Überblick über die Entwicklung der Literatur zur Determinantentheorie bieten [114] und Price, Derek John de Solla, *Quantitative measures of the development of science*, in: Archives Internationales d'Histoire des Sciences **4** (1951) 85–93. Das Standardwerk ist Muir, T., *The theory of determinants in the historical order of development*, 4 Bde, London 1906–1923; Daub 869. Nach ZADDACH stammt der Name *„Determinante“* von CAUCHY aus dem Jahre 1812 ([204] 3).

bezogen angelegt ist ([44] 12 Anm.9). Auch im Amerika dieser Zeit erscheinen einige Lehrbücher, die noch die alte Sprache sprechen. So scheint etwa DICKSON in seiner Didaktik noch in den 30er Jahren *vectors as n–tuples* behandelt zu haben, vgl. BIRKHOFF und MACLANE ([15] 27r), die bei ihm studiert haben; MacLane betont, daß er die Vektorraumaxiome bei Hermann WEYL gelernt hat (ebd. und auch [110] 30); er führt auch Dicksons Zahlentheoriebuch von 1929 als unbefleckt von moderner Gruppentheorie an ([110] 7). Diese Einschätzung wird von Dicksons Lehrbuch von 1926 bestätigt (vgl. [107] 15). Ähnliches gilt nach [127] 292 für WEDDERBURNs *Lectures on Matrices* von 1934. Dieses Buch von Wedderburn enthält die postulatorische Definition eines Körpers; eine Algebra ist ein Körper, bei dem gewisse Postulate entfallen — die lineare Struktur wird nur bei Algebren mit endlicher Basis erwähnt. DIEUDONNÉ erwähnt mehrfach ([46] 619r bzw. [44] 12 sowie Anm.9) das Buch *The Theory of Matrices* von Cyrus Colton MACDUFFEE aus dem Jahr 1933 als der alten Sprache verpflichtet. Ich habe das Buch in einem *reprint* von 1946 eingesehen; es beginnt mit DICKSONs Definition einer Algebra von 1923, scheint aber den Begriff des Vektorraums nicht zu erwähnen. Außerdem ist mir *An Introduction to Abstract Algebra* von 1940 vom selben Autor bekannt. Darin werden Gruppe, Körper und Ring abstrakt eingeführt; Vektoren über einem Ring (S.205) und Algebren (S.251ff) werden jedoch nur koordinatenweise betrachtet.

HAUSDORFFs Lehrbuch *Mengenlehre* (erschienen bei De Gruyter/Berlin 1927) enthält eine Definition des Begriffes *Basis* unter ausdrücklichem Bezug auf HAMEL (der auch deutlich wird in der Forderung der Endlichkeit der Linearkombination): eine linear unabhängige Menge heißt Basis ihres Erzeugnisses. Es werden rationale Skalare betrachtet (S.174; vgl. [127] 274).

Ein Buch, das die Wandlung der Lehre bereits erahnen läßt, ist das Buch *Einführung in die Algebra* von Otto HAUPT, [84]. Mir liegt die dritte Auflage von 1952 vor; die Vorworte zur 2. und 3.Auflage weisen außer der Aktualisierung von Literaturhinweisen keine größeren Änderungen gegenüber der ersten Auflage aus; schon das Vorwort zur ersten Auflage bedankt sich für die Mitarbeit von Emmy NOETHER, Wolfgang KRULL und Friedrich Karl SCHMIDT (S.IX). Ich vermute daher, daß der Krullsche Anhang (s.u.) schon in der ersten Auflage vorhanden war. Haupt verweist innerhalb seines Buches nach Abschnittsnummern; so heißt (4, 6) etwa Kapitel 4 Abschnitt 6.

In (1, 0) verweist Haupt auf BOURBAKI *Algèbre* Pt.I, Livre II, Chap.I *Structures algebriques* von 1942; dieser Verweis kann in der ersten Auflage natürlich noch nicht vorhanden gewesen sein. In (1, 17) setzt er die Begriffe axiomatische und implizite Definition gleich. In (3, 13) diskutiert er die Abhängigkeit der Körperpostulate; er beschränkt sich darauf zu zeigen, daß die Kommutativität der Addition aus den übrigen Axiomen (einschließlich der Kommutativität der Multiplikation) folgt; er erwähnt, daß umgekehrt wenigstens der Satz von WEDDERBURN gilt, daß jeder *endliche* Schiefkörper Körper ist, geht aber nicht auf DICKSONs unabhängige Axiome (vgl. Anm.22) ein.

In (9, 3) findet sich die Definition eines Moduls M über einem beliebigen Körper K; synonym wird von linearer Mannigfaltigkeit über einem Körper gesprochen. Haupt verweist auf [34] §168ff, auf [133] §2 und auf einen Artikel von KRULL in der zweiten Auflage der Enzyklopädie Leipzig 1939 I 1,11. M ist eine Gesamtheit von Elementen eines Erweiterungsintegritätsbereichs J von K, so daß mit x, y aus M auch ax (für a aus K) und $x - y$ aus M sind. Haupt erkennt als gleichwertig, daß mit $x_1, \dots, x_n$ in M auch jedes „lineare Aggregat" in M ist. Hier wird wie bei DICKSON wieder deutlich, wie die Unitarität implizit vorhanden ist.

Als „Vektor" bezeichnet Haupt an dieser Stelle die „n–Tupel der analytischen Geometrie des n–dimensionalen linearen Raumes". In (16, 8) S.394 spricht er noch einmal von „Vektor" im Zusammenhang von $\mathbb{C}$.

Der Abschnitt (17, 2) ist der Theorie der Körpererweiterungen gewidmet; ab S.434 ist von der „Körperbasis" die Rede. Der Grad einer endlichen Erweiterung wird definiert; an unendliche Erweiterungen wird hier und auch im Abschnitt (17, 4) nicht gedacht (hier wird deutlich, daß nur der abstrakte Vektorraumbegriff eine Definition des Grades unendlicher Erweiterungen erlaubt). Folgendes Zitat von S.437 ist interessant:

> Man kann das hier in Rede stehende Abstrahieren von der speziellen Darstellung [einzelner primitiver Elemente und zugehöriger Polynome hin zu den Eigenschaften aller Polynome] durchaus vergleichen mit der Abstraktion, welche in der analytischen Geometrie vorgenommen wird, wenn man von der Darstellung eines Vektors durch seine *Komponenten* (bezüglich eines festen, speziellen Koordinatensystems) übergeht zum *Vektor selbst* („invariante Schreibweise")

Zum Kapitel 23 hat Wolfgang KRULL einen Anhang beigesteuert (S.621ff); ab S.625 stellt er seinen Begriff der verallgemeinerten abelschen Gruppe dar, auf S.627 werden Ringe als Operatorenbereiche betrachtet, genauer Polynomringe über Körpern K. Hier werden dann die bisher fehlenden Postulate nachgeholt; da Polynomringe über Körpern immer eine 1 haben, ist die Unitarität vorhanden. In (23, 14) steht als Satz 1, daß jeder Klasse ähnlicher Matrizen n–ter Ordnung mit Koeffizienten aus K umkehrbar eindeutig eine v.a.G. vom Range n mit Operatorenbereich $K[X]$ entspricht. Krull verweist auf S.630 auf seine eigene Arbeit *Theorie und Anwendung der verallgemeinerten abelschen Gruppen* in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1926 (mathematisch–naturwissenschaftliche Klasse 1.Abhandlung), aber nicht auf [105].

Im Index seines Buches setzt Haupt die Begriffe Axiom und Postulat gleich (S.668)

1931 kam VAN DER WAERDENs Lehrbuch *Moderne Algebra* [182], das erste vollgültig ‚neue' Lehrbuch, heraus. Genauere Umstände der Entstehung teilen [48] und [185] mit.

BANACH kommt in seinem Lehrbuch von 1932 (1931 lt. [13] Anm.80) auf die Begriffe seiner Dissertation zurück. Auf S.26 bzw. 43 (die jeweils erste Seitenzahl nach [7], die zweite nach [8] II) steht die Definition eines *espace vectoriel ou linéaire*. Obwohl er auf S.20 bzw. 38 auch ein Axiomensystem des Gruppenbegriffs gibt, bringt er diesen Begriff nicht mit dem Vektorraumbegriff in Verbindung. Er hat nämlich die Axiome aus seiner Dissertation übernommen und dabei sogar einige Redundanzen beseitigt. Dort war neben der Existenz und Eindeutigkeit des Nullvektors auch die Kürzungsregel aufgeführt; mit deren Hilfe kann man aber aus den Axiomen der Skalarmultiplikation auf die Existenz des Nullvektors schließen (die Eindeutigkeit ist trivial), so daß dieses Axiom nun als Folgerung dem Leser aufgetragen wird. Beim Gruppenbegriff überläßt er umgekehrt die Kürzungsregel dem Leser.

Banachs Skalare sind stets reelle Zahlen; in einer Anmerkung auf S.231 bzw. 204f verweist er darauf, daß auch $\mathbb{C}$ als Skalarmenge möglich ist. Die metrische Struktur wird im Anschluß an FRÉCHET axiomatisch und separat von der Vektorraumstruktur betrachtet (S.8ff bzw. 29ff; etwas künstlich wirkt die Trennung dadurch, daß alle gegebenen Beispiele für metrische Räume auch Vektorräume sind, vgl. S.27); es wird unabhängig davon festgestellt, was ein normierter Raum ist und daß jeder normierte Raum insbesondere metrisch ist (S.53ff bzw. 63ff). Sogleich geht Banach zum Begriff des vollständigen Raumes über (er spricht natürlich nicht von Banachraum, sondern bescheiden von *espace du type B*). Der Begriff der Hamelbasis erscheint nur in einer Anmerkung (S.231 bzw. 205). Über die Schauderbasis spricht er ausführlicher (in beiden Fällen S.110ff); er zitiert [164], verlangt aber nicht, daß die Basisvektoren normiert sind. Er gibt für den Raum der Koeffizientenfolgen bezüglich einer Schauderbasis eine Norm an, vermöge der dieser Raum Banachraum ist, und zeigt dann, daß die Zuordnung einer Koeffizientenfolge eine bijektive beschränkte lineare Abbildung (mit beschränktem linearem Inversem) ist. Er beweist als nächstes, daß die Projektion auf einen Koeffizienten ebenfalls beschränkt und linear ist, so daß er also Schauders Postulat V als von den übrigen abhängig erkannt hat. Er bezeichnet es als offenes Problem (jeweils S.111; S.238f bzw. 210), ob jeder separable Banachraum eine Schauderbasis hat[17]. Banach spricht in seinen Bemerkungen zu diesem Abschnitt auf S.238 bzw. 210 von *espaces* [...] *ayant une infinité de dimensions*, obgleich er diesen Begriff in seinem Buch nicht erklärt hat. #67

Der Begriff der *dimension linéaire* eines Fréchetraums (letzterer vgl. S.34 bzw. 49) wird in

[17]vgl. dazu [121] 70 *„question answered negatively"*, [123] 44.

einer abstrakten Weise gegeben (S.193ff bzw. 176ff): Wenn ein Raum E isomorph zu einem abge-
#68 schlossenen Unterraum eines Raumes E_1 ist, so sagt man $\dim_l E \leq \dim_l E_1$; Räume können auch
bzgl. der Dimension unvergleichbar sein. Banach verweist in diesem Zusammenhang in Kapitel XII
#69 und den zugehörigen Anmerkungen nicht auf [59]. Er formuliert die Vermutung, daß es separable
Banachräume gleicher Dimension gibt, die nicht isomorph sind.

In den Anmerkungen zu Kapitel 10 (S.241 bzw. 211) verweist Banach auf [86]. Der Dualraum eines Banachraums wird als Banachraum erkannt (S.239f bzw. 211).

DIEUDONNÉ bezeichnet das Buch als Sammlung von Resultaten ohne System ([41] 137).

Das Lehrbuch von SCHREIER/SPERNER aus dem Jahr 1935 fällt in der Entwicklung hinter das von VAN DER WAERDEN zurück. In Deutschland erleben etliche Bücher vom alten Typ (neben dem Schreier/Sperner noch die Bücher von HAUPT und KOWALEWSKY) Neuauflagen bis in die fünfziger und sechziger Jahre.

Indessen greift der neue Lehrbuchtypus auf Amerika über. ALBERT beginnt sein Lehrbuch [1] von 1936 im Stil der modernen Algebra mit den Begriffen Gruppe und Ring. Ein *linear set over a ring A* (Albert nennt als Synonyma *vector space, linear space, A–module*) ist eine Gruppe mit Skalarmultiplikation, für die $\mathcal{A}_\circ, \mathcal{D}_l$ und $\mathcal{D}_r$ erfüllt sind — während $\mathcal{U}$ fehlt, da A nicht notwendig eine 1 hat. 1941 führen BIRKHOFF/MACLANE in ihrem *Survey* [11], mit Beispielen motiviert, den abstrakten Vektorraum über einem beliebigen Körper ein (S.167f); zur Entstehung dieses Buchs vgl. [15]. Es ging aus einer von Birkhoff in Harvard eingeführten Algebragrundvorlesung hervor, die sich im zweiten Semester dem *axiomatic treatment of vector spaces over general fields* widmete, von dort aus zu *algebraic numbers* fortschritt und Matrizen als lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Räumen auffaßte ([15] 29ℓ). Nach [15] 30l wird im *Survey* die Geometrie betont. HALMOS' Lehrbuch *Finite dimensional vector spaces* aus dem Jahr 1942 ist beeinflußt von der Verwendung unendlichdimensionaler Räume in der Funktionalanalysis ([110] 19). Halmos nennt gleich auf S.1 die üblichen Axiome (inklusive inverser Struktur) und $0x = 0$. Er spricht nicht explizit von beliebigem Körper. Die Erneuerung der Lehrbuchliteratur war durch den Krieg notwendig geworden; [15] 30ℓ: *„The book [...] was ready for the surge of interest in mathematics that followed the end of the war"*.

BOURBAKIS *Algèbre linéaire* erscheint 1947; der Vektorraumbegriff wird als Spezialfall des Modulbegriffs eingeführt. Beispiele stehen im Hintergrund.

Das Bourbaki–Projekt stellt unter dem Sammelbegriff „Lehrbuch" einen Sonderfall, eine historische Innovation dar; die spezifische Gestalt dieses Werks ist eng mit den spezifischen ideengeschichtlichen Problemen der Axiomatik und damit des Vektorraumbegriffs verknüpft. Bourbaki ist lt. [46] 623ℓ nicht als Lehrbuch für Anfänger gedacht. Nach [41] 136 war [182] das Vorbild.

Seither wurden die einstigen Lehrbücher der analytischen Geometrie[18] zusehends von solchen der Linearen Algebra abgelöst ([125] 278, [124] 38). THOM hält den zur Begründung dafür vorgebrachten größeren Nutzen der Algebra für ein Scheinargument ([176] 372f) und geht so weit, den wahren Grund darin zu sehen, daß Verleger leben müssen (ebd. 374). BIRKHOFF hält Thoms Ablehnung einer Modernisierung der Didaktik für eine Überreaktion ([12] 774).

[18] DIEUDONNÉ bezeichnet den Namen analytische Geometrie als *intolerable*; eigentlich müßte so die Geometrie analytischer Räume heißen ([41] 140).

Teil II

Ideengeschichte des Vektorraumbegriffs

Kapitel 3

Strukturmathematik

Hermann Weyl äußert sich in seinem Nachruf auf Emmy Noether ([192] **102** S.438; vgl. auch S.437u) über die mathematische Methode, an deren Entwicklung diese Frau großen Anteil hat, wie folgt:

> When speaking of axiomatics, I was referring to the following methodical procedure:
> One separates in a natural way the different sides of a concretely given object of mathe- #70
> matical investigation, makes each of them accessible from its own relatively narrow and
> easily surveyable group of assumptions, and then by joining the partial results after ap-
> propriate, returns to the complex whole. The last synthetic part is purely mechanical.
> The art lies in the first analytical part of breaking up the whole and generalizing the
> parts. One does not seek the general for the sake of generality, but the point is that
> each generalization simplifies by reducing the hypotheses and thus makes us under- #71
> stand certain sides of an unsurveyable whole. Whether a partition with corresponding
> generalization is natural, can hardly be judged by any other criterion than its fertility. #72

Diese Beschreibung axiomatischer Methode kann am Anfang der Untersuchungen über die Ideengeschichte des Vektorraumbegriffs stehen. Denn sie zeichnet in sehr groben Linien bereits den Weg vor, den diese Untersuchungen nehmen und nach meiner Auffassung auch nehmen müssen. Sie bezieht sich dabei nicht speziell auf den Vektorraumbegriff, sondern auf die axiomatische Methode allgemein (oder, wie ich aus Gründen, die in Kapitel 6 klar werden, lieber sagen möchte: auf die Strukturmathematik allgemein). Und an diesen allgemeinen Fragen, von denen die Ideengeschichte des Vektorraumbegriffs nur ein Repräsentant ist, beginnen die Untersuchungen — um eine Terminologie zur Verfügung zu haben, um mit der Gedankenwelt vertraut zu werden. Das vorliegende Kapitel beschränkt sich meist auf immanent Mathematisches; lediglich Teile der Abschnitte 3.2 und 3.3 greifen schon auf die Themen der Kapitel 6 und 7 vor, welche auch in Weyls letztem Satz zu spüren sind. Diese Kapitel werden dann nicht mehr mit immanent Mathematischem auskommen, denn *„die Entstehung der Strukturen selbst* [geht], *ebenso wie die Formulierung neuer Prinzipen der Mathematik, über den Rahmen ihrer eigenen Methoden hinaus“* ([2] 63).

3.1 Das Gewinnen der Strukturen

Wussing zitiert in [200] 29 aus dem Vorwort des Algebralehrbuches des Kronecker–Schülers E.Netto. Dieser habe demnach versucht,

> den Aufbau [des Kalküls der Permutationen] von allen nicht unbedingt geforderten
> Voraussetzungen zu befreien, und ihm durch die Allgemeinheit der Objekte, mit denen #73

#74 er arbeitet, auch die Möglichkeit des Eingreifens in die verschiedensten Gebiete zu geben. Daß die Theorie der Gruppenbildung eine solche Darstellung zulässt, spricht
#75 für ihre weitgreifende Bedeutung und ihre Zukunft.

Das Zitat nennt drei *features*, die die Herausbildung der Gruppentheorie aus dem Kalkül der Permutationen ausmachen:

#73 Das Weglassen *„nicht unbedingt geforderter Voraussetzungen"*,

#74 Die *„Möglichkeit des Eingreifens in die verschiedensten Gebiete"*,

#75 Das Festmachen der Bedeutung der Theorie daran, daß sie sich zu diesem Vorgehen eignet.

#74 beruht darauf, daß diese verschiedenen Gebiete Gemeinsamkeiten haben, die herausgeschält werden ([198] 441: *„observation of similar patterns"*; [202] 23: *„Subsumierung unter Oberbegriffe"*), woraufhin eine neue Theorie entwickelt wird, die all diesen Gebieten ihre Gemeinsamkeiten betreffend übergeordnet ist. MacLane unterscheidet in seinem Artikel *The Genesis of Mathematical Structures, as exemplified in the Work of Charles Ehresmann*[19] die einzelnen Schritte *observation, generalization/modification, abstraction (analogy, subtracting, shift of attention)*; die folgende Darstellung greift Elemente dieser Unterscheidung auf.

3.1.1 Wechsel des Ausgangspunkts

3.1.1.1 Wechsel der Gegenstände: *Objects of Study of their own right*

Das wiederkehrende Motiv bei den geschilderten Veränderungen ist die Idee, Objekte, die zunächst nur in bestimmten Zusammenhängen auftraten, für sich selbst einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen. Die Vorstellung davon, was Gegenstand der Mathematik ist, verschiebt sich ständig. So galt nach Boi die Geometrie früher als *science of figures in space*, später als *science of space itself* ([16] 198). Steinitz geht es anders als Weber um die Körper selbst (vgl. [173] 167 und auch [152] II S.19). Peano konstruiert in **83.** 14. (vgl. die Ergänzungen zu #141 auf S.163) ein Erzeugendensystem für $\mathcal{L}(A, A)$, wobei A zweidimensional ist; von dieser Einschränkung abgesehen geht er unabhängig von dem konkreten Raum, auf dem die *sostituzioni* erklärt sind, vor. Peano wendet dann die Ergebnisse auf **83.** 4. an; das bedeutet, daß er die *elementi* A, A', B, B' als *formazioni di prima specie su d'una stessa retta* identifiziert. Entscheidend ist, daß diese Identifikation erst *nach* Zusammenstellung der Resultate erfolgt; auch in den Unterparagraphen **83.** 6. und 7., die Vorarbeiten für diese Resultate geleistet haben, wird das *sistema lineare*, auf dem die *sostituzioni* operieren sollen, nicht spezifiziert.

Man spricht bei der Trennung einer Theorie von den Problemen ihrer Herkunft auch von intrinsischem Aufbau. Insofern beschreibt diese Arbeit die Suche nach der intrinsischen Definition des Vektorraums — wie es etwa [51] 227, 248 und [127] 270 Anm.7 tatsächlich ausdrücken. So könnte Dieudonné bei #7 mit *„intrinsically"* Grassmanns Versuch meinen, die Ausdehnungslehre ganz unabhängig von Geometrie und Analysis zu begründen. Unabhängigkeit von anderen mathematischen Theorien war auch das Motiv von Peirce (vgl. [166] 16).

3.1.1.2 Wechsel der Definitionen

Der Übergang zur Struktur kann als Anwendung des Verfahrens gesehen werden, das man oberflächlich so zusammenfassen kann, daß aus Definitionen Eigenschaften und aus Eigenschaften Definitionen gemacht werden (so drückt es etwa MacLane auf S.356 seines in Anm.19 erwähnten

[19] in: Cahiers Topologie et Géometrie differentielle (Université Picardie/Amiens) **21** (1980), 353–365, hier S.358

Artikels aus). Beispiele sind STEINITZ' Definition der linearen Hülle (#48), die Restklassenabbildung als Äquivalenzrelation (S.67), die Eindeutigkeit der Darstellung bezüglich einer Schauderbasis (S.79), BANACHs abstrakter Dimensionsbegriff (S.79), KRULLs Charakterisierung endlicher verallgemeinerter abelscher Gruppen (S.40), der Übergang vom Punkt zum Ortsvektor (S.80), WEDDERBURNs Postulate für Algebren ohne endliche Basis (#56) oder HAUSDORFFs Suspendierung der Vollständigkeit (#65); als eine Ausnahme wird das Verhältnis der Funktionalanalysis zum Grundkörper erkannt (S.98). Das Gemeinsame dieser Beispiele ist die Festsetzung gewisser Teilaspekte (die aus den bisherigen Definitionen folgen) als neue Ausgangspunkte. Diese definieren dann ein neues grundlegendes Konzept; die ursprünglichen Definitionen folgen meist nur in Spezialfällen als Eigenschaften, z.B. folgt die koordinatenweise Definition der Addition bei Hinzunahme des Dimensions- oder Basisaxioms. (Exkurs: Diese Definition ergibt sich gelegentlich auch auf andere Weise als Folgerung, etwa bei HANKEL, indem er gemäß dem algebraischen Permanenzprinzip von einer solchen Addition verlangt, daß sie assoziativ, kommutativ und distributiv sein soll, in der A_1 als Folgerung aus der genetischen Theorie der Ausdehnungsgrößen oder bei DEDEKIND aus der Struktur des Erweiterungskörpers, vgl. dazu S.92. Die Tatsache, ***daß*** die Definition als Folgerung erscheint, heißt aber natürlich nicht, daß es eine Folgerung aus den Postulaten mit Dimensions- oder Basisaxiom ist, ist also kein Indiz für den von uns gesuchten Fortschritt, allenfalls eine mögliche Anregung für diesen.)

In [51] 246 bezeichnet DORIER GRASSMANNs Auflistung der Eigenschaften von extensiven Größen — die im wesentlichen die modernen Vektorraumaxiome enthält, aber eben als erarbeitete Folgerungen aus der eigentlichen Definition, vgl. #103 und die folgenden Stellen — als *„a posteriori axiomatization of linear structure"*. Engel wirft Grassmann vor, an der betreffenden Stelle *„unrichtiger Weise"* von ‚Erklärung' zu sprechen, vgl. die ergänzenden Anmerkungen zu #103 auf S.149. Im Kontext unserer Untersuchung empfindet man Engels Bewertung immerhin als voreilig (obwohl sie vermutlich korrekt ist). PEANO nimmt (unter Verzicht auf die Subtraktion) möglicherweise Grassmanns Auflistung zum neuen Ausgangspunkt. Nach seiner eigenen Darstellung läßt er sich bei der Aufstellung von Forderungen an die reelle Skalarmultiplikation von den Eigenschaften der natürlichen leiten, vgl. #145.

Die vermittels Wechsels des Ausgangspunkts neugewonnene Definition erschließt einen anderen Typ von Aussagen; vgl. dazu Abschnitt 4.2.1.3. Dieser Fortschritt kann sich durchaus im Rahmen logischer Äquivalenz ergeben, wie im genannten Abschnitt am Beispiel von DICKSON klargemacht wird; in der Regel wird er aber mit einer Ausdehnung des Geltungsbereiches einer Definition einhergehen, es werden also Aussagen über eine größere Menge von Instanzen möglich.

Vertauschungsvorgänge der oben beschriebenen Art werden in englischer Literatur gelegentlich als *conversion* bezeichnet. Z.B. sagt MONNA ([124] 17): *„I observed in Hilbert's work on the axiomatization of geometry the aspect of a conversion of ideas"*. Es folgen weitere Beispiele; an der Stelle, an der Monna HILBERTs Beiträge eingehender bespricht (ebd. S.15), heißt es jedoch: *„Hilbert r e versed things"* (Hervorhebung von mir). FREUDENTHAL unterscheidet zwischen *„conversion"* und *„inversion"* ([65] 1707); es geht ihm um antike Mathematik. Von *„inversion"* spricht er bei Kegelschnitten, die von den Griechen zunächst als Lösungsmengen von Gleichungen, dann am Kegel entdeckt wurden, während Appolonius Kegelschnitte am Kegel beschreibt und dann entsprechende Gleichungen angibt. *„conversion"* hingegen gilt ihm als *„more sophisticated"* und tritt etwa auf bei der *„elimination of proportion and similarity arguments from elementary geometry by means of area transformation"* (das verändere etwa den Beweis des Satzes von Pythagoras oder die Konstruktion des Fünfecks). Inwiefern solch eine Unterscheidung im Englischen sinnvoll ist, weiß ich nicht. Man gerät durch diese Verwendungen von *conversion* in Konflikt mit KUHNscher Terminologie, vgl. Abschnitt 7.2.3; ich schließe mich ihr daher nicht an.

3.1.2 Instanzen einer Struktur

3.1.2.1 Strukturgewinnung aus Instanzen

Wenn die Eigenschaften, die den konkreten Objekten (bei uns: den Operationen konkreter Vektorräume) gemeinsam sind, herausgearbeitet werden, erhält man die Struktur (bei uns: die Vektorraumstruktur), als deren Beispiele oder Instanzen nachträglich die konkreten Objekte erkannt werden. So ist etwa die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ eine Instanz der Struktur ‚Gruppe'.

Die hier gewählte Bezeichnung ‚Struktur' ist heute zwar allgemein verbreitet, mußte sich jedoch erst durchsetzen. [94] 81: *„Das Schlagwort Struktur ist* [...] *in der mathematischen Wissenschaftstheorie um die Jahrhundertwende noch nicht gebräuchlich; Hilbert verwendet* [...] *den Ausdruck ‚Fachwerk oder Gefüge von Begriffen'"*. Man könnte auch sagen ‚das Konzept' — vgl. etwa Wilder —, geriete damit aber in Konflikt zu Volkert, der [181] 185 sagt: *„In* [der informalen Ebene] *begegnet man Hypothesen, Analogien, Skizzen, Beispielen und Gegenbeispielen — wir sprechen zusammenfassend von Konzepten"*. Ebenso ist es üblich, ‚der Begriff' zu sagen. Weiter ist es auch üblich, anstelle von ‚Instanz' von ‚Modell' zu sprechen. Der Begriff ‚Modell' kann ausdrücken, daß die mit dem Modell versehene Struktur durch das Modell sinnvoll wird, während die Instanz der Struktur lediglich ein Vertreter der Struktur ist, ohne deren Sinn zu betreffen.

Durch den Übergang zur Struktur wird zugleich in Kauf genommen, daß Information (nämlich über den konkreten Rest) verloren geht. Sehr ähnlich klingen die diesbezüglichen Äußerungen von Alexandrov ([2] 51): *„Dementsprechend wird die Mathematik als Wissenschaft von beliebigen möglichen ‚reinen' Strukturen definiert, und zwar möglichen im Sinne von logisch denkbaren, obwohl im übrigen nur ‚scheinbaren' und ‚imaginären' und ‚reinen' in dem Sinne, daß ihre Elemente und Beziehungen nichts enthalten außer dem, was in der Definition dieser Strukturen gegeben ist"* und Weyl (RZM S.23): *„Von dem, was der Raum der Anschauung nicht teilt mit* [...] *»Zuständen von Gasgemischen« und »Lösungssystemen linearer Gleichungen«, enthält die Geometrie nichts"* (zu Weyls Beispiel der Gasgemische vgl. #49).

Daß die Gemeinsamkeiten der *„verschiedensten Gebiete"* überhaupt bemerkt werden, ist nicht von vorneherein klar. Die Mathematiker impliziter Phasen empfinden das Auffinden von Gemeinsamkeiten in verschiedenen Bereichen als Überraschung, siehe etwa #117. Der Prozess der Aufspürung von Ähnlichkeiten kann natürlich erst beginnen, wenn genügend Material vorhanden ist. Hans Wussing hat in seinem Standardwerk [201] großen Wert auf die Erforschung der *impliziten* Gruppentheorie gelegt[20], also all derjenigen Arbeiten, in denen bereits gruppentheoretische Techniken und Probleme implizit verwendet und behandelt wurden, obwohl die Gruppentheorie damals noch gar nicht vorlag. In [200] 25 bezeichnet er Cayleys Vorstoß zur Gruppentheorie im Jahre 1854 als historisch verfrüht, da damals nicht genügend konkrete Vorstellungen als Motivierung vorhanden gewesen seien. Zu einer impliziten Theorie gehörende Arbeiten können das ‚Rohmaterial' für die spätere Formulierung der expliziten Theorie darstellen — ob sie das tatsächlich taten, ist dann allerdings eine quellenkritisch zu prüfende Frage.

Eine spezielle Schwierigkeit, die dem Auffinden von Gemeinsamkeiten entgegensteht, ist, daß die vorfindlichen Notationen und Bezeichnungen das Gemeinsame eher verschleiern als unterstreichen — sind sie doch ursprünglich zur Unterscheidung des als verschieden Gedachten angelegt. Interessant ist etwa der Widerstand gegen algebraische Verknüpfung von Ausdrücken, die verschiedenen ‚Klassen' von Ausdrücken angehören. So habe Vieta darauf geachtet, daß (in der Algebra!) immer nur Terme gleicher Dimension zu einem Ganzen zusammengefaßt werden ([181] 25); ähnlich klingt Whiteheads *„meaningless"* (vgl. #9). Gregory hatte nach Nový ([136] 194) die *„principal idea"* der *„separation of symbols of operations from those of quantities"*. Bei Hahn ([77] 215) kann man beobachten, daß er für Grenzwerte von Vektorenfolgen ein anderes Grenzwertzeichen einführt als für ‚gewöhnliche' Grenzwerte (reeller Zahlen- bzw. Funktionenfolgen). Das ist aber nicht so sehr

[20] vgl. auch [203] 94 und die Arbeit [152] I, 23 des Wussing–Schülers Purkert.

ein unnötiger Umstand, sondern verrät Gewahrsein der unterschiedlichen Topologien.

Umgekehrt muß man zur Formulierung einer vielen verschiedenen Bereichen gemeinsamen Struktur entweder bereit sein, sich auf neu erfundene Zeichen einzulassen, oder aber, bekannte Zeichen mit einer neuen Bedeutung zu versehen, ohne darin einen Widerspruch zu sehen. Davon spricht HANKEL bei #114, wenn er sagt, die Zeichen bekämen einen anderen Inhalt.

3.1.2.2 Interpretation von Strukturen

Instanzen spielen auch eine Rolle beim Nachweis der Konsistenz eines Axiomensystems (zur geschichtlichen Entwicklung dieser Anforderung vgl. Abschnitt 6.1.2.1). Diese belegt man *„durch Aufweisung eines Modells,* [das] *uns als widerspruchsfrei gilt“* ([84] (3,13); vgl. etwa WIENERs entsprechendes Vorgehen bei [196] 340). Die Mathematiker legen auf den Nachsatz oft zu wenig Wert und sprechen davon, durch Angabe einer Interpretation (meist einer trivialen) sei die grundsätzliche Interpretierbarkeit der Struktur erwiesen (die Struktur ist nicht ‚leer‘). Interpretierbar ist aber jede beliebige Struktur; der Akzent muß darauf liegen, daß sie *widerspruchsfrei* interpretierbar ist. Die heutige Nachlässigkeit der Ausdrucksweise hat den historischen Grund, daß die ursprünglichen Anforderungen an Modelle abgeschwächt wurden (vgl. Abschnitt 6.3.1.1). Auch HANKEL beschäftigt sich mit der Modellierung zum Nachweis grundsätzlicher Interpretierbarkeit. Wenn er unter #112 sagt, den *„factischen Beweis“* der Möglichkeit von Zahlen, die nicht alle vom Permanenzprinzip geforderten Eigenschaften haben, erbringe das Anführen solcher Zahlen, so ist das (bei aller Trivialität der Aussage) eine überaus moderne Sichtweise; die von ihm gegebenen Modelle werden aber nicht den damaligen Anforderungen an Modelle gerecht, falls man das Permanenzprinzip 1867 noch unter diese rechnet. Daß nämlich Zahlen, die nicht alle vom Permanenzprinzip geforderten Eigenschaften haben, widerspruchsfrei sind, war damals nicht allgemein klar. Hankel selbst hat den Unterschied klar erkannt; er formuliert bei #115 — wo er das Angeben eines Modells als *„Exemplifikation“* bezeichnet — ausdrücklich, daß die *„gewöhnliche Arithmetik“* nicht den Charakter einer logischen Legitimation für die *„rein formale Mathematik“* hat.

3.2 Der methodische Sinn von Strukturmathematik

WEYL nennt in den eingangs wiedergegebenen Sätzen den Sinn jeder Methode: „[it] *simplifies“* (#71). So ist das Gewinnen neuer wissenschaftlicher Erkenntnis die Motivation für die wissenschaftliche Betätigung, die Ökonomie der Vorgehensweise aber zugleich Vorbedingung für solches Gewinnen und Veranlassung für das Abändern von Vorgehensweisen. Denn in einer dialektischen Verknüpfung führen neue Erkenntnisse zu neuen Problemen, die die hergebrachten Vorgehensweisen als unökonomisch in Frage stellen. ZADDACH bringt diesen Aspekt der Ökonomie in seiner Formulierung bei #76 zum Ausdruck.

Der Übergang zur Strukturmathematik ist ein besonders einschneidender Methodenwechsel der Mathematik (erschöpft sich allerdings nicht in methodischen Aspekten). Es gehört zu ihr dazu, daß die Methoden selbst untersucht werden. Das tun z.B. RIESZ in [159] — vgl. Kapitel 1 — und WEDDERBURN (nach [140] 316).

Die vordringliche Fähigkeit der Strukturmathematik ist es, zu ‚unifizieren‘. Es können allein aus den Eigenschaften der Operationen Schlüsse gezogen werden, die dann sofort auch für jede Instanz gelten. So wurde in unserem Fall eine Reihe von Aussagen der Form ‚Jeder Vektorraum hat ...‘ u. ä., eben die abstrakte Vektorraumtheorie, entwickelt. Man konnte auf diese Weise wichtige Sätze ‚ein für alle mal‘ beweisen, statt sie für jeden Vektorraum einzeln anzugehen (und da eventuell immer wieder zu sagen ‚Ganz ähnlich beweist man auch den folgenden Satz ...‘). Für diese Technik stehen zum Beispiel FRÉCHET und BANACH (zur Beweistechnik des ersten vgl. [10] 37, zu der des zweiten [127] 280). Auch ist es oft sehr viel einfacher, von den Eigenschaften auszugehen als von konkreten Operationen und Basen, und es ist jedenfalls großartig, mit einer (einfachen) Sprache sehr verschiedene Sachverhalte gleichermaßen behandeln zu können. So beschert im Falle des Vektorraums die Heranziehung beliebiger, insbesondere endlicher Körper neue Vertreter (vgl. Abschnitt 5.2.4); als sehr unterschiedlich angesehene Dinge (wie etwa $\mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{R}$) offenbaren ihre Gemeinsamkeiten. DORIER führt ein für uns bedeutsames Beispiel an ([52] 287): *„Le travail de Riesz* [...] *permet de montrer les «liens intimes»* [...] *entre les deux grands types de problèmes examinés par Hilbert* [...] *avec les fonctions de carré intégrable d'une part, et les suites de carré sommable d'autre part"*.

Es wird der Strukturmathematik sogar zugesprochen, mit dieser Fähigkeit zur Unifizierung etwas grundsätzlich Neues zum Bild der Mathematik beigetragen zu haben. Während die Mathematik lt. [175] 320 bis ins 19.Jahrhundert *area–specific* und *context–dependent* war, kann MONNA den Fortschritt der Mathematik gegenüber seinen eigenen Lehrjahren am Jahrhundertbeginn so beschreiben: *„I think nowadays modern algebraic concepts serve as a general apparatus for intrinsic relations* [zwischen mathematischen Teilgebieten]" ([125] 278). Diese große Bedeutung der Unifikation weist ihr nach ZADDACH sogar einen Platz im Schulunterricht zu ([204] 19):

> Das Ziel des heutigen Geometrie–Unterrichts kann es nicht mehr sein, einige reizvolle Lehrsätze ästhetisch zu genießen, sondern sollte darin bestehen, eine einheitliche Schau des derzeitigen mathematischen Gedankengebäudes zu vermitteln.

Die oben thematisierte Ökonomie ist aber weder die einzige Motivation noch der einzige Effekt des Methodenwechsels. Der Grundgedanke der in dieser Arbeit untersuchten Themenstellung ist die Überzeugung, durch die gewandelte Auffassung werde man dem ‚Kern der Probleme' eher gerecht. Sehr klar kommt diese Überzeugung in einem Beispiel von DRESS zum Ausdruck ([53] 173): *„Die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie hat nun wirklich gezeigt, daß der Inhalt des quadratischen Reziprozitätsgesetzes erst verständlich wird, wenn man zu den allgemeinen algebraischen Zahlen übergeht, und daß ein dem Wesen des Problems angemessener Beweis sich auch am besten mit diesen höheren Hilfsmitteln führen läßt, während man von den elementaren Beweisen sagen muß, daß sie mehr den Charakter einer nachträglichen Verifikation besitzen"*. Andere Beispiele deuten eher an, daß sich eigentlich die Vorstellung davon, was der Kern des Problems ist, gewandelt hat. VOLKERT bemerkt zu VUILLEMINs Behauptung, die Lösbarkeitstheorie algebraischer Gleichungen sei ein Beispiel, wo nur die Strukturanalyse zum Ziel führt, daß das nur zutrifft, wenn man an der Lösbarkeit, nicht an der Lösung einer bestimmten Gleichung interessiert ist ([181] 267).

Diese weitergehenden Aspekte zeigen bereits die Richtung an, daß schließlich auch die Idee zur Disposition steht, Strukturmathematik überhaupt als Methode zu begreifen. Ihr Weg führte weg von den Instanzen; [127] 280 unterscheidet die Axiomatik HILBERTs von der BANACHs in dieser Hinsicht. Diese Rollenverschiebung (vgl. dazu näher Abschnitt 6.3.1.2) ist der Kern der Debatte zwischen VUILLEMIN und KAMBARTEL (für den mathematische Strukturüberlegungen Hilfsmittel sind und mehr nicht; [94] 94). In dieser Loslösung der Strukturen von ihrer Anwendung wird offenbar eine Gefahr gesehen, wenn von *„axiomatic trash"* ([46] 620r), *„useless formalism"* ([66] 222), *„abstrakter Inzucht"* ([131] 49; vgl. die Wiedergabe des Zitats auf S.135) oder einer *„Inflation abstrakter Begrifflichkeit"* ([53] 178) die Rede ist. Mathematischer liest sich das von BIRKHOFF ausgesprochene Verdikt eines bestimmten von FRÉCHET gegebenen Begriffs ([13] 295): er habe die *„weakness of extreme generality: that of having few useful properties"*.

Zur Erinnerung an den ursprünglich methodischen Charakter der Strukturmathematik wird, weil es eben ein ursprünglicher Charakter ist, stets an die Herkunft dieser Strukturmathematik gemahnt. So ist es der Fall in den folgenden Zitaten von BRIESKORN ([19] 251):

> Durch die Praxis wird also letztendlich die Richtigkeit der Theorie bestätigt, erhält auch die Entwicklung der Mathematik ihre Rechtfertigung. Hier, in der Abstraktion von der objektiven Realität, liegt der Ursprung der Strukturen, liegt ihre Bedeutung.

> Diejenigen, die diese Bedeutung nicht sehen und nur darauf beharren, daß die Stärke der axiomatischen Methode in ihrem Absehen von allem nicht in den Axiomen Erfaßten liegt, begreifen nicht den dialektischen Charakter des Prozesses, der darin liegt, daß gerade das Absehen von der konkreten Bedeutung im Abstraktionsprozess eine umso größere Möglichkeit der nachfolgenden Konkretion in sich schließt.

und HASSE ([83] 34):

> Man darf nicht vergessen, daß die algebraische Methode nur eine *Methode* ist, daß sie also zu ihrer Anwendung den *Stoff* braucht. Ich meine damit: Die Idealtheorie z.B. wäre nie um ihrer selbst willen, aus Interesse an der Definition des Ideals entstanden, sondern sie bedurfte dazu des konkreten Problems aus der algebraischen Zahlentheorie. Und so überall in der modernen Algebra. Deshalb kann ebensowenig die abstrakte Algebra auf die Dauer losgelöst von den konkreten mathematischen Theorien existieren, wie diese sich nicht ohne die systematisierende und weitertreibende Einwirkung der abstrakten Algebra auf die Dauer durchsetzen können.

Mit WEYLS Worten ist der Vorgang der ‚nachfolgenden Konkretion' *purely mechanical*, liegt die Kunst in der vorangehenden Abstraktion. Durch eine solche Qualifikation darf aber nicht der Eindruck entstehen, die anschließende Synthese sei irgendwie uninteressant oder verzichtbar, denn die von Weyl geschilderte Methode hat erst dann Sinn, wenn beide Schritte vollzogen sind.

3.3 Strukturen und Axiome

Eine Struktur wird durch Axiome beschrieben. Insofern ist die Struktur Gegenstand einer Beschreibung, die Axiome sind die zur Beschreibung verwendete Form. Es sollen nun einige Unterschiede zwischen den ‚Strukturen selbst' und ihren Beschreibungen, also das Verhältnis der Strukturen zu ihren Axiomensystemen untersucht werden. Als die ‚Struktur selbst' wird dabei das bezeichnet, was durch alle logisch äquivalenten Axiomensysteme gleichermaßen erklärt wird (so lernen wir in dieser Arbeit zahlreiche logisch äquivalente, aber verschiedene Axiomensysteme für einen Vektorraum kennen; es geht aber immer nur um eine Struktur, die Vektorraumstruktur).

3.3.1 Vergleichbarkeit und Hierarchie der Strukturen

Man kann eine partielle Ordnung auf Strukturen angeben: Zwei Strukturen können so beschaffen sein, daß die eine die allgemeinere, die andere die speziellere ist, aber es gibt auch miteinander nicht vergleichbare Strukturen.

Strukturen können aus mehreren Teilstrukturen zusammengesetzt sein. Als Teilstrukturen wird man bei der Vektorraumstruktur beispielsweise die Gruppen- oder additive Struktur und die Skalarmultiplikation oder lineare Struktur auffassen; Teilstrukturen sind also etwa bei Mengen mit mehreren Verknüpfungen die Charakterisierungen jeder einzelnen Verknüpfung. Es gibt zum einen Teilstrukturen, die voneinander unabhängig sind in dem Sinn, daß die eine Struktur zur Erklärung der anderen nicht benötigt wird und umgekehrt. Solche Strukturen sind in obigem Sinn nicht vergleichbar. Ein Beispiel sind die additiv–lineare Struktur und die metrische Struktur (nicht die Normstruktur!), die miteinander nichts zu tun haben.

Es gibt aber auch abhängige Teilstrukturen, zusätzliche Strukturen. Ein Beispiel dafür ist die Normstruktur, die sich auf die additiv–lineare Struktur bezieht, ohne diese keinen Sinn hat. Die zugrundeliegende Struktur ist also allgemeiner, dieselbe vermehrt um die zusätzliche Struktur spezieller (wegen des Abhängigkeitsverhältnisses ist die zusätzliche Teilstruktur sozusagen keine für sich lebensfähige Struktur; daher ist es sinnvoller, die partielle Ordnung in Bezug auf die entstehende

Gesamtstruktur als auf diesen Torso zu definieren, so daß nicht gesagt wird ‚die zusätzliche Struktur ist spezieller'). Weitere Beispiele zusätzlicher Strukturen sind das Dimensionsaxiom und sogar die Skalarmultiplikation selbst. Dieses Verhältnis der Skalarmultiplikation zur Gruppenstruktur ist eine heuristische Erklärung dafür, daß man aus ihr Teile der Gruppenstruktur schließen kann (vgl. Abschnitt 4.3.2.1): sie sind in ihr sozusagen von Anfang an enthalten.

Dabei wäre es voreilig zu sagen, eine zusätzliche Struktur zeichne sich dadurch aus, daß die entstehende Gesamtstruktur weniger Instanzen habe als die zugrundeliegende. Insofern ist die Namensgebung ‚speziell/allgemein' irreführend. Zu vielen zusätzlichen Strukturen gibt es eine Instanz, so daß jeder Vertreter der allgemeineren Struktur versehen mit dieser Instanz ein Vertreter der spezielleren ist: Jeder Modul ist eine abelsche Gruppe, aber auch jede abelsche Gruppe ein Modul (über $\mathbb{Z}$); jede Algebra ist ein Vektorraum, aber auch jeder Vektorraum eine Algebra (vgl. [54] 152ff). Das bedeutet aber nicht, daß in diesen Fällen etwa die Unterscheidung allgemeiner und spezieller Strukturen künstlich oder überflüssig wäre. Was die Moduln betrifft, so erschöpft sich ihre Theorie nicht in der der abelschen Gruppen, da es Moduln bezüglich anderer Ringe als $\mathbb{Z}$ gibt. Ähnlich schöpfen die in [54] konstruierten Algebren nicht alle denkbaren Instanzen der Struktur ‚Algebra' aus. Man kann also nicht sagen, daß in den genannten Fällen die allgemeine Struktur die spezielle *Struktur* induziert; sie induziert lediglich bestimmte *Instanzen* der speziellen Struktur. Es ist also eher umgekehrt: Die allgemeinere Struktur hat weniger Instanzen als die speziellere. Das ist heuristisch nicht einmal verwunderlich, da die allgemeinere Struktur weniger Charakteristika beinhaltet und somit der Instantiierung weniger Variationsmöglichkeiten bietet. Dies ist wohl der Grund dafür, daß KRULL von verallgemeinerten abelschen Gruppen spricht (die als Struktur spezieller sind als die abelschen Gruppen, aber an Instanzen reicher). Die Verhältnisse der Strukturen untereinander sind also anders als die Verhältnisse ihrer jeweiligen Instanzenmengen. Man beurteilt erstere Verhältnisse auch nicht in Bezug auf die Instanzenmengen, sondern einzig in Bezug auf die Strukturen.

3.3.2 Grad der Getrenntheit bei der Formulierung einer Struktur

Was nun die Formulierung der Axiomensysteme für Strukturen angeht, kann es mehrere für eine Struktur geben. Die diesen Systemen zugehörigen Strukturen wären dann im Sinne der oben angegebenen partiellen Ordnung ‚gleich'; zur Unterscheidung der Formulierungen bedarf es also weiterer Begriffe.

Die Unterschiede zweier Formulierungen für eine Struktur können darin liegen, wie die jeweiligen Formulierungen die in der Struktur enthaltenen Teilstrukturen behandeln. Sind die Teilstrukturen vergleichbar, eine also zusätzliche Struktur im Verhältnis zur anderen (der Einfachheit halber, aber nicht aus prinzipiellen Gründen werden hier nur zwei Teilstrukturen betrachtet), so gibt es offenbar zwei Möglichkeiten der Behandlung: Die Teilstrukturen können *einseitig getrennt* formuliert sein, d.h. die zugrundeliegende Struktur (im Beispiel der Normstruktur die additiv–lineare) ist ihrerseits ohne Verwendung der zusätzlichen (im Beispiel: der Normstruktur) formuliert worden. Die Trennung ist insofern einseitig, als die zusätzliche Struktur *per definitionem* nur unter Verwendung der zugrundeliegenden Struktur (die Normstruktur also nur unter Verwendung der additiv–linearen Struktur) formulierbar ist. Die Teilstrukturen können aber auch *ungetrennt* formuliert sein (im Beispiel würde also die additiv–lineare Struktur unter Verwendung der Normstruktur formuliert). Beidseitig getrennt kann nur eine Formulierung miteinander nicht vergleichbarer Strukturen sein.

Beispiele für ungetrennte Formulierungen sind das WIENERsche System $\mathcal{WN}$ — denn die ungenannten, aber implizit vorhandenen Axiome lassen sich nur unter Verwendung der Axiome für die Norm- und die affine Struktur ableiten[21], vgl. die Anmerkungen zu Wiener auf S.170f —,

[21] Wiener spricht in [195] die Axiome der affinen Struktur als abgesonderte Gruppe aus. Das ist aber eine mißglückte Trennung der Strukturen, denn seine Axiome der Vektorraum- und Normstruktur bilden einen Torso, und die zusätzliche Normstruktur wird nicht von der allgemeineren Vektorraumstruktur getrennt.

SCHAUDERs System $\mathcal{SCH}$ für den Banachraum wegen der Vollständigkeit (s.u.), DICKSONs System $\mathcal{DICK}$ wegen des Basisaxioms (vgl. Abschnitt 4.4.2.2) und PEANOs System (und alle ähnlichen in Abschnitt 4.3.2.1 besprochenen Systeme) wegen der Gruppenstruktur. Die moderne Formulierung des Vektorraumbegriffs als abelsche Gruppe mit Skalarmultiplikation stellt eine einseitig getrennte Formulierung dar.

3.3.3 Logische Unabhängigkeit von Axiomen

Bekannt ist, daß die Axiomatiker in der Nachfolge HILBERTs von einem Axiomensystem logische Unabhängigkeit (daß also kein Axiom des Systems aus den übrigen ableitbar ist) verlangt haben; vgl. dazu Abschnitt 6.1.2.1. Die *„präzise Beantwortung“*, nach der die Frage der logischen Unabhängigkeit von Axiomen gemäß #41 verlangt, erbringt man mithilfe von Instanzen des Axiomensystems. Genauer gesagt eignen sich echte Instanzen gerade nicht dazu, sondern nur Teilinstanzen. KAMBARTEL schildert das Verfahren (vgl. [94] 92): Man gibt eine Interpretation an, bei der alle Axiome einer Axiomengruppe gelten, nicht aber ein weiteres; dann ist dieses weitere von der Axiomengruppe unabhängig. Es werden also Instanzen einer Axiomenmenge herangezogen, die alle Axiome bis auf eines (sozusagen die ‚Restaxiome‘) enthält; das geschieht derart, daß die Instanz keine Instanz der vollen Axiomenmenge ist. Solche Instanzen der Restaxiome sind oft pathologischer Art; vgl. etwa meine Gegenbeispiele im Abschnitt 4.4.2.2. HAMEL sucht gewissermaßen mit seiner unstetigen Lösung eine solche pathologische Instanz des Konzepts additive Abbildung, um so eine Unabhängigkeitsfrage zu entscheiden. Das Pathologische rührt daher, daß das volle Axiomensystem zur Charakterisierung einer Vielzahl bekannter mathematischer Objekte dient, die Restaxiome aber nicht ohne weiteres überhaupt Instanzen haben, genauer zur Konstruktion von Instanzen entweder ‚tief in die Trickkiste gegriffen‘ werden muß oder aber nur triviale Instanzen zur Anwendung kommen, die den Mathematikern ansonsten ziemlich gleichgültig sind. HAKEN formuliert in [78] als *question 3*, ob eigentlich alle Gegenbeispiele *à la* GÖDEL pathologische Konstruktionen sind.

Die Entwicklung solcher Werkzeuge erklärt sich aus der Situation der Mathematik im 19.Jahrhundert. Damals gab es zwei Aussagen, deren Unabhängigkeit von den restlichen Aussagen des jeweiligen Systems die gesamte Mathematikergemeinschaft beschäftigte: das Parallelenaxiom in der Geometrie (vgl. Anm.60) und die Kontinuumshypothese in der Mengenlehre. In beiden Fällen rührte die Attraktivität der Frage nach der Unabhängigkeit daher, daß die jeweilige Antwort starke Auswirkung auf die Vorstellung davon haben würde, was Geometrie bzw. Mengenlehre ist. Die Untersuchungen zum Kräfteparallelogramm (vgl. Abschnitt 5.1.1) sind sowohl durch die zeitliche Nähe als auch durch die thematische Ähnlichkeit in diesen Zusammenhang verwiesen.

Das Finden pathologischer Instanzen ist ein kreativer Akt und kann sich bei komplizierten Axiomensystemen überaus schwierig gestalten. Es besteht ohnehin nur dann irgendeine Aussicht auf Erfolg, wenn man diesem kreativen Akt den mehr mechanischen Akt vorgeschaltet hat, ein sozusagen heuristisch unabhängiges System anzugeben. Damit ist gemeint, daß man sich bemühen muß, offensichtliche Abhängigkeiten auszuschalten. Wenn z.B. Aussage A das Vorhandensein des Bildes zweier Elemente unter einer Verknüpfung garantiert und Aussage B eine speziellere Aussage über diese Verknüpfung macht, so setzt B natürlich A voraus (d.h. es gilt die Aussage $B \Rightarrow A$); die Aussagen A und $A \Rightarrow B$ jedoch sind logisch unabhängig. So formuliert DICKSON in seiner Arbeit *Definitions of a Field by Independent Postulates*[22] folgendes Distributivgesetz: „$a\Box(b \circ c) = (a\Box b) \circ (a\Box c)$, *whenever* $b \circ c, a\Box b, a\Box c, a\Box(b \circ c)$ *and* $(a\Box b) \circ (a\Box c)$ *belong to the system*“. Eine solche Umformulierung bietet wohl keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, führt aber auch noch nicht zur *„präzisen Beantwortung“*.

Es sollte klar sein, daß DICKSONs Beweis der Unabhängigkeit seiner Postulate für die Al-

[22] in: Trans. AMS **4** (1903), 13–20

gebrenmultiplikation (vgl. #27) auch zeigt, daß dieselben Postulate von den jeweiligen *heutigen* Restaxiomen (also unter Einbeziehung der Addition) unabhängig sind, da die von ihm gefundenen Instanzen auch Instanzen dieser jeweiligen heutigen Restaxiome sind. Daß Dickson aufgrund seiner ansonsten koordinatenweisen Definition nicht alle heute denkbaren Instanzen zur Konkurrenz zuläßt, ändert nichts daran, daß er bereits unter den zugelassenen die benötigten findet.

3.3.4 Logische Unabhängigkeit von Axiomen und Getrenntheit der Formulierung bei Strukturen

Der Unterschied zwischen logischer Unabhängigkeit und Getrenntheit der Formulierungen von Strukturen wird deutlich bei den Bemerkungen zu Weyls Dimensionsaxiom in Abschnitt 4.4.2.2: ob seine Axiome logisch unabhängig sind, ist nicht ganz klar; er *könnte* möglicherweise die Unitarität aus den übrigen Axiomen mit Dimensionsaxiom folgern. Sicher ist jedoch, daß die Formulierung einseitig getrennt ist, da Weyl das nicht *tut*. Die logische Unabhängigkeit betrifft also das prinzipiell ausschöpfbare Potential der Axiome, die Getrenntheit das tatsächlich ausgeschöpfte. Beides sind formale Eigenschaften eines Axiomensystems, aber die Getrenntheit betrifft nicht die logisch aus dem System ableitbaren, sondern nur die explizit dem System angehörenden Axiome — während logische Unabhängigkeit eines Axioms von anderen Axiomen ja gerade heißt, daß jenes Axiom nicht zur Menge der aus diesen Axiomen ableitbaren Aussagen gehört.

Es ist häufig der Fall, daß man für eine ungetrennte Formulierung weniger Axiome benötigt als für eine einseitig getrennte; dann sind die Axiome im einseitig getrennten Fall logisch abhängig. Der ungetrennte Fall hat aber für die Strukturmathematik einen methodischen Nachteil: eine Verallgemeinerung (ein Übergang zu zugrundeliegenden Strukturen) ist nicht durch einfaches Weglassen gegebener Axiome möglich; es bedarf vielmehr vorher einer Hinzuziehung von Axiomen zur einseitigen Trennung. Die Möglichkeit, Teilstrukturen wegzulassen oder zu ergänzen, auf Ergebnisse zurückzugreifen, die diese Teilstrukturen betreffen usw., ist methodisch von Bedeutung, die entsprechende Möglichkeit bei einzelnen Axiomen (wie sie durch deren logische Unabhängigkeit garantiert wird) weniger (vgl. dazu #40). Die Begriffe ‚logische Unabhängigkeit der Axiome' und ‚weitestmögliche Trennung der Teilstrukturen' sind also nicht nur verschieden, sondern wirken sogar komplementär; sie können nicht beide zugleich Maßstab für ein Axiomensystem sein und besitzen damit die historische Triebkraft jeder Dialektik. Hierbei hat sich der letztgenannte Begriff schließlich durchgesetzt; die hier verwerteten Arbeiten zeigen deutlich den Trend:

Dickson legt 1903 besonderen Wert auf die Unabhängigkeit der Postulate; die *Transactions* dieser Tage enthalten zahlreiche solche Artikel von ihm und anderen auch zu Körper (s.o.) und Gruppe (vgl. dazu [163]). [14] 380 belegt übrigens den Einfluß von Hilberts GdG auf Dicksons Aneignung dieses Verfahrens. 1923 hingegen verzichtet Dickson auf eine Diskussion der Unabhängigkeit seiner Axiome — möglicherweise ist die Struktur nun zu unübersichtlich, als daß er mit vertretbarem Aufwand geeignete Instanzen konstruieren könnte. Dickson betont nur, daß Scorzas Forderung der Eindeutigkeit im Basisaxiom verzichtbar ist, stellt es aber zugleich dem Leser frei, Scorzas redundantere Fassung zu übernehmen (#185). Wiener macht sich 1920 — allerdings nicht betreffend die Vektorraumstruktur — noch Gedanken über Unabhängigkeitsprüfung ([196] 340, 345f); er gesteht sogar ein, daß er manche Unabhängigkeitsbeweise nicht erbringen kann (345). Wedderburn verzichtet auf Unabhängigkeitsuntersuchungen. 1907 sagt er nur: *„the definition of the term algebra [...] is now so well known that it is unnecessary to give here a formal set of postulates"*; 1924 begründet er den Verzicht ausdrücklicher mit den Worten *„the aim being descriptive rather than analytical"*.

Von späteren Autoren wird die Unabhängigkeitsfrage kaum noch berührt; höchstens ist von offensichtlichen Redundanzen die Rede. Schauder bemüht sich trotz seiner ungetrennten Formulierung nicht konsequent um Unabhängigkeit, wie seine Wiedergabe von 1. und 2. lehrt; dabei will er offenbar dem Leser deb richtigen Weg für die Verifikation zeigen. Banach verweist 1932 einige

Redundanzen unter die (vom Leser zu prüfenden) Folgerungen. HALMOS ist sich der Abhängigkeit der Axiome bewußt, hält das System aber für eine *„convenient characterization"* der zu studierenden Objekte.

Ein logisch abhängiges Axiomensystem bezeichnet man auch als redundant[23]. Der Begriff ‚Redundanz' wird bekanntlich auch in der Kommunikationstheorie benutzt; diese betont, daß Redundanz nicht einfach Ballast ist, sondern einen Zweck hat, nämlich die Sicherstellung von Kommunikationserfolg, denn dadurch, daß eine Information mehrfach gegeben wird, ist die Chance größer, daß sie trotz Teilverlusts bei Übertragung noch vollständig ankommt. Insofern hat die Redundanz der Axiomensysteme einen didaktischen Sinn, den man mit einem aus der Informatik entlehnten Begriff als *Modularität* bezeichnen könnte: Man soll an einem Axiomensystem noch erkennen, aus welchen einfacheren Strukturen es hervorgegangen ist. Im ungetrennten Fall hingegen scheint geradezu ein Zirkel zu entstehen (obwohl die Systeme äquivalent sind), da die Strukturen nicht hierarchisch aufgebaut, sondern ‚am eigenen Schopf aus dem Sumpf gezogen' werden. In der Tat sieht man ja bei PEANO nicht so recht, wieso eine Halbgruppe eine so mächtige Skalarmultiplikation tragen sollte; daß sie *eigentlich* eine Gruppe ist, ist zwar logisch klar, aber didaktisch gesehen verschleiert. Peanos Verfahren wirkt künstlich, da die Halbgruppen, auf denen es eine solche Operation gibt, ‚schon Gruppen gewesen sein müssen'.

Man kann hierin einen entscheidenden Unterschied zwischen Hilbertscher Axiomatik und Strukturmathematik erblicken: Bei Hilbert standen die *Axiome* als *objects of study of their own right* im Zentrum, später die *Strukturen*. MACLANE drückt es so aus ([110] 3f):

> I distinguish the axiomatic approach from the approach by abstract algebra. [...]
>
> [S.4] In speaking of axiomatic technique, I think of the emphasis on ingenious choice of axioms, on the efficiency of immediate deductions from the axioms, and on the investigations of independence (and even complete independence) and of categoricity of axiom systems. [...] The emphasis on such techniques is very different from the approach characteristic of abstract algebra, where the use of an axiom system is a necessity at the beginning — but really just an incidental necessity, not itself the subject of investigations. [...] we now view abstract algebra not so much as the description of known mathematical systems by axioms, but as the analysis of conceptual properties of these systems, using axiomatic and other methods both to reveal subtle properties of established objects and new examples of the mathematical structure under study.

Bei #185 spürt man, daß DICKSON nun (anders als zwanzig Jahre früher) mit Lesern rechnet, die sich für die Axiome selbst nicht sonderlich interessieren. Man sieht in Abschnitt 3.3.3, daß bereits heuristisch unabhängige Systeme derart aufgebläht sein können, daß sie aus ökonomischen Gründen aus dem Blick gerückt sind, da man sie nicht einfach genug handhaben kann. Andererseits kann eine Formulierung, die sich solcher Heuristik um der Übersichtlichkeit willen enthält, auch verwirrend sein. So will WEYL in $\mathcal{W}\ II.2$ nicht etwa ganz $\mathcal{W}\ I\alpha$) voraussetzen, denn sonst hätte ja #176 keinen Sinn.

WEDDERBURN bezeichnet eine Bemühung um ein logisch unabhängiges System als *analytical*. Während die Strukturmathematik den Blick auf die Strukturen richtet und die Beschreibung von Strukturen nur als Formalisierung benötigt, um eine Theorie (insbesondere eine der nachmaligen Konkretion verschriebene Theorie) ableiten zu können, sucht die Hilbertsche Axiomatik nach einem analytischen Eindringen in die Beschreibung selbst; sie sichert zunächst bewußt nur das formale Faktum, daß, wenn die Axiome richtig sind, es auch die Folgerungen daraus sind (vgl. #42), hofft

[23]Den Redundanzbegriff kann man dadurch verfeinern, daß man ein System bereits redundant nennt, wenn man Teile eines Axioms (nicht also notwendig ein ganzes Axiom) aus anderen Axiomen folgern kann: Dann ist eben der Reduktionsprozeß, Aussagen auf zerlegte Aussagen (die Axiome) zurückzuführen, noch nicht weit genug vollzogen, vgl. #38. Auch ein Beweis kann redundant sein, d.h. man kann die Zahl der erforderlichen Axiome reduzieren — ohne damit notwendig die Länge des Beweises selbst zu reduzieren.

aber vermutlich zugleich, durch die erreichte Schärfe der Beschreibung die Überprüfung dieser angenommenen Richtigkeit so einfach wie möglich zu machen.

Es kann ja in der Tat der Eindruck entstehen, analytisches Eindringen in die Beschreibung selbst könne Aufschluß geben über eine Struktur. Man betrachte dazu SCHAUDERs Vorgehen, dessen Axiome wesentlich schwächer sind verglichen sowohl zu den tatsächlichen Axiomen BANACHs als auch zu $\mathcal{B}_S$: $\mathcal{SCH}$ axiomatisiert einen Banachraum wesentlich nichtredundanter — erkauft durch die Forderung der Vollständigkeit des Raumes (vgl. dazu den Beweis zu $\mathcal{B}_S$ 1. auf S.177), so daß man bei Schauders Definition nicht etwa durch Weglassen einzelner Axiome oder Axiomengruppen ein Axiomensystem für nur normierte oder sogar nicht normierte $\mathbb{R}$–Vektorräume gewinnt (was ja bei Banach geht). Hat Schauder denn nicht sozusagen eine analysierende Beschreibung des Banachraums aufgestellt, die nachweist, daß die Vollständigkeit *tatsächlich* auf die Raumstruktur zurückwirkt? Man sitzt mit dieser Einschätzung demselben Effekt auf, aus dem auch PEANOs verschleierte Gruppenstruktur auf den ersten Blick ihren Reiz bezieht. Es mag zwar abelsche Gruppen geben, die $\mathcal{SCH}$ II erfüllen, ohne Vektorraum zu sein; es kann aber keine solchen Gruppen geben, die sodann $\mathcal{SCH}$ III erfüllen, denn daraus würde ja nach Schauders Verfahren folgen, daß sie Vektorraum sind. Was lehrt dann aber die Verzichtbarkeit eines Teils der Forderung nach der Definiertheit einer Skalarmultiplikation: daß nur die reduzierte Fassung die Struktur eines Banachraums ausmacht (weil es Banachräume gibt, die nur und nur eine solche Skalarmultiplikation tragen)? Ganz offensichtlich nicht, sondern daß es eine auf den ersten Blick ökonomischere (einer geringeren Zahl von Axiomen bedürfende) Formulierung gibt; deren vermeintlich größere Ökonomie muß allerdings an methodischen Gesichtspunkten gemessen werden.

Es wäre irreführend, wenn diese Darstellung den Eindruck vermittelte, die Strukturmathematik hätte die Hilbertsche Axiomatik irgendwie historisch besiegt. Im Gegenteil hat die Strukturmathematik nur die Anregung Hilberts aufgenommen, der in der GdG das Ziel hatte, durch die logische Unabhängigkeit seiner Axiomen*gruppen* (die mit der der einzelnen Axiome zugleich erbracht ist) eine Präzisierung zu gewinnen, zum Nachweis welchen Resultates man welche Begriffe benötigt. Diese Anregung führte die Strukturmathematik weg von dem Bedürfnis nach logischer Unabhängigkeit der einzelnen Axiome und hin zum Bedürfnis nach Getrenntheit, weil gerade die Getrenntheit jene Präzisierung für die Strukturen (die ja regelmäßig aus der Einbeziehung zusätzlicher Strukturen entstehen) ermöglicht.

Kapitel 4

Strukturgeschichte der Vektorraumtheorie

4.1 Der heutige Vektorraumbegriff

4.1.1 Die Bestandteile der Struktur

Ein Vektorraum besteht aus:

— einer Menge M_1 mit einer Äquivalenzrelation und einer inneren Verknüpfung v_1 (einer Abbildung $M_1 \times M_1 \to M_1$),

— einer Menge M_2 mit einer Äquivalenzrelation und zwei inneren Verknüpfungen v_{21}, v_{22},

— einer Verknüpfung v (einer Abbildung $M_2 \times M_1 \to M_1$).

Die inneren Verknüpfungen sind zu den Relationen verträglich. M_1 bildet mit v_1 eine abelsche Gruppe, M_2 mit v_{21}, v_{22} einen Körper. M_2 (aufgefaßt als multiplikatives Monoid mit v_{22}) operiert vermöge v auf M_1; die Operation ist distributiv bezüglich v_{21} (diese Distributivität heißt $\mathcal{D}_l$) und v_1 (abgekürzt $\mathcal{D}_r$).

Diesem Vektorraum können (in Gestalt weiterer Mengen, Relationen und Abbildungen) zusätzliche Strukturen aufgeprägt werden.

Im Laufe der Geschichte wurden die beiden Mengen, vier Verknüpfungen, zwei Äquivalenzrelationen und die entsprechenden Bestandteile der zusätzlichen Strukturen voneinander unterschieden (es wurde also anerkannt, daß es sich z.B. um zwei verschiedene, in der Regel disjunkte Mengen handelt und daß entsprechend die beiden Relationen nicht untereinander transitiv sind usw.; Ergebnis dieses Unterscheidungsprozesses ist die moderne Auffassung der einzelnen Bestandteile als ‚Bausteine'. Brieskorn drückt es ähnlich aus ([19] 266; vgl. auch das Zitat von Weyl zu Beginn von Kapitel 3): *„Die zu klassifizierenden Objekte werden in einfache Bausteine zerlegt, aus denen die klassifizierenden Daten gewonnen werden. Um zu zeigen, daß ein gegebenes Datum einem fraglichen Objekt entspricht, ist dann umgekehrt die Synthese des Objekts aus den Bausteinen erforderlich"*. Entsprechend wird die Ideengeschichte jedes einzelnen Bestandteils und der Wechselwirkungen untereinander in separaten Abschnitten behandelt.

Es ist allerdings entscheidend, daß man begonnen hat, als Vektorraum nur die Gesamtheit der Bausteine in ihrer Verbindung (und nicht etwa nur M_1) zu bezeichnen (so stellt Dickson bei #183 ausdrücklich klar, daß unter der Algebra A eigentlich das Tupel $(S, F, \oplus, \odot, \circ)$ zu verstehen ist und die Ineinssetzung $A = S$ nur eine Kurzschreib- oder -sprechweise im Bewußtsein der Verkürzung sein darf). In dieser Sichtweise wird nämlich erst deutlich, daß auch schon durch den Wechsel der Instantiierung eines Teils der Bausteine bei Beibehaltung eines anderen Teils zu einem neuen Vertreter der Gesamtstruktur übergegangen wird; vgl. Kapitel 5.

4.1.2 Die Namen ‚Vektor', ‚Vektorraum'

Bevor die Geschichte der einzelnen Bestandteile des Vektorraumbegriffs geschildert wird, ist eine Orientierung über die Entstehung des Namens *‚Vektorraum'* lehrreich. Es stellt sich heraus, daß die Termini ‚Vektor' und ‚Raum' im Laufe der Geschichte verschiedene Sachverhalte bezeichnen; diese Beobachtungen helfen dann beim Verständnis der anschließenden Überlegungen.

[127] 265: „*The name ‚vector' stems from Hamilton (1845)*"; andererseits [25] 32: „*From the above quotations* [1846] *it may be inferred that it was Hamilton who introduced the term scalar and also the term vector* [...]"[24]. Da bereitet folgendes ins Englische übersetzte Zitat aus der A_1 in [25] 57 Probleme: „*Thus when I* [GRASSMANN] *multiplied the sum of two vectors* [...]". Das wäre ja eine Verwendung des Namens ein Jahr bzw. zwei Jahre früher! Allerdings hat CROWE hier einfach eine nachlässige Übersetzung abgedruckt, ist doch im Original (A_1 S.III–V bzw. Werke I,1 S.7–10) nur von „Strecken" die Rede[25]. Entsprechendes gilt für die Zitation aus dem 1840 geschriebenen (allerdings erst 1911 veröffentlichten) Werk *Theorie der Ebbe und Flut* ([25] 61f) und alle weiteren Stellen in [25] aus der Ausdehnungslehre. Dieser Nachlässigkeit entspricht die Beobachtung, daß Crowe in GRASSMANNs Text auch im Original nicht vorhandene Abschnittzwischenräume einführt. Grassmanns tatsächliche Haltung stellt ZADDACH so dar ([204] 69):

> die Vokabel "*Vektor*" hat er [Grassmann] Zeit seines Lebens abgelehnt und (für die Affine Geom.) "*Strecke*" vorgezogen — obwohl gerade an dieser Stelle ein neues und "unbelastetes" prägnantes Wort vortrefflich zu seiner Zielsetzung gepaßt hätte!

Zaddach sagt zu Recht, daß das Wort Vektor zu Grassmanns Zeit unbelastet gewesen wäre und daß es irgendwie klangvoll und griffig ist, was er wohl mit ‚prägnant' meint. In den Jahren nach Grassmann wurde das Wort jedoch stark belastet, wie wir gleich sehen werden. Zaddach gibt keinen Beweis für seine Behauptung, Grassmann habe das Wort abgelehnt. Lt. [156] 277f und [204] 93 tat das auch sein Sohn.

Bei PEANO tritt der Begriff an den Stellen auf, an denen er bei Grassmann vermißt wird (siehe meine Bemerkungen zu #139 auf S.162 sowie #172 und auch [147] 173). KLEIN empfindet das als Entgegenkommen für die Physiker ([96] II S.48). Peano verwendet den Begriff also nicht im heutigen weiteren Sinn; auch der Begriff *spazio* ist bei ihm stets (auch noch im IX.Kapitel) im üblichen Sinn und daher determiniert zu verstehen. Erst PINCHERLÉ spricht von *spazio lineare*.

Noch sehr lange wurden Sammelbegriffe wie ‚*die* Vektoren', ‚gewöhnliche Vektoren' verwandt, so z.B. bei [6] 135 (= [8] II, S.307) und dem zugehörigen JFM–Referat (vgl. Kapitel 1), [128] 370f oder [129] 64. Auch bei APOLIN (vgl. [3] 360f) scheint besonders diese Vektorrechnung gemeint zu sein[26], ebenso bei CROWE ([25]). Zu Crowe ist zu bemerken, daß ZADDACH ihm vorwirft, *„trotz*

[24] *scalar* ist bei HAMILTON nur für den *scalar part* der Quaternionen in Gebrauch (vgl. [54] 162); im heutigen Sinne verwendet Clifford im Jahr 1873 das Wort ([140] 253).

[25] Eine Wiedergabe des entsprechenden Originaltextes hat hier wenig Sinn, weil die von Crowe verwendete ‚Übersetzung' unvergleichlich kürzer als das Original und eher als eine sinngemäße Übertragung zu bezeichnen ist.

[26] weitere Sekundärliteratur in diesem Sinne: Kirsti Andersen, *Hvor kommer vektorerne fra?*, in: NORMAT **33** (1985), 1–17. Bigelow, John; Pargetter, Robert, *Vectors and change*, in: British Journal for the Philosophy of Science (Oxford University Press) **40** (1989) no.3, 289–306; Reich, Karin, *Die Rolle Arnold Sommerfelds bei der Diskussion um die Vektorrechnung*, in: Dauben, Joseph Warren (Hg.), *History of Mathematics. States of the Art*, Academic Press/San Diego 1996, 319–341; dies., *Who needs Vectors?*, in: Workshop Proceedings from history of mathematics Kristiansand Aug 7–13 1988 (Mölndal 1989) oder in: Swetz, Frank et al. (Hg.), *Learn from the masters!*, MAA/Washington DC 1995.

des vielversprechenden Untertitels "The Evolution of the Idea of a Vectorial System" [...] *auf axiomatische Grundlegung überhaupt nicht"* einzugehen ([204] VIII). Diese vermeintliche Inkonsequenz Crowes erklärt sich wohl daraus, daß Crowe mit *Vectorial System* an die Vektoranalysis der Physiker denkt (*system* im Sinne von ‚mathematische Theorie'), während Zaddach hofft, es ginge um Vektorräume, die ja auch von manchen Autoren als *systems* bezeichnet werden.

Vor diesem Hintergrund erstaunt die Namensgebung ‚Vektorraum' für den allgemeinen, von sämtlichen Anwendungen losgelöst zu denkenden Sachverhalt. Sie tritt nicht sogleich auf: PEANO spricht ganz offen von *„sistema lineare"* (zur Schwierigkeit dieses Ausdrucks vgl. Abschnitt 8.2), BANACH in [6] noch unbestimmter von *„ensembles abstraits"*, WIENER von *„vector–domain"* und *„vector–system"*. Erst bei FRÉCHET (*„espaces vectoriels abstraits"*, [60] 28) und bei WEYL in [130] taucht der heutige Begriff auf. ALBERT ist dann bereits in der Situation des Lehrbuchautors der nächsten Generation, der erst einmal Ordnung ins entstandene terminologische Dickicht bringen muß, und erklärt ziemlich radikal die Termini *linear set over a ring A, vector space, linear space* und *A–module* zu Synonyma ([1] 16).

Die spätere Beliebtheit der Namensgebung ‚Vektorraum' scheint geradezu daher zu rühren, daß sie an Bekanntes gemahnt, die vorhandenen Begriffe ‚Vektor' und ‚Raum' usurpiert,[27] und nicht wie etwa ‚lineares System' möglichst offen gehalten ist (obwohl es gerade die Stärke des strukturellen Vektorraumbegriffs ist, daß er so offen gehalten ist). Auch noch der Kompromiß ‚linearer Raum' erscheint inhaltlich angemessener. Im Deutschen und Englischen ist er allerdings länger als ‚Vektorraum' (insbesondere in der Aussprache). Läge ein solcher Unterschied im Französischen auch vor — was nicht der Fall ist —, könnte man das bereits für die Erklärung der heutigen Situation halten, wonach ‚Vektorraum' favorisiert wird. Vermutlich ist in Frankreich die Entscheidung BOURBAKIs für *espace vectoriel* ausschlaggebend (zur Strategie von Namensgebungen bei Bourbaki, allerdings nicht im Blick auf unsere Struktur, äußert sich [46] 620r).

Der Begriff ‚Raum' wurde vermutlich gewählt, um neben dem algebraischen auch den topologischen Charakter derjenigen Vertreter anklingen zu lassen, zu deren Untersuchung die Theorie vorrangig entwickelt wurde, also der Vektorräume aus Physik und Funktionalanalysis. So ist es nach [10] 42 FRÉCHET, der erstmals von ‚Raum' im Zusammenhang von Funktionenräumen spricht. Aber auch der linearen Algebra selbst geht es um die Anspielung an topologisch–geometrische Begriffe: Lt. ARTIN ([5] 67) erschloß Emmy NOETHER durch die Interpretation von Matrizen als lineare Transformationen (die Einführung des *representation space*) der Algebrentheorie erst die geometrische Intuition. Das ist die Bedeutung von Geometrie und Anschauung für die lineare Algebra: Geometrische Intuition wird in schwierige, weil unanschauliche Theorien eingebracht. Deshalb[28] heißt der Vektorraum ‚Raum' und nicht ‚System' oder ‚Menge'.

4.2 Die Vektorenmenge

4.2.1 Status der Elemente der Menge

Die Errungenschaft des heutigen Standpunktes besteht gerade darin, daß M_1 eine (außer durch die Struktur) nicht weiter spezifizierte Menge von Elementen ist. Dieser Standpunkt ist postulatorisch, d.h. die Elemente (wie auch alle übrigen Bestandteile der Struktur) werden als *a priori* vorhanden angenommen. In der Vergangenheit wurde jedoch nicht darauf verzichtet, vorab etwas über die Gestalt und die Herstellung der Elemente zu sagen. Man bezog die Herstellung der Elemente betreffend einen genetischen Standpunkt, wonach die Elemente erzeugt werden (die Elemente sind dann *a posteriori* vorhanden). Die lange Zeit gängigste Vorgehensweise, die Darstellung der Ele-

[27] vgl. dazu die Darstellung der parallelen Umwidmung des Terminus ‚Axiom' auf S.103.

[28] nicht nur deshalb: ‚Raum' signalisiert auch, daß mit an eine Struktur gedacht ist, während ‚Menge' eine Verkürzung auf die Vektorenmenge vornimmt.

mente als Koordinatentupel, liegt in gewisser Weise ‚auf der Grenzlinie' dieser beiden Standpunkte (dazu unten mehr).

4.2.1.1 Der genetische Standpunkt

Den genetischen Standpunkt vertritt GRASSMANN; vgl. #2. Bei diesem Standpunkt kommen den einzelnen Elementen spezielle Eigenschaften zu, etwa von n–ter Stufe zu sein. Dadurch sind die Elemente unterschieden, und es besteht keine Möglichkeit, von dieser Unterscheidung abzusehen. Die Vektorenmenge läßt sich also nicht als homogenes Gebilde (eben als Menge) wahrnehmen[29]. Das dadurch entstehende Problem (daß der Begriff der inneren Verknüpfung hier wenig Sinn hat) äußert sich vor allem beim Produktbegriff Grassmanns (vgl. #8), der in unserem Zusammenhang (über seine genetische Funktion hinaus) nur von geringem Interesse ist. Das Problem ist lösbar, vgl. #53.

Die Ausfüllbarkeit des uninterpretierten Konzepts (die Varietät der verschiedenen möglichen Instanzen) besteht beim genetischen Standpunkt gerade in der Wahl der speziellen Erzeugungsmethoden (später bei HANKEL klingt das etwas anders, aber noch ähnlich, vgl. #126). In der A_2 klingt das Erzeugen noch im Begriff der ursprünglichen Einheit an; vgl. meine Bemerkung zu #97.

4.2.1.2 Koordinatentupel

Oben wurde geäußert, eine Darstellung der Elemente als Koordinatentupel läge ‚auf der Grenzlinie' der beiden Standpunkte genetisch und postulatorisch. Mit dieser Formulierung ist natürlich nicht gemeint, ein Element mit einer Darstellung als Koordinatentupel sei gleichzeitig *a priori* und *a posteriori* vorhanden; vielmehr tritt ‚*die* Koordinatenmethode' in verschiedenen Ausformungen auf, in denen eine je verschiedene (oder keine) Entscheidung über den Status der Elemente getroffen wird. Von Bedeutung ist dabei, ob dem Koordinatentupel ein Element zugeordnet wird oder nicht, und wenn ja, ob das Tupel vom Element unterschieden wird oder nicht. Dazu folgende Untersuchung:

Man könnte zunächst unter einem Koordinatentupel eine Kurzschreibweise für eine Linearkombination von Basisvektoren verstehen; eine solche Erklärung der Elemente als Koordinatentupel ist gleichbedeutend mit der Auszeichnung einer bestimmten Basis. Allerdings entstammen die zugrundegelegten Einheiten keiner Auswahl aus vorhandenen Elementen einer Menge (im Sinne einer Basisbestimmung; vgl. Abschnitt 4.2.1.3), sondern einer ‚Festsetzung aus nichts'. Das Bilden von Linearkombinationen ist also ein Erzeugungsakt, bei dem allerdings das Zugrundelegen der Basisvektoren selbst ein *a priori* Vorhandenes setzt. Die Einheitenmethode verwenden Grassmann in der A_2 (#98), HANKEL, DICKSON in [36], [37] und [38], WEDDERBURN in [186] und STEINITZ. Der Unterschied zwischen ihr und dem genetischen Standpunkt besteht darin, daß nur lineare Funktionen von Erzeugenden, keine anderen algebraischen Operationen, vorkommen, vgl. #129. Das ist vom genetischen Standpunkt aus eine echte Einschränkung.

Man gibt sich also zu Beginn irgendwelcher Überlegungen n Buchstaben vor, die etwas Ungeklärtes bezeichnen, (wie es etwa PEIRCE in LAA 9. tut); weiter verlangt man, daß man diese n Buchstaben addieren und mit Skalaren multiplizieren kann und daß zwischen ihnen in diesem Sinn keine lineare Beziehung bestehen soll. Dabei wird nie gesagt, wie die Addition und Skalarmultiplikation auf den Einheiten eigentlich erklärt ist (in ähnlicher Weise fragt man sich bei #166, wie PEANO denn die *grandezza* der *unità* mißt). Das Verfahren hat also Elemente eines postulatorischen Zugangs, allerdings in sehr unbefriedigender Weise: Bei Dickson (vgl. #31: *the usual conception of the units*) hat man den Eindruck, die Einheiten seien irgendwelche *a priori* vorhandenen Gebilde mit der Eigenschaft, über $\mathbb{C}$ linear unabhängig zu sein, also Gebilde mit einer konkreten Form, und diese konkrete Form bliebe dann bei einem Übergang zu anderen Skalarmengen erhalten als

[29] Im Gegensatz dazu ist Grassmann an der Einförmigkeit der reellen Zahlen gelegen, vgl. #96.

unerwünschtes Erbe, sich darin ausdrückend, daß die neu entstehenden *systems only subsystems* der *usual number systems* sind.

Es könnte in dem Verfahren ein Zirkel auftreten, wenn bei der Erklärung der Verknüpfungen seinerseits auf die Tupelschreibweise rekurriert, also ausgenutzt wird, daß jedes Element eine Darstellung als Tupel, in diesem Fall also als Linearkombination der Basisvektoren, besitzt. Damit wären die Elemente, die durch die Verknüpfungen (als Linearkombinationen) bestimmt werden sollen, schon da, um die Verknüpfungen zu erklären. WEDDERBURN verhält sich 1907 etwas anders: er definiert die Elemente als Linearkombinationen und verlangt von der Addition, daß sie koordinatenweise ist; ebenso geht DICKSON 1903 in seiner ersten Definition vor.

Das Tupel selbst ist als Tupel von Elementen des Körpers ein algebraisch handhabbares Gebilde. Solche Tupel können auf semiotische Weise erzeugt werden, und dieser einzig relevante Erzeugungsvorgang ist trivial, wenn man einmal unterstellt, daß man auf die Körperelemente prinzipiell Zugriff hat. Insofern können also die Tupel als *a priori* vorhanden begriffen werden. Man kann die Operationen auf der Menge der Tupel (oder einer Menge bestimmter Tupel) durch Zurückführung auf die Körperoperationen erklären; so gehen DICKSON 1903 (vgl. #25) und im Anschluß daran 1905, 1914 und 1923 (vgl. #189) und WEDDERBURN 1924 (vgl. #52) vor. Die ‚unbefriedigende Postulation', die oben geschildert wurde, tritt hier also nicht ein. Die Methode ist übrigens, wie Wedderburn zeigt, nicht an die Endlichkeit oder Abzählbarkeit der Indexmenge gebunden (vgl. #54). Dickson selbst verwischt den Unterschied, indem er in 1923 diese Version HAMILTON zuspricht (vgl. #191), während er 1903 die Einheitenmethode als Hamiltonsche angibt. Hamiltons Äußerung unter #84 wie auch seine Bemühung um die *triplets* lassen vermuten, daß er eine algebraische Sichtweise hatte.

Hat man nun eine Vorstellung von ‚den Vektoren selbst' als irgendwelchen neben den Tupeln vorhandenen Gebilden (zum Beispiel geometrische Objekte), so kann man jedem Vektor (werde er nun als *a priori* vorhanden oder als auf irgend einem Wege erzeugt begriffen) ein solches Tupel als algebraisches Objekt zuordnen. Der Kerngedanke ist der einer Repräsentation, im Beispiel der Geometrie einer Einführung von Arithmetik in Geometrie. CANTOR bezeichnet diese Zuordnung, deren Bijektivität er voraussetzt, als die Correspondenz der Elemente der Mannigfaltigkeit und des Wertsystems $x_1, \ldots x_n$ (vgl. #10). DICKSON kann, nachdem er dargelegt hat, daß jede Tupelgesamtheit mit den üblichen Verknüpfungen ein hyperkomplexes Zahlensystem im herkömmlichen Sinn (nach Einheiten) ist, leicht darauf verzichten, das umgekehrte zu sagen, denn daß jedes herkömmliche hyperkomplexe Zahlensystem (bestehend aus allen Linearkombinationen der Einheiten) eine Tupelgesamtheit ist, liegt auf der Hand (vgl. #35).

Diese Zuordnung soll offenbar so erfolgen, daß sie die Topologie der Vektorenmenge wiedergibt. Die unbefriedigende Postulation läßt sich also nicht ganz verbannen, da man immerhin noch von einer Topologie der Vektorenmenge ausgeht. Man kann aber genausogut auf die Vorstellung einer von den Tupeln repräsentierten Vektorenmenge ganz verzichten und die Tupel als die Vektoren auffassen, sich also auf die Betrachtung der algebraischen Objekte beschränken. DEDEKIND unterscheidet bei #77 gerade nicht zwischen Tupel und Objekt.

4.2.1.3 Postulatorischer Zugang

Sowohl beim Zugang über Koordinatentupel als auch beim postulatorischen Zugang sind die Elemente *a priori* vorhanden. Der Unterschied besteht darin, daß die Verwendung von Koordinaten erlaubt, einzelne Elemente eines Raumes isoliert zu betrachten, sozusagen lokale Aussagen zu machen. Es gibt aber auch globale Aussagen, die ohne Bezug auf einzelne Elemente gemacht werden können; dieser Aussagentyp ist von großer Bedeutung, kann aber erst mithilfe der postulatorischen Methode deutlich abgegrenzt werden.

Die Koordinatensprache verdunkelt zugleich den genauen Charakter der lokalen Aussagen, denn diese sind nicht notwendig von der Wahl der Basis abhängig; ein Beispiel ist die Aussage ‚die vorliegenden Vektoren sind linear unabhängig, — man setzt zwar eine Darstellung bezüglich einer Basis zum Nachweis ein, aber die Eigenschaft kommt mit *einer* solchen Darstellung *jeder* Darstellung derselben Vektoren bezüglich irgendeiner anderen Basis zu, also den ‚Vektoren selbst'.

Im heutigen Vektorraumbegriff spielt der Begriff der Basis insofern eine nachgeordnete Rolle, als man keine Basis anzugeben braucht, um zu zeigen, daß etwas ein Vektorraum ist. Es gilt zwar bekanntlich der Satz, daß jeder Vektorraum von mindestens zwei Elementen eine Basis besitzt; dieser wird aber unter Zuhilfenahme lokaler Eigenschaften des einzelnen Raumes bewiesen. Im üblichen Beweis wird geradezu ein Verfahren zur ‚Ermittelung' einer Basis gegeben (Mangoldt–Knopp Bd.4 S.435f); es wird unterstellt, daß man zu einer vorgelegten linear unabhängigen Menge von Vektoren bestimmen kann, ob sie den Vektorraum aufspannt oder nicht, und daß im negativen Fall ein Vektor bestimmbar ist, der von den vorgelegten linear unabhängig ist und hinzugenommen werden muß. Die Auswahl der Basis aus der als vorhanden angenommenen Vektorenmenge (eine ‚Auswahl', die im Falle unendlichdimensionaler Räume durch das Auswahlaxiom vorgenommen wird) ist also erst nach Angabe der Definition der Verknüpfungen möglich; dann ist aber auch bereits ein Nachweis der Vektorraumaxiome möglich. Auch kann man in Bezug auf die Eigenschaft, daß jedes Element eines Vektorraums eine Darstellung bezüglich einer Basis besitzt, nur schwer eine allgemeine Theorie entwickeln, weil ‚eine Darstellung besitzen' wiederum nach Spezifikation verlangt.

Dennoch läßt sich die Aussage ‚Jeder Vektorraum hat eine Basis' auch sinnvoll zur Definition der Struktur heranziehen, jedenfalls, wenn man sich auf endlichdimensionale Vektorräume beschränkt; das stellt DICKSON unter Beweis. Sehr lehrreich ist ein Vergleich seiner Paare alternativer Definitionen 1903 und 1905 einerseits und 1923 andererseits. In allen Fällen sind die Definitionen zueinander *logisch äquivalent* (vgl. #26, #35 einerseits und #192 andererseits). Während jedoch Dicksons Alternativdefinitionen von 1903 und 1905 Selbstzweck sind und wenig methodischen Fortschritt bringen (vgl. dazu #27), ändert sich in 1923 — unbeschadet der logischen Äquivalenz — der Typ der Aussagen, die über die Instanzen der Struktur gemacht werden, insbesondere welche Instanzen als verschieden angesehen werden. Dickson stellt selbst diesen Unterschied heraus (vgl. #193, #195): Die HAMILTONsche Definition kommt unter Basiswechsel zu echt verschiedenen (wenn auch äquivalenten) Algebren, während bei Dickson die jeweilige Algebra von der Wahl der Basis unabhängig ist. In #196 macht er klar, daß der Sinn dieser neuen Sichtweise darin liegt, daß es mit den Differenzenalgebren einen Typ von Algebren gibt, über die man eher globale als lokale Aussagen machen will. Interessant ist, daß Dickson sein Vorhaben gelingt, obwohl er nicht auf Koordinaten verzichtet. Aus Dicksons Anmerkung im Zusammenhang mit #194 wird deutlich, daß es ihm hier insbesondere nicht um die effektive Angabe einer Basis, sondern allein um die schwache Existenz (vgl. S.92 dieser Arbeit) geht. Für die Differenzenalgebren (von denen er ja schließlich zeigen muß, daß sie seine Definition erfüllen; er tut das auf S.38f von [39]) kann er die *Existenz* einer Basis auf die postulierte Existenz einer solchen in der zugrundeliegenden Algebra zurückführen; vermutlich wäre eine effektive *Angabe* einer Basis für die Differenzenalgebra sehr mühsam — und im Blick auf die intendierten Aussagen überflüssig. Während also bei dem Beweis des Satzes von der Existenz der Basis, von dem oben die Rede war, der Eindruck entsteht, eine eigentlich lokale Aussage werde nur als globale getarnt, gelangt Dickson begrifflich sauber zu seinen Aussagen, da er nichts verwendet, was er nicht postuliert.

Kritikpunkt bei Dickson ist dann allerdings die Übertragung auf unendlichdimensionale Algebren (vgl. Abschnitt 4.4.2.2), deren Problematik WEDDERBURN herausstellt. Dessen Augenmerk auf globale Fragen war nach [140] 319 schon 1907 klar („[Wedderburn] *was willing to treat the nilpotent algebra as entity in itself rather than examining and isolating individual elements in it*"), so daß er auch keine Basis für bestimmte Algebren wählte (ebd. 325). Jedenfalls lehrt das Beispiel Dicksons, daß erst der Übergang zu einer postulatorischen Definition ermöglicht, Feststellungen der Form zu treffen, daß für zwei Vektorräume V, W auch $V \otimes W$ und $Hom(V, W)$ Vektorräume sind — und eben auch V/W, wenn W Unterraum von V ist. Das direkte Produkt zweier Algebren spricht WEDDERBURN an, vgl. #51. Der Zusammenhang zwischen postulatorischem Zugang und unendlicher Dimension wird im Abschnitt 4.4.3.1 besprochen.

4.2.2 Die Äquivalenzrelation auf der Vektorenmenge[30]

SCHLOTE geht darauf ein, daß HAMILTON zunächst das Fehlen einer geeigneten Gleichheitsdefinition für hyperkomplexe Zahlen Schwierigkeiten bereitete; DE MORGAN habe dann im Jahre 1844 die heute übliche Gleichheitsdefinition angegeben ([166] 3; auch [153] 541). Auch DICKSON verspürt die Notwendigkeit einer solchen Festlegung, vgl. #33.

Bevor PEANO mit der ‚eigentlichen' Definition der Vektorraumstruktur auf seiner Menge irgendwelcher Objekte beginnt, fordert er zunächst, daß auf dieser Menge eine Gleichheitsrelation erklärt ist (vgl. #143; in Peanos Paragraph **80.** auf S.152 (wegen der Gliederung des *Calcolo* vgl. Kapitel 1) steht die Definition einer *eguaglianza* als symmetrische transitive *proposizione* — das ist gemäß §4 (S.7) das, was wir als Relation bezeichnen). Peano nennt in moderner Manier erst die Eigenschaften, dann etliche Beispiele/Instanzen. Reflexivität wird nicht thematisiert, aber alle gegebenen Beispiele sind reflexiv. Zunächst werden allerdings Beispiele gegeben, die je eine der Bedingungen *nicht* erfüllen (*de facto* wird also die Unabhängigkeit der Bedingungen gezeigt). Peano gibt die Bedingungen, die erfüllt sein sollen, explizit an, gibt diesen Bedingungen aber nirgends Namen, also auch nicht die heute üblichen Namen transitiv und symmetrisch.

Auch PINCHERLÉ gibt eine solche Definition; er spricht von *uguaglianza*. Auch er gibt den Eigenschaften keine Namen und fordert keine Reflexivität; allerdings geht er darin über Peano hinaus, daß er diese Frage überhaupt bespricht: er behauptet, jede symmetrische und transitive Relation *sei bereits* reflexiv — was natürlich nur unter der Annahme stimmt, es gebe überhaupt ein Element β, das α gleich ist (insofern ist eine solche nichtreflexive Relation pathologisch).

Die Beschäftigung mit der Frage der Gleichheit steht in der Tradition von GRASSMANNS Arbeiten. Dieser untersucht in der A_1 das dialektische Paar „*gleich/verschieden*". Lt. [204] 66f verwendet er in der *Theorie der Ebbe und Flut* ein eigenes Zeichen für die Gleichheit der Vektoren (gegenüber der der Zahlen), obwohl er keine eigenen Lettern für die Vektoren verwendet. Unter #110 wird die Gleichheit von Funktionen definiert; vgl. auch #102. In #96 unterstellt Grassmann allerdings kommentarlos, daß man ‚Größen' vergleichen kann. Äußerer ideengeschichtlicher Anlaß könnte für Peano also gewesen sein, daß er selbst Grassmannianer war — ob das stimmt, bespricht [50] 184 —, oder zumindest, daß sich sein Buch an Grassmannianer richtet (vgl. Abschnitt 8.2).

Der innere Sinn von Peanos Forderung liegt darin, daß die übrigen Postulate bezüglich der im jeweiligen Beispiel eingeführten Gleichheit erfüllt sein sollen. Diese jeweilige Gleichheit ist keineswegs immer die kanonische, wie man etwa bei den *formazioni* (vgl. #169) sieht; deswegen teile ich deren Aufbau auch in einiger Ausführlichkeit mit. Es geht also darum, daß es mehrere solche Relationen geben könnte und erst diejenige bestimmt werden muß, unter der die jeweilige Menge ein Vektorraum sein soll. So ist es in der heutigen voll ausgeprägten Theorie ja beispielsweise erkannt, daß jede Menge, die unter der mit ihr eingeführten Gleichheit Vektorraum ist, über demselben Körper auch Vektorraum ist unter der Restklassenabbildung bezüglich eines Unterraums als Äquivalenzrelation. Man stellt das gemeinhin so dar, daß man es mit einer anderen Menge (der Menge der Restklassen) zu tun hat; damit faßt man aber eigentlich zwei Schritte zusammen — was als Denkökonomie berechtigt ist. Beispiele werden in den Abschnitten 4.6.1 und 5.2.4 besprochen.

Zugleich könnte es auch darum gehen, ob es überhaupt eine solche Äquivalenzrelation gibt: Peano will zu Anfang seiner Liste von Axiomen, die sich auf so etwas unspezifisches wie „*systems of objects*" beziehen, überhaupt erst das Recht haben, diese *objects* zu vergleichen. Daher fordert er dieses Recht. Insgesamt zeigt sich, wie schon bei dem Status der Elemente, der postulatorische Standpunkt: Während HAMILTON und DE MORGAN nach einer geeigneten Gleichheitsdefinition für

[30] wegen der Äquivalenzrelation auf der Skalarmenge vergleiche die Bemerkung auf S.97.

ihre hyperkomplexen Zahlen suchen, beschäftigt sich Peano in axiomatischer Weise ausschließlich mit den Implikationen der Annahme, es gäbe eine Gleichheit.

Nach Peano und Pincherlé tritt dieser Aspekt der Vektorraumstruktur allerdings wieder in den Hintergrund. Dabei lehrt z.B. #176, daß es von Bedeutung ist, zunächst etwas über das Zeichen = zu sagen, bevor man Postulate aufstellt, in denen es vorkommt. Würde man in diesem Beispiel nicht verlangen, daß die durch = gekennzeichnete Relation transitiv ist, so ergäbe das eine ganz andere Situation. Andererseits scheint das alles so offensichtlich zu sein, daß außer Peano niemand Sorge hat. Trifft denn das ihn betreffend gegebene Argument, daß manche Beispiele so eigenartig sind, daß man auf ihnen erst eine spezielle Gleichheit definieren muß, auf die Funktionalanalytiker nicht zu?

4.2.3 Die Erklärung der M_1–wertigen Verknüpfungen

Seien die Elemente von M_1 als n–Tupel aus Elementen von M_2 gegeben. Eine Festlegung der Verknüpfung v_1 in der Form

$$v_1((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)) = (v_{21}(a_1, b_1), v_{21}(a_2, b_2), \ldots, v_{21}(a_n, b_n))$$

ist ein Beispiel einer *Vorschrift*. Eine solche zeichnet sich dadurch aus, daß das Definiendum (der Ausdruck $v_1(*)$) nur auf einer Seite der Gleichung vorkommt; eine ganz ähnliche Vorschrift wird für v aufgestellt. Im Gegensatz dazu enthalten die Aussagen $\mathcal{K}_{v_1}, \mathcal{A}_{v_1}, \mathcal{A}_v, \mathcal{D}_l$ und $\mathcal{D}_r$ die Ausdrücke v_1, v auf beiden Seiten; letztere sind also nicht Definiendum — definiert wird vielmehr der *Typ* von Verknüpfung, dem sie jeweils angehören.

Bei der Vorschrift besteht die restliche Gleichung aus bereits bekannten Objekten; es muß also oben $v_{21}(*)$ bereits eine Bedeutung haben, wobei es nicht auf die textchronologische, sondern auf die logische Hierarchie ankommt: in der Erklärung von v_{21} darf nicht seinerseits v_1 herangezogen worden sein oder herangezogen werden. Denn dann wäre man vermittels der Transitivität doch zu einer Gleichung gelangt, in der durch die Gleichung zu bestimmende Ausdrücke auf beiden Seiten vorkommen. Insofern ist die Sicherstellung einer solchen Hierarchie bei den Postulaten nicht notwendig.

Während die Vorschrift festlegt, wie die Verknüpfung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum auszuführen ist, legen die Postulate fest, welche Eigenschaften die Verknüpfungen haben müssen, damit die mit ihnen versehene Menge als Vektorraum angesprochen wird. Dabei muß deutlich gesagt werden, daß der Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen nicht der zwischen Instanz und Struktur ist. Auch der Sammelbegriff ‚endlichdimensionaler Vektorraum' bezeichnet eine Struktur mit mehreren Instanzen — es handelt sich um die allgemeine Vektorraumstruktur, versehen mit der zusätzlichen Struktur der Endlichdimensionalität. Jedoch hat man bei dieser Struktur die Möglichkeit, Vorschriften anzugeben, wie die Verknüpfungen algorithmisch erklärt sein müssen (stellt man für die Struktur Postulate auf — etwa die Postulate des allgemeinen Vektorraums, vermehrt um ein Dimensions- oder Basisaxiom — so *folgen* die Vorschriften); eine solche Möglichkeit besteht bei der allgemeinen Vektorraumstruktur nicht mehr. Wir lernen in dieser Arbeit Beispiele kennen für vorschriftsförmige Erklärungen des Begriffes ‚endlichdimensionaler Vektorraum' (Dickson 1903) ebenso wie für postulatorische Erklärungen desselben (Weyl 1918, Dickson 1923 und Scorza). Wir stellen auch fest, daß es vor der postulatorischen Erklärung des allgemeinen Vektorraumbegriffs ernsthafte Versuche gegeben hat, unendlichdimensionale Räume vorschriftsförmig zu untersuchen (Abschnitt 4.4.3.1).

Es gibt auch unter den Postulaten Aussagen, die auf den ersten Blick „vorschriftsförmig" sind, nämlich $v(1_{M_2}, a) = a$ und $v(0_{M_2}, a) = 0_{M_1}$ oder alternativ $v(0_{M_2}, a) = v(0_{M_2}, b)$. Ein wichtiger Unterschied zu tatsächlichen Vorschriften ist möglicherweise, daß letztgenannte nur Allquantifizierungen, aber keine Manchquantifizierungen oder Konstanten enthalten, während in den Postulaten zwar die Objekte a allquantifiziert sind, die Objekte $1_{M_2}, 0_{M_2}, 0_{M_1}$ aber Konstanten sind.

Wenn oben von „bereits bekannten Objekten" gesprochen wird, so wird deutlich, daß die koordinatenweise Erklärung v_1 auf v_{21}, v auf v_{22} *zurückführt.* Darin kann man eine Reminiszenz an das algebraische Permanenzprinzip (vgl. Abschnitt 5.1.2.2) sehen; eine ähnliche Zurückführung stellt auch PEANOs Gleichheitsdefinition auf *formazioni* dar, vgl. S.164ff. Eine postulatorische Erklärung führt zwar auch v auf v_{21} und v_{22} (und auf v_1) zurück in dem Sinn, daß in den Postulaten diese Verknüpfungen vorkommen; diese Verknüpfungen sind aber in einer vollständigen postulatorischen Erklärung des Vektorraums ihrerseits durch Postulate charakterisiert, nicht durch eine effektive Vorschrift. Es handelt sich also nicht um eine effektive Zurückführung. Im Koordinatenfall läßt sich v von v_1 trennen; dort entsteht dann der Eindruck, es wären zwei nebeneinander herbestehende irgendwie gleichartige Verknüpfungen.

4.2.4 Die Gruppenstruktur auf M_1

Im Blick auf die Untersuchungen in Abschnitt 3.3 ist es sehr wichtig, daß die Vektorraumstruktur modularisiert wurde, daß also (M_1, v_1) als abelsche Gruppe erkannt wurde. Denn soviel wird bereits aus einer oberflächlichen Betrachtung des Quellenbefunds klar: obwohl der Gruppenbegriff zum Zeitpunkt früher Axiomatisierungen des Vektorraumbegriffs bereits vorhanden war, wurde er in diesen Axiomatisierungen nicht herangezogen. Wenn etwa PEANO im Abschnitt 3.3.4 ein künstliches und verschleierndes Vorgehen angelastet wird, so ist zu fragen, ob er den Begriff der Gruppe bereits gekannt hat, was ja 1888 noch nicht selbstverständlich war; man kann ihm schließlich nicht vorwerfen, er weise nicht genügend auf enthaltene einfachere Strukturen hin, wenn die ihm gar nicht vertraut sind, sondern er vielmehr eine möglichst einfache Beschreibung der ihn interessierenden Struktur gesucht hat. Auch WEYL und BANACH verzichten noch auf solche Modularisierung, obwohl sie den Gruppenbegriff in anderen Kapiteln ihrer Bücher selbst verwenden. Dabei ist Weyls Vorgehen besonders verblüffend: Zwar *sind* seine Axiome modularisiert (anders als bei Banach, der prinzipiell ähnlich wie Peano vorgeht, s.u.); die Gruppenaxiome werden sogar von den übrigen gesondert als Axiomengruppe $\mathcal{W}\ I\alpha$ ausgesprochen, ja diese stellt sogar eine redundante Axiomatisierung einer abelschen Gruppe dar. Dennoch spricht Weyl nicht aus, daß ein Vektorraum insbesondere eine Gruppe ist. Früh erkennt DICKSON den Zusammenhang, vgl. #34. Die Entwicklung dieser Frage in Emmy NOETHERs Arbeiten kann man in Kapitel 1 nachlesen.

Von besonderem Interesse beim Gruppenbegriff ist immer die Frage, ob die Abgeschlossenheit der Menge unter der Verknüpfung betont wird. Deutlich hat PEANO sich damit auseinandergesetzt; er schließt bei #149 die Punkte als Vektorraum aus, da die von ihm auf diesen definierte Addition aus der Menge der Punkte herausführt. Interessant ist der Effekt, der dadurch eintritt, vgl. #168 und #171.

4.3 Die Verbindung von M_1 und M_2

4.3.1 Die Unterscheidung der Mengen

Zunächst mußte davon abgekommen werden, die Skalarmenge als Teilmenge der Vektorenmenge aufzufassen. Eine solche Auffassung ist etwa in der Vorstellung enthalten, ‚es gebe nur eine Null'. Diese findet man bei GRASSMANN (vgl. A_2 **2.**) und HANKEL (vgl. die Bemerkungen zu #131 auf S.154). PEANO äußert sich bei #169 nicht, ob die Nullen der verschiedenen *formazioni* verschieden sind; er unterscheidet aber (was hier vorrangig ist) die Null von $\mathbb{R}$ von der des *sistema* (#146), versäumt es jedoch, verschiedene Symbole zu benutzen (mit den bekannten Folgen im *Jahrbuch*). PINCHERLÉ verwendet auf diese Unterscheidung mehr Sorgfalt (vgl. #18).

Auch bei PEIRCE oder in DEDEKINDS Körpereinbettung ist eine Trennung noch nicht klar vollzogen. Einen ersten Schritt geht GRASSMANN mit der Betrachtung von Funktionen als Ausdehnungsgrößen, bei denen die Ableitzahlen unabhängig von den Variablen der Funktionen sein sollen (vgl. #110). Ausdrücklich hebt die Trennung wohl erstmals STEINITZ in #46 hervor.

Andererseits führt eine prinzipielle, nicht strukturelle Unterscheidung zu dem Phänomen, daß der Grundkörper selbst nicht als Vektorraum aufgefaßt werden kann, vgl. #100. Die Feststellung, daß $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum ist, scheint mir ausdrücklich zuerst PEANO unter #148 zu treffen; sie ist natürlich in Dedekinds Verfahren enthalten.

Was die zwei Arten der Koordinaten betrifft (vgl. Abschnitt 4.2.1.2), so erlaubt die Tupelmethode insofern eher eine Unterscheidung von M_1 und M_2, als bei der Einheitenmethode traditionell eine der Einheiten als die gewöhnliche 1 angesehen wird (etwa bei $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$; vgl. auch #97), so daß M_2 automatisch als Teilmenge von M_1 erscheint. Umgekehrt entfällt aber bei der weitergehenden Tupelmethode die Vorstellung einer zusätzlichen, mit topologischen Eigenschaften versehenen Vektorenmenge, die durch die Tupel nur beschrieben wird (also von ihnen und damit von M_2 verschieden ist).

Erst bei vollzogener Unterscheidung hat das hinzugehörige Bindeglied, nämlich die Unitarität, Sinn. Dann wird auch erst der Unterschied zwischen Skalar- und Algebrenmultiplikation deutlich.

4.3.2 Die Abhängigkeit der jeweiligen Strukturen auf den Mengen untereinander

Bei der koordinatenweisen Einführung der Elemente von M_1 und der M_1–wertigen Verknüpfungen ist die Trennung insofern unvollkommen, als zur Erklärung der Vektoren die Körperelemente, zur Erklärung jener Verknüpfungen die Körperverknüpfungen herangezogen werden (vgl. Abschnitt 4.2.3). Umgekehrt wird aber heute die Verknüpfung v in ihren Beziehungen zu den übrigen Verknüpfungen charakterisiert, während früher immerhin v ohne Verwendung von v_1 erklärt wurde (das änderte sich mit der Einbeziehung der kanonischen Skalarmultiplikation in die Überlegungen). Es hat sich also die Stoßrichtung der Getrenntheitsforderung geändert.

4.3.2.1 Der Körper M_2 induziert die Gruppenstruktur auf M_1

Es genügt, von M_1 nur zu verlangen, daß sie mit v_1 eine abelsche Halbgruppe bildet. Man muß dann lediglich die Wirkung der Null des Körpers als Operator *a priori* als weitere Eigenschaft der Operation *festlegen* (statt sie wie üblich aus der Gruppenstruktur und den Distributivitäten zu schließen). Aus struktureller Sicht ist dieses Verfahren allerdings künstlich, wie in Abschnitt 3.3.4 gezeigt wird. Hier wird es geschildert, da es historisch angewandt wurde.

Sei also die Wirkung von 0_{M_2} auf Elemente von M_1 festgelegt durch $v(0_{M_2}, a) = v(0_{M_2}, b)\ \forall a, b \in M_1$; ansonsten operiere M_2^* (aufgefaßt als multiplikative Gruppe mit v_{22}) vermöge v auf M_1. Durch die Festlegung der Wirkung der Null gilt das Operationsaxiom $\mathcal{A}_v$ offenbar für Elemente aus ganz M_2. Die Verknüpfung v soll dann distributiv sein bezüglich v_{21} (also $\mathcal{D}_l$ erfüllen) und v_1 (also $\mathcal{D}_r$ erfüllen). Hieraus folgt, daß M_1 unter v_1 eine Gruppe bildet mit Nullelement $v(0_{M_2}, a)$ für ein a.

Dieses Verfahren (abgesehen von der geringfügigen Reduktion bei $\mathcal{A}_v$) wendet PEANO in [144] an. Außerdem habe ich es nur noch bei HAHN ([76]) und WEIL ([189]) gefunden — deren Bezug zu Peano unklar, sicher aber gering ist —, während es bei Peanos direktem Nachfolger PINCHERLÉ in [150] bereits fehlt. BANACH gibt 1932 in [7] über eine Halbgruppe hinaus nur die Kürzungsregel vor, die er allerdings ausschließlich benötigt, um die Gleichung $v(0_{M_2}, a) = v(0_{M_2}, b)\ \forall a, b \in M_1$, also etwas viel Schwächeres, zu beweisen (diese Version liefert Peano als Variante unter [144] **81.** 3., vgl. meine Bemerkung zu #147 auf S.163). Damit hat sich Banach immerhin Peanos Version schon beträchtlich genähert gegenüber seiner eigenen von 1922 in [6], wo er lediglich die Inversen aus der Skalarmultiplikation erschließt, statt sie zu fordern — selbst damit blieb er noch unter der heute üblichen Maximalforderung einer abelschen Gruppe.

Bei WEDDERBURNS (1,1)–Korrespondenz zwischen einem Körper und (für jedes $0 \neq a \in A$) einer Untermenge A_a von A im Jahre 1924 entspricht die Null von A der Null des Körpers. Man könnte nun meinen, damit sei das System redundant, da Wedderburn zunächst die Gruppenstruktur axiomatisiert, die genannte Entsprechung aber $0a = 0b$ bedeutet. Dieser Eindruck ist aber falsch, denn es ist ohne Gruppenstruktur der Algebra sinnlos, von einer Korrespondenz zwischen Elementen der Algebra und solchen des Körpers zu verlangen, daß die Nullen einander entsprechen.

4.3.2.2 Was induziert M_1 auf M_2?

Die Schule der modernen Algebra (KRULL 1925) geht den umgekehrten Weg verglichen zu PEANO: nicht die Gruppenstruktur wird weitgehend von der Skalarmultiplikation bestimmt (das heißt, es wird nicht eine Operation einer speziellen Gruppe — der multiplikativen Gruppe eines Körpers — auf einer Menge untersucht, wobei man dann fragt, wieviel Struktur man von der Menge verlangen muß, damit sie insgesamt Gruppenstruktur hat), sondern die Gruppe ist *a priori* vorhanden und wird schrittweise mit zusätzlicher Struktur versehen, so daß bei einer zunächst unspezifischen (strukturlosen) Operatorenmenge die Rechtsdistributivität die einzige sinnvolle Forderung ist.

Man kann nun analog fragen, wieviel Struktur man von der Operatorenmenge verlangen muß, damit sie vermittels der Gruppe, auf der sie distributiv operiert, insgesamt ein Körper ist. Kann die Gruppe, auf der sie operiert, darauf Einfluß haben? D.h. ist das Abhängigkeitsverhältnis wechselseitig (den Einfluß in die umgekehrte Richtung haben wir oben besprochen), oder werden keinerlei Teile der Struktur der Operatorenmenge von der Gruppenstruktur induziert[31]? Die Skalarmultiplikation (jetzt nicht mehr bei Krull, sondern wie von mir eingeführt) ist zunächst eine Operation eines Körpers, aufgefaßt als multiplikatives Monoid. Unter welchen Zusatzvoraussetzungen ist es möglich, aus einem multiplikativen Monoid K oder auch einer multiplikativen Gruppe K^*, die auf einer additiven abelschen Gruppe V vermöge $\circ$ rechtsdistributiv operiert, einen Körper K zu gewinnen? Müßte man praktisch alles, was den Körper darüberhinaus ausmacht, zusätzlich voraussetzen, so wäre das ein prinzipieller Unterschied zwischen den beiden Stoßrichtungen. Ein solches Verfahren wurde historisch nicht praktiziert; gäbe es eines, so hätte es, wie in Abschnitt 3.3.4 ausgeführt wird, strukturmathematisch keinen Sinn. Die folgenden Bemerkungen beleuchten aber die Bedeutung der additiven Struktur auf dem Körper für die Geometrie des Vektorraums.

Da jede abelsche Gruppe distributiv auf ihrer nur aus dem neutralen Element bestehenden Untergruppe operiert, deshalb aber noch kein Körper ist, muß man offenbar irgend etwas zusätzliches fordern. Man würde zunächst K^* um ein Element 0 erweitern und alle vorliegenden Verknüpfungen geeignet auf $K^* \cup \{0\}$, kurz K, ausdehnen. Die Schwierigkeit ist nun, eine innere Verknüpfung $+$ auf K zu erklären, so daß K einen Körper bildet und daß für $\circ$ $\mathcal{D}_l$ gilt. Man kann etwa erklären, daß (um jedenfalls $\mathcal{D}_l$ zu garantieren) $a + b$ dasjenige Element in K ist, so daß $(a + b)x = ax + bx \ \forall x \in V$. Dazu muß man aber zusätzlich fordern, daß es überhaupt ein eindeutiges solches Element gibt. Im Blick auf das vordergründige (letztlich irrelevante) Ziel ist das keine sehr ‚angenehme' Forderung, weil sie keinen Einblick gibt, welche Struktur nun K eigentlich über die multiplikative hinaus mindestens haben muß, um mithilfe von V Körper zu sein (daß es für ein einzelnes x überhaupt ein solches K–Element gibt, ist mindestens dann klar, wenn die Abbildungen $\circ_a : x \mapsto ax$ surjektiv sind, wenn der Raum also eindimensional ist; selbst in diesem völlig uninteressanten Fall wäre aber noch nicht garantiert, daß diese vom speziellen x abhängigen K–Elemente auch zusammenfallen). Dafür öffnet diese Situation aber den Blick auf ein wesentliches Element der Vektorraumstruktur: Wenn K keine vernünftige additive Struktur hat, lassen sich die Geraden auf V nicht als abgeschlossen unter den algebraischen Operationen erkennen. Ich verfolge diesen Punkt nicht weiter.

[31] vgl. die Präzisierung des Begriffs ‚induzieren' in diesem Zusammenhang in Abschnitt 3.3.1

4.4 Die Dimension

Die Rolle von v als Bindeglied wird deutlich im Begriff der Dimension. Diese charakterisiert die einzelne Instanz (die spezielle Wahl der Mengen usw.) nicht vollständig (ähnlich wie die Mächtigkeit eine Menge nicht vollständig charakterisiert); wohl aber bestimmt sie das Verhältnis zwischen den Mengen M_1 und M_2. Die Dimension ist abhängig von dem gewählten Skalarkörper (das kommt in WEDDERBURNs Charakterisierung der Skalarmultiplikation als (1,1)–Korrespondenz zwischen dem Körper und der Menge A_a zum Ausdruck), aber basisinvariant. Die Feststellung, daß die Mindestmächtigkeit vollständiger Erzeugendensysteme und die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren ein und dieselbe Zahl (die Dimension) sind, wurde in der Frühzeit nur von wenigen Autoren (zwischen der A_2 und STEINITZ' Arbeit von 1910 von niemandem) bewiesen; vgl. [50].

FRÉCHET erkennt (vgl. #44), daß die Mächtigkeit einer Menge eine so allgemeine Eigenschaft ist, daß sie über die genaue Struktur fast nichts aussagt. Das trifft auf den Vektorraum zu, da er eben nicht bloß eine Menge ist, sondern ein Komplex aus zwei Mengen, die in spezieller Weise verbunden werden. Dieser Tatsache trägt (im Gegensatz zum Begriff der Mächtigkeit) der Begriff der Dimension Rechnung. CANTOR gibt mit der Bijektion zwischen den reellen Zahlen und jedem $\mathbb{R}^n$ zwar eine Ordnung an; diese bleibt aber unter geometrischen Operationen (Translation, Rotation und weitere) nicht erhalten; insofern gelten dort nicht die HILBERTschen Ordnungsaxiome, vgl. [151] 258.

KREISEL führt als eines unter drei häufig zitierten Beispielen (vgl. [101] 101) für die angebliche Unzuverlässigkeit intuitiver Überzeugungen an ([101] 104f):

> [Cantors Entdeckung der Gleichmächtigkeit von Einheitsintervall und Einheitsquadrat] wird häufig so dargestellt, als widerlege sie die intuitiv durchaus überzeugende Unterscheidung von verschiedenen [S.105] *Dimensionen*, die erst 30 Jahre später durch Brouwers Beweis der Nichtexistenz einer topologischen Abbildung ≪*gerettet*≫ worden sei. Aber wer hat denn je die Überzeugung gehabt, der Dimensionsbegriff ließe sich mit Hilfe ein–eindeutiger Abbildungen charakterisieren? War es nicht bemerkenswert, daß schon die Einschränkung auf topologische Abbildungen *genügt*? Hier sollte man sich daran erinnern, daß Dedekind in seiner postwendenden Antwort auf Cantors Brief, in dem die Entdeckung mitgeteilt wurde, den unstetigen, d.h. nicht–topologischen Charakter der Cantorschen Abbildung betonte [...]

Zur genannten Briefstelle vgl. [118] 41. Der Dimensionsbegriff hängt also stark mit Stetigkeit zusammen.

4.4.1 Der Begriff der linearen Unabhängigkeit

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit war historisch lange vor dem abstrakten Konzept des Vektorraums vorhanden. Vor PEANO verwenden ihn (neben GRASSMANN) DEDEKIND ([35] II, S.35 bzw. §164; vgl. [152] II S.10), DIRICHLET (Werke Band I S.633), LIE (*„in the late 1880's“* lt. [87] 253) und viele andere. Der Begriff kann als Kristallisationspunkt der Isolation von Gemeinsamkeiten gewirkt haben. Er prägt der Vektorenmenge erst die Struktur auf.

Die Eindeutigkeit der Darstellung bezüglich eines Erzeugendensystems ist gleichbedeutend mit der linearen Unabhängigkeit des Systems. Denn die triviale Darstellung der Null ist für jedes Erzeugendensystem möglich; für ein Erzeugendensystem, bezüglich dessen jede mögliche Darstellung eindeutig ist, gibt es also *nur* die triviale Darstellung der Null; umgekehrt führt die Annahme, es bestünde bezüglich dem linear unabhängigen System $v_1, \dots, v_n$ eine Gleichung $\sum \alpha_i v_i = \sum \beta_i v_i$ mit $\alpha_j \neq \beta_j$ für ein j, zu einem Widerspruch, da sich dann unter Verwendung der Unitarität v_j durch die übrigen v_i darstellen ließe vermittels Durchdivision mit $\alpha_j - \beta_j$. Dabei ist nicht von

Vollständigkeit des Erzeugendensystems die Rede. Das Argument geht wegen der generellen Endlichkeit der *Darstellungen* auch bei unendlicher Kardinalität des Erzeugendensystems; man muß allerdings die (ebenfalls endliche) Vereinigungsmenge der in beiden Summen jeweils herangezogenen Mengen von Erzeugenden betrachten. Methodisch unterscheiden sich die äquivalenten Begriffe jedoch stark, da die lineare Unabhängikeit viel leichter nachzuwiesen ist.

Die Beschränkung auf endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten bei Linearkombinationen fällt natürlich auf den Begriff der linearen Unabhängigkeit zurück, so daß unendliche Mengen linear unabhängiger Vektoren durchaus in unendlicher Weise auseinander kombinierbar sein können (wenn eine sinnvolle Erklärung unendlicher Kombinationen möglich ist).

Bei Moduln ist eine Eindeutigkeit von Darstellungen nicht gewährleistet. Da die Skalarmenge kein Körper ist, folgt diese Eindeutigkeit nicht in der oben für Vektorräume geschilderten Weise. Der Wunsch nach ‚möglichster' Eindeutigkeit spielt aber wohl eine Rolle bei der schließlichen Definition des Begriffes der linearen Unabhängigkeit in Moduln. Dort wären sonst nämlich mehrere Varianten zum gewöhnlichen Begriff der trivialen Darstellung denkbar: Man könnte als Koeffizienten alle Elemente des Annulators des von den betrachteten Vektoren erzeugten Untermoduls zulassen, also alle Ringelemente, die auf die Vektoren in der gleichen Weise wirken wie die Null des Ringes, aber von dieser Null verschieden sein können. Bilden dabei die betrachteten Vektoren ein Erzeugendensystem des ganzen Moduls, so ist letzteres gleichbedeutend damit, daß der Modul nicht treu (sein Annulator also von $\{0\}$ verschieden) ist. Sind unter den Vektoren Torsionselemente, so können (für *deren* Koeffizienten) weiter Ringelemente aus deren jeweiligen Annulatoren zugelassen werden, ohne an der Wirkung etwas zu ändern.

Diese Ideen wären höchstens damit zu rechtfertigen, daß man die besagten Darstellungen in der Wirkung im *Modul* nicht von der herkömmlichen trivialen Darstellung unterscheiden kann. Sehr wohl unterscheiden sich jedoch die Wirkungen im *Ring*. Auch eine Darstellung in Nichteinheiten oder Nullteilern kann auf dieses letzte Problem nur ansatzweise eingehen. Die Einbeziehung der letztgenannten Darstellungen wäre eine Anwendung des Verfahrens, ursprüngliche Eigenschaften zu Definitionen zu machen.

Für den Vektorraum, der treu und torsionsfrei ist und dessen Ring nullteilerfrei ist und nur die triviale Nichteinheit enthält, fallen alle solchen Begriffe einer linearen Unabhängigkeit zusammen. Beim Modul gewährleisten sie offenbar ‚weniger' Eindeutigkeit als der klassische Begriff. Außerdem werden sie dem Aspekt des klassischen Begriffs nicht gerecht, wonach die beiden additiv neutralen Elemente miteinander verbunden werden. Es wird deutlich, daß es andere Motive anstelle der ausfallenden Gewährleistung eindeutiger Darstellungen für die Fortschreibung des herkömmlichen Begriffs linearer Unabhängigkeit in Moduln gibt. Auch ist klar geworden, daß nicht jede denkbare Verallgemeinerung auch durchgeführt wurde; das unterstreicht auch wieder die Bedeutung der nachträglichen Konkretion.

4.4.2 Endliche Dimension

4.4.2.1 Teilräume und lineare Hüllen

Lange Zeit werden die linearen Hüllen einer Menge von Vektoren etwas seltsam behandelt: Man hat den Eindruck, zuerst werde der ‚Gesamtraum' definiert und sodann würden darin mit Vorliebe Mengen von Linearkombinationen betrachtet — ohne daß irgendwie ihre Teilraumbeziehung dargestellt wird. Erst Steinitz gelangt zu einer wenigstens teilweise moderneren Sichtweise (bei ihm tritt erstmals die abstrakte Definition einer linearen Hülle auf, vgl. #48), während es sich später noch bei Weyl so darstellt wie beschrieben. Mit Weyl spricht auch Eduard Study in seinem Lehrbuch der Invariantentheorie linearer Transformationen aus dem Jahr 1923 von *Vektorenmannigfaltigkeiten* — und denengegenüber vom *Kontinuum der Vektoren.* Die seltsame Vorstellung von einem solchen ‚Vektorenuniversum', in das man die Hüllen — die doch für sich allein als Vektorräume bestehen könnten — einbetten zu müssen glaubt, hat wohl mit der Tradition der Erweiterung des Zahlbereiches zu tun und mit der Mobilisierung der geometrischen Anschauung, wo *der* ‚Gesamtraum' zugrundeliegt.

WEDDERBURN befaßt sich 1907 innerhalb einer Algebra mit *complexes* (linearen Hüllen) vorgegebener Vektorenmengen. Auf den gleichen Sachverhalt nehmen SCORZA mit *sistemi*, DICKSON (vgl. die Bemerkungen zu #196) und INGRAHAM mit *linear sets*, NOETHER et al. ursprünglich mit *Moduln* Bezug. Die in STEINITZ' Modulbegriff mögliche Folgerung, daß jeder Modul die 0 enthält — vgl. #47 — bedeutet nicht, daß aus der Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation bereits eine Monoidstruktur folgt, denn Moduln bei Steinitz sind ja eingebettet in bereits mit voller Struktur versehene Systeme.

Während die von Steinitz in [174] als lineare Mannigfaltigkeit bezeichneten Restklassen auch von DICKSON als Elemente einer *difference algebra* betrachtet werden (vgl. dazu #196 und die zugehörigen Anmerkungen), steht Steinitz mit seiner *Namensgebung* allein innerhalb der terminologischen Tradition. Außer ihm scheint nur noch HAUPT diese Bezeichnung und die des Moduls zugleich zu benutzen (während sich die anderen Autoren für eine entscheiden); Haupt verwendet die Bezeichnungen aber synonym für eine unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossene Menge, vgl. [84] (9,3). Eine solche Menge heißt auch bei VON NEUMANN ‚lineare Mannigfaltigkeit' ([129] 64), während RIESZ zusätzlich noch verlangt, daß gleichmäßig konvergente Folgen in der linearen Mannigfaltigkeit einen Grenzwert haben — also für den Gesamtraum eine topologische Struktur annimmt ([159] 74). Andere Autoren (unter anderem Steinitz selbst) verwenden für denselben Sachverhalt die Bezeichnung ‚Modul'; vgl. dazu Abschnitt 5.1.3.1. Ebenfalls Tradition hat der Ausdruck ‚Lineare Menge', der etwa bei FRÉCHET ([60] 32), INGRAHAM ([92] 170) und HAUSDORFF ([86]) eine unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossene Menge bezeichnet. Unklar ist seine Bedeutung in Fréchets älterer Arbeit [59] auf S.149ff, wo dieser innerhalb eines Abschnittes über *ensembles dénombrables* bzw. *dimensions dénombrables* von „*ensemble linéaire*" spricht, ohne diesen Begriff irgendwie zu klären.

Geht man in der Verwendungsgeschichte ‚lineare Mannigfaltigkeit' noch etwas weiter zurück, zeigen sich noch andere Bedeutungen. KLEIN meint noch in etwa dasselbe, wenn er in der Besprechung von SCHLEGELS *Raumlehre*[32] über den Umfang von GRASSMANNs Arbeiten angibt (S.234):

> Bei ihm ist ferner die Lehre von den mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, als deren specieller Fall die Raumlehre erscheint, insbesondere die Lehre von den linealen (projectivistischen) Mannigfaltigkeiten, wohl zum ersten Male entwickelt.

Schwerer ist ein Zusammenhang zu erkennen, wenn CANTOR in [22] 248 von einer linearen Mannigfaltigkeit reeller Zahlen spricht, einer Mannigfaltigkeit, in der jede Zahl höchstens einmal vorkommt.

4.4.2.2 Der Zusammenhang von Dimensions- und Basisaxiom

Wegen aller Bezeichnungen vgl. den Anhang. Strukturell gesehen ist bei WEYL das Dimensionsaxiom $\mathcal{W}\ I\gamma$ von der übrigen Struktur klar einseitig getrennt: Die übrige Struktur ohne dieses Axiom ergibt eine korrekte Axiomatisierung unendlichdimensionaler Räume, während das Dimensionsaxiom eine echt zusätzliche Struktur darstellt, da es ohne den (von der Gruppen- und linearen Struktur abhängenden) Begriff der linearen Abhängigkeit keinen Sinn hat. Anders verhält es sich beim Basisaxiom $\mathcal{DICK}$ V von DICKSON. Dieser behauptet zwar, seine neue Definition sei unter Weglassung des Basisaxioms für die Theorie der unendlichdimensionalen Algebren geeignet (vgl. #197). Aber die Eigenschaften Unitarität sowie Existenz und Eindeutigkeit der Null, die er aus den

[32] *System der Raumlehre nach den Prinzipien der Grassmannschen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt von Victor Schlegel*, 2 Bände, Teubner/Leipzig 1872, 1875; Kleins Besprechung findet sich in JFM **4** 231–235.

Postulaten $\mathcal{DICK}$ I–V ableitet, sind sicher auch in unendlichdimensionalen Algebren notwendig; es besteht jedoch keine Möglichkeit, sie unter Wegfall von $\mathcal{DICK}$ V nur mit $\mathcal{DICK}$ I–IV abzuleiten. Denn die Menge $H = \{0, 1\}$ ist mit der Addition $\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$ offenbar eine Halbgruppe; wenn ein beliebiger Körper K mit dieser Halbgruppe H durch die Vorschrift $az = 1\ \forall a \in K, z \in H$ verknüpft wird, so erfüllt diese Verknüpfung $\mathcal{A}_\circ, \mathcal{D}_l$ und $\mathcal{D}_r$. Es sind also insgesamt $\mathcal{DICK}$ I–IV erfüllt[33]; $\mathcal{DICK}$ V ist jedoch nicht erfüllt, und H ist weder unitär, noch bildet sie ein Monoid.

Ferner leitet Dickson noch die Gleichheit der Ausdrücke $0\mathfrak{a}$ aus $\mathcal{DICK}$ I–V ab, über die mein Gegenbeispiel offenbar nichts sagt, da bei ihm diese Gleichheit nach Konstruktion besteht. Es ist aber bereits gezeigt, daß Dicksons Behauptung unter #197 falsch ist. Dickson wollte vermutlich (in der Unabhängigkeitstradition) nichts fordern, was er beweisen kann.

Man kann nun den Unterschied zwischen Dickson und Weyl präziser formulieren: Das Basisaxiom hat zwar ebenfalls ohne die von Dickson gegebenen Axiome der Gruppen- und linearen Struktur keinen Sinn; diese von Dickson gegebenen Axiome sind jedoch alleine nicht imstande, das, was unter einer Algebra unbekannter (gleich, ob endlicher oder unendlicher) Dimension verstanden wird, vollständig zu charakterisieren. Insofern regelt das Basisaxiom nicht die zusätzliche Struktur der Endlichdimensionalität auf dem Fundament der Struktur unbekannter Dimension, wie das bei Weyl der Fall ist.

Weyl fordert natürlich auch nicht alle Eigenschaften, die Dickson ableitet, explizit; das tut er lediglich mit der Unitarität, während die Existenz und Eindeutigkeit der Null implizit (durch $\mathcal{W}\ I\alpha\,3.$) gefordert ist (das ist natürlich nur eine Frage äquivalenter Axiomensysteme für eine Gruppe). Die Gleichheit der Ausdrücke $0\mathfrak{a}$ erwähnt er nicht; in den Anmerkungen zu #177 auf S.169 beweise ich sie entsprechend Weyls Auffassung der Null mithilfe der Punktstruktur $\mathcal{W}\ II$. Man könnte sie aber auch ohne $\mathcal{W}\ II$ zeigen, und zwar auf dem selben Wege wie Banach, da Weyl über die Kürzungsregel der abelschen Gruppe implizit verfügt; dann benötigt man jedoch die Unitarität.

Das Verhältnis von Dimensions- und Basisaxiom wird noch einmal deutlicher, wenn man der Idee nachgeht, Weyl könnte die Unitarität aus seinen übrigen Axiomen folgern. Daß dies *ohne* Dimensionsaxiom nicht geht, zeigt eine additive abelsche Gruppe G mit trivialer Skalarmultiplikation $\lambda\mathfrak{a} = 0\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} \in G$, die das Dimensionsaxiom für kein natürliches n (außer dem pathologischen Fall 0) erfüllt. So bleibt noch zu untersuchen, ob es in Analogie zu Dickson *mit* dem Dimensionsaxiom geht[34]. Ließe sich $\mathcal{DICK}$ V aus $\mathcal{W} \setminus \mathcal{U}$ herleiten, so könnte man zum Beweis der Unitarität bei Weyl denselben Weg wie bei Dickson beschreiten. $\mathcal{DICK}$ V besagt in Weyls Bezeichnungen, daß es Vektoren $\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ gibt, so daß gilt:

$$(\forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{M})(\exists \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}) : \mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathfrak{e}_i.$$

Aus $\mathcal{W}\ I\gamma$ folgt nun offenbar, daß die Gleichung in $\zeta_i, i = 1, \dots, n+1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i \mathfrak{e}_i = 0$$

für alle Wahlen von $\mathfrak{e}_i \in \mathfrak{M}, i = 1, \dots, n+1$ eine Lösung hat, bei der mindestens ein ζ_i von 0 verschieden ist. Nun kann man die ersten n $\mathfrak{e}_i$ ebenfalls nach γ) als linear unabhängig wählen;

---

[33] man kann die Addition zugleich als Algebrenmultiplikation auffassen.

[34] eine entsprechende Idee für die Existenz und Eindeutigkeit der 0 und die Gleichheit $0\mathfrak{x} = 0\ \forall \mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ verbietet sich natürlich von selbst, da diese Eigenschaften schon in der Definition des für das Dimensionsaxiom benötigten Begriffs der linearen (Un–)Abhängigkeit verwendet werden; außerdem folgen diese Eigenschaften ja bereits aus Weyls Axiomen *ohne* Dimensionsaxiom.

bei jeder solchen Wahl kann ζ_{n+1} nicht gleich 0 sein, denn wäre ζ_{n+1} gleich 0, müßte das von 0 verschiedene ζ_i bei einem der $\mathfrak{e}_i$ stehen, was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit stünde[35]. Wählt man dann noch $\mathfrak{e}_{n+1} = \mathfrak{a}$, so kann man mit $-\zeta_{n+1}$ durchdividieren und erhält offenbar, wenn man noch $\xi_i := \frac{\zeta_i}{\zeta_{n+1}}, i = 1, \ldots, n$ setzt:

$$1 \cdot \mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathfrak{e}_i$$

— eine Beziehung, die genau um die Nuance von $\mathcal{DICK}$ V abweicht, um die es gerade geht, nämlich die Unitarität. Die Ableitbarkeit von $\mathcal{DICK}$ V aus den Axiomen $\mathcal{W} \setminus \mathcal{U}$ ist also der Ableitbarkeit von $\mathcal{U}$ selbst aus diesen Axiomen äquivalent, denn einerseits ist natürlich $\mathcal{U}$ mithilfe von $\mathcal{DICK}$ V ableitbar (das ist ja gerade unser Ausgangspunkt), andererseits aber nun auch umgekehrt $\mathcal{DICK}$ V mithilfe von $\mathcal{U}$.

Ganz ähnlich argumentiert Grassmann in A_2 beim Beweis von **12.** 6), vgl. meine Bemerkungen zu #109.

4.4.3 Unendliche Dimension

Unendliche Dimension bedeutet offenbar, daß das Verhältnis von M_1 und M_2 von einer anderen (indirekteren?) Art ist als bei endlicher Dimension. M_2 steht sozusagen in größerer Distanz zu M_1.

Auch bei unendlicher Dimension fallen Maximalmächtigkeit linear unabhängiger Mengen und Minimalmächtigkeit vollständiger Erzeugendensysteme zusammen. Falls solche ‚Extrema' in einem unendlichdimensionalen Vektorraum überhaupt vorhanden sind, so stimmen sie auch überein, denn wenn alle Mengen, deren Mächtigkeit eine bestimmte Mächtigkeit übersteigt, linear abhängig sind, so kann man die Elemente jeder solchen Menge bezüglich einer Menge darstellen, deren Mächtigkeit mit jener bestimmten Mächtigkeit übereinstimmt. In einem unendlichdimensionalen Vektorraum gibt es eine maximale Mächtigkeit (maximal im Sinne der Ordnung der transfiniten Kardinalzahlen) linear unabhängiger Mengen, denn jede solche Mächtigkeit kann die des ganzen Raumes nicht überschreiten. Dann gibt es aber auch eine Minimalmächtigkeit vollständiger Erzeugendensysteme, denn ein vollständiges Erzeugendensystem kann nicht von geringerer Mächtigkeit sein als ein linear unabhängiges System.

Ein bedeutsamer Unterschied zu den endlichdimensionalen Räumen ist dann aber, daß unendlichdimensionale Räume nicht isomorph zu ihrem Dualraum sein müssen. Dies war seit den Arbeiten von Riesz bekannt; vgl. Abschnitt 4.5. Gray vermutet in dieser Feststellung sogar einen Anlaß, die endlichdimensionalen Räume genauer zu untersuchen ([73] 66):

> It may well be that the unexpected richness and complexity of *infinite*–dimensional vector spaces (which need not be isomorphic to their duals, for example) first inclined mathematicians to study the finite–dimensional spaces explicitly.

Daß nämlich keinesfalls erst auf der Grundlage der postulatorischen Definition mit unendlichdimensionalen Räumen gearbeitet wurde, diese also bereits zu einem Zeitpunkt untersucht wurden, als auch bei endlichdimensionalen Räumen ‚Nachholbedarf' war, wird gleich deutlich werden.

[35] an dieser Stelle muß man daran erinnern, daß $0\mathfrak{x} = 0 \; \forall \mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ bereits gezeigt ist — ohne Verwendung der Unitarität allerdings nur nach dem Verfahren mit der Punktstruktur $\mathcal{W}$ *II*.

4.4.3.1 Schritte zur Betrachtung unendlichdimensionaler Räume

Im MR–*Review* zu [108] heißt es, der erste *„hint that the number of dimensions can be allowed to increase up to infinity“* finde sich möglicherweise bei Grassmann. Zu unendlicher Dimension bei GRASSMANN finden sich folgende Stellen: A_1 S.XXX (bzw. [71] I,1 S.29): *„weiter als bis zu drei unabhängigen Richtungen (Aenderungsgesetzen) kann man hier* [in der Raumlehre] *nicht kommen, während sich in der reinen Ausdehnungslehre die Anzahl derselben bis ins Unendliche steigern kann“*; A_1 §16: *„beliebig hohe Stufe“* (S.21) und *„keine Gränze* [✓]*“* (S.22); A_1 1878 S.273 *„während die abstrakte Wissenschaft keine Grenzen kennt“*. DORIER und ZADDACH verstehen das so, daß keine Beschränkung der Dimension stattfindet ([50] 177, [204] 83); das ist sicher richtig, insofern n über jede Schranke wachsen kann. Das besagt aber noch nicht, daß unendliche Dimension betrachtet würde. Vermutlich kann man auch die Formulierung in MR so eingeschränkt verstehen. FEARNLEY–SANDER geht dem weiterreichenden Gedanken aber doch nach und meint zur A_2 ([56] 811): *It is not clear whether the set of units is allowed to be infinite, but finiteness is implicitly assumed in some of his proofs.* Eine solche Angabe kann man nicht eben als „weiterführend“ bezeichnen, wenn man die Zahl der Beweise in der A_2 bedenkt. Es wäre auch noch die Frage, was *implicitly assumed* heißt: daß die Beweise (oder sogar bereits die Aussagen) nur für endliche Dimension gelten? Oder daß Grassmann nur endliche Fälle bespricht, obwohl eine Ausdehnung unproblematisch wäre, was dann belegt, daß er nicht an unendliche Fälle denkt? Etwa in den einleitenden Paragraphen der A_2 ist folgendes zu beobachten:

Bei #99 ist nicht deutlich, ob unendlich viele Einheiten zugelassen sind. Zwar ist keine Summationsgrenze genannt; daß der Ausdruck ‚Polynom‘ auf endlich viele Summanden deutet, kann kaum bei einer Entscheidung helfen, denn die Zahl der (von Null verschiedenen) Summanden ist in jedem Fall endlich: Auch in unendlichdimensionalen Räumen kann jedes Element als Linearkombination endlich vieler linear unabhängiger Vektoren dargestellt werden, allerdings nicht jedes bezüglich *derselben* endlich vielen. Solange aber nur endlich viele Elemente gleichzeitig betrachtet werden, sind auch nur insgesamt endlich viele Koeffizienten von Null verschieden. Es ist insofern unproblematisch, ob bei #105 Summationsgrenzen unterstellt sind oder nicht. Daß sich alle extensiven Größen a, b, c aus *demselben* (endlichen) System von Einheiten ableiten lassen, stimmt, wenn man einfach die Vereinigung der drei erforderlichen Einheitensysteme nimmt, da ja jedenfalls auch verschwindende Koeffizienten zugelassen sind.

Es erscheint insgesamt aber sehr konstruiert, Grassmann solle an unendliche Dimension gedacht haben, nur weil die pure Möglichkeit besteht, seine Resultate für solche Räume zu lesen. Schließlich hat erst HAMEL über vierzig Jahre später erstmals einen unendlichdimensionalen Raum in der angegebenen Weise, also mit prinzipiell endlichen Linearkombinationen betrachtet. Auch war ja bereits die Betrachtung von n Dimensionen zu Grassmanns Zeit einigermaßen sensationell. Zusammenfassend kann man sagen, daß die *Schreibweise* zu einer Entscheidung über die Endlichkeit der Dimension des Raumes nicht herangezogen werden kann; wahrscheinlich hat lediglich die altertümliche indexfreie[36] Schreibweise aus dem Paragraphen **2.** der A_2, bei der jede Andeutung der Endlichkeit auch zugleich eine Fixierung der Dimension wäre, überhaupt erst zu der Idee verleitet, Grassmann lasse eine unendliche Dimension zu. Die Entscheidung kann man meines Erachtens leichter treffen, wenn man bedenkt, daß die A_2 ja gedanklich der A_1 verpflichtet ist, in der womöglich wegen des genetischen Aufbaus an eine unendliche (nicht nur eine beliebig hohe) Stufenzahl grundsätzlich nicht gedacht sein kann. Ich lasse aber gelten, daß bei Grassmann wenigstens nachmals als unendlichdimensional erkannte Räume vorkommen — wenn er sich mit Ausdehnungsgebieten von Funktionen befaßte, vgl. #110.

Für die erste tatsächlich nachweisbare Betrachtung eines unendlichdimensionalen Raums wird dann allgemein PEANOs Beispiel der ‚ganzen algebraischen Funktionen‘ angesehen. Unendlich-

[36] zur Entwicklung von Indexschreibweisen vgl. Hans Freudenthals Arbeit *Einige Züge aus der Entwicklung des mathematischen Formalismus*, in: Nieuw Arch. Wisk. (3) **7** (1959), 1–19.

dimensionale *Mannigfaltigkeiten* (ohne die Thematisierung einer Vektorraumstruktur) bezieht aber schon CANTOR 10 Jahre zuvor in seine Untersuchung ein, vgl. #14; dort wird sogar deutlich, daß er bereits an überabzählbar unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten denkt — den Begriff der Überabzählbarkeit hat er selbst gerade erst erarbeitet.

Etwaige Vermutungen, die Betrachtung von Funktionenräumen (vgl. Abschnitt 5.1.4.2) in der Analysis zu Beginn des Jahrhunderts sei unmittelbare Anregung für ein postulatorisches Konzept gewesen, erweisen sich nach DORIER als falsch ([52] 266):

> Pour un mathématicien contemporain, une fonction, en tant qu'élément d'un espace vectoriel, est le prototype du vecteur qui ne se laisse pas réduire à ses coordonnées. C'est pourquoi [...] on pourrait croire qu'à la fin du XIX^{e} siècle, sont réunis tous les ingrédients pour imposer l'approche formelle de la notion d'espace vectoriel, et qu'il existe, dans l'histoire de l'algèbre linéaire, une rupture conceptuelle où l'apparition de la dimension infinie est intrinsèquement liée à l'adoption de l'approche axiomatique. Mais ceci est en grande partie faux. En effet [...], la représentation d'une fonction par un développement en série est encore au début du XX^{e} siècle la conception dominante dans beaucoup de domaines de l'analyse. Or, une série est, avant tout, une suite infine de coefficients, ce qui correspond au cas limite de la représentation en coordonnées.

Erst FRÉCHET bricht mit der Vorstellung von Funktionen als unendlichen Reihen und kritisiert den *„emploi abusif des coordonnées"*; er spricht sogar von *„elements parasites"* (ebd. 297f).

Auch die Betrachtung von linearen Gleichungssystemen mit unendlich vielen Unbekannten (vgl. Abschnitt 5.1.4.1) — die natürlich eng mit der Frage der Funktionenräume verbunden ist — ergab zunächst kein postulatorisches Konzept. Ich glaube BOURBAKI zwar rechtgeben zu können in seiner hohen Meinung von TOEPLITZ' Arbeit (vgl. dazu Kapitel 1); aber gerade dadurch, daß Toeplitz in Hamelscher Manier mit prinzipiell endlichen Linearkombinationen arbeitet, indem er zeilenfinite Systeme betrachtet, erlaubt sein System das Ausdehnen der betreffenden Sätze auf unendliche Dimension in Koordinatensprache, also ohne eine postulatorische Definition.

WEYL hat in RZM zwar prinzipiell die Möglichkeit, unendlichdimensionale Räume zu betrachten, macht davon aber keinen Gebrauch. DICKSON zeigt, daß er auch an die Betrachtung unendlichdimensionaler Algebren denkt, wenn er in #197 behauptet, seine neue Definition von 1923 sei unter Weglassung des Basisaxioms dazu geeignet — auch wenn das nicht zutrifft. Eine Behandlung solcher Algebren erschließt dann WEDDERBURN 1924.

MOORE bezeichnet Weyls Standpunkte bezüglich unendlicher Dimension in [191] als konfus ([127] 277); er stellt deutlich heraus, daß Weyl nicht unterscheidet zwischen der Zahl der Koeffizienten, die zu einer eindeutigen Darstellung eines Elements erforderlich sind (etwa als Koeffizienten einer unendlichen Reihe), einerseits und der Kardinalität einer Hamelbasis andererseits. Ich muß mich angesichts Weyls wissenschaftlichen Rangs immerhin über seine unter #64 wiedergegebene Äußerung wundern, ein Beispiel lehre irgendeinen allgemeinen Sachverhalt. Die Idee, auch bei unendlicher Dimension die Endlichkeit der Linearkombinationen beizubehalten, kam Weyl offenbar nicht, obwohl sie ja damals nicht neu war, wie wir bei Hamel und Toeplitz gesehen haben.

4.4.3.2 Die Schauderbasis

Ein Versuch, die Konfusion in der Theorie unendlichdimensionaler Räume zu beenden, war der Übergang zu Linearkombinationen mit unendlich vielen von Null verschiedenen Koeffizienten. Dies erscheint ‚natürlicher' als die Beibehaltung der Endlichkeitsrestriktion, führt aber auf zusätzliche Anforderungen an die Topologie der Räume. Die Grenzen dieses Versuchs zeigten sich darin, daß nicht jeder Banachraum eine Schauderbasis hat (SCHAUDER will bei #203 wohl nicht sagen, daß alle Banachräume oder alle separablen Banachräume Vektorfelder sind, was bekanntlich falsch wäre).

Bei einer Schauderbasis wird nicht explizit über die lineare Unabhängigkeit der Basisvektoren gesprochen, vgl. #201. Wie Schauder bei der Bestimmung einer Schauderbasis für $C(a,b)$ bemerkt (vgl. [164] 49), kann dadurch, daß die Darstellungen bezüglich einer Schauderbasis als eindeutig gefordert sind, die Null nur trivial dargestellt werden (da sie sicher trivial dargestellt werden kann und es keine zwei Möglichkeiten geben darf). Daß daraus bereits die lineare Unabhängigkeit der Schauderbasis folgt, ist dann auch klar, denn es darf ja insbesondere auch keine nichttriviale *endliche* Darstellung der Null geben.

Bei der Hamelbasis implizierte die (ökonomische) Forderung der linearen Unabhängigkeit die Eindeutigkeit der Darstellung. Bei der Schauderbasis ist das nicht mehr der Fall, da die Aussage der linearen Unabhängigkeit sich auf echte Linearkombinationen bezieht, während die Darstellungen bezüglich einer Schauderbasis nicht notwendig solche echten Linearkombinationen sind. Insofern stellt die Forderung der Eindeutigkeit einen notwendig gewordenen Wechsel des Ausgangspunktes dar. Da Schauderbasen grundsätzlich abzählbar sind, ist nicht jede Hamelbasis (allerdings offenbar jede abzählbare Hamelbasis) eine Schauderbasis. Es gibt aber auch überabzählbar unendlichdimensionale Räume, die eine Schauderbasis besitzen (z.B. $C(a,b)$).

4.4.3.3 Abstrakter Dimensionsbegriff

1920 verzichtet Banach völlig auf eine Verwendung der Begriffe Dimension und Basis. Im abstrakten Dimensionsbegriff von 1932, der dem von Fréchet in [59] 146 ähnlich sieht, ist die Dimension nicht als Zahlenwert aus einer festgelegten Zahlenmenge erklärt, sondern ereignet sich nur in einer partiellen Ordnung, vgl. #68. Faßt man die Dimension als Abbildung aus der Kategorie der Vektorräume in eine Menge auf, so verzichtet Banach darauf, diese Menge zu spezifizieren; insbesondere ist es möglich, daß die Menge nicht vollständig geordnet ist. Üblicherweise ist diese Menge ja die Menge $\mathbb{N}$, vermehrt um transfinite Kardinalzahlen, und die Dimension kann effektiv angegeben werden. Banachs Vorgehensweise erlaubt eine Reihe von Aussagen über die Dimension, ohne sie effektiv zu kennen. Aus der ursprünglichen Definition (die nur für Räume gegeben wurde, in denen effektive Angaben leicht möglich sind) folgte die Eigenschaft $\dim_l E \leq \dim_l E_1$, wenn E isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von E_1 ist. Die Isomorphie eines Raums zu einem abgeschlossenen Unterraum eines anderen Raums läßt sich auch in solchen Fällen nachprüfen, wo eine effektive Angabe der Dimension nicht mehr leicht möglich ist. Daher nahm Banach sie zum neuen Ausgangspunkt; es ergibt sich die im Fall endlichdimensionaler Räume nicht bekannte Möglichkeit der Unvergleichbarkeit von Dimensionen. Man kann dies als einen koordinatenfreien Zugang zum Dimensionsbegriff bezeichnen. Da Banach in seinem Zugang allerdings keine Tradition des Begriffes Dimension hat, wäre noch die Frage, ob er seinen Begriff tatsächlich in einer Abstraktion vom ursprünglichen Begriff entwickelt hat; vgl. dazu #67.

4.5 Lineare Abbildungen und der Dualraum

Nicht erst Peano (#160), Pincherlé (#22) und Hamel wissen, daß eine lineare Abbildung auf einem Vektorraum schon ganz erklärt ist, wenn sie nur auf den Basisvektoren erklärt ist; dieser Gedanke liegt ja offenbar der Matrixschreibweise zugrunde. Insofern kann man lineare Abbildungen mit Koeffizienten identifizieren. Peano nähert sich schon der Betrachtung von Funktionalen, vgl. S.28 zum Paragraphen **82.** von [144].

Zaddach charakterisiert die Bedeutung des Dualitätsbegriffes so: *„durch Heranziehung des "dualen Vektorraums"* [kann die lineare Algebra] *begrifflich einwandfrei ohne Metrik vorgehen"* ([204] 9); *„Solange der Vektorraum V nicht mit metrischem Produkt ausgerüstet wird, sind Konstruktion und Einsatz seines Duals V^* von größter Wichtigkeit für die Handhabung der Linearen Algebra"* (ebd. 101). Diese Fähigkeit des Dualraums, metrische Betrachtungen gewissermaßen zu ersetzen, unterstreicht DIEUDONNÉ, wenn er das Fehlen des Dualraums als spürbarste Lücke bei GRASSMANN in seinem Streben nach intrinsischem Aufbau auffaßt ([43] 10, vgl. auch S.23 dieser Arbeit; ähnlich äußert sich auch [204] 70). So gibt Grassmann lt. SCHOLZ in der A_2 bereits eine duale Basis an ([169] 186). Undeutlich ist allerdings, ob die genannte Fähigkeit des Dualraums nur beim Grundkörper $\mathbb{R}$ vorliegt, der eben auch gleichzeitig Bildmenge einer metrischen Abbildung ist.

ZADDACH spricht Hermann WEYL zu, die eigenständige Bedeutung der linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$ erstmals betont zu haben (1918, also wohl in RZM; [204] 100). Nach [45] 74 war der Dualitätsbegriff in Vektorräumen bis 1900 unbekannt. Auch der erste unendlichdimensionale Raum, der einer genauen Betrachtung unterzogen wurde (L^2), führte nicht zu einer Präzisierung des Begriffes, da er ja wegen der Existenz des Skalarprodukts selbstdual ist ([44] 15). Erst als RIESZ 1910 die stetigen Linearformen der L^p–Räume angab, wurde klar, daß es nichtselbstduale Räume gibt (ebd.). Riesz zeigte in [158] 475 die Dualität (ohne den allgemeinen Begriff zu haben) von L^p, L^q bei $q = \frac{p}{p-1}$ ([13] 289; vgl. auch [10] 45 und 54ff).

Die Funktionalanalysis erlebte die Mächtigkeit des Instrumentes Dualität mit der Entdeckung des Satzes von Hahn–Banach. Anläßlich des Beweises definierte HAHN den ‚polaren Raum' (Dualraum, [77] 219; vgl. auch [13] 302 zur Geschichte des Satzes). Der Dualraum eines Banachraums wurde bald darauf selbst als Banachraum erkannt, so daß BANACH 1932 in [7] 239f (=[8] II S.211) bereits darauf eingehen kann.

Die Bezeichnung ‚Dualität' war in der Mathematik schon vorher in Gebrauch, man denke etwa an die Dualität der Mengenlehre oder der projektiven Geometrie ([18] 35dt. bzw. 36frz.), die laut DIEUDONNÉ ([43] 10) auf n Dimensionen ausgedehnt die Vektorraumdualität ergibt (damit wäre also ein Anstoß, den die projektive Geometrie der linearen Algebra gegeben hat, genannt). Man spricht auch von einer Unterraumdualität, wonach in $\mathbb{R}^n$ Räume der Dimensionen 1 und $n-1$ dual sind; entsprechend äußert sich KLEIN ([96] I S.175) zur A_2:

> Das Interesse wendet sich in erster Linie auf die linearen Gebilde, also Punkt, Gerade, Ebene ..., oder — da die Terminologie bei der Verallgemeinerung im R_n versagt — eine Reihe von Gebilden $S_0, S_1, \dots, S_n$, die man, entsprechend dem Gesetz der Dualität, auch vom anderen Ende beginnend durchlaufen kann.

4.6 Zusätzliche Struktur auf einem Vektorraum

4.6.1 Die affine Struktur

Der hier gewählte strukturelle Standpunkt läßt die affine Struktur (also die Zuordnung einer ebenfalls mit einer Verknüpfung versehenen Punktmenge zur Vektorenmenge; vgl. etwa die Systeme von WEYL, WIENER oder FRÉCHET) als zusätzliche Struktur erscheinen. Dabei hängen bei Weyl Vektoren und Punkte wesentlich einfacher zusammen als bei Wiener (bei dem sich die affine Struktur nicht sauber von der Vektorraumstruktur trennen läßt). Das liegt an den von Weyl gewählten Axiomen für die additive Gruppenstruktur, genauer an der Forderung der eindeutigen Definition der Differenz, die der Punktstruktur sehr entgegen kommt. Andererseits ist das natürlich ein redundantes Axiomensystem für eine Gruppe. Weyl ist daran gelegen, die Vektoren- und die Punktstruktur voneinander unabhängig zu gestalten (#176), d.h. er verzichtet zwar noch nicht auf die affine Struktur, stellt aber ihre Verzichtbarkeit bereits sicher. In der Terminologie von Abschnitt 3.3 würde man sagen, er sorgt für eine Trennung.

Das historische Verhältnis von Vektoren und Punkten ist wieder einmal ein anderes. Wo immer Vektorräume als Sprache für geometrische Probleme eingeführt wurden, sind wohl eher die Vektoren das Zusätzliche, nicht die der Geometrie zugrundeliegenden Punkte. Vektoren sind dann gerichtete Größen, die auf den Punkten operieren ([204] 20) bzw. Äquivalenzklassen darstellen. HAMILTON hält die Interpretation des Ausdrucks $A - B$ als eigenständigen Vektor AB für zentral und macht diesen Gedanken zum Ausgangspunkt der *Lectures* ([25] 87); vgl. auch A_1 S.139. Hier besteht formal eine große Ähnlichkeit zu den linearen Mannigfaltigkeiten von STEINITZ oder den Differenzenalgebren von DICKSON oder dem Übergang zu einer anderen Äquivalenzrelation, der in Anschnitt 4.2.2 beschrieben wird; auch an die Identifizierung der *volumi* gleicher *grandezza* bei #165 wird man erinnert.

In diesem Sinne wird die Zuordnung eines Vektors (eines algebraischen Gebildes) zu einem Punktepaar (einem geometrischen Gebilde) im Abschnitt 4.2.1.2 hervorgehoben. Die Stetigkeit dieser Zuordnung ist durch die Zuordnung von Metrik der Punkte und Norm der Vektoren gesichert. Es ist also der Abstand zweier Punkte die Länge ihres Verbindungsvektors, es entsprechen kleine Änderungen hier kleinen Änderungen dort. FRÉCHET illustriert also mit seiner Zuordnung von Metrik und Norm die Bedeutung der Stetigkeit der Correspondenz, vgl. #58.

WIENER ([196] 336) und FRÉCHET ([60] 30) zeigen am Beispiel des $\mathbb{R}^n$ (aufgefaßt als Punktmenge), wie man eine zugehörige Vektorenmenge bestimmt; diese fällt algebraisch nach Auszeichnung eines Ursprungs mit der Punktmenge zusammen. Das meint auch WEYL, wenn er in RZM S.22 bei seiner Beschreibung der affinen Geometrie linearer Gleichungssysteme feststellt, homogene lineare Gleichungssysteme entsprächen Vektoren, inhomogene Punkten. Auch auf Folgenräume wenden Wiener und Fréchet dieses Verfahren an. Diese algebraisch nicht recht von den Vektoren zu unterscheidende Instanz der Punktstruktur wirkt jedenfalls einigermaßen künstlich. Man hat den Eindruck, die beiden Strukturen seien nicht nur in dem Maße voneinander abhängig, das Weyl in #176 angibt, sondern fielen überhaupt zusammen. Das Gefühl der Künstlichkeit stellt sich dann um so mehr für die funktionalanalytischen Anwendungen des Vektorraumbegriffs ein. Wenn etwa Funktionen als Elemente eines Vektorraums aufgefaßt werden, so ist damit gemeint, daß man sie sich als Punkte eines Raums vorstellt. Das wird insbesondere bei der Auffassung solcher Räume als metrische (anstelle normierter) Räume deutlich.

Doch zu dieser *Synthese* von Punkt und Vektor (aufgrund welcher wir heute auch ganz auf die Angabe der Axiome für die affine Struktur verzichten) war es historisch ein langer Weg, an dessen Anfang wie gesagt die *Unterscheidung* der beiden Begriffe stand. Dieser Gedanke führt uns neben Hamilton zu GRASSMANN, bei dem *ein* Unterschied entwickelt wird. Die Grundidee bei Grassmann ist, ganz im Sinne des LEIBNIZschen Ansatzes, einen Kalkül auf den geometrischen Objekten selbst (anstelle etwa algebraischer Repräsentationen) zu haben. PEANO erwähnt diese Zielsetzung, die auch seine ist, zu Beginn seiner Einleitung gleich zweimal (#134, #135).

‚Auf den Objekten selbst rechnen' ist nicht gleichbedeutend mit ‚auf lokale Aussagen verzichten'. Da diese ja (wie schon in Abschnitt 4.2.1.3 erwähnt) von den basisabhängigen Aussagen verschieden sind, präzisiert vielmehr das Rechnen auf den Objekten selbst die Unterscheidung lokaler und basisabhängiger Aussagen. ZADDACH nennt unter den geometrischen Errungenschaften der A_1 die Darstellung der Verbindungsgerade zweier Punkte, in einem Raum beliebiger Dimension, ohne Koordinaten und ohne Parameter ([204] 72); weiter führt er an: *„es gelingt Grassmann, die Regelfläche 2.Ordnung (1–schal. Hyperboloid und hyperb. Paraboloid) algebraisch direkt durch drei Erzeugende darzustellen.* [...] *ein* [...] *sensationelles, weil koordinatenfreies Resultat* [...]" (ebd. 79). Insofern kann DIEUDONNÉ es schon so sehen, als sei es ein Rückschritt von A_1 nach A_2.

‚Auf den Objekten selbst rechnen' ist weiter auch nicht gleichbedeutend mit ‚auf Punkten rechnen'; hier kommen wir jetzt zu Grassmanns Beitrag zur Bestimmung des Verhältnisses von Punkt und Vektor. MÖBIUS antwortet APELT auf dessen Fragen zur A_1 am 26.10.1845 ([71] III,2 S.101): „[...] *beim Durchblättern des Buches* [bin ich] *auf Mehreres gestoßen, auf Begriffserweiterungen, Verallgemeinerungen, oder wie Sie es nennen wollen, von denen ich glaube, daß sie für die Mathematik selbst, insbesondere für die systematische Darstellung ihrer Elemente, recht einflußreich werden können. Dahin gehört namentlich die Addition und die Multiplikation von Linien,* *wenn man an letzteren nicht bloß ihre Längen sondern auch ihre Richtungen berücksichtigt"* (wegen Apelts Brief vgl. S.111 der vorliegenden Arbeit). Es wird deutlich: Der Fortschritt GRASSMANNs besteht im Rechnen auf ‚Linien' unter Berücksichtigung von Länge *und* Richtung. Auf diesen Gedanken war Möbius selbst lt. Grassmann wegen der *„Ungewohnheit, Länge und Richtung in einem Begriffe zusammenzufassen"* nicht gekommen (A_1 S.146 bzw. [71] I,1 S.172).

Der Wandel in der affinen Geometrie hin zum postulatorischen Zugang zu den Vektoren kommt in folgender Äußerung von ZADDACH klar zum Ausdruck ([204] 20):

> Die "Beleuchtung" hat sich in unserer Zeit derart verschoben, daß jetzt die einstigen Grundbegriffe *Punkt* und *Gerade* nicht einmal mehr den Anfang beim Errichten des geometrischen Gebäudes bilden. Es ist ökonomischer, und man gelangt zu wirksamerem Verständnis, wenn man stattdessen von *Vektoren* ausgeht, also von einer geeigneten
> #76 algebraischen Struktur, die "von vorneherein existiert" und durch ihre leichte Handhabung überzeugt.

Dabei bewirkt die Trennung der vektoriellen Struktur von der metrischen, daß der einzelne Vektor nicht mehr als Länge und Richtung besitzend gedacht wird. Aus diesem Grund trägt die metrikfreie Geometrie den Namen ‚affine Geometrie', selbst wenn keine eigene Punktstruktur mehr betrachtet wird (vgl. z.B. WEYL 1928).

4.6.2 Die metrische Struktur

Die abstrakte metrische Struktur ist mit der Vektorraumstruktur nicht vergleichbar im Sinne des Abschnitts 3.3.1, also keine zusätzliche Struktur.

Zu dem bisherigen Gebäude wird eine Abbildung $d : M_1 \to \mathbb{R}$ hinzugenommen. Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Ordnungsrelation, mit der die beiden inneren Verknüpfungen von $\mathbb{R}$ verträglich sind. Darin besteht ein Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und M_2, denn M_2 braucht nicht geordnet zu sein. Diese Unterscheidung stellt den Zusammenhang her zwischen beliebigen Skalarkörpern und metrikfreien Methoden; sie ist bei manchen älteren Autoren nicht deutlich, etwa PEANO (#166), PINCHERLÉ (#20) oder SCHIMMACK ([165] 36: „[es] *bedeute* $x\boldsymbol{a}$ *den Vektor von der Länge* $|x|a$ [a bezeichnet die Länge von $\boldsymbol{a}$]"). In diesen Fällen geht es allerdings auch um *„die"* Vektoren (vgl. Abschnitt 4.1.2).

4.6.2.1 Metrik und Norm

Zur zusätzlichen Struktur auf einem Vektorraum wird die Metrik, wenn sie in Gestalt der Normstruktur auftritt. Entsprechend den Bemerkungen zur Metrik wird man auch die Norm als Abbildung in den Körper der reellen Zahlen ansehen. Man kann nun jedoch nicht mehr unabhängig vom Skalarkörper M_2 vorgehen, denn die Forderung der Homogenität nötigt dazu, in M_2 wenigstens eine Bewertung zu haben. MONNA betont, daß archimedische und nicht archimedische Körper je andere Normen/Metriken für entsprechende Vektorräume ergeben ([123] 44f). In der Regel werden normierte Vektorräume $\mathbb{R}$–Vektorräume sein.

In der historischen Entwicklung wurde die bedeutsame Unterscheidung zwischen Metrik und Norm zunächst nicht klar herausgestellt. Schon lange vor der postulatorischen Charakterisierung der beiden Strukturen (bei der die Unterschiede augenfällig werden) hat man metrische Betrachtungen in endlichdimensionalen Räumen angestellt, indem man auf den durch Auswahl einer Basis zugleich eingeführten Koordinaten die euklidische Metrik erklärte. Eine solchermaßen erklärte Metrik ändert sich bei Basiswechsel, hat also die selben Probleme, denen DICKSON bei seiner 1923er Alternativdefinition entgegenwirkte, vgl. Abschnitt 4.2.1.3. Überhaupt verbirgt sich hinter der Sprechweise von der euklidischen *Metrik* ja bereits in Wahrheit eine Norm (aus der man insbesondere eine Metrik erhält); die Unterscheidung wird also nicht vorgenommen.

Aber auch nachdem Fréchet den allgemeinen Begriff des metrischen Raumes erarbeitet hatte, blieb der Unterschied undeutlich. BANACH isoliert in seiner Dissertation die metrische Struktur im Sinne von FRÉCHET nicht, vgl. #50. Vielmehr führt eine zweite Axiomengruppe zum Begriff des vollständigen normierten Raumes. Fréchet selbst korreliert zur Punktstruktur die metrische, zur Vektorstruktur die Normstruktur. Erst 1932 betrachtet BANACH die metrische Struktur im Anschluß an Fréchet separat von der des normierten Raumes. Aber selbst hier wird die Unterscheidung nicht besonders plastisch, da alle gegebenen Beispiele für metrische Räume auch Vektorräume sind.

SCHAUDER unterschlägt, daß der originär zur Vektorraumstruktur gehörende Begriff der der Norm und nicht der der Metrik ist, denn bei ihm ist die Norm stets durch eine Metrik gegeben. Daher ist Schauders Normdefinition von der BANACHschen verschieden. Denn man kann zwar jede Normabbildung auf eine Metrik zurückführen; dennoch sind es zwei verschiedene Dinge, ob man den Vektorraum fertig mit einer (beliebig ausgewählten) Norm versehen vorlegt und daraus die Metrik in der üblichen Weise (ohne weitere Auswahlmöglichkeiten) ermittelt oder ob man umgekehrt die Metrik (beliebig ausgewählt) fertig vorlegt und mithilfe der dann notwendigen zusätzlichen Forderung der Homogenität die Norm in der üblichen Weise ermittelt (ohne weitere Auswahlmöglichkeiten; eine solche Norm zu der jeweils vorliegenden Metrik muß überhaupt nicht vorhanden sein).

Übrigens ist der erste oberflächliche Eindruck falsch, Schauder fordere nur Homogenität für seine Norm: Positivdefinitheit und Dreiecksungleichung lassen sich aus den — bei ihm vorausgesetzten — Metrikeigenschaften ableiten. So ist der Ausdruck $\|x\| + \|y\|$ nach der Homogenität gleich $\|x\| + \| - y\|$; schreibt man diesen metrisch, so folgt aus Symmetrie und Dreiecksungleichung der Metrik mit Rückübersetzung die Dreiecksungleichung der Norm, denn Schauder fordert ja für die Metrik die Gleichheit $d(x, y) = d(x - y, 0)$ (#200). Positivdefinitheit ist trivial. Die Homogenität wird hier übrigens für $n = -1$ angewandt; es ist also dieselbe zusätzliche Konvention erforderlich, die auch an anderer Stelle bei Schauder unterstellt ist, vgl. Abschnitt 5.2.3.2.

4.6.2.2 Absehen von Metrik

Das Absehen von metrischen Betrachtungen spielt eine hervorragende Rolle in der Entwicklung der Geometrie. Lt. LORENZ bemühte sich bereits Platon um ein Absehen vom Maßstab. Bei LEIBNIZ (vgl. #1) wird ein vorrangiges Ziel solcher Bemühungen deutlich, wenn es um das Rechnen mit den Objekten selbst, unabhängig von einem von außen herangetragenen Maßstab, geht. Das Verdienst, diesen Gedanken in der Geometrie etabliert zu haben, kommt nach ZADDACH der projektiven Geometrie zu, die damit, obwohl ein stilleres Dasein führend, der nichteuklidischen an Bedeutung überlegen ist: „[Die nichteuklidische Geometrie bewahrte] *das Wesentliche der traditionellen Denkweise: es wurde ja nicht einmal die enge Bindung zwischen der Metrik und den sonstigen Aspekten von Ebene und Raum in Frage gestellt! Jedoch war diese Koppelung* [...] *bereits 1822 durch Poncelet* [...] *gelöst worden* [...]“ ([204] 17). POINCARÉ findet im Vergleich der nichteuklidischen Geometrie mit den GdG, daß LOBATCHEVSKY und RIEMANN das Parallelenpostulat aufgeben und dafür die metrischen Axiome wahren, während HILBERT meist umgekehrt verfährt ([151] 271). Insbesondere ist von Bedeutung, daß Hilbert die metrischen Axiome als gesonderte Gruppe ausspricht, die natürlich von allen anderen Gruppen logisch unabhängig ist. POINCARÉ gibt eine ‚fabelhafte‘ Instanz an, die diese Unabhängigkeit illustriert ([151] 262): „[un animal] *qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques*“. Das Motiv Hilberts, das ihn zur Hervorhebung der logischen Unabhängigkeit seiner einzelnen Axiomengruppen voneinander bewegt, ist offenbar die schon von der projektiven Geometrie angebahnte Präzisierung innerhalb der Geometrie, zur Herleitung welchen Resultats man welcher Begriffe bedarf (vgl. dazu Abschnitt 3.3.4).

ZADDACH formuliert die Errungenschaft, die die heutige Vektorraumtheorie zu einer metrikfreien Betrachtungsweise befähigt, so ([204] 9): *„Durch Heranziehung des dualen Vektorraums kann die lineare Algebra begrifflich einwandfrei ohne Metrik vorgehen“.* Es ist aber auch von der Diskussion um einen Nachteil des Verzichtes auf metrische Btrachtungsweisen zu berichten, der jedenfalls in den analytischen Anwendungen aufzutreten scheint. In Abschnitt 4.2.1.2 war von der Zuordnung von Tupeln aus Körperelementen zu den Elementen der Vektorenmenge die Rede. In welchem Maße die Tupel auch die Topologie der Elemente repräsentieren, hängt von der Stetigkeit dieser Correspondenz (vgl. #11: unendlich kleinen Änderungen des Wertsystems entsprechen unendlich kleine Änderungen der Elemente) ab. CANTOR verdeutlicht, daß ohne diese Stetigkeit die Invarianz der Dimension nicht garantiert werden kann; vgl. #13. Diese Erkenntnis wird von FRÉCHET aufgegriffen; vgl. #57. BROUWERs Ergebnis kann man in diesem Sinn als die stärkere Aussage auffassen, daß unter Voraussetzung der Stetigkeit die Dimension invariant ist. Fréchet zeigt auf, daß mit der Normstruktur in BANACHs und WIENERs Räumen erst ein Mittel gegeben ist, über so etwas wie ‚Änderungen‘ in diesen Räumen zu sprechen. In den genannten Räumen spielt nun die Zuordnung von Punkten und Vektoren die entscheidende Rolle; Fréchet thematisiert entsprechend die Stetigkeit dieser Zuordnung. Er führt Cantors Abbildung als Beispiel für die Unzulänglichkeit einer metrikfreien Definition des Vektorraumbegriffs an. Cantors Abbildung erhält die Nachbarschaft nicht; Fréchets vor der Metrik eingeführte Geometrie beinhaltet also noch keine Nachbarschaft (entsprechend trennt WEYL in RZM zunächst die rein affine Geometrie von der metrischen). Fréchets auf Grundlage von Cantors Abbildung definierte pathologische Geometrie ist vermutlich keine metrische Geometrie, insofern die Dreiecksungleichung verletzt ist; das würde auch Fréchets Betonung der Dreiecksungleichung erklären. Fréchets Argumentation beruht (ein Vierteljahrhundert nach HILBERT) darauf, daß die Begriffe *droite, plan* etc. intuitiv sehr wohl eine Nachbarschaft beinhalten; das ist das ‚Natürliche‘.

Fréchet hat deutlich erkannt, daß der abstrakte Begriff des affinen Vektorraums logisch unabhängig von Metrik ist, vgl. #59 und auch [60] 36. Wie Cantors Ergebnis lehrt, ist ein koordinatengestützter Vektorraumbegriff insofern abhängig von Metrik, als die Zahl der erforderlichen Koordinaten nicht notwendig festgelegt ist, wenn die entsprechende Zuordnung von Koordinaten zu Elementen nicht stetig ist. D.h. wenn die Koordinaten eindeutig sein sollen, muß die Zuordnung stetig sein.

Am stärksten von allen erwähnten Autoren der Funktionalanalysis macht sich SCHAUDER abhängig von den Begriffen Metrik, Norm und sogar Vollständigkeit. Eine Erklärung dafür ist sein Fokus auf den Begriff der Schauderbasis, bei dem ja im Gegensatz zur Hamelbasis Linearkombinationen aus unendlich vielen Vektoren betrachtet werden und der also nur in Räumen mit einem Konvergenzbegriff einen Sinn hat.

4.6.3 Skalarprodukt

GRAY stellt die Frage *„When did the concept of a vector space with additional structure, such as an inner product, first emerge?“* ([73] 68). Die ausdrückliche Formulierung des Begriffes eines inneren Produktes scheint auf GRASSMANN zurückzugehen[37]; genaueres vgl. #8. Dies ist STEINITZ 1913 bekannt, da er ein inneres Produkt in Bezug auf Grassmann einführt. Lt. ENDL findet es sich auch bei CLIFFORD 1878 ([55] 213). DICKSON bezeichnet irreführenderweise die Skalarmultiplikation als *scalar product* (#182). Das Skalarprodukt liegt bekanntlich VON NEUMANNs Begriff des Hilbertraums zugrunde; es steht insofern einer Verdeutlichung der Bedeutung des Dualitätsbegriffes entgegen.

Als euklidische Norm (es ist auch üblich, statt Norm von Metrik zu sprechen) wird im weiteren Sinne die Wurzel aus dem Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst bezeichnet; im engeren Sinne

[37] man beachte auch die Arbeit *Appolonius and inner Products* von Desmond Fearnley–Sander in Am. Math. Monthly **81** (1974), 990–993.

ist die Wurzel aus der Quadratsumme der Koordinaten gemeint. Ein Skalarprodukt eignet sich natürlich nur in $\mathbb{R}$– oder $\mathbb{C}$–Vektorräumen zur Einführung einer solchen Norm. Ein Skalarprodukt kann auch anders als durch die Wurzel aus der Quadratsumme der Koordinaten gegeben sein; in der Regel wird das in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum der Fall sein. GRASSMANN bezeichnet die euklidische Norm als *„numerischen Wert einer Grösse“* (A_2 **151**ff).

Bereits unter PEANOs Beispielen (vgl. Liste) sind normierte Vektorräume, deren Norm nicht durch ein Skalarprodukt gegeben ist. Genauer hat Peano ja gar keinen Normbegriff, weshalb man eigentlich sagen muß, daß die Liste Beispiele enthält, die heute üblicherweise nichteuklidische Normen tragen. So wird $\mathcal{L}(A, B)$ üblicherweise mit der Supremumsnorm versehen. Allerdings kann man wohl kaum behaupten, Peano hätte deshalb bereits an Vektorräume ohne Skalarprodukt gedacht — wo er den Begriff des Skalarprodukts gar nicht erwähnt (*das* allerdings mag man meinetwegen als Kennzeichen seines modernen Standpunktes ansprechen).

Kapitel 5

Instanzengeschichte der Vektorraumtheorie

5.1 Implizite Vektorraumtheorie

Ganz ähnlich wie Wussing bei der Gruppentheorie (vgl. Abschnitt 3.1.2.1) kann man natürlich bei der Vektorraumtheorie vorgehen. Es geht hier allerdings — im Blick auf das anderslautende Hauptthema — nicht so sehr um Frühgeschichtsforschung, sondern es werden einige wichtige Theorien, die die Entstehung der heutigen Vektorraumtheorie erforderlich gemacht haben, in ihren charakteristischen Beiträgen anhand des vorgestellten Materials und unter Angabe weiterführender Literatur historisch skizziert. Von besonderem Reiz sind dabei die Wandlungen in der Nomenklatur.

Solche vor Entwicklung der heutigen Vektorraumtheorie bereits betriebenen Theorien sind beispielsweise die Algebrentheorie und die Darstellungstheorie endlicher Gruppen, obwohl diese Theorien den Vektorraumbegriff vorauszusetzen scheinen, und die frühe Modultheorie, obwohl sich diese heute wie eine Verallgemeinerung der Vektorraumtheorie darstellt. Somit entspricht der tatsächliche historische Verlauf der Wissenschaft nicht der Reihenfolge, die mittlerweile als die immanent sachlich richtige angesehen wird. Die Auswahl der betrachteten Theorien kann vielleicht einen Anspruch auf Vorrangigkeit, sicher aber keinen auf Vollständigkeit geltend machen; außen vor blieb etwa die Darstellungstheorie. Wenigstens erwähnen möchte ich Grays Bemerkung in [74] 292, daß *„Frobenius developed the entire apparatus of current linear algebra for* $\mathbb{C}^n$ “; Dorier diskutiert dafür in [49] 179f ein Beispiel.

5.1.1 Mechanik

Besonders überraschend ist die Art, wie im historischen Verlauf der Zusammenhang von abstrakter Vektorraumtheorie und Kräfteparallelogramm aufgezeigt wird. Das Überraschende ist nicht, daß man Kräfte als gerichtete Größen auffaßt und die Parallele zu Hamiltons *vectors* entdeckt. Das Überraschende zeigt sich vielmehr in Zusammenhang mit dem Vorhaben, das Rudolf Schimmacks Arbeit *Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition*[38] zugrundeliegt. Man könnte aufgrund des Titels dieser Arbeit erwarten, hier bereits kurz nach Peano und Pincherlé von deutscher Seite etwas über die algebraische Struktur ‚der Vektoren‘ zu finden. Doch das Kuriosum äußert sich genau darin, daß die Bezeichnung nicht dem heute mit ihr verbundenen Sachverhalt zukommt; es geht nämlich gerade nicht um eine abstrakte algebraische Struktur. Als *„Satz von*

[38]Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physicalische Klasse (1903), 317–325; JFM **34** 621

der Vektoraddition" bezeichnete man vielmehr den Satz, *„der angibt, daß aus je zwei gegebenen Vektoren ihre sogenannte Summe nach der bekannten Parallelogrammregel zu bilden ist"* ([165] 7), dabei von Vektoren und Addition anstelle von physikalischen Kräften und ihrer Zusammensetzung zu einer Resultante sprechend, um den nichtinhaltlichen Charakter einer Axiomatisierung zu betonen, aus deren Axiomen sich der Additionssatz streng deduzieren läßt (im Sinne der bei #42 wiedergegebenen Möglichkeiten der Axiomatik). Dieses Ziel Schimmacks steht im Zeichen des größeren Ziels, den Additionssatz (der als physikalisches Gesetz zunächst empirisch ist) überhaupt zu begründen. Über diese Versuche, die auch HANKEL in §20 (S.73ff, insb. S.76f) diskutiert, gibt MOORE einen Überblick ([127] 273ff); wesentliche Beiträge zur Herausarbeitung der erforderlichen Axiome leistete Gaston DARBOUX[39]. Zu Schimmacks Zeiten stand nun besonders die Unabhängigkeit der Axiome zur Debatte, und es stellte sich heraus, daß die Unabhängigkeit des DARBOUXschen Axioms *„La direction de la résultante et sa grandeur sont des fonctions continues des deux forces"* von den übrigen Axiomen gleichbedeutend ist mit der Existenz einer unstetigen reellen Funktion f, die der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ genügt. HAMEL gibt in [80] ein solches f an. Originellerweise (das ist nun das Überraschende) leistet Hamel seinen Beitrag zur Lösung des konkret mechanischen Problems der Vektoraddition dadurch, daß er $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$–Vektorraum auffaßt (eine kaum als konkret zu bezeichnende Idee; vgl. S.31); er ist zugleich weit entfernt davon, ein Konzept von einem Vektorraum über einem beliebigen Körper zu haben, denn für ihn sind Vektoren eben ein mechanischer Begriff.

Die besagte Funktionalgleichung taucht an vielen Stellen der Mathematikgeschichte auf; Schimmack selbst gibt an ([165] 12), daß sie schon bei LEGENDRE[40] bei der Ableitung der Formel des Flächeninhalts eines Rechtecks aus gewissen einfachen Prämissen oder bei Ernst MACH in Überlegungen zum Hebelprinzip auftaucht und daß auch Darboux' Arbeit *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*[41], die dem Beweis dieses Satzes gewidmet ist, sie verwendet (vgl. dazu auch [149] 327). Aus dem Kreis der in unserem Zusammenhang zu nennenden Mathematiker regte sie PINCHERLÉ (der ihr in [150] 467–470 einige Bemerkungen widmet) und BANACH ([8] I S.47 bzw. Fund. Math. **1**) zu Arbeiten an. INGRAHAM kommt auf Hamels Arbeit zurück in *Solution of Certain Functional Equations relative to a General Linear Set*[42]. Er verallgemeinert zunächst die Funktionalgleichung (auch er verweist S.287 auf Legendre) und sodann mit Hilfe seiner in [92] entwickelten Methoden der *linear systems* Hamels Verfahren; es geht ihm nun nicht mehr um das konkret mechanische Problem. In Fortsetzung von Hamels überraschender Einsicht erkennt er die Bedeutung der Bimoduln für diese Funktionalgleichung.

5.1.2 Algebrentheorie

5.1.2.1 Quaternionen und Matrizenalgebren

Die Suche nach hyperkomplexen Zahlen bei und nach HAMILTON hatte zum Ziel, den Zahlbereich immer weiter zu vergrößern. Genauer gesagt versuchte Hamilton, der Arithmetik ‚andere', ‚neue' Zahlentypen zu erschließen. Dies belegt folgende Äußerung von Hamilton aus seiner Arbeit *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*[43]: *„In the* ***theory of single numbers****, the symbol* $\sqrt{(-1)}$ *is absurd, ... but in the* ***theory of couples****, the same symbol* $\sqrt{(-1)}$ *is significant, ... "*. Hamilton suchte entsprechend eine *theory of triplets*, stand damit aber nicht allein; Crowe stellt in [25] 34 eine Liste von solchen ‚Triplet–Suchern' auf. Der Gedanke, Hamilton habe zunächst versucht, die

[39] *Sur la composition des forces en statique*, in: Bull. Sci. Math. **9** (1875), 281–288

[40] *Éléments de Géométrie*, 4.Auflage Paris 1802, 279

[41] in: Math. Ann. **17**, hier S.55

[42] in: Transact. AMS **28** (1926), 287–300; JFM **52** 407

[43] in: Transactions of the Royal Irish Academy **17** (1837), 293–422, hier 417–418; zitiert nach CROWE ([25] 25), so daß nicht klar ist, ob die Hervorhebungen von Hamilton oder von ihm stammen.

Algebra zu *vollenden* (denn es mußte ja in einer als dreidimensional aufgefaßten Welt als unvollendet erscheinen, eine Arithmetik der Zahlen und der Zahlenpaare, nicht aber der Zahlentripel zu haben), solange er sich den Kopf über *triplets* zerbrach, ist so nicht belegbar, vgl. S.115.

Was übrigens die Notwendigkeit der Basis betrifft, auf die TAIT so eindrücklich in dem Text eingeht, der in Abschnitt 6.3.1.2 wiedergegeben ist, so erkennt man den Unterschied von Hamiltons System zum abstrakten Vektorraumbegriff: Weil Hamilton auf den Objekten selbst statt auf Repräsentationen in Koordinaten rechnen wollte, weil seine Quaternionen selbst nochmal etwas anderes sind als die für sie geschriebenen Tupel, gibt er zwar Anstöße in Richtung auf ein intrinsisches Denken, liefert aber doch nur ein Beispiel, eine Instanz des Vektorraumkonzepts.

Das gilt auch für die Matrizenalgebren in den Arbeiten von CAYLEY. Zu dessen Übergang zu n Dimensionen vgl. Abschnitt 6.3.2; hier möchte ich noch hinweisen auf einen Dissens darüber, ob seine Matrizentheorie tatsächlich schon eine Instanz der späteren Struktur ‚Algebra' darstellt oder nicht. NOVÝ behauptet ([136] 172 Anm.18): *„Cayley's theory of square matrices can be considered an example of linear algebra"*; er widerspricht damit [18] 140dt. bzw. 150frz., wonach *„Cayley [...] ne considère pas encore les matrices carrées comme formant une algèbre"*. Nový verweist auf einen tschechischen Artikel, der eine Widerlegung Bourbakis versuche.

5.1.2.2 Das algebraische Permanenzprinzip

Der Begriff der Algebra lag unter den ideengeschichtlichen Voraussetzungen der zweiten Hälfte des 19.Jahrhunderts eher im Feld der Betrachtung als der Begriff des Vektorraums. Die Einführung neuer Systeme wurde von Vorstellungen von der algebraischen Permanenz geleitet, die eher zur Algebra als zum Vektorraum führen.

Eine Formulierung des Permanenzprinzips von HANKEL steht bei #116. Eine Zusammenstellung darin erfaßter Beziehungen liefert [23] 67. Das Prinzip ist die Fortsetzung des *principle of the generality of algebra* des 18.Jahrhunderts (vgl. [99] 339f). Letzteres bedeutete den induktiven Vorgang, z.B. Eigenschaften der rationalen Zahlen auch für die reellen Zahlen als bewiesen anzunehmen. Die hinter beiden Prinzipien stehende Vorstellung der Permanenz ist die gleiche.

Das Permanenzprinzip vereint ontologische mit methodischen Motiven: Einerseits erschien der Gedanke illegitim, Eigenschaften von Objekten willkürlich, ohne Rücksicht auf die Realität, zu schaffen; andererseits schien die Permanenz der gewöhnlichen Rechenregeln als bequemste Situation für die Praxis (etwa bei linearen Gleichungen mit n Unbekannten, wo ja ohnehin keine ontologischen Schwierigkeiten auftreten).

Das Permanenzprinzip stünde der Einführung einer von der gewöhnlichen Arithmetik verschiedenen Algebra im Wege, wenn es rigoros angewandt würde. So sieht FREUDENTHAL ([65] 1698) die axiomatische Methode im Gegensatz zu diesem Prinzip. Andererseits nötigt das Prinzip zur Verdeutlichung derjenigen Eigenschaften der Arithmetik, die von neuen Systemen verletzt werden, und ermöglicht durch diese Präzisierung erst die Untersuchung der Zusammenhänge. CROWE formuliert ([25] 26): *„The majority of mathematicians appreciated the significance of these laws* $[\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{D}]$ *only after number systems had been developed which did not obey them"*. In diesem Sinne ist die Theorie hyperkomplexer Zahlensysteme kaum geeignet, die Vektorraumstruktur zu beleuchten, da letztere genau diejenigen Eigenschaften der gewöhnlichen Arithmetik umfaßt, die in ersterer allgemein gültig bleiben. Auch die Unterraumhierarchie der verschiedenen hyperkomplexen Zahlensysteme ist erst aus der nachträglichen Perspektive einer Vektorraumtheorie, insbesondere dank des Isomorphiebegriffes, voll erfassbar.

Zwei Entwicklungslinien sind uns wichtig: Deutschland und die angelsächsischen Länder. In Deutschland bringt GAUSS die Diskussion mit folgender Äußerung in Gang (*Werke*, Bd.II, S.178):

> Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand [allgemeine complexe Größen] künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen

> Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.

WEIERSTRASS schließt 1861 in einem Vortrag an die Äußerung von Gauß an. Er konzentriert sich auf die Beobachtung, daß kein hyperkomplexes Zahlensystem nullteilerfrei ist, womit er zeigt, daß es keinen Fundamentalsatz der Algebra gibt. Aus heutiger Sicht würde das Vorhandensein von Nullteilern so interpretiert, daß es sich nicht um einen Körper handelt. Weierstrass hingegen setzt das Phänomen „Nullteiler“ mit bekannten Ergebnissen wie dem Fundamentalsatz in Beziehung und gelangt zu dem Schluß, Gauß' Aussage über die Zulässigkeit allgemeiner komplexer Zahlen in eine Aussage der Überflüssigkeit dieser Zahlen verwandeln zu müssen.

DEDEKIND sagt dazu ([33] 22), seine Auffassung weiche

> in dem Hauptpunkte ab, daß ich den [allgemeinen komplexen] Größen [...] den Charakter der Neuheit gänzlich versage; es handelt sich in unserem Jahrhundert nicht mehr um ihre Zulassung, sie sind vielmehr schon lange und mit großem Erfolge in die allgemeine Arithmetik zugelassen; sie bilden, wie gesagt, keine neue oder — um buchstäblich genau mit Gauß zu reden — keine a n d e r e A r t von Größen, sondern sie sind geradezu identisch mit den überall in der Algebra eingebürgerten m e h r w e r t i g e n
> #77 Zahlen; es ist unmöglich, jene von diesen zu unterscheiden [...]

Dedekind versteht also unter der *„allgemeinen Arithmetik“* nicht mehr die *arithmetica universalis* (vgl. #112), so daß sich ihm auch nicht die Frage von deren Erweiterung stellt. Auf die verschiedenen Ansichten von Weierstrass und Dedekind geht auch HAWKINS ein unter [88] 158.

Auch HAMILTON war auf die Frage der Nullteiler aufmerksam geworden; er hatte im Zuge seiner berühmten Erfindung von $\mathbb{H}$ einen Moment lang die Absicht, $ij = 0$ zu setzen, opferte dann aber statt dessen die Kommutativität ([54] 156). Er erinnert sich daran in [81] 24, vgl. auch [153] 544. Ferner befaßt sich auch HANKEL mit der Nullteilerproblematik; vgl. #129 und die folgenden Stellen. Hankel verweist auf S.108 auf das obige Gaußzitat, in dem das Ergebnis aus #133 vorhergesagt sei. Interessant wäre, ob Hankel Weierstrass' Vortrag gehört hat; auch könnte Weierstrass bis zur Veröffentlichung seines Briefes im Jahr 1883 von Hankels Buch Notiz genommen haben. Hankel geht übrigens entsprechend der Allgemeinheit seines Produktbegriffs in dieser Frage noch weiter: §31 (S.110) besagt, daß sich die Existenz nullteilerfreier Systeme zeigen läßt, wenn man bei den Einheitenprodukten von der bisherigen Einschränkung (daß sie lineare Funktionen der Einheiten sein sollen; vgl. #129) abgeht. HANKEL verweist hier auf A_2 S.233; [71] I,2 bringt auf S.236 in **371.** den entsprechenden Satz (GRASSMANN betrachtet ja gerade eine andere Art von Einheitenprodukten, vgl. #8). Engel weist diesem Paragraphen im Original der A_2 allerdings ebenfalls die Seite 236 zu; auf der von Hankel gegebenen Seite 233 beginnt lediglich der Großabschnitt, in dem Eigenschaften des Produkts zusammengestellt sind.

In Großbritannien entsteht in den 20er Jahren des 19.Jahrhunderts die *british symbolical algebra*. So bezeichnet man die Schule, die durch die britischen Mathematiker BABBAGE, BOOLE, DE MORGAN, GREGORY, PEACOCK, STEWART und WHEWELL vertreten wird[44]. Diese machen sich, wie der Name schon sagt, über die mathematische Symbolsprache und besonders über Willkür bei der Erklärung mathematischer Objekte Gedanken. Die *symbolical algebra* wird nach SCHLOTE (vgl. [166] 2) verunglimpft als sinnlose Beschäftigung mit bedeutungslosen Zeichen; gegen diesen Vorwurf verteidigt sie sich mit dem Permanenzprinzip. Den entscheidenden Beitrag dazu leistet

[44]Literatur: [140], [153], [154], [155]; Dubbey, J. M., *Babbage, Peacock, and Modern Algebra*, in: HM **4** (1977), 295–302; Daub 1196; Pycior, Helena M., *The Role of Sir William Rowan Hamilton in the Development of British Modern Algebra*, Dissertation Cornell 1976; dies., *Early criticism of the symbolical approach to algebra*, in: HM **9** (1982) no.4, 392–412.

nach dem übereinstimmenden Urteil der Sekundärliteratur[45] Peacock; neben ihm sind Gregory ([136] 194) und de Morgan ([136] 196, 198) zu erwähnen.

HANKEL, der ja die Arbeiten der britischen Schule auf dem Festland bekannt macht, stellt das Permanenzprinzip ins Zentrum seiner Überlegungen und weist stets auf die Stellen hin, wo er davon abweicht. Bei ihm ergibt sich die koordinatenweise Definition der Addition als Folgerung, indem er gemäß dem Permanenzprinzip von einer solchen Addition verlangt, daß sie assoziativ, kommutativ und distributiv sein soll. Der entscheidende Gedanke ist jedoch bei #115 formuliert: daß die *„rein formale Mathematik“* (also das Rechnen mit hyperkomplexen Zahlensystemen) nicht als Verallgemeinerung der *„gewöhnlichen Arithmetik“* gedacht ist.

Benjamin PEIRCE bezieht sich eng auf die britische Schule, um aus deren symbolischer Algebra die Freiheit zu erlangen, zahlreiche neue Algebren zu konstruieren; er legt jedoch keinen Wert mehr auf das Permanenzprinzip, insofern er sogar die Division aufgibt (vgl. [153] 538).

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Geschichte der Algebrentheorie ausgeht von dem Gedanken der Erweiterung des Bereiches der Arithmetik, darin geleitet durch eine enge Beziehung zum algebraischen Permanenzprinzip, daß sie sich jedoch schrittweise von jenem Gedanken und vom Permanenzprinzip trennt. Der Beitrag zur allgemeinen Ideengeschichte besteht darin, der Handlung ‚Verallgemeinerung‘ eine neue Bedeutung zu geben. Hat diese Handlung ursprünglich die Bedeutung, den Bereich des Zugriffs weiter auszudehnen, sozusagen Beispiele anzuhäufen, so kommt ihr später durch die Arbeit am Permanenzprinzip mit der zugehörigen Verdeutlichung der ausfallenden Eigenschaften und durch die Aufgabe die Idee einer erweiterten Arithmetik die Bedeutung eines *Weglassens von Rahmenbedingungen* zu. Damit geht von der Algebrentheorie ein deutlicher Impuls für die Strukturmathematik aus.

5.1.2.3 Der Name Algebra

Auch der Gedanke, auf den Namen ‚Algebra‘ zu verfallen, enthält bereits die Grundidee der strukturmathematischen Abstraktion. Noch ganz der Idee zugehörig, den Bereich der Arithmetik zu erweitern, ist die Bezeichnung ‚allgemeine komplexe Zahlen‘, die nach DIEUDONNÉ ([44] 17) von FROBENIUS in ‚hyperkomplexe Systeme‘ abgeändert wurde. Bei PEIRCE (im Anschluß an die Engländer) taucht dann der geniale Gedanke auf, zwei Vorstellungen zu verbinden: daß die hyperkomplexen Zahlen eine Erweiterung der gewöhnlichen Algebra sind, und daß die herausgearbeiteten Grundgesetze, die den verschiedenen hyperkomplexen Zahlensystemen gemeinsam sind, mehrere mögliche Modelle haben. Peirce verdeutlicht mit seiner Entlehnung des Namens also geradezu die Schlußfolgerung, daß es mehrere Algebren (man könnte auch sagen Arithmetiken[46]) gibt — ähnlich wie sich die parallele Entwicklung in der Geometrie darstellt. MACLANE interpretiert den selben Gedanken von der anderen Seite her im Blick auf die einstige Bedeutung der Disziplinbezeichnung ‚Algebra‘, wenn er sagt ([110] 8):

> The very choice of the name *linear algebra* for a finite–dimensional hypercomplex system (over a field) is an indication of an attitude that algebra had to do just with *explicit* and concrete systems.

Zugleich enthält diese Idee mehrerer Algebren schon den Keim der Trennung der Algebren von ihrem Herkommen. Während LIEs Zugang zur Algebrentheorie noch zweckgerichtet ist ([140] 225), zeigt CARTAN *„that the theory of algebras can stand on its own merits as a subject worthy of study“* (ebd. 293). WEDDERBURN ist es dann vorbehalten, in [186] vom umständlichen *linear associative algebra* zum kurzen *algebra* überzugehen (nach [186] 78 geschieht dies *„at Professor Dickson's*

[45] vgl. [12] 763, [136] 190, [140] 253, [153] 538, [166] 1. [100] 178f schildert den Widerstand gegen eines seiner Bücher.

[46] der Begriff ‚Algebra‘ spielt auch in der Logik eine Rolle; so gibt es etwa die Boolesche Algebra oder SCHRÖDERs absolute Algebra (vgl. [200] 27).

suggestion“). Allerdings besteht in Amerika weiterhin die Bezeichnung *hypercomplex numbers* nebenher, und in Deutschland scheint sie — ausgerechnet auch von den Vertretern der modernen Algebra — sogar ausschließlich weiterverwendet zu werden; erst WEYLs Buch zur Quantenmechanik bricht mit dieser Tradition. GELFANDs Bezeichnung *Normierter Ring* für eine Banachalgebra deutet auf seine relativ größere Nähe zur Modernen Algebra (im Vergleich zu Amerika) hin.

5.1.3 Moderne Algebra

So bezeichnet man bekanntlich die frühe strukturelle Algebra von Emmy NOETHER, Emil ARTIN und deren Schülern; der Titel von VAN DER WAERDENs Lehrbuch [182] greift diese Bezeichnung auf, sie war aber vorher schon vorhanden, etwa bei [83] 25. Die Bezeichnung ‚Moderne Algebra‘ ist natürlich schwierig; schon BERKELEY benutzt sie (vgl. [155] 435), auch SALMON im Jahr 1885 (vgl. [141] 9r). Sie wird von englischsprachiger Sekundärliteratur auch gelegentlich auf die *british symbolical algebra* angewandt. MACLANE spricht sicherheitshalber in unserem Zusammenhang vom *Program of abstract algebra* ([110] 11). Das Adjektiv ‚modern‘ wird bei Neuauflagen solchermaßen betitelter Bücher irgendwann weggelassen; so fehlt es bei van der Waerden ab 1959 (vgl. [12] 773, [48] 322ℓ) und auch im 1958er Nachdruck von DICKSONs Buch *Modern algebraic Theories* von 1926. In der vorliegenden Arbeit kommt die Bezeichnung nur dem oben Umrissenen zu.

Lt. PURKERT setzen VAN DER WAERDEN und BOURBAKI den Beginn der modernen Algebra mit STEINITZ’ Arbeit von 1910 an ([152] II S.19). ZADDACH geht so weit, ihn in der A_1 zu sehen ([204] X). NOETHER und ARTIN selbst beziehen sich vor allem auf DEDEKIND.

5.1.3.1 Moduln

In der Modernen Algebra taucht der Begriff des Vektorraums vermutlich deshalb so spät auf, weil er so speziell ist; sie ist bemüht, statt Körpern nur Ringe zu betrachten. Ihre Haupthilfsmittel sind Ideale und NOETHERsche Kettenargumente; gegenüber den Vektorräumen stellt sie die Moduln in den Vordergrund. Der Name ‚Modul‘ scheint von DEDEKIND stammen, der ihn bereits in [30] verwendet (vgl. [152] II S.11); er spricht in [31] 194f von *Functionsmodul*. Bei #16 bezeichnet dieser Name ein System beliebiger reeller oder komplexer Zahlen, das abgeschlossen ist unter Subtraktion. Aus Dedekinds Verwendungen entsteht wohl die Tradition, mit ‚Modul‘ eine additive abelsche Gruppe zu bezeichnen, die man noch wesentlich später in Lehrbüchern findet, etwa in DICKSONs *Algebraic numbers* von 1923 (S.90), [182] I 2.Auflage (§14) oder Laszlo RÉDEIs *Algebra* von 1959 (S.60). Von der Modernen Algebra in der Nachfolge Dedekinds werden jedoch bald die beiden Aspekte herausgehoben, daß die Verknüpfung additiv geschrieben wird und daß die Menge unter der Subtraktion abgeschlossen ist. Die Frage der Abgeschlossenheit steht im Zusammenhang mit der Vorstellung der Moduln als Teilmengen größerer Mengen. Damit sind etwa die Positionen von STEINITZ in [174], NOETHER in [132], ARTIN in [4] und HAUPT in [84] skizziert, die im ersten Teil der Arbeit ausführlich dargestellt sind. Zu seiner heutigen Bedeutung, die er auch bei BOURBAKI hat, kommt der Name dann in Noethers Arbeit [133]. Das kann aber eigentlich nicht die erste Gelegenheit sein, da SCHAUDER diese Bedeutung offenbar schon in $\mathcal{B}_S$ 2. benutzt, also zwei Jahre früher.

5.1.3.2 Galoistheorie

Ein Betätigungsfeld der modernen Algebra, das ich noch etwas ausführlicher betrachten möchte, ist die Galoistheorie. Eine frühe Anregung für den Vektorraumbegriff aus dem Umfeld dieser Theorie scheint mir DEDEKINDs Auseinandersetzung mit Erweiterungskörpern zu sein; vgl. #15. Liest man seinen §164 von hinten, so ist Skalarmultiplikation für ihn eine eingeschränkte Körpermultiplikation (aus der Perspektive des Erweiterungskörpers). DEDEKIND hat vor diesem Hintergrund keine Veranlassung, die koordinatenweisen Verknüpfungen zu definieren: Da er sich ständig in einem Körper aufhält, ist klar, wie sie aussehen müssen. Der Körper entspricht sozusagen dem Permanenzprinzip.

Im Zentrum der Galoistheorie steht allerdings ein ideengeschichtliches Phänomen, das für die Herausbildung der Strukturmathematik im ganzen von Bedeutung ist. VUILLEMIN hat lt. VOLKERT ([181] 267) die Behauptung aufgestellt, die Lösbarkeitstheorie algebraischer Gleichungen sei ein Beispiel, wo nur die Strukturanalyse zum Ziel führt. Volkert bemerkt dazu, daß das nur zutrifft, wenn man an der Lösbarkeit, nicht an der Lösung einer bestimmten Gleichung interessiert ist. Die entsprechende Verschiebung der Interessen in der Galoistheorie schildert [83] 25. Die Frage ist also, zu welchem Ziel die neue Methode führt. Volkert beschreibt den historischen Wandel dieses Ziels ([181] 65 Anm.66):

> In [der für das 19.Jahrhundert typischen *Frage nach der Existenz* bestimmter Objekte] drückt sich ein grundlegender Wandel der Auffassung von Mathematik aus, den man als den Übergang von der *algorithmischen* zur *diskursiven* mathematischen Vernunft kennzeichnen kann.

MONNA unterscheidet starke und schwache Existenz ([122] 5f, [124] 34), d.h. man kann ein Objekt angeben, oder man weiß nur, daß es existiert.

Von der Modernen Algebra wird dann ein direkterer Zusammenhang zwischen Galoistheorie und Vektorraumtheorie hergestellt. Lt. [73] 67 ist ARTINs Galoistheorie nur mit dem Vektorraumbegriff möglich; bei [74] 293 heißt es: *„Artin revealed the new insights* [...] *the axiomatic style could bring to bear on Galois theory"*. In [35] III 20 wird eine Arbeit von NOETHER angekündigt, die dann unter dem Titel *Nichtkommutative Algebra*[47] erscheint. Diese Arbeit verbindet Galoistheorie und hyperkomplexe Zahlen und verdeutlicht auch die Verbindung zur Darstellungstheorie.

5.1.4 Funktionalanalysis

Die Hauptexponenten des Fortschritts, den die Funktionalanalysis für die Vektorraumtheorie brachte, sind BANACH und WIENER. Nach BERNKOPF ([10] 67) ist eine Motivation bei beiden schwer anzugeben: Da Wiener sich vorher hauptsächlich mit Logik befaßt hat, könnte man vermuten, es sei ihm vordringlich um Axiomensysteme gegangen; Banach beziehe sich zwar mit dem Titel von [6] auf die Theorie der Integralgleichungen, die *veröffentlichte* Fassung von [6] enthalte aber nichts darüber. Es ist insofern bedenklich, daß wegen der Motivation der Funktionalanalysis immer wieder auf die Theorie der Integralgleichungen verwiesen wird.

Interessant ist auch, wie sich eigentlich der Kontakt zwischen der Funktionalanalysis und der modernen Algebra gestaltete. Außer daß SCHAUDER etwas unvermittelt den Namen ‚Modul' benutzt — auf die Kuriosität dieser Sachlage bin ich im Abschnitt über die moderne Algebra eingegangen —, scheint es keinerlei Kontakt zu geben, bevor GELFAND 1941 die getrennten Entwicklungen im Begriff der Banachalgebra unifiziert. Wieso Birkhoff meint, daß *„the abstract approach adopted by v.d.Waerden for algebra soon became fashionable in functional analysis"* ([12] 773), kann ich nicht ganz verstehen: Der *„abstract approach"* war doch in der Funktionalanalysis schon 10 Jahre vor VAN DER WAERDENs Buch *„fashionable"*?

5.1.4.1 Gleichungssysteme in unendlich vielen Unbekannten

GRAY nennt in [73] 66 einige Arbeiten aus den letzten Jahrzehnten des 19.Jahrhunderts, die sich mit linearen Gleichungssysteme in unendlich vielen Unbekannten befassen. Lt. [20] 335 beginnt HILBERT 1904 mit der Untersuchung dieser Systeme. Es folgen Arbeiten von TOEPLITZ ([180])

[47] in: Math. Zeitschrift **37** (1933), 514–541

und Erhard SCHMIDT (*Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, in: Rend. Circ. Mat. Palermo **25** (1908), 53–77). Hilbert steckte den Rahmen der Untersuchung ab mit seiner Note *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen*, in: Rend. Circ. Mat. Palermo (1) **27** (1909), 59–74, oder in [91] 56–72. Die *Rendiconti* scheinen damals das ‚Hausblatt' gewesen zu sein. RIESZ verallgemeinerte Schmidts Resultate auf L^p–Räume (Math. Ann. **69** (1910); [13] 288) und faßte den Stand der Theorie zusammen in seinem Buch *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier–Villars/Paris Sammlung Borel 1913 bzw. [160] F4 829–1016; dessen I. Kapitel ist ein Abriß der bisherigen Geschichte der Theorie ([104] 125). Um 1919 war sie bereits weit verbreitet; so schrieb KLEIN etwa in diesem Jahr: *„Es ist jetzt fast bescheiden, sich mit einer endlichen Anzahl von Variablen zu begnügen"* ([96] I, S.168). Eine weitere Arbeit ist Eduard Hellys *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, in: Monatsh. Math. Phys. **31** (1921), 60–91 (JFM **48** 1250). Die erste komplette Geschichte der Theorie ist [89]. An Sekundärliteratur ist die Arbeit *A history of infinite Matrices*[48] von Michael Bernkopf zu nennen.

5.1.4.2 Räume von Abbildungen[49]

Den entscheidenden Durchbruch erlebte die Vektorraumtheorie mit der Untersuchung der Funktionen- und Funktionalräume. Lt. DIEUDONNÉ denkt schon GRASSMANN an Funktionenräume ([43] 9; vgl. #110). Auch studiert er lt. SCHOLZ Abbildungen zwischen Vektorräumen ([169] 179) und hat schon eine moderne Vorstellung von der Ableitung als lineare Abbildung (ebd. 181). Auch RIEMANN scheint bereits eine Vorstellung von einem Funktionenraum zu haben; DIEUDONNÉ weist in [44] 20 auf folgende Stelle in Riemanns *Gesammelten Werken*[50] hin:

> Die Gesammtheit der Funktionen λ [das sind unbestimmte stetige oder doch nur in einzelnen Punkten unstetige, einem gewissen Integral (eine Art partielle Quadratintegrierbarkeit) genügende Funktionen] bildet ein zusammenhängendes in sich abgeschlossenes Gebiet, indem [✓] jede dieser Funktionen stetig in jede andere übergehen kann [...]

PINCHERLÉ äußert sich im Vorwort von [150] zu Funktionenräumen (S.III) und zur Ableitung als lineare Abbildung (S.IV); schon in [149] 333 stellt er implizit vermutlich fest, daß die Operationen auf einem Funktionenraum ihrerseits einen Vektorraum bilden.

Wesentlichen Fortschritt bringt die Einbeziehung topologischer Betrachtungen in die Funktionenräume. [52] 266f:

> La nature topologique des problèmes a permis d'introduire un point de vue géométrique dans les ensembles de fonctions, *via* une distance ou un produit scalaire. Ainsi retrouve–t–on dans le cadre de la dimension infinie, les mêmes débats qu'en géométrie entre méthodes [S.267] synthétique et analytique.

DORIER macht also deutlich, daß hier durch den Gedanken der Raumanschauung (in Form von Topologie) geradezu die Geometriegeschichte parallel nachgezeichnet wird. Diese Parallelen könnten dann der Anlaß gewesen sein, nach der zugrundeliegenden Gemeinsamkeit zu suchen.

Wie schon in Abschnitt 4.5 dargestellt, beginnt RIESZ 1910 in [158] mit der Untersuchung der L^p–Räume. Seine Äußerung auf S.452 ist für uns sehr interessant: „[Diese] *Untersuchung* [liefert] *für eine axiomatische Untersuchung der Funktionenräume brauchbares Material"*.

[48] in: Arch. Hist. Ex. Sci. **4** (1967/68), 308–358; Daub 1070

[49] wegen der Geschichte der Funktionen*körper* vgl. [152] II S.11

[50] hg. von Heinrich Weber und Richard Dedekind bei Teubner/Leipzig 1876, S.30, bzw. neu hg. von Raghavan Narasimhan bei Springer 1990, S.62. Die Stelle stammt aus Riemanns Dissertation.

Lt. [10] 42 ist es Fréchet, der erstmals von ‚Raum' im Zusammenhang eines Folgenraumes spricht; ich halte es jedoch für möglich, daß auch Pincherlé das schon getan hat, vgl. #23. Jedenfalls spricht dieser von Funktionenraum, etwa in [149] 330 oder in seinem Enzyklopädieartikel (Bd.II S.777). In den Arbeiten von Riesz ist diese Sprechweise dann allgegenwärtig. Interessant ist auch die Herkunft des Namens ‚Funktional'. Die lt. [13] 265 bei Pincherlé zu findenden Wortbildungen *„spazio funzionale"*, *„operazioni funzionali"* und *„calcolo funzionale"* erklären sich daraus, daß ein Adjektiv zum Hauptwort ‚Funktion' verwendet wird; erst später ist dieses Adjektiv seinerseits zum Hauptwort geworden.

5.2 Die Instanzen der Skalarmenge und ihre Wirkung auf die Theorie

5.2.1 Die originäre Skalarmenge $\mathbb{R}$

Die Skalarmenge M_2 ist ein Körper unter ihren beiden inneren Verknüpfungen; weitere Eigenschaften braucht sie nicht aufzuweisen. Die historische Entwicklung ist aber der nachträglichen systematischen gerade entgegengesetzt, denn zunächst wurde nur der Körper $\mathbb{R}$ betrachtet, der wesentlich mehr Eigenschaften hat. Also bestand der historische Prozeß darin, diese zusätzlichen Eigenschaften nach und nach auszusondern. So ist $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper. Diese Ordnung ist von Bedeutung im Zusammenhang mit der kanonischen Skalarmultiplikation und bei metrischen Betrachtungen, insbesondere bei der Bildung eines Grenzwertbegriffs. Der Begriff der Ordnung kommt in Abschnitt 5.2.3.2 zur Sprache.

Ferner ist $\mathbb{R}$ stetig (d.h. abgeschlossen unter Grenzwertbildung, wobei der Grenzwertbegriff durch den gewöhnlichen Absolutbetrag gegeben ist). So bemerkt man bei Fréchet, daß er an $\mathbb{R}$–Vektorräume denkt, wenn er bei #60 sagt, die Stetigkeit auf der einzelnen Geraden sei nicht logisch unabhängig von der Konzeption des abstrakten affinen Raumes. Entsprechend kann Freudenthal bei #81 sagen, daß zwischen einer Geometrie ohne Stetigkeitsaxiome und einem allgemeinen, nicht notwendig mit der Topologie von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ versehenen Körper ein Zusammenhang besteht. Die Suche nach der von Analysis und Arithmetik unabhängigen Grundlegung veranlaßt Grassmann, in der A_1 auf die Voraussetzung einer *„Zahlgrösse"* und damit auf deren Stetigkeit zu verzichten. In der A_2 setzt er dann aber die Stetigkeit der Zahlgrösse voraus; vgl. #93. Das scheint mir dem Standpunkt von Zaddach zu entsprechen, der da sagt ([204] 19): *„Warum soll man die Axiomatik z.B. mit Stetigkeitsproblemen beladen, wenn doch die reellen Zahlen 'sowieso' zur Verfügung stehen?"*. So verzichtet auch Weyl auf eine Ausnutzung der Ableitbarkeit eines Teils seiner Axiome mit einem Stetigkeitsargument (vgl. #175) — und die spätere Entwicklung gibt ihm recht, denn sein System taugt auch für beliebige Körper, vgl. Abschnitt 5.2.7. Ähnlich geht Pincherlé vor, vgl. #21.

5.2.2 $\mathbb{C}$

Der erste Körper, der neben $\mathbb{R}$ als Skalarkörper verwandt wurde, ist der Körper der komplexen Zahlen. Dieser wurde im 19.Jahrhundert jedoch weniger als ein anderer Körper neben dem Körper $\mathbb{R}$ gesehen, sondern als eine Erweiterung des Zahlbereiches (vgl. Abschnitt 5.1.2), so daß die Zulassung komplexer Skalare zusammenhing mit der Akzeptanz dieser Erweiterung (vgl. dazu Anschnitt 7.3). Um die Jahrhundertwende sah das anders aus; hier kann man bereits von einer bewußten Verwendung von $\mathbb{C}$ *neben* $\mathbb{R}$ sprechen und auch wahrnehmen, wie von dieser Variationsmöglichkeit ein Impuls zu weiterer Verallgemeinerung ausgeht, vgl. etwa Dicksons primäres Ziel bei #24.

Früh wurden komplexe Skalare verwendet von Grassmann (lt. [23] 71 im Jahre 1855; gemeint ist vermutlich *Sur les differents genres de multiplication*, in: Crelle **49** (1855), 123–141), Hankel und CLIFFORD (der lt. [140] 253 $\mathbb{H}$ als $\mathbb{C}$–Algebra auffaßt). Zu PEIRCEs Verwendung von $\mathbb{C}$ stellt SCHLOTE fest ([166] 9): *„Der Koeffizientenbereich wird nicht explizit festgelegt, vieles scheint dafür zu sprechen, daß hierfür die reellen Zahlen gewählt wurden. Jedoch machte P e i r c e gerade in diesem Zusammenhang* [LAA S.105] *eine Anmerkung, in der er H a m i l t o n für den Ausschluß der komplexen Zahlen und die alleinige Verwendung reeller Zahlen als Koeffizienten tadelte“*). Helena PYCIOR schildert in [153] 545 das Mißfallen von Peirces Sohn Charles Sanders Peirce an dieser Ansicht seines Vaters; die genaue Stellungnahme lautet *„If Hamilton had done as he* [B. Peirce] *would have had him, the calculus of quaternions could not have come into being, because division would not generally have had a determinate result“* (zitiert nach einer Note von Raymond Clare Archibald im Am. Math. Monthly **34** (1927), 525–527, hier 526). Während PEANO nur reelle Zahlen zuläßt, ist bei PINCHERLÉ auch $\mathbb{C}$ möglich (#17). Die Funktionalanalysis beschränkt sich zunächst auf $\mathbb{R}$–Vektorräume; vgl. Abschnitt 5.2.4.

5.2.3 Aufbau von M_2 auf $\mathbb{Z}$

5.2.3.1 Kanonische Skalarmultiplikation

Eine Reihe von Autoren bauen ihre Multiplikation von Vektoren mit Körperelementen auf der kanonischen Multiplikation[51] mit Elementen aus $\mathbb{N}$ auf; WEDDERBURN, der beliebige Körper im Blick hat, stellt die Bedeutung der Charakteristik des Körpers für die Möglichkeit eines solchen Verfahrens heraus (sein Kriterium verknüpft diese Charakteristik mit der Unitarität zu einer ‚Charakteristik der Algebra‘, vgl. #55). Dabei kann ‚Aufbau‘ sowohl im Sinne von ‚Anregung zur Analogiebildung‘ gemeint sein als auch im Sinne von ‚Deduktion‘. Ersteres gilt für PEANO (vgl. #145): er läßt sich lediglich von den für $\mathbb{N}$ nachweisbaren Eigenschaften leiten bei der Aufstellung von Postulaten an eine auf $\mathbb{R}$ erklärte Skalarmultiplikation. PINCHERLÉ übernimmt dieses Verfahren fast unverändert (#19). Für SCHAUDER trifft zweiteres zu (er spricht übrigens gar nicht aus, daß er mit n eine natürliche Zahl meint, aber es kann auch nicht anders sein). Er gelangt durch die zusätzlichen Forderungen $\mathcal{SCH}$ II und $\mathcal{SCH}$ III tatsächlich (wenn auch nicht finit) zu einer Erklärung für beliebige reelle Skalare — ist also nicht mehr auf die postulatorische Einführung der Skalarmultiplikation für solche Skalare angewiesen (vgl. #199).

5.2.3.2 Minuszeichenkonvention

In der Definition der kanonischen Skalarmultiplikation wird die Multiplikation eines Vektors mit einem negativen Skalar als Multiplikation des Inversen dieses Vektors mit der Gegenzahl dieses Skalars erklärt. Das unterstelle ich bei SCHAUDER in meinem Beweis zu $\mathcal{B}_S$ 1. in der Zerlegung der reellen Zahl c in die Summe $z + \alpha$ mit $z \in \mathbb{Z}$ (also *nicht* notwendig $\in \mathbb{N}$) und $\alpha \in [0, 1[$. Schauder selbst versäumt, diese Konvention ausdrücklich zu geben, aber man kann wohl annehmen, daß er es so meint, da er später reelle (und nicht bloß positive reelle) Zahlen betrachtet; vgl. dazu auch Abschnitt 4.6.2.1. WIENER hingegen spricht nur von positiven Skalaren; dem Ausdruck $-n \odot \xi$ gibt er keine Bedeutung. Man kann bei ihm auf dem eben beschriebenen Wege erklären, was mit $-n \odot \xi$ gemeint sein soll, wenn man vorher in der implizit vorhandenen Gruppenstruktur eine Bedeutung des Zeichens $-\xi$ erklärt. PEANO stellt fest, daß der Vektor $(-1)a$ invers zu a ist (d.h. ihre Summe ergibt 0; die 0 war dabei nicht als Neutrales eingeführt — auch das stellt er fest —, sondern auf die Skalarmultiplikation bezogen gefordert). Betreffend des Inversen geht DICKSON genauso vor, vgl. die ergänzenden Bemerkungen zu #188 auf S.175. HAHNs Anordnung der Axiome ist unmotivierter, insofern er bereits die Konvention $(-1)a = -a$ nennt, bevor er die additive Struktur erwähnt hat.

[51] im Abschnitt 5.2.7 wird darauf näher eingegangen; vgl. insbesondere Anm.54.

Nicht in jedem Skalarkörper hat die Verwendung der Begriffe ‚positiv' und ‚negativ' einen Sinn. Zunächst bezeichnet für einen Vektor x der Ausdruck $-x$ das Inverse von x in der Gruppenstruktur der Vektorenmenge. Aus $\mathcal{D}_r$ folgt das Bestehen der Rechenregel $-(ax) = a(-x)$, während $-a \cdot x = -(ax)$ aus $\mathcal{D}_l$ folgt, wenn im Körper der Ausdruck $-a$ entsprechend das Inverse von a bezeichnet. Aber nicht alle Körper verhalten sich wie die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$, die eine Ordnung trägt, bezüglich der sie derart in zwei Klassen zerfällt, daß die Inversen der ersten Klasse stets aus der zweiten entnommen sind und umgekehrt — was mit der Tatsache zusammenhängt, daß in dieser Gruppe die Ordnung mit der Addition verträglich ist. Denn die Aussage „eine Gruppe G trägt eine mit der Addition + verträgliche Ordnung $<$" besagt gerade: $\forall x, y \in G : x < y \Rightarrow x + z < y + z \; \forall z \in G$. Setzt man dann speziell $x = 0, z = -y$, so hat man $0 < y \Rightarrow -y < 0$, also die gesuchte Klasseneinteilung. Im allgemeinen Fall muß man also anstelle der Gegenzahl eines Skalars vom Inversen des Skalars sprechen. Die Bedeutung der ‚Klasseneinteilung' kann dann dem Minuszeichen nicht mehr zukommen. Damit hängt eng zusammen, daß das Minuszeichen noch eine weiterreichende Bedeutung hat, solange ein Vektor als ein Gebilde mit Länge und Richtung aufgefaßt wird. Die Lücke bei WIENER besteht darin, daß er seinen Raum nicht aus Ursprungsgeraden, sondern aus ‚Ursprungs–Halbgeraden' aufbaut (er bemüht sich geradezu um ‚topologische Nichtredundanz'). Man sieht nicht, wie man eigentlich auf die Seite ‚jenseits des Ursprungs' kommen soll. Vielleicht ist das die Bedeutung der *restricted vector systems*?

5.2.4 Beliebige Körper

Die Heranziehung beliebiger, insbesondere endlicher[52] Körper beschert neue Vertreter, denn man kann etwa einen endlichen Körper, interpretiert als additive abelsche Gruppe, mit keinem Oberkörper von $\mathbb{Z}$ als Vektorraum auffassen, da jedes Element dieser Gruppe Torsionselement bezüglich der kanonischen $\mathbb{Z}$–Modul–Struktur ist und die Skalarmultiplikation eines solchen Oberkörpers auf $\mathbb{Z}$ eingeschränkt gerade mit dieser kanonischen Struktur übereinstimmt (vgl. Abschnitt 5.2.7); wohl aber bildet eine solche Gruppe einen Vektorraum mit sich selbst als Skalarkörper.

Wenn bei DEDEKIND der Name ‚endlicher Körper' gebraucht wird (etwa [33] 25; CANTOR [22] 243: *„Mannigfaltigkeiten, welche Herr Dedekind endliche Körper nennt"*), so ist das anders gemeint, als wir es heute verstehen. Das wird schon bei Cantor deutlich, wenn er sagt, diese endlichen Körper seien Mannigfaltigkeiten von abzählbar unendlicher Mächtigkeit. Klarheit verschafft [30] 425f: Endliche Körper sind endlichdimensionale $\mathbb{Q}$–Vektorräume (Oberkörper von $\mathbb{Q}$); sie sind Teilmengen des ‚größten Körpers', des ‚Körpers aller Zahlen', während $\mathbb{Q}$ der ‚kleinste Körper' ist. In ähnlicher Weise heißen etwa bei PEIRCE die endlichdimensionalen Algebren *„finite algebras"* (LAA 40.).

Die Verwendung beliebiger Körper als Skalarmengen ging von der Algebrentheorie aus. SCHLOTE meint, *„Peirces relativ abstrakter Standpunkt kommt doch einer Verallgemeinerung auf Algebren über beliebigen Körpern sehr entgegen"* ([166] 12). ARTIN bescheinigt der amerikanischen Algebrentheorie ebenfalls, daß sie früh einen sehr abstrakten Standpunkt bezog (*„Peirce [...] leads to the modern postulational approach"*) — während die europäische gleichzeitig auf dem Gebiet der Struktursätze einen Vorsprung hatte. In Europa habe man jedoch nur Algebren über $\mathbb{C}$ betrachtet, so daß viele Methoden an die algebraische Abgeschlossenheit des Grundkörpers gebunden waren; erst WEDDERBURN habe beide Entwicklungen zusammenführen können ([5] 65f).

Erste Verwendungen beliebiger Körper finden sich bei DICKSON (#24, #28); in der Nachfolge stehen außer Dickson selbst (mit seiner Arbeit von 1923, in der er implizit behauptet, bereits HAMILTON habe beliebige Körper betrachtet, vgl. #191) noch WEDDERBURN (mit seinen Arbeiten von 1907 — vgl. [140] 319; auf diese Arbeit bezieht sich Artin oben — und 1924) und SCORZA.

[52] Das Phänomen der endlichen Körper gehört in gewisser Weise in das Feld der Relationen, denn die Gleichheit auf einem endlichen Körper ist ja eine Restklassenabbildung auf ‚herkömmlichen' Zahlen.

Es werden von dieser Schule bald auch endliche Körper in die Betrachtung mit einbezogen: Scorza erwähnt sie 1921 explizit, ebenso Dickson 1923 (vgl. [39] 23 Anm.). Schon 1905 verwendet Dickson in einer Unabhängigkeitsuntersuchung Galoisfelder (vgl. #36).

Weitere frühe Bekenntnisse zum beliebigen Körper findet man bei TOEPLITZ 1909 ([180] 96), STEINITZ 1913 ([174] 140) und WEYL 1928 ([191] 15ff). Es fällt auf, daß kein Funktionalanalytiker aus der Generation BANACHs genannt ist. Wieso diese sich (außer WIENER in [197]) auf $\mathbb{R}$–Vektorräume konzentrierten, wird in Banachs Bemerkung unter [7] 231 (= [8] II S.204f) zu Chap.II, §1 deutlich:

> On peut [...] traiter les espaces vectoriels avec une multiplication des éléments [...] aussi par les nombres complexes [...]. Ces espaces constituent le point de départ de la théorie des opérations linéaires complexes et d'une classe, encore plus vaste, des opérations analytiques, qui presentent une généralisation des fonctions analytiques ordinaires [...].

Es findet also keine Unterscheidung zwischen linearen Abbildungen in den Grundkörper einerseits und Funktionalen (also linearen Abbildungen in den Körper der reellen respektive komplexen Zahlen) andererseits statt: Die Funktionalanalysis hat gerade die Verallgemeinerung des Konzepts Funktion im Konzept Funktional im Sinn.

5.2.5 Andere Mengen

Der unter Abschnitt 5.2.1 erwähnte Aussonderungsprozeß machte nicht halt, so daß schließlich auch Skalarmengen in den Blick kamen, die keine Körper sind; DICKSON diskutiert das in [37] 347f. Interessant in dieser Arbeit ist auch die Idee von Tupeln, bei denen die Koeffizienten der Einheiten untereinander *not the same range* haben (das sind natürlich keine Vektorräume; vgl. #30).

1921 beginnt Emmy NOETHER mit der Betrachtung von Moduln über Ringen. Speziell der Ring $\mathbb{Z}$ wurde schon viel früher als Skalarmenge verwendet. Dies tut etwa DICKSON unter #29. HANKEL berichtet auf S.103 über die Theorie der complexen ganzen Zahlen.

Wie in Anmerkung 54 in Erinnerung gerufen, stellt jede abelsche Gruppe einen $\mathbb{Z}$–Modul dar. KRULLS *verallgemeinerte abelsche Gruppen* von 1925 sind insofern *verallgemeinert*, als von der kanonischen Modulstruktur ausgehend die Operatoren verallgemeinert werden (statt ganzer Zahlen werden beliebige Operatoren betrachtet). Die der Operatorenmenge zunächst fehlende, später — als Körper — eigene Struktur wird nicht berücksichtigt.

5.2.6 Auswirkungen der Wahl von M_2

Die Wahl von $\mathbb{Q}$ für M_2 führt zu dem speziellen Ergebnis, daß jede additive Abbildung schon linear ist, denn eine additive (d.h. $\mathbb{N}$–homogene) Abbildung A ist auch ($\mathbb{Q}$–)homogen. Denn wendet man die $\mathbb{N}$–Homogenität $nA(\alpha) = A(n\alpha)\ \forall n \in \mathbb{N}, \alpha \in M_1$ auf $\alpha' := \frac{1}{n}\alpha$ an, so folgt $A(\frac{1}{n}\alpha) = \frac{1}{n}nA(\alpha') = \frac{1}{n}A(n\alpha') = \frac{1}{n}A(\alpha)\ \forall n \in \mathbb{N}, \alpha \in M_1$ (die Ausdehnung auf negative rationale Zahlen nach der Minuszeichenkonvention bereitet keine Schwierigkeit; so argumentiert auch [150] 25 bei #21). Beispielsweise hat HAMELs Abbildung f diese Eigenschaft; daher kann er ausnutzen, daß eine auf den Basisvektoren erklärte lineare Abbildung schon auf dem ganzen Raum erklärt ist. Es ist natürlich unangemessen, zu sagen, Hamel habe $M_2 = \mathbb{Q}$ *gewählt*, so als habe er an das allgemeine Vektorraumkonzept gedacht und sich geeignete Instanzen ausgesucht; vielmehr entwickelt seine Arbeit an einem bestimmten Problem eine kreative Idee, die erst später zum gängigen allgemeinen Verfahren wurde.

Mit dieser Eigenschaft von f hängt es übrigens zusammen, daß alle *stetigen* reellen Lösungen der Funktionalgleichung der Gleichung $f(x) = x \cdot f(1)$ genügen, also die Funktionen $C \cdot x$ mit einer beliebigen reellen Konstante C sind (vgl. [165] 13). Die Operation ‚Multiplikation eines Vektors mit einem reellen Skalar' ist nach Voraussetzung $\mathbb{R}$–homogen ($\mathcal{A}_\circ$) und additiv ($\mathcal{D}_r$) und somit (wie bereits Peano feststellt, vgl. #155) eine lineare Abbildung.

5.2.7 Wechselseitig abhängige Wahl

Man kann nicht jede abelsche Gruppe M_1 mit jedem Körper M_2 als Vektorraum auffassen. Bei der Frage, die auf S.71 besprochen wird, geht es um etwas ähnliches: Wie wirkt die Struktur von M_1 auf die von M_2 und umgekehrt? Hier heißt die Frage: Wie wirkt die Wahl, die gewählte Instanz von M_1 auf die von M_2 und umgekehrt?

Wenn $\mathbb{K}$ ein Körper ist, der den kommutativen Ring mit 1 der ganzen Zahlen als Unterring enthält — so daß also insbesondere die 1 von $\mathbb{Z}$ mit der 1 von $\mathbb{K}$ übereinstimmt[53] — und V eine Gruppe, so gilt für irgend eine Abbildung $\circ' : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, die die Postulate $\mathcal{D}_l$ und $\mathcal{U}$ erfüllt, daß $\circ'|_{\mathbb{Z}\times V}$ mit der *kanonischen*[54] Skalarmultiplikation $\circ$ übereinstimmt. Seien dazu $\mathfrak{a} \in V$ und $m \in \mathbb{Z}$. Im Fall $m > 0$ ist

$$m \circ' \mathfrak{a} \overset{m\in\mathbb{K}}{=} \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{m \text{ mal}} \circ' \mathfrak{a} \overset{\mathcal{D}_l}{=} \underbrace{1 \circ' \mathfrak{a} + \ldots + 1 \circ' \mathfrak{a}}_{m \text{ mal}} \overset{\mathcal{U}}{=} \underbrace{\mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}}_{m \text{ mal}} = m \circ \mathfrak{a}.$$

Der Fall $m < 0$ geht analog; bei $m = 0$ ist nichts zu zeigen.

Das bedeutet, daß insbesondere bei den historisch zuerst betrachteten $\mathbb{R}$– und $\mathbb{C}$–Vektorräumen die Verbindung der kanonischen mit der geforderten Skalarmultiplikation (vgl. Abschnitt 5.2.3.1) keine Einschränkung darstellt. Schauder etwa erfaßt tatsächlich *alle* Banachräume.

Schauders $\mathcal{SCH}$ II stellt eine echte Forderung dar, die zwar viel schwächer ist als $\mathcal{B}_S$ 1., aber dennoch nicht von jeder abelschen Gruppe erfüllt wird — etwa von der $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$ nicht, in deren Verknüpfungstafel das Element 2 nicht auf der Diagonale vorkommt. Oben sind mit den Oberkörpern von $\mathbb{Z}$ einige Mengen M_2 angegeben, für die ein Vektorraum Schauders Forderung erfüllt.

Weyl behauptet (vgl. #174), seine Gesetze der Skalarmultiplikation folgten für rationale Multiplikatoren aus seinen Additionsaxiomen, falls die Multiplikation mit solchen Faktoren aus der Addition *erklärt* ist. Klar ist, was mit einer solchen „Erklärung" im konkreten Fall der Translationen gemeint ist (Zirkel und Lineal; Weyl sagt ja *„wie oben* [...] *erklären"* und bezieht das auf seine anschaulich–geometrischen Vorbemerkungen). Würde Weyl behaupten, für eine beliebige abelsche Gruppe jene Gesetze für rationale Multiplikatoren aus den Gruppenaxiomen schließen zu können, so träfe diese Behauptung nicht zu (da es ja Gruppen gibt, die keine $\mathbb{Q}$–Vektorräume sind, wofür der Abschnitt 5.2.4 einen allgemeinen Grund liefert). Lehrreich ist ein Vergleich von Weyls und Schauders Vorgehen: Weyl hat ausdrücklich gefordert, daß der Ausdruck $\lambda\mathfrak{a}$ für jedes reelle λ erklärt ist — was Schauder gerade folgert. Die Kernidee bei Schauder ist, daß die Skalarmultiplikation, in der die Gleichung $\mathfrak{e} = 2x$ in x lösbar sein soll, die *kanonische* ist. Wenn man nun bei Weyl gemäß seiner Voraussetzung *irgendeine* Abbildung $S : \mathbb{R} \times V \to V$ zugrundelegt, scheint zunächst zwar die Möglichkeit zu bestehen, daß für diese die geforderten Eigenschaften für

[53] Es könnte $\mathbb{Z}$ Teilmenge des Skalarkörpers sein, ohne ein Unterring desselben zu sein. Das kann nur so geschehen, daß $\mathbb{Z}$ unter einer der Körperverknüpfungen nicht abgeschlossen ist. Dazu ist nach Gesagtem offenbar hinreichend, daß die gewöhnliche 1 von $\mathbb{Z}$ nicht mit der 1 des Skalarkörpers übereinstimmt. Ist es auch notwendig?

[54] Bekanntlich wird jede additive abelsche Gruppe G zu einem $\mathbb{Z}$–Modul vermöge der Abbildung

$$\circ : \mathbb{Z} \times G \longrightarrow G; (m, g) \longmapsto \begin{cases} e & \text{falls } m = 0 \\ \underbrace{g + g + \ldots + g}_{m \text{ mal}} & \text{falls } m > 0 \\ \underbrace{-g + (-g) + \ldots + (-g)}_{-m \text{ mal}} & \text{falls } m < 0 \end{cases}$$

(wobei e das neutrale Element von G und $-g$ das inverse Element zu g ist), denn $\circ$ erfüllt dann $\mathcal{A}_\circ, \mathcal{D}_l, \mathcal{D}_r$ und $\mathcal{U}$.

rationale Skalare schon allein aus der Gruppenstruktur folgen. Da es aber eine Gruppe gibt, für die obige Gleichung kanonisch nicht lösbar ist, kann für diese Gruppe die Abbildung $S|_{\mathbb{Z}\times V}$ nicht die kanonische Skalarmultiplikation sein. Denn sonst wäre ja (da der Ausdruck $\frac{1}{2}\mathfrak{e}$ durch S erklärt ist) wegen der Unitarität und Assoziativität von S eine Lösung obiger Gleichung gefunden. Hätte S aber andererseits die geforderten Eigenschaften für rationale Skalare, so stimmte S für Skalare aus $\mathbb{Z}$ mit der kanonischen Skalarmultiplikation überein, wie oben gezeigt wird. Somit ergibt sich ein Widerspruch. Auf der speziellen Gruppe kann S also nicht existieren. Anders gesagt: Auf dieser Gruppe kann man eben die Multiplikation mit rationalen Faktoren nicht anschaulich–geometrisch aus der Addition erklären.

Kapitel 6

Erkenntnistheorie und Axiomatik

Die vorangegangenen Kapitel hatten die immanenten Aspekte der Ideengeschichte der gesamten Strukturmathematik bzw. des Vektorraumbegriffes zum Thema. Dabei wurde von etwaiger Relevanz ihrer Ergebnisse für die menschliche Erkenntnis weitgehend abgesehen; diese ‚abstrakte', ‚reine' Sichtweise entspricht dabei in hohem Maße der Weise, wie als Ergebnis des historischen Entwicklungsganges schließlich Strukturmathematik und damit Vektorraumtheorie betrieben wurden. Insofern skizzieren die in den vorangegangenen Kapiteln besprochenen Fragen eine vorgeschaltete Standortbestimmung der gegenwärtigen Mathematik; diese Fragen sind nun durch Einbeziehung übergeordneter nichtimmanenter Fragen in eine vollständige historische Untersuchung einzubetten.

Hier soll nun untersucht werden, wie es zu dieser Abstraktion kam und worin sie sich in der jeweiligen historischen Situation ausdrückte. Es soll also nun um diejenigen Wandlungen gehen, denen die Vorstellungen vom Realitätsbezug und Wahrheitswert mathematischer Aussagen unterlegen haben — mit dem vorläufigen Ergebnis (am Ende des von uns betrachteten Zeitraums), daß die Frage, welche Realität den Objekten, welcher Wahrheitswert den Aussagen darüber zukommt, keine Frage mehr ist, mit der sich die Mathematik zu beschäftigen hat. Bei einer solchen Untersuchung hat es keinen Sinn, den Vektorraumbegriff isoliert zu betrachten; es wird daher hier ein Überblick über die Veränderung der Erkenntnistheorie der Mathematik allgemein im betrachteten Zeitraum gegeben.

Es war immer wieder die Rede von der ‚Axiomatik', ohne daß dieser Begriff über seine immanent mathematische Bedeutung hinaus präzisiert worden wäre; dazu ist jetzt Gelegenheit. Diese Bedeutung unterliegt einem geschichtlichen Wandel, dessen vorläufiges Ergebnis dem oben genannten entspricht. [183] 4: *„Die moderne Bedeutung* [des Wortes Axiom] *ist* […] *philosophisch ganz unerheblich.* […] *Moderne Axiomatik* [ist] *erkenntnistheoretisch uninteressant, da ein Axiomsystem im modernen Sinn einer Nominaldefinition gleichkommt"*.

6.1 Klassische und moderne Axiomatik in der Geometrie: Von Euklid zu Hilbert

6.1.1 Der geschichtliche Hergang

Es ist historisch sinnvoll, sich bei der Untersuchung der Verwendung des Terminus ‚Axiom' zunächst auf die Geometrie zu beschränken. Zugleich besteht natürlich auch zwischen der Geometrie und der Vektorraumtheorie eine enge Verbindung, weswegen die Beschäftigung mit der Geschichte der Geometrie jedenfalls mit unserem Thema in Zusammenhang steht.

In der Geometrie fallen zwei mögliche Bedeutungen des Terminus ‚Axiom' auf: Während in der euklidischen Geometrie mit ‚Axiom' eine evidente Wahrheit, insbesondere also eine Aussage über irgendeinen Bereich der Realität gemeint ist, so bedeutet der Terminus ‚Axiom' im Sinne der HILBERTschen GdG eine Aussage ohne Bezug zur Realität. Bei Hilbert kann demnach die Frage nach der Wahrheit der Aussage nicht mehr sinnvoll gestellt werden. In einer ‚ersten terminologischen Näherung' könnte man im euklidischen Fall von ‚klassischer', im Hilbertschen von ‚moderner' Axiomatik sprechen[55]. Dabei kommt nach dem Urteil der gesamten Sekundärliteratur Hilbert eine Schlüsselstellung bei der Wandlung des Begriffes zu, vgl. [12] 764, [13] 278, [14] 356, [63] 3, 14, [124] 16, [175] 319, [204] 17; nach [62] 111 hat Hilbert die Nabelschnur zwischen Realität und Geometrie zerschnitten, nach [63] 17 ist ihm POINCARÉ nur scheinbar zuvorgekommen, [124] 15 bezeichnet die GdG als *„starting point"*. Das heißt natürlich nicht, daß Hilbert seine Gedanken aus dem Nichts, ohne Bezug auf Vorgänger entwickelt habe. Das Standardwerk zur Entstehung der GdG (in dem die Langwierigkeit dieses Prozesse belegt wird) ist TOEPELLS [178]; derselbe Autor nennt auch in [179] zahlreiche Vordenker Hilberts. So hat bereits PASCH wesentliche Schritte zum Hilbertschen Standpunkt getan. FREUDENTHAL gibt unter [62] 106f folgendes Zitat aus Paschs *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882), §12:

> Es muß in der Tat, wenn anders die Geometrie wirklich deduktiv sein soll, der Prozess des Folgerns überall unabhängig sein vom *Sinn* der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muß von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten *Beziehungen* zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen.

Dennoch betrieb Pasch wie alle Vorgänger Hilberts die Geometrie als Naturwissenschaft ([24] 284). Lt. [204] 16 ist die Geometrie *„nach Meinung kompetentester Geister wie R i e m a n n und C l i f f o r d [...] ein Zweig der Physik gewesen"*. [94] 82: *„die Geometrie* [galt] *unbestritten als Beschreibung von Konstruktionen oder Sachverhalten der reinen (Kant) oder empirischen Anschauung (Gauß))"* (GAUSS' empiristischen geometrischen Standpunkt stellt KLEIN in [96] I S.59 dar; zu KANT vgl. Abschnitt 6.4). VON NEUMANN vertritt die Auffassung, daß die Geometrie überhaupt nie aufgehört habe, empirisch zu sein ([131] 31ff). Die Vorstellung von der Geometrie als Naturwissenschaft in Verbindung mit dem Auftreten mehrerer unvereinbarer Geometrien führte zu der Frage, welche Geometrie denn nun die Geometrie der physikalischen Realität sei; diese Frage stellen und beantworten die Hilbertschen GdG nicht. POINCARÉ berichtet ([151] 249f): *„plusieures personnes [...] croyaient même que l'expérience pouvait leur donner une réponse* [S.250] *à cette question* [quelle géométrie s'applique à l'espace réel]. *Inutile d'ajouter que c'était là méconnaître complètement la nature de la Géométrie, qui n'est pas une science expérimentale."*

Vorbereitet wurde Hilberts Neuerung unter anderem durch das Aufkommen der nichteuklidischen und der Riemannschen Geometrie[56]. [25] 23f bringt folgendes HAMILTON–Zitat, das Hamiltons Verhältnis zum Wahrheitsanspruch der euklidischen Geometrie verdeutlicht: *„no [...] intelligent person can doubt the truth of the chief properties of parallel lines, as set forth by Euclid"*. ZADDACH betont, es habe seinerzeit gute Gründe für die anfängliche Skepsis gegen die Nichteuklidische Geometrie gegeben ([204] 17). Eine Darstellung der Nichteuklidischen Geometrie findet man in RZM S.69ff. WEYL ist aber vor allem der kompetente Darsteller von Riemanns Gedanken (RZM S.75ff und natürlich *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner/Leipzig 1913)

Es muß der Sorgfalt halber ergänzt werden, daß, wenn von der ‚Rolle der Axiome' in der euklidischen Geometrie die Rede war, damit nur die *heutige* euklidische Geometrie gemeint sein kann. An den Stellen der euklidischen Geometrie, an denen wir heute von ‚Axiom' sprechen, standen im Altertum mehrere Termini; LORENZ hat etwa dargestellt, wie sich Aristoteles ausdrückte. Lorenz

[55] das Wort ‚modern' erweist sich wieder als gefährlich (vgl. auch Anm.62), aber schwer zu umgehen; ‚neu' ist ähnlich gefährlich.

[56] POINCARÉ ([151] 268) unterscheidet zwischen *la* géométrie de Riemann (l'opposé de celle de Lobatchevsky) und *les* géométries de Riemann im Sinne der Habilitationsschrift.

erinnert daran, daß das „Parallelenaxiom" eigentlich ein „Parallelenpostulat" ist und dabei keine Konstruierbarkeits-, sondern eine Existenzforderung, weshalb es kritisiert wurde; deshalb wurde es auch lt. FREUDENTHAL ([61] 7) nie für evident gehalten (vgl. aber auch obiges Hamiltonzitat). Freudenthal vermutet weiter, daß erst durch KANT, der geometrische Sätze (als synthetische Sätze *a priori*) als Axiome bezeichnete, und von ihm aus vor allem durch die deutsche Literatur der Begriff Axiom an seinen heutigen Ort kam; die Entwertung des Terminus durch die Mathematiker habe ein begriffliches Vakuum in der Philosophie hinterlassen: es sei derzeit kein Terminus für ‚evidente Wahrheit' vorhanden. Dazu kann man natürlich bemerken, daß ja immerhin der Terminus ‚evidente Wahrheit' vorhanden ist. Jedenfalls ist nicht zu leugnen, daß eine terminologische Usurpation stattgefunden hat[57]. Freudenthal weist weiter darauf hin, daß schon im V.Buch EUKLIDs Ansätze (in unserem Sinne verstandener) ‚moderner' Axiomatik zu finden sind ([61] 13). Auch kann man mit CROWE die Rolle der Evidenz in der euklidischen Geometrie etwas weniger strikt sehen; er fragt, ob vielleicht Euklid die Propositionen 45 und 47 gerade deshalb *nicht* als Ausgangspunkt, sondern als *culmination for his first book* gewählt hat, weil *„these two propositions* [were] *the ones he knew best and of which he was most deeply convinced"* ([27] 265).

Nur im Bewußtsein der hierdurch belegten und hoffentlich behobenen Verkürzungen verwende ich also in Zukunft den Begriff Euklidische Axiomatik.

6.1.2 Zur Systematik HILBERTscher Axiomatik

6.1.2.1 Die Anforderungen an die Axiome bei Hilbert

Axiome sind allgemein Aussagen über irgendwelche Gegenstände. Als Aussagen können sie mit der Logik untersucht werden; man kann beispielsweise sagen ‚Axiom A folgt aus Axiom B', ‚die Axiome C und D widersprechen einander', ‚die Axiome E und F sind logisch unabhängig' oder ähnliches. Insbesondere kann man vermittels logischer Deduktion neue Aussagen aus den Axiomen ableiten. Betrachtet man mehrere Axiome zusammen, wird man von einem ‚Axiomensystem' sprechen. Sollen nun aus einem Axiomensystem weitere Aussagen deduziert werden, so wird man von dem Axiomensystem verlangen, daß es *widerspruchsfrei* ist. Denn durch Aussagen sollen ja die Gegenstände unterschieden werden. Aber aus einem widersprüchlichen Axiomensystem eine Aussage ableiten können bedeutet zugleich deren Gegenteil ableiten können; also kann man mit einem solchen System keine Gegenstände unterscheiden.

Soweit stimmen der klassische und der Hilbertsche Standpunkt überein. Es sollen nun einige Punkte dargestellt werden, in denen die Standpunkte voneinander abweichen.

(6.1) Klassische Axiome sind evidente Wahrheiten.

Widerspruchsfreiheit muß also trivialerweise vorliegen. (6.1) bedeutet:

(6.2) Klassische Axiome kann man nicht beweisen.

‚Beweisen' heißt hierbei etwa ‚einsehbar machen', ‚logisch zurückführen auf eingesehene Aussagen (eben Axiome)'; vgl. #80.

Hilbertsche Axiome haben weniger genutzte Eigenschaften als klassische, da unter diesen Eigenschaften die Wahrheit in Fortfall kommt. Die Frage nach der Evidenz kann nicht mehr gestellt werden (vgl. #43), ebensowenig kann man nun sinnvoll die Frage stellen, ob man die Axiome in obigem Sinn beweisen kann. Unter den Eigenschaften bleibt die logische Widerspruchsfreiheit[58], aber diese ist nun nicht mehr trivial, sondern eine echte Forderung. An die Stelle von

[57] deren Art und Weise ich für sehr interessant halte; vgl. dazu die Beschreibung einer ganz ähnlichen Usurpation bezüglich des Namens ‚Vektorraum' auf S.63.

[58] [151] 260 *„il lui* [Hilbert] *suffit de montrer que ces relations* [logiques entre les éléments de son système] *n'impliquent pas de contradiction interne."*.

(6.2) (vgl. #37) rücken subjektive Kriterien wie die bei #40 aufgeführten; vergleiche auch #38 mit #79. Man kann hier sagen, daß die Axiomatik einen Wechsel des Ausgangspunktes durchlebte: Die subjektiven Kriterien ersetzen klassische Gewißheiten. Oben sage ich: es bleibt die logische Widerspruchsfreiheit; stärker könnte man sagen: sie kommt aus ihrem Schattendasein als Nebeneffekt, Trivialität, Folgerung in die Hauptrolle.

Es ist wohl schon Bestreben der Alten gewesen, möglichst wenig unmittelbar einzusehen (Skeptizismus) und statt dessen lieber möglichst viel mittels der (ihrerseits in ihrer Evidenz nicht bezweifelten) logischen Deduktion zu erschließen. Man könnte den Hilbertschen Standpunkt als einen ‚Grenzfall' hiervon begreifen, also als das weitestgehende Mißtrauen in die Evidenz, indem nur noch die Logik und die Grundlagen als evident gelten. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, Hilbert verzichte auf sämtliche Prämissen — dann wäre ja keine Deduktion möglich —; vielmehr haben seine Axiome noch den formalen, aber nicht mehr den inhaltlichen Charakter von Prämissen. Evidenz wird durch Konvention ersetzt; Aussagen werden nicht mehr als wahr erkannt, sondern als wahr gesetzt[59]. Damit hat die Bedeutung von ‚beweisen' eine Wandlung erfahren: Die Hilbertsche Axiomatik hat mit der klassischen gerade gemeinsam, daß aus vorgegebenen Axiomen weitere Aussagen hergeleitet, deduziert werden; unterschiedlich ist jedoch die Auffassung des Ausgangspunktes. ‚Einsehbar machen' kann im modernen Fall nun nicht mehr heißen ‚auf Evidentes, als wahr Erkanntes zurückführen', sondern heißt ‚auf Konventionelles, als wahr Gesetztes zurückführen'. In beiden Fällen gleichermaßen hat dabei der Akt des ‚Zurückführens' (das logische Schließen) *evidentiellen* Charakter bzw. ruht auf einem für evident — nicht für konventionell — gehaltenen Fundament; vgl. dazu #42.

Man kann auch eine ‚Umkehrung' des Aspektes (6.2) formulieren:

(6.3) Alles, was man beweisen kann, eignet sich nicht seinerseits als klassisches Axiom.

Dieser Aspekt ist dadurch eingeschränkt, daß man im Rahmen logischer Äquivalenz Axiom und Folgerung, Ursache und Wirkung vertauschen kann — es muß nicht hilfreich sein, aber es ist jedenfalls möglich; jede der äquivalenten Aussagen eignet sich als Ausgangspunkt, als Axiom. Der Aspekt (6.3) bezieht sich also strenggenommen nur auf eine ‚einseitige Beweisbarkeit'. Poincaré schildert einen solchen Vertauschungsvorgang bei Hilbert ([151] 272).

Die Hilbertsche Forderung

(6.4) Axiome sollen *logisch unabhängig* voneinander sein

ist in der klassischen Situation, in der (6.2) gilt, trivial[60], denn Axiomenkandidaten, die nicht unabhängig sind, die man also aus anderen herleiten kann, kann man insbesondere beweisen. Hilbert hat also versucht, diese typische Eigenschaft von Axiomen ‚hinüberzuretten'. Behält man die neue Bedeutung des Wortes ‚beweisen' im Blick, so erstaunt es nicht, daß es einerseits zwar gleichgültig ist, ‚womit man anfängt' (d.h. welche Aussagen man zu seinem Axiomensystem macht), andererseits aber innerhalb des gewählten Axiomensystems kein Axiom aus den übrigen herleitbar sein sollte.

Das Verblüffende an der Unabhängigkeitsforderung ist, daß sie wie alle methodischen Werkzeuge der Hilbertschen Axiomatik dem Freilegen der Beziehungen zwischen Gegenständen dient. D.h. man macht die zugrundegelegten *Aussagen* über die Gegenstände so beziehungslos wie möglich, um dann um so mehr über die Beziehungen der *Gegenstände* zu erfahren.

[59] Das Wort Konvention trifft die Sache nicht ganz, weil es immer auch an einen sozialen Vorgang gemahnt, um den es hier nicht gehen soll. Hans Freudenthal spricht von der „*Vereinbarung, nichts zu wissen*" ([61] 10).

[60] Eine andere Frage ist allerdings, ob es bei einem klassischen Axiomensystem stets gelingt festzustellen, ob es (6.2) erfüllt. Im Falle des Parallelenaxioms war es gerade das Zusammenspiel von Skeptizismus (dem Zweifel an der Evidenz des Parallelenaxioms) und Unabhängigkeitsdebatte (dem Versuch, das Axiom aus den übrigen herzuleiten), das schließlich zur Abkehr vom Einzigkeitsanspruch der euklidischen Geometrie, also zugleich zur Abkehr von der Vorstellung, Geometrie müsse die Realität beschreiben, geführt hat.

Zur Herkunft der Forderung (6.4) teilt TOEPELL in [179] 83f einiges mit; demnach entwickelte schon GRASSMANN in der A_1 solche Gedanken. Zu den direkten Vorgängern Hilberts gehörte PEANO; vgl. auch S.29 der vorliegenden Arbeit und [127] 271f.

6.1.2.2 Kritik an Hilbert: Die Diskussion um die impliziten Definitionen

Einige Reaktionen der Zeitgenossen auf GdG nennt [14]. Die wichtigste Gegenposition zu Hilbert ist wohl die von FREGE artikulierte; sie betrifft das Problem der impliziten Definition.

Dieses Problem hängt mit Hilberts Verzicht darauf zusammen, die Begriffe ‚Punkt', ‚Gerade' usw. zu definieren. Berühmt ist Hilberts Ausspruch *„Man muß jederzeit an Stelle von 'Punkten, Geraden, Ebenen' 'Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können"*, den Blumenthal in seiner *Lebensgeschichte* Hilberts in [91] III, S.388–429 auf S.403 wiedergibt; ähnlich klingt ein Zitat, das KAMBARTEL bei [94] 79f mitteilt. Interessant ist auch ZADDACHs Aussage #76. PEANOs Definition 2^a in Paragraph **3.** von [144] (vgl. die Wiedergabe auf S.164) gehört ganz offenbar einem prä–Hilbertschen Geometrieverständnis an.

EUKLID hat die Bedeutung der genannten Begriffe gerade deshalb als bekannt vorausgesetzt[61], weil es für ihn nur ein denkbares Modell gab — die Realität. An diese Unterstellung einer bestimmten Bedeutung könnte VON NEUMANN gedacht haben, als er formulierte ([131] 31): *„Euklids Axiomatisierung* [wird] *in einigen unwichtigeren Punkten nicht den modernen Forderungen nach absoluter axiomatischer Strenge gerecht"*.

Hilbert hingegen hofft, durch seine Axiome seien die Begriffe implizit definiert. Die Bedeutung des zentralen Begriffs der impliziten Definition wurde lt. FREUDENTHAL zuerst von GERGONNE erkannt ([61] 14; [63] 16: die Idee der impliziten Definition kann zurückverfolgt werden bis zu Gergonnes Arbeit in den Annales de Mathématique **9** (1818)). Gegen Hilberts Hoffnung, seine Axiome seien implizite Definitionen, erhebt Frege Einspruch — nach LORENZ zu Recht. KAMBARTEL erklärt, Frege habe es als notwendig bezeichnet, Definitionen von axiomatischen Aussagen deutlich zu unterscheiden ([94] 81). Ebd. 92:

> Während für Hilbert der Begriff „Punkt" durch seine axiomatisch beschriebene Verflechtung mit den anderen geometrischen Grundbegriffen gegeben ist, spricht sich Frege dafür aus, ihn als undefinierbar, *einfach* anzunehmen. Frege vertritt das klassische
> Modell der Definition, nach dem sich diese auf dem Wege einer begrifflichen Zerle- #78
> gung (Analyse) oder Zusammenfügung (Synthese) vollzieht. Dieses Modell setzt, soll
> es nicht zu einem unendlichen Regreß führen, eine Grundschicht *einfacher*, d.h. in der #79
> klassischen Terminologie: *nicht weiter zerlegbarer* Begriffe voraus. Diese einfachen Be- #80
> griffe können, wie Frege im Anschluß an eine durch das ganze 19.Jahrhundert geläufige Unterscheidung sagt, nur *erläutert*, nicht *erklärt* wer[S.93]den. [...] Auch für die mathematischen Axiome hält Frege letztlich daran fest, daß es sich dabei um isolierte Evidenzen [...] handelt. Wahrheit ist keine Eigenschaft, die erst in der Verflechtung der Sätze oder Gedanken resultiert. Die Frage der Wahrheit eines Satzes läßt sich daher nicht durch Probleme der Widerspruchsfreiheit oder Abhängigkeit bei Satzsystemen ersetzen.

Frege bezog insgesamt eine zu Hilbert konträre Position, was die im Abschnitt 6.1.2.1 diskutierte Haltung zum Status des logischen Schließens betrifft. LORENZ faßt es so zusammen, daß Frege das logische Denken kalkülisieren (in Rechnen verwandeln) will, wobei die Axiome inhaltlich bleiben, während bei Hilbert andersherum die Axiome schematisch sind und dafür das Schließen inhaltlich

[61] [124] 15 erinnert daran, daß er schon versucht hat, sie zu definieren, allerdings unzureichend, etwa: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. [47] 283 nennt Beispiele, wo sich bei Euklid infolge mangelhaft definierter Begriffe Probleme ergeben.

bleibt. Daß Hilbert die Evidenz nie ganz aus der Mathematik verbannen wollte, wird auch dadurch belegt, daß er die finite Mathematik nicht axiomatisiert ([93] 169f).

MONNA berichtet in [123] 37, daß er um 1920 an den Hochschulen stets von Axiomen als *„true“* hörte; ja sogar noch 1959 wurde die klassische Auffassung vertreten, vgl. dazu [95] 133.

6.2 Moderne Axiomatik in der Mathematik

6.2.1 Die Wechselwirkung von Algebra und Geometrie

6.2.1.1 *more geometrico*

Schon vor HILBERT hatte man begonnen, das euklidische Verfahren auch auf andere Bereiche der Mathematik[62] anzuwenden — nach dem Vorbild der Geometrie: *more geometrico*. HAMILTON wollte laut [25] 35 die Algebra ebenso ordentlich grundlegen wie die Geometrie, vgl. Abschnitt 6.4. Auch hinter GRASSMANNS *„Euklidischer Form“* (vgl. #91) steckt dieses *more geometrico*, das nach DIEUDONNÉ ([47] 281) schon bei CAUCHYs neuer Strenge zum Tragen kommt; allgemein äußern sich RZM S.1 und [136] 182. Noch weiter geht [199] 126: *„The euclidean type of axiomatics* [wird gelegentlich genutzt] *to analyze and describe a conceptual model in a physical or social situation“*. Als Grund für diese Stellung der Geometrie nennt FRÉCHET lt. [52] 285 die Anschaulichkeit. Es ist allerdings lt. KAMBARTEL ein Irrtum zu glauben, zu jeder Disziplin sei eine Axiomatisierung sinnvoll, die der der euklidischen Geometrie vergleichbar wäre ([94] 94); auch ist die Vorbildlichkeit von EUKLID nicht ewig haltbar ([27] 262).

Hilberts neues Konzept wurde ebenfalls außerhalb der Geometrie angewandt; vgl. [124] 15. Unter ‚moderner Axiomatik‘ verstehe ich denn auch alle Anwendungen dieses Hilbertschen Begriffes in jedwedem Gebiet der Mathematik.

6.2.1.2 Algebraisierung der Geometrie

Zunächst hat man hierbei an die analytische Geometrie zu denken, für deren Vater landläufig René DESCARTES gehalten wird. Diese Auffassung stellt allerdings [14] 349 als einen kolportierten Irrtum dar; verwiesen wird auf die Arbeit *Pour une histoire de la géometrie analytique* von Gino LORIA[63], wonach weder die Bezeichnung ‚analytische Geometrie‘ von Descartes stamme (sondern von LACROIX 150 Jahre später geprägt worden sei), noch es vor einer Arbeit von LAGRANGE aus dem Jahre 1773 irgend eine Arbeit im vollen Sinne dessen gegeben habe, was als ‚analytische Geometrie‘ bezeichnet wird. Ob das nun so ist oder nicht — vgl. auch VOLKERT in [181] 25 —, ändert nichts daran, daß das, was wir heute unter analytischer Geometrie verstehen, als Algebraisierung der Geometrie aufgefaßt werden kann, vgl. die Abschnitte 4.2.1.2 und 4.6.2.2. Zur Algebraisierung der Geometrie in diesem Sinne leistete auch GRASSMANN einen Beitrag, denn nach [112] 152 erkannte er die Bedeutung des LEIBNIZ–CRAMERschen Determinantenkalküls für die algebraische Charakterisierung geometrischer Gebilde.

Natürlich ist die Möglichkeit einer Algebraisierung der Geometrie nicht unabhängig vom Aufbau dieser Geometrie. Bei ZADDACH findet sich ein *„schwerwiegender Einwand gegen* EUKLID*s Liste von Axiomen und Postulaten“* ([204] 19):

> Die Verlagerung des *Parallelen*–Axioms ans Ende des Systems blockiert den Zugang zur Gruppe der *Translationen*. Da diese ja gerade die *Vektoren* sind, errichtet das klassische System hier ein unnötiges Hindernis gegen die algebraische Behandlung.

[62]Wenn etwa KLEIN bei [96] I S.153 von moderner Axiomatik im Blick auf seinen Artikel in den Math. Ann. **6** spricht, ist wohl eher gemeint, daß er in (damals) moderner Manier außerhalb der Geometrie Axiome anwendet.

[63]in: Proc. ICM Heidelberg 1904, 562–574

In einem weiteren Sinn kann man auch den von Grassmann ausgearbeiteten geometrischen Kalkül als Algebraisierung der Geometrie ansprechen. Dort geht es zwar gerade nicht mehr darum, algebraische Repräsentationen in obigem Sinn in die Geometrie einzuführen; andererseits ist aber das erstmals mögliche *Rechnen* auf den Objekten aus heutiger Sicht eine prinzipiell algebraische Erscheinung. Der historische Weg mag eher gewesen sein, die Geometrie — nach deren Algebraisierung im Sinne der analytischen Geometrie — wieder von der Algebra zu befreien (PEANO betont bei #134 und besonders bei #170 die Trennung von der Algebra); der Effekt war aber ziemlich diametral: Grassmann suchte eine von der hergebrachten Algebra und letztlich auch von der hergebrachten Geometrie unabhängige Grundlegung; er stellte heraus, daß die Geometrie nur *eine* Instanz der Ausdehnungslehre ist (vgl. A_1 S.VII — bzw. [71] I,1, S.10–11 — und auch [25] 64) und daß letztere in einem systematischen Aufbau ersterer vorausgeht. Wohl ohne es zu ahnen gab er mit diesem Beitrag einen Anstoß dazu, daß wir heute gerade den Inhalt der Ausdehnungslehre unter dem Begriff ‚Algebra‘ (jedenfalls unter den Begriffen ‚lineare‘ und ‚multilineare Algebra‘) verstehen und nicht mehr nur die hergebrachte Algebra, die Peano einzig gemeint haben kann, als er sagte, das progressive Produkt habe keine Entsprechung in der Algebra (vgl. dazu die Anmerkung 8). Und nachdem die Algebra solchermaßen umgeformt ist, also Vektoren nicht mehr Zahlentupel sind, kann man sie auch ruhigen Gewissens wiederum in die Geometrie einführen.

6.2.1.3 Fusion der beiden Disziplinen

Man kann im Zusammenhang der Einführung der axiomatischen Methode in die Algebra von einer Geometrisierung der Algebra sprechen. Hier scheint nun die Euklidische Geometrie günstigere Ansatzpunkte zu bieten, zumal in ihr nach [23] 69 *„the choice of origin and axes irrelevant“* ist. Eine besonders wertvolle Beobachtung zum Eindringen der Geometrie in die Algebra teilt FREUDENTHAL mit ([62] 128):

> Die Begründung der Geometrie unabhängig von Stetigkeitsaxiomen [...] führt [...] geradenwegs zum abstrakten Körperbegriff, der ebenfalls einer Abstraktion von der Topologie (des reellen oder komplexen Zahlkörpers) sein Dasein verdankt. #81

Auch die Unterscheidung von synthetischen und analytischen Methoden in der Geometrie setzt sich nach BOI in der Algebra fort ([16] 196): „[the] *structural method of mathematics* [is an] *inheritance from the old synthetic methods in geometry*“. Lt. SCHOLZ ([168] 17) vertritt STEINER die synthetische, PLÜCKER die analytische (bzw. algebraische) Geometrie; die Algebraisierung der Geometrie wurde eingeleitet durch MÖBIUS und Plücker (Verwendung homogener Koordinaten). Nach [14] 351 stammt die Bezeichnung ‚synthetische Geometrie‘ von Steiner. Der Unterschied zwischen synthetischen und analytischen Geometrien ist auf der Umschlagrückseite der *Geschichte der Geometrie seit Hilbert* von Helmut Karzel und Hans–Joachim Kroll (erschienen bei der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft Darmstadt im Jahre 1988) auf folgende knappe Formel gebracht: synthetische sind axiomatisch definiert, analytische sind künstlich mit Hilfe von Zahlenbereichen gebildet. Hier sind also das Eindringen der Algebra in die Geometrie (in Gestalt der Koordinatensprache) und das Eindringen der Geometrie in die Algebra (in Gestalt der Axiomensprache) gleichermaßen erfaßt. DIEUDONNÉ bezeichnet es als grundlegendes Prinzip der modernen Mathematik, *„eine vollständige F u s i o n zwischen ‘geometrischem’ und ‘algebraischem’ Gedankengut zu schaffen“* ([42] 413). Nach [?] 1099 Anm.11 gibt es mittlerweile unter den Mathematikern unterschiedliche Ansichten darüber, ob die klassischen Kategorien Algebra, Geometrie und Analysis weiterhin nützlich sind; manche sähen die ganze Mathematik als algebraisiert an. Ich möchte ergänzen, daß umgekehrt die Einführung geometrischer Begriffe in Algebra und Analysis diesen Disziplinen die Raumanschauung erschließt.

6.2.1.4 Die beiden Disziplinen als Modelle füreinander

Von dem beschriebenen Methodenaustausch muß man die gegenseitige Modellierung unterscheiden, die ebenfalls einem historischen Wandel unterliegt; vgl. dazu Abschnitt 3.1.2.2. FREUDENTHAL umreißt das eine Extrem ([65] 1700): *„Algebra is valid because it functions in geometry"* (die Äußerung bezieht sich auf $\mathbb{Z}_-$); ähnliches sagt [47] 283. Schon in Abschnitt 3.1.2.1 wurde VOLKERTs Darstellung in [181] 25 erwähnt, wonach bei VIETA ein algebraischer Ausdruck immer geometrisch interpretierbar sein mußte und deshalb nur Terme gleicher Dimension zu einem Ganzen zusammengefaßt wurden. Das andere Extrem bringt DIEUDONNÉ zur Sprache ([47] 284): *„les doutes* [concernant les géométries non euclidiennes] *ont cessé lorsqu'on a obtenu des modèles de ces géométries en algèbre"*; vgl. auch [162] 191. Entsprechend empfanden GAUSS und BOLYAI nach ihrer Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrie eine geometrische Rechtfertigung von $\mathbb{C}$ nicht mehr als ausreichend ([25] 26). PEANO stellt in #136 offenbar dar, daß bestimmte Begriffe seines Kalküls Begriffen in der Mechanik bzw. der projektiven Geometrie entsprechen.

6.2.2 Die Anforderungen an die Axiome in der Strukturmathematik

Über den späteren Verzicht auf die HILBERTsche Forderung (6.4) der logischen Unabhängigkeit wird im Abschnitt 3.3.4 einiges gesagt. Insbesondere möchte ich hier an das Schlußwort jenes Abschnitts erinnern, wonach dieser Verzicht methodisch als eine Fortsetzung von Hilberts Ziel anzusehen ist und nicht etwa als ein Bruch; nur so wird verständlich, wieso eine Übertragung der Hilbertschen Axiomatik auf die Mathematik überhaupt stattfand, was man sich davon erhoffte und welche Aspekte Hilbertscher Axiomatik geeignet waren, diese Hoffnungen in Erfüllung gehen zu lassen.

6.2.2.1 Der Terminus ‚Axiom'

Sinnvoll wäre, für ‚Axiom im modernen Sinn' den angemesseneren Terminus ‚Postulat' zu verwenden (angemessener, da er genau das besagt, was Hilbert wollte, nämlich ‚Forderung'). In der Tat spielte dieser Terminus in der Frühzeit der ‚modernen Axiomatik' eine hervorragende Rolle, so z.B. bei den Amerikanern[64] (man halte sich nur den Titel von [163] vor Augen und vergleiche auch #181; erst später — #185 — wechselt DICKSON zwischen ‚*postulate*' und ‚*property*') oder SCHAUDER ([164] S.48, 61). BIRKHOFF spricht denn auch [12] 764 vom *postulational approach to algebra.* Lt. [61] 7 tritt der Terminus bei PEANO ebenfalls auf; man beachte dagegen die Bezeichnung *definizioni* bei #147. Die heute bevorzugte Verwendung von ‚Axiom' gegenüber ‚Postulat' könnte mit der Kürze des Wortes zusammenhängen. Die prinzipielle Verfügbarkeit zweier Termini treibt z.T. seltsame Blüten: Nicht nur werden beide synonym gebraucht; Schauder spricht in [164] 61 sogar davon, Axiome zu postulieren.

Die Sache wird noch etwas unübersichtlicher, denn ‚Axiom' wird auch noch in einem anderen Sinn verwandt, etwa von HAKEN ([78]) in seiner *question 1* (*„To what extent do we know whether the axioms we use are true? and to what extent should we care?"*): er meint mit den ‚Axiomen der Mathematik' nicht etwa die Axiome (Postulate) mathematischer Strukturen (wie z.B. des Vektorraums), sondern die Grundlagen mathematischen Denkens und Arbeitens: die natürlichen Zahlen, korrektes logisches Schließen, das Auswahlaxiom — also genau die Dinge, auf denen die gesamte Mathematik vertrauensvoll aufgebaut wird; vgl. dazu den Abschnitt 6.1.2.2 über HILBERTs unvollständige Verbannung der Evidenz.

All die inkonsequenten Terminologien unterstützen aber auch den Verdacht, die meisten Mathematiker nähmen allgemein eine unkritische Haltung ein gegenüber grundlegenden Fragen (wie

[64] MACLANE nennt übrigens als Grund für deren begeisterte Hinwendung zur Axiomatik E.H.MOOREs Charakterisierung der endlichen Körper von 1893, vgl. [110] 9

etwa der, ob sie es mit Evidenzen oder Forderungen zu tun haben). Diesen Verdacht teilt WILDER, wenn er nicht zwei, sondern drei Arten von Axiomatik unterscheidet, nämlich neben der klassischen und der modernen der Mathematiker noch die der mathematischen Logiker, wobei er die Axiomatik der mathematischen Logik *„pure"*, die der Mathematik aber *„naive"* nennt ([199] 122ff) — aus der Perspektive der mathematischen Logik, die ernsthaft über solche grundlegenden Probleme nachdenkt, ist der Umgang der übrigen Mathematiker mit denselben Problemen einfach naiv, indifferent, blauäugig. Das schadet *sachlich* nichts, denn insofern die Axiomatik die Wahrheitsfrage nicht sinnvoll stellen kann, braucht darauf auch keine Antwort gegeben zu werden. *Terminologisch* führt diese Indifferenz die Mathematik allerdings in Unterscheidungsprobleme: Es ist ja nicht so, daß man irgendwann früher einmal die Vektorraum–‚Axiome' für wahr gehalten hätte; das hat man ebensowenig getan, wie man es heute tut — es besteht also darin kein Unterschied zwischen einst und jetzt. Man hätte ihnen vermutlich *vor* der GdG nicht den Namen ‚Axiome' gegeben, eben weil sie ein anderer Typ von Aussagen sind, als es die Aussagen waren, die vor HILBERT als ‚Axiome' bezeichnet wurden. Man kann folgendes sagen: Für wahr hielt und hält man die Aussagen $\mathcal{D}_l$, $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{U}$ und $\mathcal{A}_\circ$ etwa über den $\mathbb{R}^n$. Dabei kommt der Wahrheitswert der Aussage zu, daß der genannte Raum die genannten Forderungen erfüllt, nicht den Forderungen — erst durch die Instantiierung, quasi die Ausfüllung der ‚Leerstellen' in der Struktur bekommen die Aussagen einen semantischen Wahrheitswert. Man muß das noch nicht einmal so sehen — schließlich kann man sich ja auf den Standpunkt stellen, eine semantische Wahrheit komme schon den reellen Zahlen nicht zu —; in diesem Fall sind die Aussagen nur syntaktisch wahr, insofern sie aus einer Definition des $\mathbb{R}^n$ ableitbar sind. Eine solche syntaktische Wahrheit kommt jedenfalls allen Aussagen zu, die nur aus den Forderungen (also ohne irgend eine Interpretation) ableitbar sind. Den Forderungen selbst aber kommt noch nicht einmal eine syntaktische Wahrheit zu; so eine Eigenschaft kann man ihnen einfach sinnvollerweise nicht zuweisen.

6.2.2.2 Die Strukturmathematik und das Problem der impliziten Definitionen

Mit der Übertragung der HILBERTschen Axiomatik auf andere Bereiche der Mathematik riß die Kritik an ersterer natürlich nicht ab. Folgendes Zitat von dem Bourbakisten Henri CARTAN, wiedergegeben nach [181] 278, verdeutlicht das Problem:

> une théorie mathématique n'est pas d'autre chose qu'une théorie logique, déterminé par un système d'axiomes c'est–à–dire des relations construites à partir des relations élémentaires, et posées comme vraies [...] les êtres de la théorie sont définis *ipso facto* par le système d'axiomes, qui engendre en quelque sorte le matérial [✓] auquel vont pouvoir s'appliquer les propositions vraies; définir ces êtres, les nommer, leur 'appliquer' les propositions et relations, c'est en cela que consiste la partie proprement mathématique de la théorie.

KREISEL ([101] 94) betont, daß Freges Kritik des ‚naiven Formalismus' auch auf BOURBAKIs Werk zutrifft, daß jedoch diese ≪Auferstehung≫ leicht zu verstehen ist: *„Hilbert, der sich der Schwächen des n a i v e n Formalismus bewußt war, formulierte eine wissenschaftliche und kohärente M o d i f i k a t i o n. [...] wie die Menschen eben sind, haben sie aus Hilberts Version gerade die Thesen des naiven Formalismus zurückbehalten."* Ähnlich [94] 80: *„der Hilbertsche Standpunkt ist [...] schon so sehr Allgemeingut der mathematischen Axiomatik geworden, daß Freges Widerspruch nachträglich als Kuriosum einer Beschränktheit des großen Logikers gegenüber den neuen Ideen Hilberts erscheinen muß"*. Dieser Feststellung entsprechen die scharfe Kritik von FREUDENTHAL an Frege ([63] 15ff, [64] 618) sowie folgendes Zitat von ZADDACH ([204] 17):

> [Seit Hilbert] hat sich die Überzeugung allgemein verbreitet, daß es sinnlos ist, in den Axiomen mystische "*absolute Wahrheiten*" zu sehen; es erstaunt im Gegenteil der Widerstand der damaligen Experten in Logik (FREGE), die nicht anerkennen wollten,

> daß man Grundbegriffe auf solche Weise d e f i n i e r e n kann und muß, weil sie in einer ehrlichen Mathematik nicht einfach aus einem "Nebel persönlicher Erfahrung" übernommen werden dürfen. Damit soll natürlich nicht bestritten werden, daß eine vorangehende M o t i v i e r u n g dem menschlichen Gemüt sehr willkommen ist.

Äußerungen dieser Art (die so tun, als existiere irgendeine reine Wissenschaft der Mathematik, von der das menschliche Gemüt in seiner Unzulänglichkeit allerdings nur ein unvollkommenes Abbild hervorbringen könne) sind unterschwellig oft anzutreffen; vgl. auch #94. DIEUDONNÉ berichtet in [41] 142 von seinen Erfahrungen aus den Bourbaki–Redaktionssitzungen, wonach die Kommissionsarbeit, die besonders sorgfältig prüft, nicht das Perfekte, sondern schließlich das wegen menschlicher Unzulänglichkeit vorläufig nicht mehr weiter Verbesserbare hervorbringt.

Ich glaube, das Problem beruht zum Teil darauf, daß nicht fein genug zwischen syntaktischer Wahrheit (oder besser Ableitbarkeit) und semantischer Wahrheit unterschieden wird. Im Englischen kann man das pointierter sagen durch die Gegenüberstellung von *right/wrong* und *true/false*. A.R.D.MATHIAS wirft BOURBAKI in [113] 10ℓ vor, diese Unterscheidung nicht beherzigt zu haben. So gibt etwa KAMBARTEL VUILLEMINs Auffassung wieder, *wahr* sei das in der gewählten Struktur Deduzierbare ([94] 89).

Eine ähnliche Undeutlichkeit deckt Kambartel auf S.81 in Anm.7a auf:

> [...] die Formulierung Vuillemins [, eine Struktur sei *un ensemble d'éléments définis munis de lois de composition*, ist] sehr ungenau. Wollte man sie wörtlich nehmen, so hätte man etwa die als Gruppen beschreibbaren Gebilde selbst als die Strukturen anzusehen, während es doch offenbar auf das etwa in einer axiomatischen Beschreibung gegebene Gemeinsame aller „konkreten" Gruppen ankommt. Gerade die Verwischung dieses Unterschieds macht (wie schon beim frühen Hilbert) die vollständige Ersetzung „materialer" Begriffe (*Wahrheit, Existenz*) durch formalsyntaktische Begriffe (*Widerspruchsfreiheit*) scheinbar möglich.

Die Redeweise vom *„frühen Hilbert"* besagt wohl, ähnlich wie es Kreisel darstellt, daß Hilbert sich in seiner späteren Entwicklung der von Frege aufgeworfenen Kritik durchaus ernsthaft gestellt hat, während Bourbaki (in Kambartels Kritik vertreten durch Vuillemin) das offenbar nicht getan hat. Das geschilderte Problem tritt genauso bei FREUDENTHAL auf, wenn der sagt, das implizit definierte seien die Gruppenelemente und die Gruppenoperation ([61] 13).

6.3 Die Erkenntnishaftigkeit mathematischer Aussagen

Die Grundidee der modernen Axiomatik ist, mehr über die *Beziehungen* zwischen den Gegenständen dadurch erfahren zu wollen, daß das *Wesen* der Gegenstände bewußt ausgeklammert wird (diese Grundidee, sich nicht mit der Natur der Objekte, sondern deren Beziehungen zu befassen, findet sich lt. [46] 619ℓ schon bei GAUSS). Die Beziehungen sind logische Verknüpfungen, also formal, wohingegen das Wesen der Gegenstände ihr Inhalt ist.

Emanuel SPERNER zitiert in [172] 22 Henri POINCARÉ (*La Science et l'hypothese*, Paris 1902, nach der deutschen Ausgabe von Lindemann, Nachdruck der 3.Auflage Leipzig 1928 S.XVI): *„Was die Wissenschaft erreichen kann, sind nicht die Dinge selbst, sondern es sind einzig die Beziehungen zwischen den Dingen; außerhalb dieser Beziehungen gibt es keine erkennbare Wirklichkeit"*. Dann fährt Sperner selbst fort: *„Dieser Standpunkt ist in* HILBERT*s Begründung der Geometrie aufs überzeugendste verwirklicht. Von Anfang an wird bewußt und ausdrücklich auf jede inhaltliche Bedeutung der Worte Punkt, Gerade, Ebene usw. verzichtet"*. Sperner erinnert dann an KANTs „Ding an sich" als prinzipiell Unerkennbares. Der Schlußabschnitt S.23f befaßt sich mit der Anschauung, *„aus der wir ja unsere Begriffswelt letzten Endes geformt haben"*; die Zurückdrängung der Anschauung sei nur vorübergehend, vielfältige Anwendbarkeit sei eigentliches Ziel von Abstraktion. Somit verrät Sperner zum Schluß ein wenig die Position Poincarés, denn die nachfolgende Konkretion, an die er denkt, bezieht ihre Aussagekraft ja wohl daraus, daß die axiomatische Methode in ihrer Präzisierung des Verhältnisses von Struktur und Instanz indirekt negativ auch etwas über die Dinge selbst aussagt. Sperners Behauptung, Hilbert habe mit Poincaré die Meinung geteilt, außer den Beziehungen zwischen den Dingen sei nichts erkennbar, erscheint mir daher auch nicht zwingend.

Sehr deutlich wird in Poincarés Formulierung eine erkenntnistheoretische Prämisse, die MEHRTENS positiv so formuliert hat: *„Strukturen setzen mit dem Gegenstand der Mathematik auch eine Umweltbeziehung. Die Welt, auf die die Mathematik anwendbar ist, wird als strukturiert gedacht.“* ([116] 32ℓ).

JAHNKE formuliert die Frage, die zur erkenntnistheoretischen Relevanz der post–Hilbertschen Mathematik gestellt wird ([93] 171): *„Stimmt es, daß* [von Hilbert] *die Mathematik in ein bedeutungsloses Spiel verwandelt wird, oder wie vornehmer gesagt wird: daß die Mathematik endgültig von allen ontologischen Bindungen befreit worden sei?“* Diese Frage stand schon im Raum, als HASSE seinen Vortrag hielt. Er sagt ([83] 24f):

> Wenn man [S.25] deren Methoden [d.s. die Methoden der Modernen Algebra] häufig mit einem geringschätzig hingeworfenen: „Formal!“ abtut, so beruht das auf einem völligen Mißverständniß dessen, was die moderne Algebra meint, wenn sie ihre Methoden formal nennt. Sie versteht darunter nicht, wie ihr ihre Gegner vorwerfen, ein *inhaltleeres Spiel mit Formeln*, sondern eine *durch präzise logische und mathematische Formeln vollzogene Abgrenzung ihres begrifflichen Inhalts* gegenüber unpräzisen, mit exakt–logischen Mitteln nicht faßbaren Auswüchsen.

Die Qualifizierungen ‚inhaltleer‘ und ‚bedeutungslos‘ sind dabei etwas unklar: Ist gemeint, daß kein Modell angegeben werden kann, oder ist gemeint, daß kein *anerkanntes* Modell angegeben werden kann und dadurch die so qualifizierten Dinge irrelevant für die Erkenntnis sind? Vielleicht soll letzteres durch die Wortwahl ‚Spiel‘ ausgedrückt werden, aber ein Spiel muß nicht irrelevant sein; es kann auch ein Geschehen wertfrei (ohne seine Relevanz zu thematisieren) als Spiel bezeichnet werden, um damit anzudeuten, daß es mit den Mitteln der Spieltheorie untersucht werden kann.

Unbeschadet dieser Kritik der Formulierung bleibt aber die Anfrage selbst zu untersuchen. Es soll nun ein Überblick über die historische Entwicklung des Anspruchs auf Realitätsbezug gegeben werden.

6.3.1 Der Anspruch des Realitätsbezugs: ‚Anschauung‘

6.3.1.1 Die Abkehr von der Anschauung

Charakteristisch für die moderne Mathematik ist ihr Bruch mit der physikalischen Realität; in diesem Sinn soll hier davon die Rede sein, sie habe sich von der Anschauung abgekehrt. Nach VON NEUMANN hat bereits EUKLIDs Werk eine Schlüsselstellung in der Wandlung des Verhältnisses der Mathematik zur Anschauung inne ([131] 31). GRASSMANN sieht es nach der A_1 S.VII als wesentlichen Vorteil seines Systems an, daß Raumanschauungen wegfallen. APELT kann sich dieser Einschätzung offenbar nicht anschließen, schreibt er doch betreffend Grassmann am 03.09.1845 an MÖBIUS ([71] III,2 S.101): *„So eine a b s t r a k t e Ausdehnungslehre, wie er sucht, könnte sich nur aus Begriffen entwickeln lassen. Aber die Quelle der mathematischen Erkenntnis liegt nicht in Begriffen, sondern in der Anschauung“*. Auch PEIRCE fühlt sich nicht mehr zur Rechenschaft über den Realitätsbezug mathematischer Untersuchungen verpflichtet. So untersucht er den Begriff ‚nilpotent‘, obwohl er lt. [153] 546 *„incapable of interpretation“* ist (gemeint ist damit, daß er kein *realitätsbezogenes* Modell angeben kann). Dies stört ihn offenbar nicht: *„the lack of physical interpretation did not phase Peirce“* ([140] 257).

POINCARÉ stellt HILBERTs erwartungsgemäße Haltung anhand des GdG–Axioms I,7 dar ([151] 253f): *„Cet énoncé est caractéristique. Quiconque aurait laissé à l'intuition une place, si petite qu'elle fût, n'aurait pas songé à dire que sur toute droite il y a au moins deux points, ou bien il aurait ajouté tout de suite qu'il y en a une infinité; car l'intuition de la* [S.254] *droite lui aurait rélévé immédiatement et simultanément ces deux vérités.“*. Im Anschluß schlägt Poincaré vor, die Ordnungsaxiome von den Verknüpfungsaxiomen zu trennen, um so die *Analysis situs* zu begründen und noch weniger auf Intuition abzustellen. Und noch einmal betont er, was zu einer angemessenen Lektüre von Hilberts GdG vonnöten ist ([151] 260): *„Il faut qu'il* [l'esprit] *se débarrasse de cette préoccupation* [de chercher une représentation sensible]“.

6.3.1.2 Strukturen und Anschauung

In Abschnitt 3.2 wurde dargelegt, wie die Herkunft der Strukturmathematik herangezogen wird, um an ihren methodischen, anwendungsorientierten Charakter zu erinnern. Wenn nun umgekehrt von einer Vorstellung der Strukturen als selbständigen Objekten ausgegangen wird, wird sich entsprechend ein distanzierteres Verhältnis zur historischen Herkunft einstellen, um so mehr, als diese historische Herkunft ja nicht der sachlich–systematischen Reihenfolge entspricht. Vergleichsweise harmlos ist WEYLs Äußerung [190] 538 *„We can not help feeling that certain mathematical structures which have evolved through the combined efforts of the mathematical community bear the stamp of a necessity not affected by the accidents of their historical birth“*. Die Frage, die uns hier zu beschäftigen hat — und die für den Vektorraumbegriff untersucht werden muß —, ist, welche Rolle der Anschauung bei der Herausbildung von Strukturen zugesprochen wird. BOURBAKI äußert sich in dem Aufsatz *Die Architektur der Mathematik*[65] auf S.158f: *„Natürlich kann es nicht geleugnet werden, daß die meisten* [Strukturen] *ursprünglich einen sehr bestimmten anschaulichen Inhalt hatten; aber erst dadurch, daß dieser anschauliche Inhalt absichtlich ausgeschaltet wurde, ist es möglich gewesen,* [den Strukturen ihre] *Wirksamkeit zu verleihen“*. Nach VOLKERT wurde *„von* [den] *Anhängern* [des Logizismus] *die These vertreten, daß die Anschauung völlig bedeutungslos für die mathematische Erkenntnis sei“* ([181] 260). Insbesondere ist das bei VUILLEMIN der Fall; [181] 274f:

> Vuillemins Position [erweist sich] als ahistorisch, da sie die Genese der Strukturen unberücksichtigt läßt. Dies beeinflußt auch seine Interpretation der Rolle der Anschauung: nur wenn man davon ausgeht, daß die Strukturen anschauungsunabhängig [S.275] gegeben sind, kann man Anschauung als nachträgliche Veranschaulichung interpretieren. Geht man hingegen den historisch und auch sachlich richtigen Weg, der die Strukturen aus Abstraktionen hervorgehen sieht, so spielt die Anschauung hierbei eine wesentliche Rolle.

Möglicherweise besteht die Schwierigkeit in der Mißverständlichkeit des Begriffs Anschauung (den Volkert natürlich systematisch präzisiert). Allein die Tatsache, daß die Strukturen durch eine Abstraktion von (gegenüber der Struktur so bezeichneten) ‚konkreten‘ Problemen gewonnen werden, heißt noch nicht, daß es sich dabei um eine Abstraktion von der Realität handelt. So kann in der voll ausgeprägten Strukturmathematik die Hierarchie der Strukturen (vgl. Abschnitt 3.3.1) wenigstens genealogisch so verstanden werden, daß Strukturen Instanzen anderer Strukturen sind (so wie ein Beispiel eines Moduls ein Vektorraum ist, nur daß dort der historische Weg ein getrennter ist, während es wohl auch tatsächlich Strukturen gibt, die aus spezielleren Strukturen hervorgegangen

[65] dt. in [137] 140–159 (hier verwendet); frz. in *Les grands courants de la pensée mathematique*, hg. von François LeLionnais bei Blanchard/Paris 1948

sind). DIEUDONNÉ macht deutlich, daß die Probleme, denen die Strukturen entspringen, nicht an die Realität gebunden sein müssen ([42] 405):

> Ich bezweifle, daß Thom es ernst meint, wenn er sagt, die Bourbaki–Gruppe hätte jemals [...] gehofft, die grundlegenden Strukturen der Mathematik würden sich „auf natürliche Weise aus einer Hierarchie von Mengen ergeben". Wenn auch die Mitarbeiter von Bourbaki nicht notwendigerweise Thoms Meinung teilen, daß mathematische Strukturen „durch die Außenwelt bestimmt" werden, so glauben sie jedoch, wie Hilbert, daß sich Strukturen aus ‚Problemen' ergeben, und daß die ‚Hierarchie der Mengen' zweifellos nur einen passenden leeren Rahmen darstellt, in den Strukturen im Zuge ihrer Entdeckung nach und nach eingefügt werden.

Mit diesen Schwierigkeiten des Begriffes ‚Anschauung' betritt man nun das Feld der Ontologie. Wenn nämlich die Bindung wissenschaftlicher Begriffe an die erfahrbare Realität zur Disposition gestellt wird, entsteht ein Vakuum, was die Ontologie der Begriffe angeht. Sämtliche denkbaren Redeweisen ‚die Vektorraumaxiome wurden entdeckt, freigelegt, herausgearbeitet, entwickelt, erfunden, geschaffen; sie entwickelten sich, entstanden, sind von vorneherein vorhanden' sind in der Sekundärliteratur auch tatsächlich anzutreffen; immerhin ist man ja darauf angewiesen, sich für wenigstens eine zu entscheiden, wenn man irgendetwas über unser Thema aussagen will. Zugleich kann man auf jedwede Entscheidung anschließend festgelegt werden. So wirkt es widersprüchlich, wenn einerseits lt. VOLKERT für den Strukturalismus *„immer wieder betont* [wird], *daß Strukturen d e f i n i e r t — also e r s c h a f f e n — und nicht e n t d e c k t — also v o r g e f u n d e n — werden"* ([181] 284) und ZADDACH zugleich von einer Struktur spricht, die von vorneherein existiert (#76).

Der Gedanke, der Mensch erschüfe irgendeinen Gegenstand seiner mathematischen Betrachtung selbst, wurde früher nicht ohne Kopfzerbrechen ausgesprochen. Man spürt es in einem Brief von GRAVES an HAMILTON (zitiert nach [25] 34):

> I have not yet any clear views as to the extent to which we are at liberty arbitrarily to create imaginaries, and endow them with supernatural properties. You are certainly justified by the event. You have got an instrument that facilitates the working of
> trigonometrical theorems and suggests new ones, and it seems hard to ask more; but I #82
> am glad that you have glimpses on physical analogies. #83

Nachdem Jahrzehnte später viele physikalische Anwendungen der Quaternionen bekannt sind, entwickelt TAIT seine Sicht über deren Ontologie. Er tut dies in seiner Note *On the claim recently made for Gauss to the invention (not the discovery) of Quaternions*[66], woraus hervorgeht, daß KLEIN — der wohl an der Herausgabe des GAUSS–Sammelwerkes mitgearbeitet hat — offenbar in Gauß' Nachlaß etwas über Drehsteckungen gefunden hat, was man als eine Erfindung der Quaternionen auffassen müsse[67]. Tait widerlegt die von Klein behauptete *Übereinstimmung* von Drehstreckungen und Quaternionen; er gesteht sehr wohl den *Zusammenhang* ein. Hier interessiert uns Taits Unterscheidung von *invention* und *discovery*, die schon im Titel anklingt. Tait stellt fest, daß in einem Vortrag von CAYLEY mit dem Titel *Coördinates versus Quaternions*, den dieser 1894 an selber Stelle hielt,

> the gain in compactness and expressiveness secured by the use of the quaternion method was allowed; but the concession was virtually nullified by the implication that, to be of any use, these simple expressions must be degraded into the vile elements of [...] i, j, k, which were looked upon as their *necessary* basis.

[66]in: Proceedings of the Royal Society of Edinborough **23** (1900), 17–23

[67][54] 157 macht Quellenangaben zu EULER und Gauß in dieser Richtung; beide Quellen waren zu Hamiltons Zeit nicht allgemein zugänglich.

> In reply, I allowed that this statement was to a certain extent warranted, provided the quaternions were regarded as Hamilton's brilliant *Invention* of 1843; — a splendid system of imaginaries; but insisted that it had no application whatever to the quaternion of the latter half of the century: — a *Discovery* of the highest order, in which the *Real* took everywhere the place of the *Imaginary.* From that point of view, of course, the discovery was the great thing, the invention merely an exceedingly elegant trifle. Still *both* were regarded as due exclusively to Hamilton.

Offenbar meint Tait, daß nach der Erfindung der Quaternionen durch Hamilton sich erst herausstellte, in welch reichem Maße sie tatsächlich in der Wirklichkeit zu entdecken sind (es spricht der Quaternionist?).

Auch PEIRCE mußte sich für seinen Verzicht auf physikalische Interpretation irgendwie verantworten. Nach [140] 257 entwickelte er eine Art Theologie der wissenschaftlichen Erkenntnis: was der Mensch herausfinden kann, das hat Gott ihm zum Herausfinden geschaffen; *„any product of man's mind was* [...] *an expression of* [...] *god's emotions"*. Ganz ähnlich liest sich GRASSMANNs Haltung bei #94. In gewisser Weise ist das eine Spielart von Platonismus: die Ideen sind in einer dem Menschen äußerlichen Welt bereits vorhanden, diesmal nicht in der natürlichen, sondern in der göttlichen.

Ich komme auf die Frage der Ontologie im nächsten Kapitel zurück, wenn nach einer Theorie der Akzeptanz wissenschaftlicher Konzepte gefragt wird.

6.3.1.3 Die ‚Versöhnung' von Strukturmathematik und Anschauung

Die vorangehenden Abschnitte betonten einen Gegensatz zwischen Strukturmathematik und Anschauung. Ihre methodische Bestimmung scheint die Strukturmathematik jedoch erst in der Vereinigung mit der Anschauung zu erreichen; es entsteht ein Zusammenspiel, aus dem die Wechselwirkung von Algebra und Geometrie erst ihre Leistungsfähigkeit bezieht. ZADDACH faßt es besonders treffend zusammen ([204] 18):

> Man *kann* Geometrie im klassisch–synthetischen Stil betreiben [...]. man *kann* andererseits, ohne Verbindung damit, algebraische Strukturen aufspüren und studieren. Aber erst bei der wechselseitigen Durchdringung der beiden Disziplinen erlangt man staunenerregende E i n b l i c k e, indem man die *“von der Anschauung vorgegebenen”* (d.h. durch die Erfahrungen im Raum unserer Sinneswahrnehmungen nahegelegten) Begriffe und Relationen der Geometrie von Anfang an unter dem Blickwinkel der Algebra betrachtet und sie mit dem dafür geeigneten Werkzeug behandelt. [...]

Weder scheint also die Strukturmathematik auf Anschauung verzichten zu können noch umgekehrt. Füe erstere Unverzichtbarkeit steht FRÉCHET ein; gleich dreimal (#61, #62, #63) beruft er sich auf natürliche Vorstellung bzw. den *bon sens*, um seinen Widerwillen gegen die willkürliche Geometrie auszudrücken, die entsteht, wenn kein Nachbarschaftsbegriff einbezogen wird. Die andere Unverzichtbarkeit ist in einer Formulierung von DIEUDONNÉ enthalten ([42] 408): *„Die meisten forschenden Mathematiker* [...] *verstehen unter einer axiomatischen Theorie ein vernünftiges und klares Verfahren, Definitionen und Theoreme aufzustellen, wodurch die ‚intuitive Vorstellung' eher präzisiert als ausgeschaltet wird"*. Es tritt also wieder das eigentliche Ziel der Strukturmathematik zutage, das zugleich ihre Fähigkeit ist: die Präzisierung.

6.3.2 Anschauung und Vektorraum: $\dim > 3$

Bezüglich des Vektorraumbegriffs ereignet sich der Verzicht auf Realitätsbezug im Übergang zu mehr als drei Dimensionen[68]; zur Frühgeschichte dieses Übergangs vgl. [193].

„Der Raum in n Dimensionen [war] *um 1870 Gemeingut der vorwärtsstrebenden jüngeren Generation geworden."* — so faßt KLEIN den Abschluß des Prozesses zusammen; er findet erste Schritte in Richtung n Dimensionen bei LAGRANGE, GAUSS, CAUCHY[69] und PLÜCKER ([96] I S.171f). Er weist auf CAYLEYs *Chapters on the analytical geometry of n dimensions* aus dem Jahre 1844 hin, die allerdings von der GRASSMANNschen Ausdehnungslehre als zusammenhängender Darstellung überschattet würden. Grassmann selbst hebt in der Vorrede zur A_1 (S.VII bzw. [71] I,1 S.10–11) als Vorteil der neuen Theorie heraus, daß die Beschränkung auf drei Dimensionen wegfalle. Dieser Vorteil wurde aber keineswegs sogleich von allen Geometern angenommen; nach Karin REICH betrieb selbst Grassmanns Sohn generell nur 3–dimensionale Geometrie ([156] 277f).

Interessant ist das Verhältnis HAMILTONs zur n–Dimensionalität. Hamilton erkennt durch seine Vektor–Skalar–Unterscheidung die vier Dimensionen von $\mathbb{H}$ nicht als gleichberechtigt an, sondern zeichnet drei aus (vgl. [25] 31). Hinzu kommt, daß nach [43] 6 Anm. „[Hamilton in applications of his quaternions in geometry] *always meant geometry in 3 dimensions, not in 4 dimensions*". Man könnte also auf den Gedanken kommen, Hamilton habe zunächst versucht, die Algebra zu *vollenden*, solange er sich den Kopf über *triplets* zerbrach — denn es mußte ja in einer als dreidimensional aufgefaßten Welt als unvollendet erscheinen, eine Arithmetik der Zahlen und der Zahlenpaare, nicht aber der Zahlentripel zu haben. Dieser Gedanke ist aber so nicht belegbar, denn bereits 1841 in Hamiltons Brief an DE MORGAN (zitiert nach [136] 176 Anm.11) heißt es:

> But, if my view of algebra be just, it must be possible, some way or another, to introduce not only triplets but polyplets, so as in some sense satisfy the symbolical equation $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; a being here one symbol, as indication of one (complex) thought; and $a_1, a_2, \ldots, a_n$ denoting n real numbers. #84

[166] 3 führt eine ähnliche Stelle aus den *Lectures on Quaternions* von 1853 an; aus Schlotes Anm.4 und [187] 396 geht aber hervor, daß Hamilton solche Ansichten bereits 1835 vertreten haben könnte. Laut ENDL ([55] 212f) wollte Hamilton gar eine koordinatenfreie Vektorrechnung für den dreidimensionalen Raum; das würde den Ansichten von TAIT entsprechen. Bekanntlich ging Hamiltons Gefährte Graves bald zu acht Dimensionen über, vgl. z.B. [140] 229 oder [153] 540.

Nach ZADDACH ([204] 5) wirken CAYLEY und SYLVESTER bahnbrechend bei der Einführung des n–dimensionalen Raumes als Schöpfer der Matrizenrechnung. So führte Cayley im Jahre 1844 lt. [136] 172 Anm.18 Matrizenalgebren ein[70]. Karen PARSHALL stellt allerdings fest, daß Cayley und Sylvester bei Matrizen bei maximal 3 Dimensionen blieben ([140] 249). Sylvester *fordert* jedoch lt. [140] 250 im Am. Math. J. **6** (1884), zu höheren Dimensionen überzugehen. Noch stärker sei der Beitrag von PEIRCE. Dessen LAA ermittelte immerhin bereits im Jahr 1870 alle Algebren bis zur Dimension 6 — und brach dort nicht aus prinzipiellen Gründen ab, sondern weil die Überlegungen und Angaben umso umfangreicher werden, je höher die Dimension ist.

Was das Stehenbleiben bei dreireihigen Matrizen betrifft, so waren Matrizen damals vermutlich nicht so sehr Darstellungen linearer Gleichungssysteme, sondern geometrischer Transformationen. Denn in der Theorie linearer Gleichungssysteme empfindet man die Schranke 3 als unnatürlich. Die Frage ist, wann sich Probleme stellten, die von höheren Gleichungssystemen beschrieben wurden. Nach ENDL fiel es den Algebraikern aus formalen Gründen leichter, die Hemmschwelle $n = 3$ zu

[68]daß späterhin die Realitätsbeschreibung ebenfalls auf mehr als drei Dimensionen zurückgriff, soll dabei außer Acht bleiben.

[69]vgl. auch [168] 16f.

[70]Cayleys Beiträge zur Linearen Algebra werden auf den Seiten 102–115 von Eric Temple Bell, *Mathematics: Queen and servant of sciences*, McGraw–Hill/NY 1951 untersucht. [51] 240 weist auf eine weitere Arbeit von Cayley aus dem Jahre 1846 hin.

überschreiten ([55] 213). BOURBAKI betont den Modellcharakter einer n–dimensionalen Geometrie als einer Sprache für die Resultate der Algebra in n Variablen ([18] 31dt. bzw. 32frz.).

Den entsprechenden Übergang in der Mannigfaltigkeitslehre behandelt SCHOLZ ([168] 263f). Zu RIEMANN äußern sich [16] 187, [19] 256 und [63] 9.

Der Übergang zu mehr als drei Dimensionen in der Geometrie stieß auf heftigen Widerstand. KLEIN spricht von der *„Ablehnung von philosophischer Seite, also dem zu erwartenden Einwand, daß der n–dimensionale Raum ein Unsinn sei“* ([96] I S.169). Diese Einstellung der Philosophen hängt natürlich damit zusammen, daß höherdimensionale Räume kein Anschaulichkeit bietendes Modell hatten, und zog ehrenwerte Bemühungen nach sich, diese Räume durch Vergleiche der Anschauung zu erschließen. HILBERT spricht in der GdG offenbar von einem *animal à deux dimensions* ([151] 262). Bekannt ist *Flatland — A Romance of Many Dimensions* von Edwin A. Abbott aus dem Jahr 1884 (dt. *Flächenland. Eine Geschichte von den Dimensionen*, Leipzig 1929). Hier wäre noch darauf hinzuweisen, daß es Entsprechendes auch für die Algebra gibt: Eine sehr gelungene anthropomorphe Allegorie der n–dimensionalen linearen Algebra findet man bei D. Lacaze, *Gens de* $\mathbb{R}^n$, in: Math. Sci. Hum. **87** (1984) 83–96.

Mit der *„Ablehnung von philosophischer Seite“* sind wir bei einer zentralen Gestalt der Erkenntnistheorie angelangt, die bislang fast völlig ausgespart wurde.

6.4 Der Einfluß von KANT auf die Erkenntnistheorie der Mathematik

Von besonderem Interesse ist die Wirkung, die die Philosophie Immanuel KANTs auf die in diesem Kapitel untersuchten historischen Stadien mathematischer Erkenntnistheorie hatte. Dieser Aspekt ist womöglich im Verlauf des Kapitels bereits vermißt worden, bietet sich aber aufgrund seiner Komplexität eher zu einer abgeschlossenen Darstellung an. Zur Darstellung der Wirkung Kants bedarf es eines knappen Überblicks über die Aussagen Kants zur Geometrie.

Nach Kant (Kritik der reinen Vernunft) sind geometrische Sätze synthetische Sätze *a priori.* Synthetisch heißt, sie sagen etwas aus, was über das schon im Begriff enthaltene hinausgeht, hängen nicht nur von Definitionen ab. *A priori* heißt, sie bauen nicht auf Empirie auf, sind also nicht zufällig. Die Erfahrung ist *a priori* an den Raum gebunden; Geometrische Sätze können nicht geändert werden (eine ausführliche Darstellung der Thesen der *Kritik der reinen Vernunft* zur Geometrie findet sich bei [201] in der Anmerkung 6 zu S.20 auf S.199f).

Zu Kants Begriffen ‚synthetisch‘ und ‚*a priori*‘ gibt es bekanntlich die Gegenstücke ‚analytisch‘ und ‚*a posteriori*‘. Wenn in der Mathematik der ersten Hälfte des 19.Jahrhunderts von synthetischen und analytischen Methoden der Geometrie die Rede ist, scheint mir der Bezug zu Kant zwar spürbar, aber nur noch locker (vgl. dazu Abschnitt 6.2.1.3). Das Begriffspaar diente sogar BIEBERBACH und Konsorten zur Unterscheidung jüdischen (=analytischen) mathematischen Denkens von arischem (=synthetischem; vgl. [161] 424) — mit der erwartungsgemäßen Beliebigkeit, in der nacheinander die extrem algorithmischen Arbeiten Paul GORDANs und die völlig abstrakten Emmy NOETHERs als ‚typisch jüdisch‘ erkennbar sein sollen. Ideengeschichtlich verwertbarer ist DORIERs Beobachtung, wonach HILBERT *„oppose ainsi à l'approche synthétique de Schmidt une démarche analytique qui, si elle est moins unifiante, a en revanche, l'intérêt de donner les méthodes constructives“* ([52] 289; es geht keinesfalls um Hilberts GdG, sondern um seine Arbeiten zur Theorie linearer Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten, vgl. Abschnitt 5.1.4.1).

Kants Philosophie hat in der ersten Hälfte des 19.Jahrhunderts großen Einfluß; etwa HAMILTON bezieht sich stark auf Kant. KOPPELMAN sagt ([100] 225):

> Hamilton quoted a passage from Kant to the effect that “we can think to ourselves no line, without *drawing* it in thought”

(die zitierte Passage von Hamilton findet sich lt. Koppelman in der Graves'schen Hamiltonausgabe Bd.3 auf S.426). Hamilton sucht — ausgehend von der Apriorität der Zeit in Kants Denken (entsprechend der des Raumes) — nach einer Auffassung der Arithmetik als *science of pure time* ([136] 176); laut SCHLOTE ([166] 16f Anm.5) führt ihn diese Idee zur Forderung der Linearität der *triplets*. Es gibt von Hamilton einen Aufsatz unter dem Titel *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time* aus dem Jahr 1837, in dem lt. CROWE ([25] 24f) Kant nicht erwähnt wird; das tue Hamilton erst in [81].

Auch bei GRASSMANN lassen sich Kantsche Elemente beobachten; die Begriffe ‚synthetisch' und ‚analytisch' spielen in Grassmanns philosophischem Unterbau der A_1 eine große Rolle, wenn auch wohl nicht streng im Sinne Kants. ‚*A priori/a posteriori*' sind bei Grassmann offenbar in ‚setzen/erzeugen' vertreten. Grassmann geht auch von einer Apriorität des Raumes für die Anschauung aus, vgl. A_1 S.XXIII (bzw. [71] I,1 S.23). Bedeutsamer als Kant sind für Grassmann aber andere Philosophen, vgl. dazu [139]. Insbesondere belegt [108], daß Grassmanns dialektische Ansätze (die ja auch in den angeführten Begriffspaaren zu spüren sind) von SCHLEIERMACHER herkommen, bei dem Grassmann in Berlin studierte ([25] 55). Die Dialektik der synthetischen und analytischen Verknüpfungen bei Grassmann ist implizit auch in unserer heutigen Vorstellung von Struktur enthalten. Diese unterscheidet zwar nicht mehr verschiedenartige Verknüpfungen, wo Grassmann das tat; sie untersucht eher das durch eine Verknüpfung vermittelte Verhältnis bestimmter Elemente zueinander. Dadurch kommen jedoch der einzelnen Verknüpfung sowohl synthetische wie analytische Aspekte im Sinne Grassmanns zu (der vielbemühte Vergleich mit der Dualität von Teilchen- und Wellennatur des Lichts drängt sich auf). Von diesem Gesichtspunkt aus kann man vielleicht verstehen, wieso MÖBIUS Grassmanns dialektische Auffassung der Grundoperationen hoch einschätzte und ihr zusprach, die Probleme der negativen Zahlen zu lösen (so geschehen in seinem Brief an Grassmann vom 02.02.1845) — ich erinnere daran, daß die negativen Zahlen zu jenen Zeiten noch ernsthaft diskutiert wurden, vgl. dazu [47] 283, [65] 1700, [153] 538.

Bekannt ist, daß GAUSS seine nichteuklidische Geometrie nicht veröffentlichte, weil er sich vor dem Geschrei der Böotier (also der Kantianer) fürchtete (vgl. [96] I S.59, wo sich auch ein Verweis auf die entsprechende Stelle in Gauß' Werken findet). Ähnlich scheint der Übergang zu mehr als drei Dimensionen (vgl. Abschnitt 6.3.2) einer geometrischen Anschauung im Kantschen Sinn zu widersprechen. Wegen Kants Verhältnis zu diesen beiden Fragen sei wieder auf die oben angegebene Stelle in [201] verwiesen. FREUDENTHAL wirft in [63] 8 die Frage auf, ob somit Kants Philosophie und deren große Verbreitung die geometrische Grundlagenforschung gehemmt haben. KOPPELMAN scheint von einer solchen Negativwirkung Kants auszugehen, liegt doch ein leichter Tadel in dem Satz „[Hamilton] *looked back towards Kant rather than forward to a more abstract point of view*" ([100] 228). Für die Tatsache, daß GRASSMANN sich zur Apriorität des Raumes für die Anschauung bekennt (s.o.), gibt NAGEL als Erklärung an, daß „*the contemporary scene was dominated by Kantian views on the indispensability of intuition for mathematics* [...]"[71]. Ich halte es aber auch für möglich, daß Grassmann ähnlich wie GAUSS Einspruch erwartete und diesem zuvorkommen wollte — schließlich hat er ja n–dimensionale Geometrie betrieben.

Man kann m.E. eine etwaige Unvereinbarkeit Kantscher Philosophie mit den neuen Ideen in der Mathematik genausogut als ein Moment der *Anregung* für die geometrische Grundlagenforschung sehen (wie etwa das Permanenzprinzip den Blick geschärft hat, vgl. Abschnitt 5.1.2.2); ich denke etwa an die intensive Diskussion, zu der lt. VOLKERT ([181] 163) die Kantsche Theorie der reinen Anschauung einerseits, die allmähliche Verbreitung der Nichteuklidischen Geometrie ab 1860 andererseits führte (Volkert verweist dazu auf Toth, I., *Die Nichteuklidische Geometrie in der Phänomenologie des Geistes*, Frankfurt 1972).

[71] Ernest Nagel, *The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry*, in: Osiris **7** (1939), 142–224, hier 173–174, zitiert nach [25] 79

Mir ist auch keine Aussage David Hilberts bekannt, in der er die Kantsche Anschauungslehre verwürfe. Vielmehr stellt er ab der fünften Auflage den GdG sogar folgendes Kantzitat voran: *„So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen"* (Kritik der reinen Vernunft B 730; vgl. dazu [178] 238f). Hilbert war der Auffassung, er habe einer bekannten Theorie — der Geometrie — endlich eine sichere Grundlage gegeben ([163] 989). Es ging ihm bei seiner Trennung der Geometrie von der Anschauung also vermutlich nicht darum, letztere ein für alle mal auszuschalten, sondern darum, klarzustellen, was an der Geometrie unabhängig von der Wirklichkeit ist, und so eine *Präzisierung* der Geometrie zu erreichen. Dann ist es auch nicht erstaunlich, ENDL sagen zu hören, Hilbert nähere sich EUKLIDs Geist am stärksten ([55] 215), weil sich diese Aussage nicht auf die Rolle der Evidenz bei Euklid bezieht, sondern auf Euklids Ziel einer Präzisierung der Geometrie (die Aussage heißt dann geradezu ‚Hilbert nähert sich Euklids Geist stärker als Euklid'). Hilbert wollte vermutlich im Grunde den Aufgabenbereich der Mathematik präzisieren; darauf deutet m.E. folgende Beobachtung VON NEUMANNs hin ([131] 33):

> Die Entdeckung der allgemeinen Relativitätstheorie zwang zu einer Revision unserer Ansichten über die Struktur der Geometrie in einem vollkommen neuen Rahmen und auch zu einer ganz neuen Verteilung der rein mathematischen Schwerpunkte. [Diese] Entwicklung fand in derselben Generation statt, in der die modernen axiomatisch–logischen Mathematiker Euklids axiomatische Methode vollkommen vom Empirismus befreiten und sie abstrakt faßten. Und diese beiden, scheinbar einander widersprechenden Auffassungen sind in einem einzigen mathematischen Geist vollkommen miteinander vereinbar; Hilbert [...]

Ich habe mich nun scheinbar ein wenig von Kant entfernt; durch diesen Exkurs ist aber das Verhältnis von Physik und Mathematik (um dessen Präzisierung es HILBERT gegangen zu sein scheint) in den Blick gekommen, was dem Verständnis der Wirkung von Kant möglicherweise förderlich ist. An der angegebenen Stelle in [201] ist weiter zu lesen, Kant habe in seiner vorkritischen Periode kühne, weittragende Ideen geäußert: Er bringe den Gedanken, daß die Intensität einer Wechselwirkung mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt[72], mit Dreidimensionalität in Verbindung, so daß ein Raum denkbar wäre, in dem mit anderer Wechselwirkung auch eine andere Geometrie herrschte. WUSSING zitiert Kant so: *„Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumarten wäre ohnfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte"*. In dieser Frühzeit hat also Kant verschiedene *denkbare* Wirklichkeiten zugelassen; liest man seine spätere Anschauungslehre von diesem Gedanken her, so steht plötzlich eine andere Aussage im Vordergrund als die Unveränderlichkeit geometrischer Sätze, eine Aussage, zu der die Arbeit Hilberts in *Kontinuität* steht, wenn man beide Gedankengebäude in der Weise miteinander verbindet, wie es Hermann WEYL (RZM S.3) tut:

> Erst Kant vollzog innerhalb der Philosophie mit völliger Klarheit den [...] Schritt zu der Einsicht, daß nicht nur die sinnlichen Qualitäten, sondern auch der Raum und die räumlichen Merkmale keine objektive Bedeutung im absoluten Sinne besitzen, daß auch *der Raum nur eine Form unserer Anschauung* ist. Innerhalb der Physik ist es vielleicht erst durch die Relativitätstheorie deutlich geworden, daß von dem uns in der Anschauung gegebenen Wesen von Raum und Zeit in die mathematisch konstruierte physikalische Welt nichts eingeht.

[72]diesen Punkt der Newtonschen Mechanik hat Kant übrigens nach Auffassung von Stephen TOULMIN falsch interpretiert; vgl. Toulmins *Foresight and Understanding*, Hutchinson/London 1961, Kapitel 5, bzw. dt. *Voraussicht und Verstehen*, suhrkamp taschenbuch wissenschaft 358.

Teil III

Akzeptanzgeschichte des Vektorraumbegriffs

Kapitel 7

Akzeptanz neuer mathematischer Konzepte allgemein

Das Ziel dieser Arbeit ist mit der sachlichen Untersuchung der ideengeschichtlichen Phänomene noch nicht erreicht. Diese Untersuchung hat zunächst ergeben, daß die Einführung des abstrakten Vektorraumkonzeptes ein Einzelphänomen in einem größeren ideengeschichtlichen Kontext ist, nämlich dem der Einführung derartiger abstrakter Konzepte überhaupt. Die große Zahl der ‚Anläufe', die einzelne Mathematiker in der Popularisierung des Begriffs gemacht haben, läßt es ferner weniger sinnvoll erscheinen zu fragen: ‚Wann kam die Idee, das abstrakte Konzept zu verwenden, erstmals[73] auf?', als vielmehr: ‚Wann — oder genauer: in welchen Schritten — und wieso ist die Idee in die Position innerhalb der Mathematik gelangt, in der sie sich derzeit befindet und vormals nicht befand?'. Auf den allgemeinen Fall übertragen geht es also nicht um die Tatsache, daß mathematische Sachverhalte überhaupt mit konzeptuellen Methoden angegangen werden, sondern darum, daß dieses Vorgehen irgendwann überhand nimmt, kanonisch wird.

MacLane formuliert diese Problematik in einem Abschnitt seiner Arbeit [110], der *Priority and Persuasion* überschrieben ist; er geht auch auf den Vektorraum ein (S.19f):

> An historical analysis of a movement like that of abstraction in algebra requires criteria different from those customary in the history of mathematics. When we are concerned with a particular and recognizable result [...] what matters most is the precise date on which this result was first discovered. However, when we are concerned with the introduction of a concept, we wish to emphasize not the date on which it was first discovered, but the time at which it was first widely accepted. It is often possible for many different people to think of the concept but not recognize that it will be important. Occasionally, they do not have the courage or foolhardiness to advertise its importance, or they attempt to do this before the time is ripe. The weight of historical importance lies precisely in this recognition of importance.
>
> [S.20] [...] The formal definition of a vector space by axioms and not by n–tuples is [...] such [an] example. It could have been introduced and understood by Grassmann in 1842, it was introduced by Peano in 1888, but it was not introduced *and* effectively advertised before Weyl (1918) and Banach (1922). [...] In the conceptual parts of mathematics, it is not the discovery but the courage and conviction of importance that plays a central role.

[73] [136] 3: *„new [...] general concepts [...] are not created suddenly by a single creative act"*. Es ist nach Wilder ein *„principle of popular folklore* [that] *everything has a beginning; no historian worth his salt can fail to produce one"* ([198] 428). Wilder glaubt jedoch, daß es eigentlich gar keine solchen Anfangspunkte gibt (ebd. 427).

Der Grund dafür besteht vermutlich in folgendem: Konzeptuelle Neuerungen sind nicht Entdeckungen eines Faktums, wie es ein *particular and recognizable result* ist; sie sind auch selbst keine Lösungen vorhandener Probleme, sondern geben allenfalls eine Lösungsmethode an die Hand. Somit geht es nicht darum, die übrigen Mathematiker von der Faktizität irgendwelcher Aussagen zu überzeugen, was durch einen Beweis (in gewissen Grenzen) geleistet würde, so daß der historische Zeitpunkt des Beweises oder der Plausibilitätsbetrachtung von Bedeutung wäre. Vielmehr geht es darum, die übrigen Mathematiker von der Nützlichkeit der präsentierten Methode zu überzeugen; vorhandene Probleme müssen dabei oft erst in die Sprache der neuen Methode übersetzt werden, bevor sich deren Nützlichkeit in der Lösung solcher Probleme manifestieren kann. Die Mathematiker werden also nicht aufgefordert, die vorgeschlagene Lösung des ihnen bekannten Problems anhand der ihnen bekannten Kriterien zu prüfen; sie werden aufgefordert, ihre Vorstellung davon, welches die Probleme, Lösungen und Kriterien sind, zu ändern. Diesen weiterreichenden Schritt gehen sie nur, wenn sie dafür, vorläufig ausgedrückt, einen ‚triftigen Grund' sehen bzw. gezeigt bekommen (*advertising*). Im Folgenden soll nun untersucht werden, was solche triftigen Gründe sind.

Bei der Frage nach der Nützlichkeit wird zunächst ein Blick auf die von den jeweiligen Autoren intendierten Anwendungen angemessen sein. Daß es WEYL und BANACH im Gegensatz zu PEANO gelang *to advertise effectively*[74], würde dann bedeuten, daß der Bezug zur Relativitätstheorie bzw. zur Theorie der Integralgleichungen (vgl. aber die Bemerkungen in Abschnitt 5.1.4; man möchte noch VON NEUMANN und die Quantenmechanik ergänzen) den Zeitgenossen Weyls und Banachs triftiger erschien als der Bezug zur Ausdehnungslehre den Zeitgenossen Peanos. Interessant sind auch die Bemühungen der Modernen Algebra (vgl. Abschnitt 5.1.3) um *effective advertisement.* Die WEYLsche Bemerkung in [130] auf S.VII belegt ja nicht nur seinen Kontakt zur modernen Algebra, sondern auch deren Bemühen um Durchsetzung ihres Standpunktes; ebenso hat der Vortrag von HASSE [83] das erklärte Ziel, um Verständnis für diesen Standpunkt zu werben, vgl. ebd. S.22.

Bestimmend für die Bereitschaft der übrigen Mathematiker, sich einer neuen Begriffsbildung anzuschließen, sind die *Standardmodelle* der Theorie. VOLKERT ([181] 275) unterscheidet Standardmodelle (auf die bezogen die Theorie entwickelt wird) und Nonstandardmodelle (die erst nach Formulierung einer Struktur als Instanzen derselben erkannt werden). So sind im *Calcolo* offenbar die verschiedenen *Formazioni* die Standardmodelle; die zukunftsträchtigen Beispiele $\mathcal{L}(A,B)$ und $\mathbb{R}[X]$ scheinen für Peano eher Nonstandardmodelle zu sein. In **82.** wendet er die Transformationstheorie auf das nachgerade uninteressante Beispiel der *Formazioni su d'una retta* an. Der einzige Raum, auf den Peano die Resultate von **83.** 14. (vgl. S.50) anwendet, ist ebenfalls ein nachgerade uninteressantes Beispiel[75]. Der Kerngedanke ist, daß die Relevanz von Beispielen nachgerade, aus der je aktuellen Perspektive der Mathematik festgelegt wird. Ob ein Modell *unmittelbares* Standardmodell ist oder nicht, ist zweitrangig; die Frage ist, ob die Leser der Arbeit es *standardisieren* oder nicht (d.h. Standardmodelle können in der Versenkung verschwinden, ursprüngliche Marginalien können plötzlich im Zentrum stehen).

Ich halte es für falsch, davon auszugehen, daß sich die Mathematiker bei ihrer Auseinandersetzung mit vorgeschlagenen konzeptuellen Neuerungen ausschließlich von mathematikimmanenten Argumenten leiten lassen. Das wäre insofern in sich widersprüchlich, als die Neuerungen gerade die Vorstellung davon betreffen, was denn der Mathematik immanent ist. Nach welchen Argumenten sind sie dann aber doch bereit, diese Vorstellung zu ändern? Was meinte MacLane eigentlich, als

[74] Ob es übrigens Weyl tatsächlich gelang, ist noch die Frage: MOORE äußert [127] 277 in Anm.8, RZM sei bis 1933 praktisch nicht zitiert worden; mir ist eine Zitation von Weyls Definition bei Andreas MARKOFF in den Annals of Mathematics **36** (1935), 465–506 bekannt, wo es um topologische Gruppen geht. Weyl selbst ärgert sich noch 1928 darüber, daß die lineare Algebra immer noch nicht Allgemeingut ist (vgl. Kapitel 1). MacLane hat hier wohl auch seine persönliche Geschichte geschrieben, denn zumindest er hat den Begriff ja von Weyl gelernt, vgl. die Bemerkungen zu seiner Studienzeit in Kapitel 2.

[75] auch KREYSZIG glaubt, daß Peano in zu uninteressantem Gebiet ansetzt ([102] 31).

er sagte *the time is ripe*?

7.1 Mathematiker und Mathematikgeschichte

An dieser Stelle sind einige Bemerkungen über das Verhältnis ‚typischer' Mathematiker zur Erforschung der Geschichte ihres Fachs nötig: Welche Vorstellungen von historischer Kausalität in der Entwicklung des Fachs haben sie, welche gefühlsmäßigen Antworten geben sie auf Fragen nach den Gründen für bestimmte historische Prozesse? Nicht so sehr die Akzeptanz, sondern zumeist die vorgeschaltete Herausarbeitung der Begriffe ist Gegenstand der folgenden Äußerungen; diese gehören also nicht in dem Sinn hierher, daß die Richtigkeit der intendierten Aussage untersucht würde. Vielmehr suche ich verborgene, zwischen den Zeilen geäußerte Überzeugungen, denn diese Überzeugungen sind die Kriterien für Akzeptanz oder Ablehnung eines Konzepts. Die in diesem Abschnitt wiedergegebenen Vorstellungen sind eher Gegenstand historischer Forschung als ein Beitrag zu dieser; sie halten zwar genauerer Betrachtung nicht stand, haben aber sozusagen einen wahren Kern.

Zunächst muß man sagen, daß Mathematiker sich nur wenig mit der Geschichte ihres Fachs beschäftigen. Das ist weniger Desinteresse als eher die Notwendigkeit, sich auf andere Dinge zu konzentrieren. WILDER sagt es so ([198] 423): „[We are] *so busy creating new mathematics that we have little time or patience to view our behaviour from the outside and study its characteristics* [...]". Einen systematischen Beitrag zu dieser Frage stellt *Über das Interesse von Mathematikern an der Geschichte ihrer Wissenschaft* von Reinhard Siegmund–Schulze[76] dar.

Sehr unterschiedlich ist das Verhältnis einzelner kreativer Mathematiker zur Geschichte (also zu dem, was für sie jeweils Geschichte ist): Während es PEANO um bewußte Anknüpfung an die Geschichte ging, brach HILBERT bewußt mit ihr ([95] 135). ROWE pointiert Hilberts Geschichtsauffassung ([162] 192):

> [...] Hilbert had no need for heroes. [...] he was an utterly ahistorical thinker who measured the quality of a mathematician's work by the number of earlier investigations it rendered obsolete. #85

Ähnlich suchte die Bourbaki–Gruppe lt. [41] 139 und [181] 274 bewußt die Trennung von der Geschichte. Die Vertreter der modernen Algebra hatten lt. FISHER ([58] 155f) ein verzerrtes Geschichtsbild im Blick auf die Invariantentheorie. Als ‚Todesstoß' dieser einst blühenden, heute in den Hintergrund gerückten Theorie wird zuweilen HILBERTs Basissatz (vgl. [58] 148, [113] 5ℓ, [135] S.161, [142] 14ℓ) bezeichnet. Fisher bespricht den *symbolic status* von Hilberts Äußerungen über dieses Ende der Invariantentheorie im Zusammenhang mit seinem Basissatz, die seinerzeit irrelevant waren und später hochstilisiert wurden ([58] 139). Die Ideologien einer *specialty* werden zur Grundlage zur Erklärung der Vorgänge für die Mitglieder der *specialty* (ebd. 140), d.h. die Mathematik, die man selbst betreibt, wirkt zurück auf die Sicht, die man von der vorausgegangenen Mathematik hat.

Ein besonders interessanter Themenkreis sind die Vorstellungen von den Mechanismen, die der Geschichte des Fachs zugrundeliegen. Sehr verbreitet ist die Vorstellung, daß die Geschichte der Mathematik, was das Herausbilden von Begriffen angeht, irgendwie zwingend oder notwendig verläuft. Dabei geht es weniger darum, daß bestimmte Begriffe oder Resultate zwangsläufig von dem bestimmten Mathematiker formuliert werden mußten, von dem sie tatsächlich formuliert worden sind; man glaubt lediglich, daß diese Begriffe und Resultate nicht verborgen bleiben konnten (insbesondere glaubt man also, daß sie verborgen waren). Eine solche Vorstellung einer ‚inneren Notwendigkeit' kommt in WEYLs Äußerung, die zum Beginn des Abschnitts 6.3.1.2 wiedergegeben

[76] in: Demidov, Sergej et al. (Hg.), *Amphora. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65.Geburtstag*, Birkhäuser/ Basel 1992

ist, zum Ausdruck; ein weiteres schönes Beispiel liefert GRASSMANN in #94. Bereits in den Termini ‚Entwicklung', ‚Entwicklungspotential' sind Vorstellungen enthalten, Veränderungen gingen nach Plan vor sich, seien zwingend, angelegt, determiniert, zielgerichtet. Bezeichnend ist dabei der Gedanke, das Konzept sei unabhängig von seinem Schöpfer. MONNA fragt, wer wohl an CANTORS Stelle die Mengenlehre entwickelt hätte — jemand hätte es ja doch tun müssen ([126] 221 bzw. [124] 14); FEARNLEY–SANDER vertritt die Auffassung *„had he* [Boole] *not discovered his algebra of logic someone else would soon have done so"* ([57] 163). HAWKINS meint, manche Dinge in der Darstellungstheorie wären auch ohne FROBENIUS gekommen ([88] 144). Wie einer Beschreibung eines schlüpfenden Vogels aus Brehms Tierleben entnommen klingt WILDERS Satz ([198] 425) *„a concept is about to make its appearance"*.

In diese Richtung geht auch die Ausdrucksweise *the time was ripe*, mit der MacLane nicht allein steht. KLEIN schildert am Beispiel der Nichteuklidischen Geometrie, die Zeit selbst trage die Reifestunde großer Ideen in sich ([96] I S.57); er spricht GAUSS einen ausgeprägten Blick für die Zeichen der Zeit zu (ebd. 62). Gerne wird auch gesagt, eine Idee habe ‚in der Luft' gelegen ([204] 67; [25] 11: *„The idea of a graphical representation of complex numbers was certainly "in the air" at that time"*; ebd. 34: *„There was a felt need for such a system as the quaternions"*). Als Evidenz für diese Vorstellungen dienen dann die zahllosen Beispiele für Simultaneitäten. Eine Liste findet man bei [192] **88** S.295ℓ; weitere Beispiele nennen [142] 12r (HESSE/BOOLE), [140] 289 (CARTAN/FROBENIUS) und [110] 13 (MAYER, ALEXANDROFF und andere führten unabhängig voneinander Homologiegruppen ein). CROWE spricht in [26] als *law 8* aus, daß Simultaneitäten die Regel, nicht die Ausnahme sind.

NOVÝ bringt den *nachträglichen* Charakter der Wertung, die Zeit sei reif gewesen, auf den Punkt, wenn er daran erinnert, daß ja die Zeitgenossen oft wenig Verständnis für die Innovationen aufbringen ([136] 2). Wenn dieser Widerstand (der sich auch in Desinteresse ausdrücken kann) groß ist, kann eine heute als unabdingbar angesehene Begriffsbildung auch wieder in der Versenkung verschwinden und auf ihre (bestenfalls bibliographische, meist aber unabhängige) Wiederentdeckung warten, siehe PEANO. In solchen Fällen sagt man dann hinterher umgekehrt, die Zeit sei noch nicht reif gewesen (womit dann natürlich die Behauptung unterhöhlt ist, in den anderen Fällen habe eine schiere historische Notwendigkeit das Auftreten des Begriffes bewirkt, denn was hätte denn dann hier das Auftreten bewirkt?). So erging es nach PURKERT DEDEKINDS Körperbegriff, der zwanzig Jahre unbeachtet blieb ([152] II S.15); WUSSING sieht CAYLEYS Vorstoß in Richtung Gruppentheorie von 1854 als historisch verfrüht an, weil es damals weder die allgemeinen Voraussetzungen für eine Anerkennung abstrakter Begriffe noch genügend konkrete Vorstellungen als Motivierung gegeben habe ([200] 25). Wussing erklärt solche Verzögerungen mit der Herstellung einer Äquivalenz des Logischen mit dem konkreten Material als Ziel der jeweiligen Mathematikentwicklung ([200] 26, 34, [202] 23).

Gern wird auch ein Vorgang, eine Begriffsbildung nachgerade als ‚natürlich' bezeichnet. Dazu wird dann oft auch bemerkt, daß man auf solche rückblickend naheliegenden Entwicklungen rückblickend lange warten mußte. Solche Äußerungen gibt es gerade auch in unserem Zusammenhang: Schon in Erinnerung gerufen wurde, daß WEYL 1928 unzufrieden ist mit der Geschwindigkeit der Rezeption des Vektorraumbegriffs. Auch DIEUDONNÉ scheint es unglaublich, daß *„the basic notions of specific structures such as group or vector space were emerging very slowly"* ([44] 7; das vollständige Zitat findet sich bei #88). CROWE meint betreffend den komplexen Zahlen, daß *„the acceptance of this idea was very slow"* ([25] 11) und gibt ferner eine ganze Liste von Beispielen, wo es länger dauerte, woraus er schließt, daß das ganz normal ist (ebd. 33). GRAY hingegen sieht noch Erklärungsbedarf ([73] 68):

> [...] the problem is not merely to assess the neglect of Grassmann by mathematicians, but to respond to the fact that for 50 years mathematicians worked confidently without feeling the need to elaborate an abstract structure, when it is now so often assumed

> that making such abstractions is essential to mathematical work.

Grays Gedanke lenkt das Augenmerk auf den Punkt an der hier unternommenen Zusammenstellung ‚verborgener Überzeugungen', der uns im folgenden beschäftigen wird, daß es nämlich *unbewußte* Überzeugungen sind. Niemand kommt auf die Idee, daß es sich bei Vorstellungen, die einem Konzept zugrundeliegen, um Überzeugungen handelt in dem Sinn, daß *man auch anderer Überzeugung sein könnte*. So ist der Rekurs auf die ‚Natürlichkeit' einer Begriffsbildung zu interpretieren.

Eine letzte Beobachtung, die hier mitgeteilt werden soll, ist, daß den Wissenschaftlern offenbar eine Vorstellung vom linearen Geschichtsverlauf eignet.

> [There] is a sometimes drastic distortion in the scientist's perception of his discipline's past. More than the practitioners of other creative fields, he comes to see it as leading in a straight line to the discipline's present vantage. In short, he comes to see it as progress.

Im weiteren Verlauf will ich den Inhalt des Buches [106] — aus dem dieses Zitat stammt (S.167) — und die Relevanz dieses Inhalts für die Interpretation der mitgeteilten Beobachtungen darstellen.

7.2 Kuhn

Zur Erklärung der akzeptanzgeschichtlichen Phänomene ist es nach meiner Auffassung hilfreich, eines der in der Theorie exakter Wissenschaft bis dato einflußreichsten Werke — Thomas Samuel Kuhns *The structure of scientific revolutions* [106] — heranzuziehen. Ich komme zu dieser Überzeugung deshalb, weil oben geäußerten Beobachtungen die Grundgedanken von Kuhn entsprechen, wonach sich bei konzeptuellen Neuerungen die — den Wissenschaftlern unbewußten — Vorstellungen davon ändern, was einer Wissenschaft immanent ist, also welche Fragen wissenschaftliche Fragen sind.

Die Veröffentlichung von Kuhns Buch im Jahre 1962 ließ auch die mathematischen Wissenschaftstheoretiker nicht unberührt. Die Kuhnschen Termini *revolution, paradigm, puzzle, normal science, anomaly, crisis, conversion, disciplinary matrix* wurden versuchsweise auf Episoden der Mathematikgeschichte angewandt. Leider waltete dabei oft zu wenig kongeniale Sorgfalt, so daß Kuhns Theorie nicht mehr recht wiederzuerkennen ist. Ich suche hier kritischen Anschluß an die gleichzeitig entstandene Diskussion darüber, ob eine solche Anwendung überhaupt sinnvoll ist. Ich möchte mich dem entsprechend geprägten Diskurs schon deshalb nicht entziehen, weil für die vorliegende Arbeit selbst vermutlich genauso gilt, was sie ihrerseits am Beispiel von Grassmanns Arbeiten lehrt, nämlich wie sehr ein diskursives Außenstehen der Akzeptanz schaden kann.

Die Kuhnsche Definition seines Begriffes des Paradigmas (*paradigm*) anhand der *effektiven Eigenschaften* desselben (also sozusagen eine konzeptuelle Definition) auf S.10 von [106] ist hervorragend auf die Mathematik übertragbar:

> Aristotle's *Physica*, Ptolemy's *Almagest*, Newton's *Principia* and *Opticks*, Franklin's
> *Electricity*, Lavoisier's *Chemistry*, and Liell's *Geology* — these and many other works
> served for a time implicitly to define the legitimate problems and methods of a research
> field for succeeding generations of practitioners. They were able to do so because they
> shared two essential characteristics. Their achievement was sufficiently unprecedented #86
> to attract an enduring group of adherents away from competing modes of scientific
> activity. Simultaneously, it was sufficiently open–ended to leave all sorts of problems #87
> for the redefined group of practitioners to resolve.
>
> Achievements that share these two characteristics I shall henceforth refer to as ‚paradigms', [...]

7.2.1 KUHN und Ontologie

Es läßt sich recht gut illustrieren, was ein solches Paradigma ist, wenn man die Frage, ob Kuhns Theorie — die für die Naturwissenschaften entwickelt wurde — auf die Mathematik anwendbar ist, in Verbindung bringt mit der Frage nach der Ontologie mathematischer Gegenstände, d.h. ob diese Gegenstände vor dem menschlichen Denken vorhanden sind oder erst durch dieses erschaffen werden[77]. Ich gehe davon aus, daß jene Anwendbarkeit gegeben ist (versuche das auch zu begründen) und entwickele von dieser Prämisse aus eine Qualifizierung der ontologischen Frage. Somit ist mein Ergebnis nicht logisch zwingend, sondern eine hypothetische Theorie, wie es sich verhalten *könnte*.

Es sieht vom Blickwinkel der ontologischen Fragestellung so aus, als bedeutete die Abkehr von Evidenzforderung und Realitätsbeschreibung ontologisch eine Verschiebung weg von *discovery* hin zu *creation*. So beruht auch der Streit um das Verhältnis von Strukturmathematik und Anschauung, den ich in Abschnitt 6.3.1.2 dargestellt habe, auf dieser Vorstellung (während der Streit um die impliziten Definitionen ein logischer ist). Ich glaube aber, daß dieser Blickwinkel von der eigentlichen Problematik ablenkt.

Ich glaube nicht, daß die Ontologie der mathematischen Gegenstände ein Problem bei der Anwendung Kuhnscher Theorie auf die Mathematik darstellt. Ich möchte keine Entscheidung treffen, ob denn nun die mathematischen Gegenstände eine andere Ontologie haben als die Gegenstände der Naturwissenschaft, weil ich eine solche Unterscheidung in meiner Argumentation nicht benötige. Im Gegenteil glaube ich, daß ontologische Aussagen bereits paradigmatische Aussagen sind. Sie können also nur scheinbar ein Argument dafür oder dagegen sein, daß Kuhns Theorie hier anwendbar ist, denn Kuhns Theorie sagt etwas über diese Aussagen aus. Zunächst gebe ich ein heuristisches Argument, das noch dem Muster ontologischer Aussagen verpflichtet ist. Kuhns Theorie besagt gerade, daß schon der Versuch, das Verhalten naturwissenschaftlicher Gegenstände — die doch empirisch, sozusagen ‚handfest' sind — zu beschreiben, von ‚irrationalen' Mechanismen bestimmt ist (genauer besteht die Irrationalität darin, daß Rationalität gerade das ist, worüber übereingekommen wird, also etwas Wandelbares; vgl. [106] 122f). Ich sehe nicht, wieso ausgerechnet die Mathematik mit ihren soviel idealeren Gegenständen vor solchen Vorgängen gefeit sein sollte, müssen doch mathematische Theorien nur noch vor dem Geist selbst (dem paradigmatisch erzogenen), nicht mehr vor der Empirie bestehen.

Ein systematisches Argument unterstreicht, an welchen Stellen bereits die Unterscheidung zwischen Gegenständen der Mathematik und solchen der Physik, auf die gerade rekurriert wurde, künstlich ist[78]. Kuhns Theorie zielt nicht auf die Beschreibung und Erklärung immanent ideengeschichtlicher Belange, sondern beschäftigt sich mit dem Verhalten der Wissenschaftler selbst. Ihm geht es darum, daß die Wissenschaftler keine absolute Wahrheit erreichen, sondern sich jeweils darüber einigen, welches Beschreibungsmodell die empirisch erfaßte Wirklichkeit am besten beschreibt. Ein solches Modell kann schon deshalb seine Akzeptanz einbüßen, weil neue Phänomene bekannt werden, die sich mit ihm nicht beschreiben lassen; es kann aber auch sein, daß ein auf neue Phänomene zugeschnittenes neues Modell auch die alten besser beschreibt. Dieser Relativität ungeachtet ist es allerdings das Kennzeichen wissenschaftlichen Diskurses, das jeweilige Beschreibungsmodell zu immunisieren, zu absolutieren; diese Unterstellung der Unabänderlichkeit, die mit der Bagatellisierung der alten Modelle einhergeht, hält erst die Wissenschaft zusammen — obwohl sie die Unabänderlichkeit von etwas behauptet, was nach aller Erfahrung von einem späteren Stadium der Wissenschaft seinerseits bagatellisiert werden wird.

Wichtig ist hierbei, daß die Vorstellung der Theoriegeleitetheit jeder Wirklichkeitserfassung eine

[77] wohl am poetischsten gibt SPERNER die Unterscheidung wieder mit ‚gefunden — erfunden'; er illustriert es an den unendlich fernen Punkten: Diese können gar nicht gefunden, müssen also erfunden werden — *„unendlich ferne Punkte sind eben n i c h t da,* [werden] *aber nichtsdestoweniger mit großem Erfolg gebraucht"* ([172] 10). JAHNKE bezeichnet solche mathematischen Gebilde als transphänomenale Konstrukte ([93] 175).

[78] CROWE versucht in [27] 271 eine Widerlegung der *misconception „The methodology of Mathematics is radically different from the methodology of Science"*.

Unterscheidung zwischen Phänomenen und Beschreibungen letztlich aufhebt. Kuhn betont mehrfach, daß die Anhänger eines Paradigmas tatsächlich *etwas anderes* sehen und beobachten als die Anhänger eines anderen Paradigmas (und nicht bloß, daß sie etwas anders sehen). Erst diese Feststellung — daß die scheinbare Reduktion der Untersuchung auf das Verhalten der Wissenschaftler unter scheinbarer Ausklammerung der Wirklichkeit, die ihnen nun wirklich als Unabänderliches gegenüberstünde, in Wahrheit schon das Ganze ausmacht — erlaubt meines Erachtens eine Anwendung der Kuhnschen Theorie auf die Mathematik, in der eine Unterscheidung zwischen Phänomenen und Beschreibungen schwerfällt. Damit ist auch die Vorstellung einer idealen Mathematik aus Abschnitt 6.2.2.2 suspendiert.

Von hier aus kann man THOM begegnen, der den Erklärungserfolg der Mathematik als starkes Argument für den Platonismus bzw. diesen deshalb als ökonomischste Ontologie ansieht ([176] 378). Erklärungserfolg kann aber kein Argument für Platonismus sein, wenn die Wirklichkeitserfassung bereits theoriegeleitet ist; daß die Wirklichkeit nämlich der Theorie entspricht, durch die sie betrachtet wird, ist trivial. Gerade weil es Kuhn darauf ankommt, daß die Wirklichkeitserfassung (die die *facts* liefert) immer schon theoriegeleitet ist, nivelliert er den Unterschied zwischen *discovery* und *invention* in der Physik ([106] 52):

> [...] considering first discoveries, or novelties of fact, and then inventions, or novelties of theory. That distinction between discovery and invention or between fact and theory will, however, immediately prove to be exceedingly artificial.

Die Unterscheidung von *discovery* und *invention*, von *fact* und *theory* ist auch in der modernen Mathematik nicht sinnvoll[79].

Daß dennoch das Verhältnis mathematischer Aussagen zur Wirklichkeit Gegenstand einer Immunisierung sein kann, erklärt sich von dieser Warte als Indiz eines Paradigmas. Man kann nämlich (und hat es getan) entweder der Meinung sein, die Mathematik habe sich nur mit Dingen zu beschäftigen, deren Teilhaftigkeit an der Wirklichkeit gesichert ist (oder scheint), oder der Meinung, auf eine solche Rückbindung (ob vorhanden oder nicht) nicht achten zu müssen. Das Sensationelle an dem Verzicht der Axiomatiker HILBERTscher Prägung auf die Frage nach der Wahrheit ihrer Axiome ist gerade, daß diese Axiome Gegenstände betreffen, die traditionell der Wirklichkeit zugerechnet wurden, so daß eine Aussage über sie immer daraufhin befragt wurde, ob sie wahr ist. Genauer gesagt haben die Hilbertianer solche Gegenstände usurpiert, ihnen durch die neue Behandlungsweise ein neues Gesicht gegeben, kurz sie haben diese Gegenstände geändert. Und so trägt der Streit der beiden genannten Meinungen alle Charakteristiken eines Kuhnschen Paradigmenwechsels. Im Sinne dieser Analyse sind ontologische Aussagen paradigmatische Aussagen. Das Paradigma kann auch darin bestehen, die Ontologie auszuklammern; das belegt aber nur, daß die Fragbarkeit der Ontologie zu den dem Paradigma unterworfenen Fragbarkeiten gehört.

7.2.2 *anomalies, crisis* und *revolution*

KUHNS Kernbegriff ist der der *scientific revolution*. Diesem liegt die Vorstellung zugrunde, daß im Verlauf wissenschaftlicher Betätigung ‚harte' Probleme auftauchen, die sich allen dem herrschenden Paradigma verpflichteten Lösungsversuchen widersetzen, sogenannte *anomalies*. Diese Stagnation führt irgendwann zu einer *crisis* der Wissenschaft, aus der herauszukommen schließlich nur durch einen Wechsel des Paradigmas möglich ist, einen Wechsel, der das Bild der Wissenschaft so grundlegend verändert, daß man von ‚Revolution' spricht.

[79] plastisch wird das auch an FISHERS Beschreibung der in der Mathematik vorkommenden Arbeitsweisen ([?] 1100): *„Two stereotypical styles of work are evident.* [...] *Men in* [the first] *category search for problems which can be solved by their methods, while those in the other try out many techniques in their attempts to solve a given set of problems"*.

Über die Anwendbarkeit dieses Begriffs in der Wissenschaftstheorie der Mathematik wird besonders heftig gestritten. CROWE hat in [26] als *law 10* formuliert, daß in der Mathematik keine Revolutionen stattfinden. Darauf antworteten ihm verschiedene Autoren; es entstand das Sammelwerk [69] (eine Übersicht über die darin vertretenen Positionen gibt [205]). Crowe selbst hat in [27] 264 sein *law 10* relativiert. BOI ([16] 202) hält die Kuhnsche Unterscheidung *normal/revolutionary* für unfruchtbar in der mathematischen Wissenschaftstheorie und schlägt (ebd. 195) statt dessen ENRIQUES' *extensive/intensive science* vor, die dieser auf dem ICM 1912 entwickelt habe; ähnliche Positionen würden auch WEYL, HUSSERL, CASSIRER, CAVAILLÈS vertreten.

Im Begriff ‚Revolution' kann man einen Urheberanteil und insofern einen ontologischen Ausschlag zugunsten *creation* sehen; neutraler kann man mit MONNA ([124] 2, 4) von *discontinuity* sprechen. Es wird dann entsprechend gefragt, ob sich in der Mathematikgeschichte tatsächlich *discontinuities* ereignet haben, oder ob die unterschwellige Vorstellung eines stetigen Geschichtsverlaufs stimmt. Klar sein sollte nach dem bisher Gesagten, daß diese terminologische Feinheit nicht wirklich wichtig ist.

Jedenfalls scheint es in der Mathematik *anomalies* zu geben. NOVÝ bringt im Vorwort seiner umfassenden Geschichte der Algebra im 19.Jahrhundert den grundlegenden Wandel, den diese Disziplin durchgemacht hat, mit dem Vorhandensein von *„unsolvable problems, results in contradiction with the prevailing concepts"* in Verbindung ([136] 3). Mathematische Probleme, die im 19.Jahrhundert als solche *anomalies* gesehen worden sein könnten, sind etwa die Frage nach der allgemeinen Lösung der Gleichungen fünften Grades oder die nichteuklidische Geometrie.

In unserem Zusammenhang ist ausschließlich interessant, ob Resultate, die ich als zur Ideengeschichte des Vektorraumbegriffs gehörig erkannt und beschrieben habe, als revolutionär oder ähnliches charakterisiert werden. So bezeichnet MEHRTENS die *british symbolical algebra* als *epistemological rupture* ([117] 43; er spricht von *british modern algebra*). CROWE bewertet GRASSMANNS Arbeiten als deutlichen Einschnitt in der Mathematikgeschichte: [25] 54f: *„His* [Grassmanns] *creative act cannot be compared with such mathematical discoveries as the Pythagorean theorem or Newton's version of the calculus. Rather it is best thought of as comparable to such creations as non–Euclidean geometry or boolean algebra"*; ebd. 77: „[die Ausdehnungslehre] *departed from all the then current mathematical traditions"*. Das Wort ‚Revolution' verwendet er (entsprechend seinem *law 10*) nicht. BIRKHOFF und KREYSZIG bewerten die Beiträge CANTORS ([13] 264) und BANACHs (ebd. 306) als revolutionär. POINCARÉ fühlt sich zum Beginn seiner Besprechung der GdG bemüßigt, einige herausragende Neuerungen der Mathematik seiner Zeit aufzuzählen. Er geht von der nichteuklidischen Geometrie und HAMILTON aus, auf die er das Wort anwendet ([151] 250 „[Hamilton avec ses quaternions a fait] *en Arithmétique une révolution toute pareille à celle qu'avait fait Lobatchevsky en Géométrie."*). Von dort gelangt er zu den hyperkomplexen Zahlen, zum Unendlichen (CANTOR) und zur neuen Logik (Italien). Vor diesem Hintergrund versteht er HILBERTs Beitrag: *„Il faut se rappeler tout cela si l'on veut comprendre comment des conceptions, qui auraient fait bondir Lobatchevsky lui–même, tout révolutionnaire qu'il fût, nous semblent aujourd'hui presque naturelles et ont pu être proposées par M. Hilbert avec une parfaite tranquillité."* ([151] 251). Diese Äußerung ist schon deshalb interessant, weil sie zum Ausdruck bringt, daß einst revolutionäre Konzepte nachmals natürlich erscheinen. Darüber hinaus läßt sie spüren, daß es Poincaré doch noch ein wenig unheimlich war bei Hilberts Unbekümmertheit.

Von herausragender Bedeutung ist die Qualifizierung der Strukturmathematik als revolutionär. NOVÝ ([136] 223):

> [...] one of the fundamental changes in the concept of the subject and methods of algebra took place between the second half of the 18th century and the time when algebra began to be understood consciously and purposefully to be the study of algebraic structures (as represented, e.g., by the work of Bourbaki). [...] this change [...] could be called a revolutionary reversal and [...] is a part of the parallel

> changes taking place in the overall approach to mathematics [...]

KAMBARTEL skizziert VUILLEMINS noch weitgreifendere Position ([94] 81):

> Vuillemin hat [...] eine Untersuchung vorgelegt, die in den mathematischen Bourbakismus über eine mathematik- und philosophiegeschichtliche Genealogie einführt und — das ist die bemerkenswerte These — die mathematische Revolution der Denkungsart als Parallele oder als Spezialfall der „kopernikanischen Wende“ vom philosophischen Dogmatismus zum Kritizismus erklärt.

Diese Revolution habe bei LAGRANGE begonnen (ebd. 87). Kambartel kann sich der Einschätzung Vuillemins nicht anschließen (ebd. 94):

> Gegenüber der wissenschaftsgeschichtlichen These Vuillemins, in eine materiale Stufe der Mathematik seien seit Lagrange algebraische Strukturbegriffe in einer Art kopernikanischer Wende der Mathematik „eingebrochen“, ließe sich weniger dramatisch auch so formulieren: daß mathematische Strukturüberlegungen als ein durchaus natürliches Hilfsmittel der jedoch im Grunde weiter material (mit allgemeinen zahlentheoretischen Sachverhalten befaßt) verstandenen Algebra notwendig wurden, um den erhöhten Allgemeinheitsansprüchen an die Ergebnisse zu dienen.

Kambartel setzt also einer Qualifizierung der Strukturüberlegungen als revolutionär, grundsätzlich neu und anders, in die Mathematik einbrechend, deren *Natürlichkeit* gegenüber — und verbindet das mit ihrem Hilfsmittelcharakter. Für die *„erhöhten Allgemeinheitsansprüche“* gibt er keine Erklärung an. Er ist aber offenbar nicht der Ansicht, daß Vuillemins Ansatz diesem Phänomen eher gerecht wird, sondern hält ihn für überzogene Dramatik.

Man darf die zitierten Qualifizierungen wissenschaftlicher Innovationen als revolutionär nicht sogleich als Aussagen im Sinne KUHNS interpretieren. Eine solche Qualifizierung kann nämlich ein Motiv haben, wie man an der Äußerung von GROSHOLZ in [69] 117 erkennt: *„The term revolutionary has [...] a honorific sense in the philosophy of science, and I would like to see Leibniz properly honoured“*. Nach [117] 43 ist eine solche Verwendung *„hero worship, a somewhat mythical, retrospective construction marking the foundation of a new and better era in science“*.

7.2.3 *resistance* und *conversion*

Typisch für die Aufnahme innovativer Beiträge ist ein deutlicher Widerstand der Wissenschaftlergemeinde gegen diese Beiträge; das gilt für die meisten uns beschäftigenden Innovationen. Über die Ablehnung des n–dimensionalen Raumes habe ich schon in Abschnitt 6.3.2 gesprochen; daß es HILBERTS GdG ebenso erging, wurde in Abschnitt 6.1.2.2 deutlich. Über den Widerstand gegen moderne Algebra spricht WUSSING in [201] 9; auch der Vortrag von HASSE [83] ist ein Zeugnis davon. Auch BANACH glaubt offenbar, sich für seine neue Methode rechtfertigen zu müssen, vgl. [6] 134f (=[8] II, S.305; vgl. auch [10] 72).

Widerstand ist aber nicht, wie es die retrospektive Glorifizierung der Innovatoren dann gerne darstellen möchte, ein Zeichen von Engstirnigkeit. Seine Opfer sind meist andernorts auch Täter, wie folgende Beispiele belegen:

Lt. APOLIN ([3] 361) soll GAUSS anläßlich MÖBIUS' Barycentrischem Calcül geäußert haben, daß man durch neue Calcüls nichts leisten könne, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre. Leider gibt Apolin keine Belegstelle an; die Äußerung sieht der über die hyperkomplexen Zahlen (vgl. S.90 der vorliegenden Arbeit) sehr ähnlich. Gauß selbst hat seinerseits seine Idee der nichteuklidischen Geometrie nicht veröffentlicht, weil er Widerstand befürchtete (vgl. S.117). FREUDENTHAL meint dazu, die Furcht sei unbegründet, da keine Gefahr bestanden hätte, wahrgenommen zu werden ([63] 4). In Fortsetzung dieser Debatte spricht ZADDACH vom Widerstand gegen KLEINS Modelle für die Nichteuklidischen Geometrien mithilfe von CAYLEYs projektiver Metrik ([204] 6). Klein leistet dann selbst Widerstand gegen die Vektoranalysis, jedenfalls wenn das von APOLIN ([3] 360) aus Kleins *Höherem Standpunkt* (ohne Seitenzahl) gegebene Zitat damit richtig interpretiert ist: *„Warum sich diese Sprechweise der Vektoranalysis so eingebürgert hat, kann ich nicht ganz verstehen, es mag aber wohl damit zusammenhängen, daß vielen Leuten solche formale Analogien mit den gewöhnlichen von alters her üblichen Rechenoperationen großes Vergnügen machen"*. Apolin führt weiter an, C. NEUMANN habe die Vektoranalysis als *Quaternionenstenographie* bezeichnet (ebd. 361). MESCHKOWSKI schildert sehr ausführlich den Widerstand der Zeitgenossen CANTORS gegen seine Entdeckung in [22] — so sei etwa zu vermuten, daß Kronecker die Veröffentlichung verzögert hat; [118] 41 —, aber auch Cantors eigene Erschütterung (ebd. 39; berühmt geworden ist der nach Meschkowski nicht ganz gesicherte Ausspruch *„je le vois, mais je ne le crois pas"*). Lediglich WEIERSTRASS und DEDEKIND unterstützten Cantor (auch BIRKHOFF und KREYSZIG teilen diese Geschehnisse unter [13] 264 mit, verweisen aber weder auf [118] noch auf originale Quellen). So ist Cantor ein bestechendes Beispiel dafür, daß der erste, der ein Resultat akzeptieren muß, ihr Autor selbst ist. CROWE formuliert das Auftreten von Widerstand bei den Autoren selbst in [26] als *law 1*.

Wenn Klein von den *„von alters her üblichen Rechenoperationen"* spricht, wird der Kern der *resistance* offenbar — ein Vertrauen in das Hergebrachte, Bewährte, ein Mißtrauen in das Neue. Dabei ist die Vorstellung, die Althergebrachtheit sei an sich schon eine andere Qualität, unhistorisch: Die ach so alten *„gewöhnlichen Rechenoperationen"* wurden einmal ebenso mißtrauisch als Neuheit beäugt. Der Sinn der Bagatellisierung zurückgelassener Positionen ist also, die derzeit erreichte Position möglichst als auch bereits in der *Vergangenheit* unabänderlich darzustellen (indem vorangehende konkurrierende, aber unterlegene Konzepte abgetan und ignoriert werden). CROWE stellt diesen Zusammenhang zwischen der Vorstellung der Unabänderlichkeit und dem Mangel an Geschichtsbewußtsein klar heraus ([27] 267):

> Why did some mathematicians oppose introduction of complex or transfinite numbers, charging that they conflicted with the foundations of mathematics? Part of the reason is that, lacking a historical sense, they failed to see that foundations are themselves open to alteration, that not only premises but results dictate what is desirable in mathematics.

Wie wird nun aber Widerstand überwunden? Komplementär zum Begriff *resistance* verwendet Kuhn den Begriff *conversion*. Dieses englische Wort hat viele mögliche deutsche Wortbedeutungen; es wird in diesem Zusammenhang wohl am besten übersetzt mit ‚Bekehrung' im religiösen oder ‚Meinungswechsel, Übertritt' im politischen Sinn (diese Bedeutungen werden unter anderen von Langenscheidts *Kleinem Muret–Sanders* vorgeschlagen). Einige Zitate von KUHN können helfen, seine Verwendung des Begriffes zu verstehen:

> [The facts of strong resistance against new paradigms] do need re–evaluation. In the past they have most often been taken to indicate that scientists, being only human, cannot always admit their errors, even when confronted with strict proof. I would argue, rather, that in these matters neither proof nor error is at issue. The transfer of allegiance fom [✓] paradigm to paradigm is a conversion experience that cannot be forced. Lifelong resistance, particularly from those whose productive careers have committed them to an older tradition of normal science, is not a violation of scientific standards but an index to the nature of scientific research itself. [[106] 151]
>
> Though the historian can always find men [...] who were unreasonable to resist for as long as they did, he will not find a point at which resistance becomes illogical or unscientific. At most he may wish to say that the man who continues to resist after his whole profession has been converted has *ipso facto* ceased to be a scientist. [[106] 159]

KOETSIER faßt KUHNS Sicht folgendermaßen zusammen ([99] 336, 351): Sobald es zu einer *crisis* im Kuhnschen Sinne kommt, schlagen einzelne Wissenschaftler eine geeignete Veränderung der *disciplinary matrix* vor (was natürlich dem bisherigen Konsens widerspricht); die übrigen werden dann nach und nach zu den neuen Spielregeln ‚bekehrt', sie ‚konvertieren'. Zu der Verwendung eines religiösen Begriffes formuliert Kuhn [106] 136, es gebe „[an aspect] *of scientific work that most clearly distinguishes it from every other creative pursuit except perhaps theology*"; ebd. 148 *„The competition between paradigms is not the sort of battle that can be resolved by proofs"*; ebd. 150 *„a law that cannot even be demonstrated to one group of scientists may occasionally seem intuitively obvious to another"*. CROWE gibt in [27] 267 folgendes eindrucksvolle Zitat von David HUME, dem Anwalt des Zweifels in der Erkenntnistheorie[80]:

> There is no [...] Mathematician so expert [...] as to place entire confidence in any truth immediately upon his discovery of it, or regard it as any thing, but a mere probability. Every time he runs over his proofs, his confidence increases; but still more by the approbation of his friends; and is rais'd to its utmost perfection by the universal assent and applauses of the learned world.

Es stellt sich die Frage, wie es zu der terminologischen Verwischung kommt, von der in Abschnitt 3.1.1.2 die Rede ist, insbesondere da MONNA sich ebenso ausdrücklich auf Koetsier bezieht wie die Gillies–Autoren auf KUHN. Immerhin ist eine dermaßen mißverständliche Doppelbelegung eines Terminus sehr schädlich für die wissenschaftliche Kommunikation und damit für den Fortgang der Wissenschaft selbst. Auffallend ist noch, daß Kuhn als Amerikaner der einzige Muttersprachler unter den genannten Autoren ist.

Bei #185 spürt man, daß DICKSON mit Lesern rechnet, die überzeugt werden müssen. Von einer Bekehrung derjenigen, die der Ausdehnungslehre ablehnend gegenüberstehen, spricht auch #5. Hier kann man nun den Bogen schlagen zu der eingangs dieses Kapitels thematisierten Rolle der Standardmodelle: Wenn überhaupt keine *crisis* vorliegt, warum sollte der herkömmliche Weg dann verlassen werden? Es wäre dann ein Grund für die Nichtbeachtung GRASSMANNS, daß die Vektorraumstruktur bei der Lösung der Probleme der zeitgenössischen Geometer eine untergeordnete Rolle spielt (vgl. [168] 239). Etwa habe JORDAN von Grassmann (und auch von MÖBIUS und BELLAVITIS) aus einem solchen Grund keine Kenntnis genommen (ebd. 236).

7.3 Fruchtbarkeit und Obsoletwerden

Eine Begriffsbildung wird letztlich akzeptiert, wenn sie fruchtbar ist. WEYL faßt in #72 die beiden Probleme glücklich zusammen: Die Fruchbarkeit einer abstrakten Begriffsbildung ist das Maß ihrer Natürlichkeit (genauer das Maß dafür, als wie natürlich sie empfunden wird).

Zunächst ist mit Fruchtbarkeit gemeint, daß eine mathematische Begriffsbildung geeignet ist, offene Probleme zu lösen. Andererseits entstehen bekanntlich bei solchen Gelegenheiten gerne neue, weit größere Probleme[81] (so stellt KLEIN etwa fest, daß durch die Lösung alter Probleme mithilfe der Galoistheorie neue Probleme entstanden sind; [96] I S.90). Somit kann man den schillernden Terminus ‚Fruchtbarkeit' noch in etwas weiterem Sinne gebrauchen: Fruchtbar ist letztlich eine Begriffsbildung, die dazu beiträgt, eine Wissenschaft auf Dauer am Leben zu erhalten, was einzig immer neue Probleme garantieren können. KUHN beschreibt Fruchtbarkeit wissenschaftlicher Ansätze mit Darwinschen Termini ([106] 172: *„the fittest* [wins]"). Die nach [106] 146 allgegenwärtige *incompleteness* einer Wissenschaft macht dialektischerweise gerade die Bindekraft der *normal science* aus).

[80] aus *Treatise of Human Nature*, Penguin/Baltimore 1969 (Original 1739), S.231

[81] FISHER weist auf die Bedeutung dieses Gedankens bei Karl Raimund POPPER hin ([?] 1094): *„Popper ... focuses upon the intellectual function of problems in generating new problems"*; Fisher bezieht sich auf Poppers Buch *Conjectures and Refutations*, Basic Books/NY (1963).

Die Fruchtbarkeit einer Begriffsbildung setzt sich gegen Widerstand durch. So spricht sich STEINITZ in der Einleitung seiner berühmten Arbeit [173] für die Verwendung des strittigen Auswahlaxioms aus — aus keinem anderen Grund als wegen dessen Fruchtbarkeit (S.170). Auch die Akzeptanzgeschichte der komplexen Zahlen ist ein Beispiel einer solchen Durchsetzung: Das Zitat #111 verdeutlicht den anfänglichen Widerstand gegen $\mathbb{C}$ und die Durchsetzung aus Fruchtbarkeitsgründen. DORIER teilt in [51] 236 mit, daß *„Bellavitis refused to accept complex numbers as part of mathematics"*; CROWE nennt in [27] 270 eine ganze Liste anderer Namen und stellt fest, daß $\mathbb{C}$ zunächst nur wegen seiner Nützlichkeit weiterverwendet wurde (die Nützlichkeit von $\mathbb{C}$ für die damaligen Probleme lag wohl vor allem im Fundamentalsatz der Algebra). Nach [25] 11 und [53] 172f verhalf dann erst GAUSS den komplexen Zahlen zum Durchbruch (und zwar mit seiner geometrischen Repräsentation). ZADDACH macht klar, daß diese Akzeptanzgründe heute nicht mehr bestehen, vielmehr die komplexen Zahlen so weitgehend akzeptiert sind, daß sie selbst zur Grundlage eines Aufbaus derjenigen Theorie herangezogen werden, die sie ursprünglich legitimierte ([204] 27):

> Während in den Jahren um 1800 herum die komplexen Zahlen noch einer Legitimierung durch die Geometrie bedurften, hat seitdem die wachsende begriffliche Klarheit eine völlig veränderte Lage geschaffen. Es ist jetzt umgekehrt die durchsichtige Struktur $\mathbb{C}$, welche es ermöglicht, die Theorie der euklidischen Ebene auf eine neue, gehaltvollere Weise zu entwickeln, und zwar ohne Hinzufügung *geometrischer* Axiome, sondern lediglich durch Einführung einer geeigneten Sprache.

In #82 wird die Rolle der Fruchtbarkeit bei der Akzeptanz von $\mathbb{H}$ deutlich: *„It seems hard to ask more"*.

Umgekehrt wird ein unfruchtbarer Ansatz sich auch unter starker Protektion nicht behaupten können, vgl. etwa [96] I S.189 zu den Quaternionen. Die Stärke des Kriteriums Fruchtbarkeit schützt so auch vor Hereinwirken äußeren Zwanges in die Mathematik: BIEBERBACHs Versuch einer ‚Arisierung' des mathematischen Denkens blieb mathematisch unfruchtbar und wurde deshalb auch von regimekonformen Mathematikern nicht aufgenommen ([116] 35ℓ).

Der Fruchtbarkeit gegenüber steht das Obsoletwerden (vgl. #85) einer Begriffsbildung oder Problemstellung. Nach DIEUDONNÉ ist der ursprüngliche Anlaß der Galoistheorie so ein *dead end* ([46] 620l); totgesagt wurde auch die Invariantentheorie. Besonders interessant ist, daß 1907 James Byrnie SHAW die Algebrentheorie totsagte — kurz bevor WEDDERBURNs Arbeit erschien (vgl. [142] 10ℓ und [140] 309f; Karen PARSHALL warnt deshalb in [142] 14r auch vor der Ausdrucksweise: *„sociological death is only temporary [...] the death metaphor falls short in characterizing the situation"*). Auch die extreme Strukturmathematik ist nach MATHIAS obsolet ([113] 8ℓ): *„Bourbaki is now dead, he was killed by the sterility of his own attitudes"*.

Der wichtigste Unterschied mathematischer Theorien zu naturwissenschaftlichen und zugleich der ernsthafteste Einwand gegen den Einsatz von KUHNs Begriffen in der Mathematikgeschichte besteht jedoch darin, daß obsolete mathematische Theorien keinesfalls irgendwie falsch oder ungültig ([115] 26 spricht von *„completely overthrown"*) sind. Der Wertverlust, obsolet geworden zu sein, tritt zwar nach [16] 192 an die Stelle des Verlustes der Gültigkeit bei naturwissenschaftlichen Theorien, darf damit aber nicht verwechselt werden. DAUBEN bringt es auf den Punkt ([28] 62): *„new* [mathematical] *theories cannot displace the old"*. Dauben sagt auch, was statt dessen mit den alten Theorien geschieht (ebd. 64): *„The old math [...] is no longer even of much interest"*. Ähnlich formuliert es GIORELLO: *„No achievement of the past is destroyed. All that changes is the emphasis on certain specific results"* ([69] 137).

In der Mathematik werden also keine Beschreibungsmodelle gewechselt, die einander widersprechen, also nicht gleichzeitig nebeneinander bestehen können; gewechselt werden Ausgangspunkte. Alte Ergebnisse werden nachmals nicht als falsch angesehen, sondern als uninteressant, da zwischenzeitlich die Fragen anders gestellt wurden. *Dead ends* werden als unfruchtbar im lebenserhaltenden

Sinn empfunden, machen Umdenken erforderlich. Die mit solchen Theorien verbundenen Fragen weiterzufragen, wäre unökonomisch; die zu erhaltenden Aussagen wären keine als relevant empfundenen Aussagen. Das Maß, mit dem diese Relevanz gemessen wird und das offenbar veränderlich ist und durch Übereinkunft zustandekommt, kann man als Paradigma der Mathematik bezeichnen.

DIEUDONNÉ trägt im Blick auf das Obsoletwerden von Theorien folgenden Einwand wider die Vorstellung vor, die Bedeutung einer Lösung sei der Beitrag neuer Probleme: Demnach wären also die Endprodukte einer nicht weiter verfolgbaren, ausgereizten Theorie, die diesen Beitrag nicht mehr leisten können, nicht von Interesse. Wozu solle man dann überhaupt Mathematik betreiben ([46] 620r)? Die Antwort darauf steht bei KUHN ([106] 178f):

> the developmental process described in this essay has been a process of evolution *from* primitive beginnings [...] But nothing that has been or will be said makes it a process of evolution *toward* anything. [S.179] But need there be any such goal?

7.4 *normal science* und Moratorien

Im Kapitel 2 wurde das Verhältnis der wissenschaftlichen Lehre zu einem innovativen Begriff als Maß für seine Akzeptanz angegeben[82]. Gleichzeitig kann man sagen, daß die Lehre in besonderem Maße die der *normal science* eigene ‚Geschichtsfälschung' vornimmt. Damit ist gemeint, daß nach KUHN *textbooks* gerade nicht historisch korrekt sein dürfen; sie müssen sogar je neu geschrieben werden, da sie *„pedagogical vehicles of normal science"* sind. Die pädagogische Funktion der geschichtlichen Kapitel in *textbooks* ist nach Kuhn vielmehr, den Eindruck zu erwecken, es habe eine geradlinige Entwicklung, gipfelnd in den neuesten Errungenschaften, stattgefunden. WHITEHEAD sagte sogar: *„A science that hesitates to forget its founders is lost"* ([106] 138). FREUDENTHAL drückt die verzerrte Perspektive, die dem Lernenden zugemutet wird, so aus ([65] 1696): *„The young learner repeats history not as it actually happened but as it would have happened if people in the past had known* [...] *what we do know now"*.

Daß die sachlich–systematische Reihenfolge nicht der historischen Herkunft entspricht, ist geradezu trivial, wenn man bedenkt, daß der gegenwärtige Stand einer Wissenschaft ja dadurch charakterisiert ist, welche Probleme sie mit welchen Methoden lösen kann; daß dabei in einer Systematik zuerst die Methoden entwickelt werden, zu denen man dann die Probleme angibt, auf die sie angewandt werden, ist nicht verwunderlich (wenngleich man auch die Probleme als Motivation vorher formulieren könnte).

Ein Beispiel für solch weitgehendes Ignorieren des tatsächlichen historischen Verlaufs könnte das Verschweigen PEANOs sein, dessen Ansatz ja nicht zu einer allgemeinen Verbreitung geführt hat und insofern den Anspruch, den das nunmehr allgemein durchgesetzte Ideengerüst hat, nicht bestätigt[83].

Dies ist der Hintergrund für einen Aspekt, um den ich die bisherigen Betrachtungen ergänzen möchte.

Der polnische Schriftsteller Stanisław Lem bemerkt in seinem *Nachwort zu Stefan Grabiński »Das Abstellgleis«*[84]: „[...] *wenn Methode, Schema und Schlüssel in die ursprüngliche Unordnung des Rätsels eingedrungen sind, verlieren die auf diese Weise angeeigneten und gewissermaßen gezähmten Erscheinungen ihre ursprüngliche Attraktivität und werden langsam unwichtig"*. Wenn man dieses aus dem Zusammenhang gerissene Zitat liest, wird man wohl eingestehen, daß es einer Geschichte mathematischer Theorien entstammen könnte (tatsächlich entstammt es offengesagt einem Abschnitt über Spiritismus). Sehr ähnlich klingen manche Sätze in folgenden nun wirklich hierhergehörenden Zitaten:

[82] Wie in #138 deutlich wird, wünscht PEANO den Einzug seiner Ideen in die Ausbildung künftiger Mathematiker.
[83] ZADDACH läßt stillschweigend Peanos Start bei $\mathbb{N}$ aus, weil es ihm auf die Axiomatik ankommt; vgl. [204] 90.
[84] hier zitiert nach *Sade und die Spieltheorie. Essays*, suhrkamp taschenbuch 1304; hier S.125.

> Most algebraists feel a bit embarrassed about linear algebra, it being the part of their trade that is most widely recognized, to the point that they hardly mention it. It is not unlike the attitude of a bourgeois couple to the child borne by their unmarried daughter. To the algebraists as to most pure mathematicians, all that could be said about linear algebra has been said, and so it can be considered a closed subject and relegated to first year students [[67] 108].

> Since about 1840 the study of specific mathematical objects has been replaced more and more by the study of mathematical *structures*. But this evolution was not noticed at all by contemporary mathematicians until 1900, because not only was the general notion of mathematical structure foreign to them, but the basic notions of specific structures such as group or vector space were emerging very slowly and with a lot of
> #88 difficulty. Now all this seems incredible, because today these notions seem so simple that we introduce them at the elementary level of mathematical teaching [[44] 7].

> Du rang majestueux de «théorèmes fondamentaux», il leur [les théorèmes] arrive mainte fois de se voir peu à peu dégradés à la position subalterne de simples «corollaires» de plus en plus méprisables, pour finir souvent dans le grenier des «exercices» que l'on abandonne à l'apprenti mathématicien. C'est la conscience de ce processus historique permanent qui doit ramener les mathématiciens professionnels à une conception plus modeste de leur rôle et de leurs efforts, en leur faisant prévoir que les découvertes qui leur ont coûté le plus de peine, et dont ils auraient tendance à s'enorgueillir, risquent fort de devenir de simples jouets pour les écoliers des générations futures [[40] 8].

Gemeinsam ist den drei Zitaten, daß die Resultate der linearen Algebra (das dritte Zitat entstammt dem Vorwort eines Schulbuches über lineare Algebra) heute als Übungsaufgaben für Schüler und Studenten dienen, ihre wissenschaftliche Attraktivität aber verloren haben. GRAY plant nach [74] 289 eine Erforschung solcher *transitions*. Ihre Beobachtung sollte eigentlich der Vorstellung vom stetigen Geschichtsverlauf entgegenwirken, denn es wird ja wohl niemand ernsthaft glauben, die heutigen Schüler seien bereits fähiger als die einstigen Meister. Hier kann ein weiteres Zitat von Lem weiterhelfen (wieder S.125): *„Im nächsten Jahrhundert dann nehmen die nächsten Generationen mit ihren neuen Fürsprechern des Unheimlichen wieder die Mühe des Ordnens auf sich und ringen mit dem Unergründlichen, als hätten sie keine Vorgänger gehabt“*. Wenn dieses Phänomen auch in der Wissenschaftsgeschichte zu beobachten ist, so verläuft diese nicht völlig linear, sondern zumindest in bestimmter Hinsicht zyklisch, und das liegt auch nahe, eben weil die prinzipielle Leistungsfähigkeit des einzelnen Menschen nicht (oder nicht proportional zu den Leistungen der Wissenschaft) wächst. Ein reines Anknüpfen an das bislang Erarbeitete kann nicht beliebig weit beibehalten werden; *„the new generation doesn't start just at the point where its predecessors finished“* ([65] 1695).

Die wachsende Zahl der Ergebnisse, die man kennen muß, bevor man die gegenwärtig in einer Wissenschaft behandelten Probleme verstehen kann, zwingt dazu, diese Ergebnisse übersichtlich zusammenzufassen[85]. [172] 23: *„Ohne die moderne Axiomatik wäre die Mathematik ein unübersehbarer Haufen von Einzeltheorien“*; [70] 360 *„Beginners will not accept being told: after you have worked with this concept for 3 years, you'll understand it“*. Die Bedeutung der algebraischen Strukturen liegt darin, zur Untersuchung derjenigen Probleme überzugehen, die vielen verschiedenen Problemstellungen gemeinsam sind, also unabhängig von der speziellen Problemstellung gelöst werden können — und ökonomisch nur gelöst werden können, wenn die speziellen Problemstellungen mit ihren unsäglichen Details außer Acht bleiben. Die Grundidee ist also der Wechsel des Ausgangspunkts. FREUDENTHAL formuliert es so ([65] 1705): *„mathematics historically is a process of [...] turning things upside down and inside out“*.

[85]Neben der Unifikation kommt es natürlich auch zur Aufspaltung in und Abspaltung von Teildisziplinen.

Solche Akte des Zusammenfassens treten nun nicht kontinuierlich, sondern nur gelegentlich auf; immer dann, wenn das Pensum des an Kenntnissen Vorauszusetzenden einen gewissen Grad erreicht hat, verspüren die Mathematiker das Bedürfnis, das MONNA ([124] 26) beschreibt als *„something must happen"*. Dieses undeutliche Bedürfnis scheint derzeit übrigens wieder vorzuherrschen; so gibt es nach HAKEN ([78] *question 2*) die Sichtweise *„essentially everything is known by now"* (die er ablehnt und damit erklärt, daß heute die gute Sitte der Veröffentlichung offener Fragen so ganz außer Gebrauch gekommen sei). Auch WILDER ([198] 440) weist die Behauptungen seiner heutigen Studenten zurück, alle wesentlichen Probleme seien gelöst, und für ihn in seiner Jugend sei es viel einfacher gewesen, ein ergiebiges Arbeitsfeld zu finden, als für sie heute; zugleich gibt er zu, in ihrem Alter entsprechend genauso gedacht zu haben. WUSSING beschreibt das Phänomen so ([203] 92): *„Nichts würde [...] lähmender auf die naturgegebene Bereitschaft zur Initiative bei der heranwachsenden Generation von Mathematikern wirken, als wenn die Mathematik als etwas Fertiges, Ewiges, Vollendetes dargeboten würde"*. Die Schlüsselrolle bei wissenschaftlichen Umwälzungen kommt in der Regel jungen Leuten zu, vgl. [106] 144, 151, 166; insbesondere das Anknüpfen an innovative Ideen bedarf eines Generationswechsels: *„further comprehension and elaboration of each man's ideas was always left to the following generation"* ([136] 2); NOVÝ stellt auch die Frage, *„why there were so long intervals between the individal advances and why contemporary mathematicians had so little understanding for some of the important discoveries"* (ebd. 5 Anm.4).

Bei VON NEUMANN finden sich folgende Gedanken ([131] 46): *„Wenn sich ein mathematischer Gegenstand sehr weit von seinen empirischen Quellen entfernt hat oder wenn mit ihm viel 'abstrakte' Inzucht getrieben worden ist, besteht die Gefahr der Degeneration"*; weiter sei eine Rückkehr zur Quelle (der Empirie) eine notwendige Voraussetzung, die Frische und Lebenskraft der Mathematik zu erhalten. Die intendierte Aussage hat bei aller Unsachlichkeit des Vergleichs[86] einen wahren Kern. Im Grunde entspricht sie der Schilderung der Situation, die die Mathematiker zu einem Wechsel des Ausgangspunkts veranlaßt.

Die Fähigkeit der übergeordneten Theorie, neue Probleme erkennen zu lassen, zusammen mit ihrer dem Anfänger entgegenkommenden Übersichtlichkeit stellt den Impuls dar, den diese Theorie der Wissenschaft geben kann. KLEIN traute der Gruppentheorie in dieser Hinsicht noch nicht allzuviel zu ([96] I S.335f):

> Der Appell an die Phantasie tritt also hier [bei der abstrakten Definition des Gruppenbegriffs] völlig zurück. Dafür wird das logische Skelett sorgfältig herauspräpariert [...]. Diese abstrakte Formulierung ist für die Ausarbeitung der Beweise vortrefflich, sie eignet sich aber durchaus nicht zum Auffinden neuer Ideen und Methoden, sondern sie stellt vielmehr den [S.336] Abschluß einer voraufgegangenen Entwicklung dar. Daher erleichtert sie den Unterricht äußerlich insofern, als man mit ihrer Hilfe bekannte Sätze lückenlos und einfach beweisen kann; andrerseits wird die Sache für den Lernenden dadurch innerlich sehr erschwert, daß er vor etwas Abgeschlossenes gestellt wird und nicht weiß, wieso man überhaupt zu diesen Definitionen kommt, und daß er sich dabei absolut nichts vorstellen kann.

Man muß zwar zugeben, daß der Mangel an Anschaulichkeit tatsächlich immer noch eine Hürde ist, die der Anfänger in Mathematik erst überwinden muß. Im Ergebnis tritt aber heute ein ganz anderer Effekt ein: Die Einführung der axiomatischen Methode verwandelte manche Kronen der

[86]die biologische Schädlichkeit des Inzests ist viel geringer als gemeinhin angenommen — sie wird vor allem behauptet, um als Legitimation einer in Wahrheit anderweitig begründeten gesellschaftlichen Norm zu dienen, wie LEVY–STRAUSS in seiner Untersuchung *Die elementaren Strukturen der Verwandtschaft* nachgewiesen hat — bzw. nachgewiesen haben wird (1948), kurz nachdem von Neumann sich äußerte (1947); aber es geht nicht darum, von Neumanns Belesenheit anzuzweifeln, sondern die Unsachlichkeit seines Vergleichs zu belegen; ob er im guten Glauben an seine Sachlichkeit war? Ich glaube eher, daß er sich darüber keine Rechenschaft abgelegt hat. Diese Unsachlichkeit belegt ihrerseits aber nur, daß der Mathematiker bei der Formulierung seiner Einsichten in das Wesen der Mathematik oft etwas hilflos ist.

bisherigen Mathematik nicht nur in Spezialfälle der neuen Mathematik, sondern diese Kronen waren nun ihrem Wesen nach nicht mehr wichtig (das ist die Rolle alter Fragen in dem Wechsel der Auffassung davon, was eine wissenschaftliche Frage ist: Wenn ein Thema selbst nicht mehr vorhanden, da vollständig gelöst, ist, hat man quasi einen Gegenstand als Fragbares negiert). Der von Klein nicht einmal geahnte Nebeneffekt war das *Unverständlichwerden* der alten Mathematik. Carl Ludwig SIEGEL drückt es in seiner Arbeit *Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstraß*[87] so aus: *„Der Nachwuchs wird überhaupt nicht mehr imstande sein, etwa in Riemanns oder Hilberts Werken zu lesen, wenn er nur auf exakte Sequenzen oder kommutative Diagramme dressiert ist"*.

Wohl keinem heutigen Mathematiker erschließt sich EULER leichter als BANACH. Euler spricht nämlich in zweierlei Hinsicht eine ‚andere Sprache': Die Kenntnisse, die erforderlich sind, um seine lateinischen Traktate und seine (von unserer oft verschiedene) Symbolsprache verstehen zu können, sind nicht mehr Bestandteil der mathematischen Allgemeinbildung, die Banachsche Axiomatik sehr wohl. Euler hat aber auch in seinen (von allen solchen Hindernissen befreiten) Vorgehensweisen Elemente, die den heutigen Vorstellungen z.B. von Strenge nicht mehr entsprechen. Nach KUHN ([106] 165) werden in den *sciences* seltener als in anderen Wissenschaften Originaltexte herangezogen, eher aufbereitete, pointiertere, pädagogischere *textbooks*.

Die didaktische Forschung geht von einer Analogie zu dem sogenannten biogenetischen Prinzip aus, wonach die Ontogenese (die Entwicklung des Individuums) quasi eine Zeitrafferwiedergabe der Phylogenese (der Entwicklung der Art) ist ([65] 1695; nach [176] 384 stammt es von HAECKEL). Übertragen auf die Didaktik heißt die Hypothese, daß der einzelne Lernende die selben Erkenntnisstände durchläuft, wie es die gesamte Wissenschaft in ihrer Geschichte getan hat. Dabei ist es vor dem Hintergrund der KUHNschen Auffassungen wichtig, den Begriff ‚gesamte Wissenschaft' zu präzisieren als die Abfolge der jeweils einem Paradigma verpflichteten Wissenschaftlergemeinschaften. Es werden also nicht Ideen, sondern Zustände eines sozialen Systems mit dem Individuum als Lernendem verglichen. Erst auf diese Weise wird die Analogie zum biogenetischen Prinzip vollständig, da *phyle* ja auch die Art als eine durch Tod und Nachwuchs fluktuierende Gemeinschaft von Individuen bezeichnet.

Wie andere von Haeckel formulierte Prinzipien der Biologie auch ist das biogenetische Prinzip zugleich reizvoll und doch nur mit Vorsicht zu gebrauchen. Der ursprüngliche Sinn der Analogiebildung in der Wissenschaftsgeschichte, eine Anwendung des Prinzips in Richtung auf die Didaktik, ist unproblematisch. SIERPINSKA belegt die Anwendbarkeit des Prinzips auf das Erlernen und Aneignen der modernen linearen Algebra durch Studenten ([171] 295ff): Diese machen die selbe *conversion* durch wie einst die Wissenschaftlergemeinde selbst: Zunächst halten sie sich an einzelne Instanzen von Strukturen (*type 1*), dann verinnerlichen sie die moderne Axiomatik (*type 2*).

Weitaus vorsichtiger muß man sein, wenn man die prinzipiell mögliche Umkehrung vornimmt und versucht, aus der Didaktik etwas über die Geschichte zu lernen. Problematisch ist die eingebaute Teleologie: Der einzelne Lernende durchläuft die selben Erkenntnisstände, wie es die gesamte Wissenschaft *in ihrer Geschichte getan hat.* Wieder wird also die Wissenschaft als etwas Fertiges dargestellt. Sonst ergäbe sich ja auch eine teleologische Asymmetrie, die in der Biologie vielleicht weniger störend ist, nicht aber in der Didaktik: der einzelne Lernende muß und wird sein Lernen irgendwann beenden; die Wissenschaft hat ihr Erkennen bislang jedenfalls noch nicht beendet. Das führt etwa zu der Vorstellung, die Wissenschaft als gemeinsames Produkt von Menschen sei nicht bloß endlich in dem Sinn, daß immer nur endlich viele endlich lang lebende Menschen endlich viele Ergebnisse erarbeiten, sondern höre sogar irgendwann auf, stagniere. So würde es bei einer zu Ende gedachten Anwendung des Prinzips in Richtung auf die Geschichte dann scheinbar möglich, etwas über das Ende der Wissenschaft zu sagen. Wenn man unbedingt will, kann man das ja sogar

[87] abgedruckt in der Festschrift *Zur Erinnerung an Edmund Landau (1877–1938)*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften/Berlin 1968, 299–306, oder in *Gesammelte Abhandlungen*, hg. von K. Chandrasekharan et al. bei Springer/Berlin 1979 Bd.IV S.1–8 (*fs*); hier S.6

tun — vielleicht entspricht ja die Aufspaltung in Teildisziplinen der evolutionären Spezialisierung in der Biologie, vielleicht gibt es ja auch bereits ausgestorbene Wissenschaften (DIEUDONNÉ vergleicht in [41] 140 die Mathematik mit der Zoologie und spricht von alten und neuen Gattungen); ich halte es aber für irreführend.

Dennoch kann die Umkehrung des biogenetischen Prinzips hilfreiche Anstöße geben. Die wissenschaftsgeschichtlichen Prozesse des Innehaltens und Wechselns des Ausgangspunktes können sich in ähnlicher Weise in der denkerischen Entwicklung eines einzelnen Menschen ereignen. Darauf bin ich aufmerksam geworden durch Schriften des Psychoanalytikers Erik H. ERIKSONs, der sich besonders mit der Adoleszenz bedeutender historischer Persönlichkeiten befaßt. Er weist nach, daß zu deren späterer Bedeutung eine Phase ihrer Jugend beigetragen hat, in der sie von existenziellen Problemen frei (da von anderen versorgt) sich ihren Persönlichkeitsproblemen verstärkt stellen konnten. Eine solche Phase nennt Erikson ein *Moratorium*[88]. Ich möchte vorschlagen, so auch Phasen in der Geschichte der Wissenschaft zu nennen, in denen die alten Ergebnisse zusammen mit den zu ihnen gehörenden offenen Problemen nicht mehr weiter angehäuft, sondern in eine übersichtliche Ordnung gebracht werden, in denen aus diesen Problemen ein neuer Ausgangspunkt für wissenschaftliche Betätigung entworfen wird, von dem aus die alten Ergebnisse neu ‚aufgerollt' und bewertet werden, und in denen schließlich Früchte des neuen Zugangs erarbeitet werden, die die Wissenschaftlergemeinde dazu bewegen können, diesen Zugang zu akzeptieren.

So verlief durch die neue axiomatische Methode die Mathematik nicht einfach entlang der offenen Probleme weiter. Sowohl die Konzentration in den frühen Jahren auf die Axiome selbst als *objects of study of their own right* als auch das Bourbaki–Projekt, dem es nicht um Erarbeitung neuer Resultate, sondern um eine der strukturellen Methode verpflichtete Neubegründung und Neubewertung der bekannten Mathematik ging (THURSTON nennt das in [177] 170 *„rewriting from scratch"*), sind Indizien eines Moratoriums, die sowohl in ihrer Ausarbeitung selbst als auch in den von ihnen eröffneten neuen Wegen zu weiteren Untersuchungen garantierten, daß ‚mit einem Mal' sehr viel mehr zu tun war und es sehr viel einfacher war, etwas zu tun zu finden. Gemessen an den von ihnen direkt erarbeiteten Resultaten sind es Fingerübungen, gemessen an denen von ihnen eröffneten Wegen Revolutionen.

Allerdings stellte sich auch heraus, daß längst nicht die gesamte Mathematik ohne weiteres der strukturellen Auffassung unterworfen werden konnte; ein Beispiel ist nach VOLKERT die projektive Geometrie ([181] 268, Anm.137). Auch wurden manche früher blühende Arbeitsgebiete im Licht der neuen Hierarchien fast ganz verdrängt. DIEUDONNÉ nennt gerade die Möglichkeit zur strukturellen Darstellung als Eingangsvoraussetzung einer Theorie in das Bourbakiprojekt ([41] 138).

Wenn man #86 und #87 zusammensieht, daß also ein Paradigma zugleich *unprecedented* und *open–ended* ist, wird deutlich, wie das Moratorium funktioniert: Das Noch–nie–Dagewesene bewirkt ein Innehalten, ein Aufarbeiten des Gehabten, auch ein Überprüfen der Prioritäten; das Offene, Unüberblickbare ein In–Angriff–nehmen, ein Zurücklassen von Ballast. Damit spiegeln Moratorien auch die zwei Aspekte der Fruchtbarkeit wieder, die die deutsche Vokabel ‚fruchtbar' nicht so recht wiederzugeben vermag. Diese zerfällt im Englischen in zwei modal verschiedene Begriffe: *fertile* besagt, daß die Möglichkeit zum Fruchtbringen angelegt ist (frucht–*bar*); *fruitful* besagt, daß bereits viele Früchte hervorgebracht wurden.

Neben der Vorstellung eines stetigen Geschichtsverlaufs geistert die eines beschleunigenden Geschichtsverlaufs (etwa betreffend Publikationszahlen oder Tempo der Ablösung der Ergebnisse) — oder wenn wir schon beim Bild des Graphen der Geschichte sind: die Vorstellung einer Linkskrümmung desselben — durch alle Lamenti der postmodernen Zeit. Ich habe mit meinen Moratorien an Wendestellen gedacht, die jedoch nur paarweise vorkommen: Das kurzzeitige Abflachen schließt ein baldiges Steilerwerden (und Steiler–als–zuvor–werden) mit ein. Die Dialektik des

[88] Dieser Begriff ist zwar zunächst in der Bedeutung ‚Zahlungsaufschub' in Gebrauch, bedeutet aber etymologisch ‚Aufschub', ‚Verzögerung'.

Abflachens und Ansteigens ist die des Moratoriums und des Vorgangs der *Resolution of revolutions.*

Im KUHNschen Sinne ist das Neuaufrollen vergangener Errungenschaften ganz von dem neuen Paradigma determiniert und insofern *normal science.* Das läuft auf die Eingangsfrage hinaus, wodurch sich eigentlich audrückt, daß ein neues Paradigma akzeptiert ist. Die *conversion* der Wissenschaftlergemeinde vollzieht sich offenbar in Form eines solchen Moratoriums, sozusagen schrittweise oder genauer gruppenweise: Von einem *inner circle* ausgehend werden schließlich alle Wissenschaftler überzeugt. Dieses Übergreifen ereignet sich auf triviale Weise durch einen Generationswechsel: vollgültig akzeptiert wird eine Innovation von der Generation, die mit ihr großgeworden ist, für die es keine Innovation mehr ist.

Ein Fazit der Beschäftigung mit Gesetzmäßigkeiten der Mathematikgeschichte ist möglich: Die zahlreichen Ausflüge in eine biologische Terminologie und Denkweise zeugen davon, daß die Wissenschaft als etwas Lebendes wahrgenommen wird.

Kapitel 8

Akzeptanz und Rezeption des Vektorraumbegriffs

Das Kennzeichen einer allgemeinen Durchsetzung des Begriffes wäre paradoxerweise, daß seine exakte Definition und Grundtatsachen seiner Theorie nicht mehr genannt werden und auch nicht mehr auf einführende Literatur verwiesen wird, sondern nur noch sein Name benutzt wird. WEYL bringt vorsichtshalber noch in einer Arbeit von 1949 die Definition ([192] **145** S.362 bzw. Am. J. Math. **71** (1949), 178–205).

Es ist schwierig, zu unterscheiden zwischen der Akzeptanz eines Begriffes einerseits und seiner Rezeption andererseits. Ausbleibendes Echo kann ein Ausdruck von fehlender Akzeptanz sein; Rezeption zieht aber auch *resistance* nach sich (diese hat ja die Bedeutung einer Schutzmaßnahme und gestaltet sich durch Auseinandersetzung effektiver als durch Totschweigen). Fehlende Rezeption kann aber noch ganz andere Ursachen haben als nur ein entsprechendes Verhältnis zu den Inhalten einer Arbeit, beispielsweise die Sprachbarriere, die Zugänglichkeit der Veröffentlichung, das Renommé des Autors. KUHN gibt in [106] 153 ein beeindruckendes Beispiel: Bestimmte Arbeiten von Lord RAYLEIGH, die versehentlich anonym eingegangen waren, wurden von der *British Association* als Unsinn zurückgewiesen; als die Autorschaft bekannt wurde, entschuldigte sich die *Association* und schritt eilends zur Veröffentlichung. Ein weiteres schlagendes Beispiel ist CROWEs Gegenüberstellung der Titel von GRASSMANN und HAMILTON ([25] 19f). Crowe formuliert daher auch als *law 6* in [26] 18, daß der Ruf des Schöpfers einer Theorie ausschlaggebend ist für die Akzeptanz. Auch die persönliche Haltung eines Forschers kann eine Rolle spielen. Dirk VAN DALEN stellt in seiner Arbeit *The War of the Frogs and the Mice or the Crisis of the Mathematische Annalen*[89] — die sich mit BROUWERs Hinauswurf aus der Redaktion durch HILBERT befaßt — die Frage, wie sich wohl der Intuitionismus entwickelt hätte, hätte nicht Brouwer die völlige Isolierung gewählt.

Zwei zentrale Beispiele unbefriedigender Rezeption in unserem Zusammenhang sind GRASSMANN und PEANO. Bei Grassmann wäre eine Rezeption des heutigen Vektorraumbegriffes äußerst schwierig gewesen. So zählt [25] 77 auf, was man alles hätte tun müssen, um aus Grassmanns Ausdehnungslehre z.B. die darin angelegte moderne Vektoranalysis herauszuschälen — eine Aufzählung, angesichts der es nicht Wunder nimmt, daß das nicht geschah. NOVÝ ([136] 3 Anm.2) spricht in Fällen, in denen ein Begriff zwar rückblickend vorhanden war, von den Zeitgenossen und Nachfolgern aber nicht bemerkt oder aufgenommen wurde, von einer *„anticipation"* des Begriffs. Erst nach einer *„independent rediscovery"* wird dann bemerkt, daß der Begriff eigentlich schon vorher vorhanden gewesen wäre. Eine solche Feststellung ist aber dann nur noch von historiographischem

[89] in: Math. Intell. **12** (1990) No.4, 17–31, hier 31r

Interesse; eine Wirkung auf die Wissenschaft selbst ist nicht mehr möglich — weil diese Wirkung ja bereits von etwas anderem ausgegangen ist. Dementsprechend war Engel nach [71] III,2 S.315 der Kampf um nachträgliche Anerkennung der historischen Priorität weniger wichtig als *„zu retten, was zu retten war“*, also die noch immer in Grassmanns Werk verborgenen Schätze zu heben, bevor auch diese von anderen neu geschaffen werden. In dieser an und für sich scharfsinnigen Prioritätensetzung Engels liegt aber leider ein Dilemma: Er konnte sich ja auch wieder nur auf diejenigen Errungenschaften Grassmanns beziehen, für die es zu Engels Zeit bereits zu spät war, die damals bereits unabhängig wiederentdeckt waren. Legt man aber CROWEs Kriterium — ‚Was muß man tun, um das nur Angelegte auch freizulegen?‘ — auf andere in der Ausdehnungslehre bereits angelegte Gebiete an, so wäre es nicht verwunderlich, wenn deren Freilegung trotz Engels gutem Vorsatz erst nach ihrer unabhängigen Wiederentdeckung geschähe. So findet etwa FEARNLEY–SANDER bei Grassmann den Hodge–Star–Operator, den Gram–Schmidt–Prozeß ([56] 813) oder den Spektralsatz (814); vgl. auch [9] 123, 143f.

Insofern ist es besonders erfreulich, daß Élie CARTAN wirklich Kenntnis von Grassmann nahm, wie es [9] 121, [44] 19, [169] 190 und [204] 8 hervorheben; Engel geht auf Cartan noch nicht ein — jedenfalls fehlt der Name in seinem Register. In Cartans *Leçons sur les invariants intégraux* (Hermann/Paris 1922) ist lt. [9] 122 herausgestellt, daß Grassmanns äußere Algebra (A_2 **78.**ff) unverzichtbar für die Mathematik ist; von dort führt die Entwicklung zu BOURBAKIs *Algèbre* Chap.III. DIEUDONNÉ erwähnt Cartan als den einzigen französischen Mathematiker nach dem ersten Weltkrieg, der sich nicht nur auf Funktionentheorie beschränkte und insofern für Bourbaki bedeutend war ([41] 135). Dieudonné verdeutlicht weiter in [44] 19, daß Cartan in seinem Bezug auf Grassmann sehr glücklich die Spreu vom Weizen trennte (also in der Lage war, die Schwierigkeiten, die das Freilegen des Angelegten bereitet, zu meistern). Da die äußere Algebra das wichtigste Feld der Mathematik darstellt, das tatsächlich unter Bezug auf Grassmann ausgearbeitet wurde, halte ich es für möglich, daß Bourbaki gerade durch Cartan auf Grassmann aufmerksam wurde.

TOEPELL belegt in seinem Artikel [179], daß von Grassmanns Ausdehnungslehre drei Entwicklungslinien (nämlich betreffend Maßfreiheit, Abstraktion und logischer Unabhängigkeit) zur GdG führen; wegen der logischen Unabhängigkeit vergleiche Abschnitt 6.1.2.1. HILBERT bezieht sich dabei nicht explizit auf Grassmann; man kann aber einige ‚Mittler‘ zwischen beiden benennen, zu denen auch HANKEL und PEANO gehören. Wenn FEARNLEY–SANDER sagt, Hilbert habe verhindert, daß Grassmanns Geometrie gewürdigt werden konnte ([56] 816), ist das wahrscheinlich so zu verstehen, daß mit der GdG Grassmanns innovative Ideen zur Geometrie *rediscovered* waren; sicher hat Hilbert nicht persönlich interveniert oder etwas falsch dargestellt.

DORIER faßt Grassmanns Bedeutung für die heutige Mathematik so zusammen ([51] 246): *„In many ways, Grassmann's theory remains a singularity. Even if all its results correspond to modern concepts and theories, it contributed to the creation of very few of them“*; ähnlich äußern sich CROWE betreffend der Vektoranalysis ([25] 54: *„It will be shown that his system could have led to modern vector analysis, but it did not“*) und MACLANE zur Vektorraumtheorie ([110] 20; das Zitat ist auf S.121 wiedergegeben).

Mit dem über Grassmann Gesagten besteht aber zwischen ihm und PEANO für unser Thema ein grundsätzlicher Unterschied, denn bei Peano wäre es sehr einfach gewesen, den heutigen Vektorraumbegriff in seinem Buch zu entdecken. Wenn MONNA Peanos Vektorraumbegriff als *„nearly exact“* bezeichnet ([124] 20), so ist vermutlich gemeint, was SCHOLZ ([168] 239) sagt: „[...]*stimmt bis auf Nuancen mit der heutigen Formulierung überein*“[90]; ähnliche Äußerungen finden sich in der Sekundärliteratur häufig: [13] 265 *„rather modern“*, [44] 13 *„differs only in details from the modern theory“*, [50] 183 *„very near to the modern definition“*, [119] 211 *„vrijwel op de wijze zoals wij dat*

[90] eine Aussage, die in seltsamem Licht erscheint, wenn man die von Scholz angegebene Axiomenliste mit der tatsächlichen vergleicht und feststellt, daß sich beide an drei Stellen keineswegs nur in Nuancen unterscheiden: Scholz verschweigt 1. Peanos Forderung einer Gleichheitsrelation, 2. die Rechtsdistributivität und 3. die Einführung der Null.

nu doen", [127] 266 *„essentially the modern concept"*.

Bei Grassmann hätte also eine — *de facto* ausgebliebene oder jedenfalls mangelhafte — Rezeption seines *Buches* noch nicht zwangsläufig zum Auffinden des heutigen Vektorraumbegriffes geführt, bei Peano kann dieses ausgebliebene Auffinden fast nur mit der ausgebliebenen Rezeption des Buches erklärt werden.

Insofern stellen die Tatsache, daß in der Ausdehnungslehre niemand den Vektorraumbegriff fand, auch nachdem das Werk allgemein bekannt war, sowie die Tatsache, daß wenige Menschen Peanos Buch überhaupt kannten, für uns keine Ansatzpunkte dar. Allein die hierzu komplementären Tatsachen — daß Grassmanns Buch nicht beachtet wurde, und daß bei Peano die Definition nicht beachtet wurde bei gleichzeitiger Kenntnis des Buchs — sind widerständig genug, um sich für eine historische Untersuchung zu eignen. Dabei kommt offenbar der Untersuchung Peanos größere Bedeutung für den Vektorraumbegriff zu; zugleich ist zu Grassmanns ‚Verkanntwerden' reichlich Sekundärliteratur vorhanden. Ich beschränke mich daher zu Grassmann auf die folgenden Bemerkungen, die vielleicht noch einen neuen Beitrag zum Verständnis seiner ‚Tragödie' darstellen.

8.1 Grassmann

Die Tatsache, daß Grassmann — nachdem er jahrelang vergeblich versucht hatte, einen mathematischen Lehrstuhl zu bekommen[91] — der Mathematik den Rücken kehrte und sich statt dessen angesehenen[92] linguistischen Studien widmete, wird so interpretiert, daß er von der fehlenden Anerkennung seiner Ideen in der mathematischen Fachwelt sehr enttäuscht war, was sicher richtig ist. Wenn aber Zaddach in der Mathematik Grassmanns *„wahre Berufung"* sieht ([204] 64), so kommt unterschwellig zum Ausdruck, daß die mathematische Fachwelt ihn ungerecht behandelt hat und quasi am Verlust eines so begabten Kopfes an eine andere Disziplin schuld ist — mit dem Schaden für die Mathematik, daß ihr dadurch wertvolle Zeit verloren gegangen sei, daß Grassmann, hätte man ihm nur Gelegenheit gegeben, wohl noch Wichtiges zur Mathematik beigetragen hätte. So liest man wieder bei Zaddach ([204] 87): *„Grausame Streiche des Schicksals haben es verhindert, daß Grassmanns Auffassung der Vektorrechnung schon damals die Entwicklung beeinflußte"*. Es könnte geradezu die Kehrseite dieses schlechten Gewissens sein, daß man immer so gern die Litanei von Grassmanns Unlesbarkeit nachbetet, um so die vermeintliche Schuld abzuwälzen. Engel ([71] III,2 S.342) hält es für müßig, diesen Verlust zu beklagen oder darüber zu grübeln, was er geleistet haben würde, da dieser Gewinn für die Mathematik mit einem Verlust für die Sprachwissenschaft erkauft und die Welt um ein wirklich seltenes Beispiel von Charaktergröße ärmer wäre.

Mir erscheint es nicht sehr wahrscheinlich, daß Grassmann noch so bedeutend gewirkt hätte: Hamilton hat nach der Entdeckung der Quaternionen seine ganze Energie darangesetzt, diese auf jede mögliche und unmögliche Weise anzuwenden und für sie ein vollständig neues System zu erarbeiten — während bereits Klein die Fruchtlosigkeit diese Unterfangens erkannte ([96] I S.189). Grassmanns Beurteilung seiner Ausdehnungslehre und seine Bemühung um ein philosophisches Gewand für seine Ideen sind aber Hamiltons korrespondierenden Aktivitäten sehr verwandt, seine relative Unkenntnis der aktuellen mathematischen Literatur aber wohl sogar noch größer (so fiel

[91] vgl. [71] III,2 S.123ff, 278ff; interessant finde ich die Idee von Zaddach, die Vergeblichkeit des Unterfangens teilweise darauf zurückzuführen, daß in Crelles Journal eine Arbeit Grassmanns fälschlicherweise mit der Bezeichnung ‚Prof.Dr.' erschien, so daß also eventuell sogar die Ansicht verbreitet war, Grassmann habe bereits einen Lehrstuhl ([204] 80).

[92] Engels Aussage in [71] III,2 S.308 *„Grassmanns Arbeiten zum Rigveda entsprechen auch heutigen wissenschaftlichen Ansprüchen"* wird ständig von Mathematikhistorikern kolportiert — obwohl vermutlich die Ansprüche der Indologen seit 1911 gestiegen sind. Eine Einführung in Grassmanns linguistische Arbeiten von Kurt Elfering findet sich in der Quelle zu [179] auf S.33–36.

Grassmann lt. [169] 183 hinter den seinerzeit aktuellen Stand der Funktionentheorie zurück wegen seiner Isolation; ähnlich sieht Engel Grassmanns Bezug zur Invariantentheorie, s.u.).

So hat auch Grassmann (wenn auch seinem verglichen mit Hamilton geringeren Renommé entsprechend in geringerer Anzahl) einige Artikel veröffentlicht, in denen er versucht, Anwendungen der Ausdehnungslehre zu entwickeln oder verschiedene Zweige der Mathematik mit der Ausdehnungslehre in Verbindung zu bringen. Diese Artikel reichen nicht an die Bedeutung der ursprünglichen Arbeit heran; manche Versuche werden als vergeblich angesehen. Vgl. [25] 93: „*In the 1870's* [...] *Grassmann published a number of mathematical papers which Engel described as of inferior quality. Engel ascribed this to the fact that Grassmann had lost contact with the current mathematical literature* [...]"; Gemeint sind Engels Äußerungen in [71] III,2 S.316f; Engel ging es vor allem um die neuere Algebra (d.i. die Invariantentheorie), deren Überlegenheit über Grassmann tatsächlich vorhanden sei (S.324). Bei CROWE folgt eine kurze Besprechung der betreffenden Artikel.

Ohne Grassmann etwa Einseitigkeit oder fehlende Originalität vorwerfen zu wollen, kann man doch insgesamt nicht daran vorbeisehen, daß seine mathematischen Beiträge eigentlich fast alle um sein Hauptwerk, die Ausdehnungslehre, kreisen. Diese allgegenwärtige ‚Zentralperspektive' erklärt natürlich auch auf ihre Weise das Schicksal von Grassmanns Gedanken, denn zwischen einer vollständigen Durchsetzung und einer vollständigen Ablehnung gibt es bei einem solch monolithischen Lebenswerk nicht mehr viele Zwischenstufen. Zugleich fördert diese Struktur genau wie bei Hamilton die Bildung einer Art Jüngerschaft, da die Lehre auf relativ wenigen Grundgedanken aufbaut und insofern einfach dogmatisiert werden kann; diese Jüngerschaft besorgt dann mit der dogmatischen Entstellung der Gedanken und der Abgrenzung gegen alles andere die Abspaltung vom restlichen Wissenschaftsleben, mit KUHN gesprochen quasi den Rückfall in ein präparadigmatisches Zeitalter, und besiegelt so die Bagatellisierung des Lebenswerks ihres Meisters.

Darin wird m.E. ein weiterer Unterschied zwischen Grassmann und Peano deutlich, denn Peano widmete sich zahlreichen grundlegenden Fragen der Mathematik sehr erfolgreich und genoß eine entsprechend große Reputation. Bei ihm haben wohl eher die Vielzahl der Arbeitsfelder und seine eigenes ständiges Fortstreben dazu geführt, daß der für uns interessante Beitrag nicht die wünschenswerte Aufmerksamkeit fand, während seine stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, seine Axiome der natürlichen Zahlen und seine Beiträge zur Logik viel früher bekannt waren.

8.2 PEANO

Mir fallen folgende Gründe für die Nichtbeachtung der Definition bei gleichzeitiger Beachtung des Buchs ein:

— Peano selbst kommt nie mehr auf die Definition zurück (außer [52] 270); wenn man an seine übrigen Definitionen von Vektoren denkt, könnte man meinen, Peano habe die aus [144] deshalb nicht weiterverwendet, weil bei ihr die logische Unabhängigkeit (die der neuen Mode entsprochen hätte) so schwer zu erbringen war.

— Die Namensgebung ist ungünstig: Peano versteht in anderen Arbeiten unter *systèmes linéaires* einfach lineare Gleichungssysteme, wie es auch andere Autoren der Zeit tun (LAGUERRE im J. EPT **25** (1867), VERONESE in Math. Ann. **19** (1882), CARVALLO in Monatshefte **2** (1891)). So ist es übrigens auch bei GAUSS, vgl. [136] 174 (auch Anm.4).

— Die Definition steht innerhalb des Buchs ungünstig: sie kommt einigermaßen unmotiviert im letzten Kapitel, während die Behandlung der *formazioni* das ganze restliche Buch ausmacht.

— Die zunächst angesprochenen Grassmannianer ignorieren alles, was von Grassmann abweicht (also das letzte Kapitel); [127] 266.

— In dem prä–Hilbertschen Umfeld von 1888 ist Peanos abstrakter, konzeptueller Umgang ungewohnt, in dem Hilbertschen der kommenden Jahre kein Interesse an algebraischen Strukturen anstelle formaler Hilbertscher Axiomensysteme.

— In Deutschland scheint Italien relativ wenig beachtet zu werden: [49] 188: *„B.L. van der Waerden m'a confié dans une lettre que les travaux de Peano ou de Burali–Forti n'étaient pas connus en Allemagne au début du siècle."* Lt. TOEPELL ([178] 56) mochte Hilbert kein Italienisch (Toepell lehnt aber zugleich Aussagen von KLINE und KENNEDY ab, wonach Hilbert Italien ignoriert habe; er habe vielmehr die *übersetzten* Arbeiten sehr wohl benutzt). Die begeisterte, aber unzureichende (vgl. S.28) Besprechung im *Jahrbuch* genügt nicht; in Schepps Übersetzung fehlt das IX.Kapitel. Umgekehrt belegt auch BURALI–FORTIS Äußerung von 1912 das Schattendasein der Italiener.

— Als es zu Peanos Lebzeiten zur Prioritätsaussage WIENERS kommt (diese hätte ja für ein Auffinden des Kapitels sorgen können), schaltet er sich nicht ein. Er hätte sich wohl auch nicht daran beteiligt, wenn er davon gewußt hätte — KENNEDY charakterisiert ihn als sehr bescheidenen Menschen ([95] 135).

Der letzte Punkt gibt Gelegenheit, zur menschlichen Seite der Protagonisten auch die der Zeitgenossen in den Blick zu nehmen, wenn es darum geht, ob eine innovative Idee *effectively advertised* wird. ZADDACH bemerkt mehrfach zu Grassmann, KLEIN in [96] zu MÖBIUS, daß ihre Bescheidenheit ihnen zum Schaden gereichte. So mag zum Schluß dieser Arbeit einer der führenden Geister der betrachteten Epoche zu Wort kommen, obgleich er mit dem Vektorraum nun wirklich nichts zu tun hat; immerhin war er mit Emmy NOETHER bekannt — vgl. WEYLS Nachruf auf sie in Scripta Mathematica **3** (1935), 201–220 (oder in [192] **102**), hier S.206 — und weilte im Jahre 1886 zur Kur in Peanos Italien. Sein Votum steht hier, daß es den Bescheidenen eine Warnung erteile. Friedrich NIETZSCHE schreibt im ersten Buch der zweiten Auflage seiner *gaya scienza* im Aphorismus 21:

> Das Lob des Selbstlosen, Aufopfernden, Tugendhaften — also desjenigen, der [...] in bezug auf sich bescheiden [...] lebt — dieses Lob ist jedenfalls nicht aus dem Geiste der Selbstlosigkeit entsprungen! Der »Nächste« lobt die Selbstlosigkeit, weil *er durch sie Vorteile hat!*

Anhang A

Quellen

Es folgt die angekündigte Abschrift der hier relevanten Abschnitte aus schwerer zugänglichen Quellen bzw. Quellen, die einer genaueren Untersuchung unterzogen werden, so daß die Greifbarkeit der Originalnotationen gewünscht ist.

Beginnend mit der entsprechenden Literaturreferenznummer steht der unkommentierte[93] Originaltext[94] in möglichster Annäherung der originalen Typographie. Das Zitat kann sich über mehrere Seiten erstrecken; sein Ende wird durch [Ende] angezeigt.

Am Rand finden sich wieder Markierungen in Form einer Raute # und einer laufenden Nummer. Zu manchen der dadurch markierten Stellen im Originaltext mache ich Bemerkungen, die zum einen die Auslassungen im zitierten Text nach Art der Zusammenfassungen des ersten Kapitels ergänzen, zum andern auch Untersuchungsbeiträge mathematischer, quellenkritischer oder anderer Art darstellen. Diese Bemerkungen schließen sich hinter der [Ende]–Marke an.

A.1 Grassmanns *Ausdehnungslehre* von 1862

Ich zitiere nach der Engelschen Gesamtausgabe, gebe aber auch die Seitenzahlen des Originals (die jeweils ersten gegebenen Seitenzahlen gehören also zu [71] I,2, die zweiten zu A_2). An und für sich ist aber die allen (auch übersetzten) Ausgaben gemeinsame Einteilung in Paragraphen ausreichend, da genügend fein (die A_2 hat im Original 385 Seiten, aber 527 Paragraphen), so daß ich oft nur diese angebe. Engel hat als vorbildlicher Herausgeber[95] die Abweichungen seiner Ausgabe vom Original verzeichnet (vgl. [71] II,2 S.384f); wo mich dies betrifft, tue ich desgleichen. Die häufigste Abweichung ist das Weglassen der waagerechten Striche über Argumenten von Summenzeichen (die im 19.Jahrhundert gern benutzt wurden, um anzuzeigen, auf welche Ausdrücke sich die Summation erstrecken soll) und die Einführung entsprechender eventuell erforderlicher Klammern (die Zeichen $\cdot, :$ und $|$ wirken dabei wie Klammern). Sperrungen sind Hervorhebungen von Grassmann, kursiv gedruckte Stellen solche von Engel.

[93] bis auf Auslassungs- und Seitenumbruchangaben und notwendige Klärungen.

[94] zu solchem Text gegebene Fußnoten sind *Originalfußnoten.*, die ich mit originalen Marken/Nummern unabhängig von meinen eigenen Nummern versehe

[95] diesen Ehrentitel rechtfertigen schon seine in [71] III,2 S.IX niedergelegten und ansonsten durchgehaltenen Grundsätze gewissenhafter historischer Arbeit; von unschätzbarem Wert sind die von ihm erarbeiteten Register zu Grassmanns Werken und zu seiner Biographie.

A_2 S.3 bzw. III

Vorrede.

Das vorliegende Werk umfasst die gesammte Ausdehnungslehre, eine mathematische Wissenschaft, von welcher ich schon vor siebzehn Jahren den ersten Theil [...] herausgegeben habe. Ausserdem habe ich in der Vorrede [der A_1] die wesentlichsten Gegenstände angedeutet, welche
#89 nach meinem Plane den Inhalt des zweiten Theiles ausmachen sollten. Statt nun diesen zweiten Theil als Fortsetzung jenes ersteren zu veröffentlichen, und dadurch jenem Plane gemäss das begonnene Werk abzuschliessen, habe ich es vorgezogen, den in jenem behandelten Stoff auch in dies neue Werk mit aufzunehmen, uns so ein zusammenhängendes Ganze [✓] zu liefern.

#90 Der Hauptgrund, der mich dazu bewogen hat, ist die Schwierigkeit, welche nach dem Urtheile aller Mathematiker, deren Urtheil ich zu hören Gelegenheit fand, das Studium jenes Werkes [der A_1] wegen seiner, wie sie meinen, mehr philosophischen als mathematischen Form dem Leser bereitet. [...]

Es konnte aber diese [S.IV] Schwierigkeit nicht behoben werden, ohne den Plan des [S.4] Ganzen wesentlich zu ändern. [...] [dieser Plan bestand ursprünglich darin,] die Wissenschaft unabhängig von andern Zweigen der Mathematik von Grund aus auszubauen. [...] die Ausdehnungslehre [...], welche die sinnlichen Anschauungen der Geometrie zu allgemeinen, logischen Begriffen erweitert und vergeistigt, und welche an abstrakter Allgemeinheit es nicht nur mit jedem anderen Zweige, wie der Algebra, Kombinationslehre, Funktionenlehre, aufnimmt, sondern sie durch Vereinigung aller in diesen Zweigen zu Grunde liegenden Elemente noch weit überbietet, und so gewissermassen den Schlussstein des gesammten Gebäudes der Mathematik bildet.

Ich [...] habe nun [...] die übrigen Zweige der Mathematik, wenigstens in ihrer elementaren Entwickelung vorausgesetzt. Ebenso habe ich in der Form der Darstellung gerade den entgegengesetzten Weg eingeschlagen, wie dort, indem ich die strengste mathematische Form, die
#91 wir überhaupt kennen, die Euklidische, für das vorliegende Werk angewandt [...] habe.

[...] sind durch die Verschiedenheit der Methoden die beiden Bearbeitungen desselben Stoffes
#92 einander so unähnlich geworden, dass man [...] kaum eine Übereinstimmung herausfinden wird. Es ist daher auch die alte Bearbeitung durch die neue durchaus nicht überflüssig gemacht.

[S.5 bzw. IV]

Die hier gewählte [Darstellung] schliesst sich am engsten an die Arithmetik an, doch [S.V] in
#93 der Weise, dass sie die Zahlgrösse schon als eine stetige voraussetzt. [...]

[S.10 bzw. IX]

Ich weiss, dass [...] eine Zeit kommen wird, [...] wo die darin niedergelegten Ideen ihre Frucht tragen werden. Ich weiss, dass [...] einst diese Ideen neu erstehen und mit der Zeitentwicklung in lebendige Wechselwirkung [S.X] treten werden. Denn die Wahrheit ist ewig, ist
#94 göttlich; und keine Entwickelungsphase der Wahrheit, wie geringe auch das Gebiet sei, das sie umfasst, kann spurlos vorübergehen; sie bleibt bestehen, wenn auch das Gewand, in welches schwache Menschen sie kleiden, in Staub zerfällt.

[S.11 bzw. 1]:

1. Erklärung. Ich sage, eine Grösse a sei aus den Grössen $b, c, \ldots$ durch die Zahlen $\beta, \gamma, \ldots$
#95 abgeleitet, wenn

$$a = \beta b + \gamma c + \ldots$$

ist, wo $\beta, \gamma, \ldots$ reelle Zahlen sind, gleichviel ob rational oder irrational, ob gleich Null oder ver-
#96 schieden von Null. [...]

2. Erklärung. Ferner sage ich, dass zwei oder mehrere Grössen $a, b, c, \dots$ in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, [...] wenn sich zum Beispiel

$$a = \beta b + \gamma c + \dots$$

setzen lässt, wo $\beta, \gamma, \dots$ reelle Zahlen sind.

Anmerkung. [...] Null ist aus jeder Grössenreihe numerisch ableitbar, nämlich durch die Zahlen $0, 0, \dots$. [...]

[S.12 bzw. 2]:

3. Erklärung. Einheit nenne ich jede Grösse, welche dazu dienen soll, um aus ihr eine Reihe von Grössen numerisch abzuleiten, und zwar nenne ich eine Einheit eine ursprüngliche, wenn sie nicht aus einer anderen Einheit abgeleitet ist. Die Einheit der Zahlen, also die Eins, nenne #97 ich die absolute Einheit, alle übrigen relative. Null soll nie als Einheit gelten.

4. Erklärung. Ein System von Einheiten nenne ich jeden Verein von Grössen, welche in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, [...] #98

5. Erklärung. Extensive Grösse nenne ich jeden Ausdruck, welcher aus einem System von Einheiten (welches sich jedoch nicht auf die absolute Einheit beschränkt) durch Zahlen abgeleitet ist, und zwar nenne ich diese Zahlen die zu den Einheiten gehörenden Ableitungszahlen jener Grösse; zum Beispiel ist das Polynom

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots,$$

oder

$$\sum \alpha e \text{ oder } \sum \alpha_r e_r,$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ reelle Zahlen sind, und $e_1, e_2, \dots$ ein System von Einheiten bilden, eine extensive #99 Grösse, [...]. Nur wenn das System bloß aus der absoluten Einheit (1) besteht, ist die abgeleitete Grösse keine extensive, sondern eine Zahlgrösse. #100

[...] Wenn die extensive Grösse aus den *ursprünglichen Einheiten* abgeleitet werden kann, so nenne ich jene Grösse eine extensive Grösse erster Stufe. #101

[S.12 bzw. 3]

6. Erklärung. Zwei extensive Grössen, die aus demselben System von Einheiten abgeleitet sind, addiren, heisst, ihre zu denselben Einheiten gehörigen Ableitungszahlen addiren, das heisst, #102

$$\sum \alpha e + \sum \beta e = \sum (\alpha + \beta) e.$$

[S.13 bzw. 3]

8. *Für extensive Grössen a, b, c gelten die Fundamentalformeln:* #103

1) $$a + b = b + a,$$

2) $$a + (b + c) = a + b + c,$$ #104

3) $$a + b - b = a,$$

4) $$a - b + b = a.$$

Beweis. Es sei

$$a = \sum \alpha e, \ b = \sum \beta e, \ c = \sum \gamma e,$$

[...] #105

[S.14 bzw. 4]

12. *Für die Multiplikation und Division extensiver Grössen (a, b) durch Zahlen (β, γ) gelten die Fundamentalformeln:* #106

1) $$a\beta = \beta a,$$

#107 2) $$a\beta\gamma = a(\beta\gamma),$$

3) $$(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma,$$

4) $$a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma,$$

5) $$a.1 = a,$$

6) $$a\beta = 0$$

#108 *dann und nur dann, wenn entweder $a = 0$, oder $\beta = 0$,*

7) $$a:\beta = a\frac{1}{\beta},$$

#109 *wenn $\beta \gtrless 0$ ist.*

[S.224 bzw. 223]

Zweiter Abschnitt.
Funktionenlehre.

[...]

348. Erklärung. Wenn eine Grösse u von einer oder mehreren Grössen $x, y, \ldots$ in der Art abhängt, dass, so oft $x, y, \ldots$ bestimmte Werthe annehmen, auch u einen bestimmten (eindeutigen) Werth annimmt, so nennen wir u eine Funktion von $x, y, \ldots$.

Anm. Hier ist zu bemerken, dass die obige Definition auch gelten soll, wenn $u, x, y, \ldots$ beliebige extensive Grössen sind. [...]

[S.263 bzw. 266]

392. Erklärung. Ich sage, eine Funktion f sei aus einer oder mehreren Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ numerisch ableitbar, wenn sich f in der Form

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots$$

darstellen lässt, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Zahlgrössen ausdrücken, die entweder konstant oder doch von den Variablen der Funktionen unabhängig sind, und wo das Gleichheitszeichen die Gleichheit für be-
#110 liebige Werthe dieser letzteren Variablen aussagt.

Anm. Nachdem diese Definition festgestellt ist, beziehen sich alle bisher aufgestellten Erklärungen und Sätze unmittelbar auch auf Funktionen, welche hiernach als extensive Grössen erscheinen. Es ist diese Betrachtungsweise für die Funktionenlehre und daher auch für die Theorie der Kurven und Oberflächen von grosser Bedeutung, wie sich unten zeigen wird. [...]

Für die Schärfe der Auffassung ist noch zu bemerken, dass stets festgestellt sein muss, welches die Variablen sind, von denen die Funktionen abhängig gedacht werden sollen [...]

[Ende]

Anmerkungen:

#96 Grassmann unterstellt, daß die beiden Verknüpfungen existieren.

#97 In der Formulierung „nicht abgeleitet ist“ klingt schon das Auszeichnen der Standardbasis bzw. noch das einstige Erzeugen an.

#101 Die Verwendung des Terminus ‚Stufe‘ ist etwas konfus. In **14.** (S.16 bzw. 6) bezeichnet Grassmann die lineare Hülle von n ursprünglichen Einheiten als *„Gebiet n-ter Stufe“*, während die Grössen des Gebiets ‚Grössen erster Stufe‘ heißen (vgl. **5.**). Die Stufe eines Gebiets entspricht unserer heutigen Dimension. Die Stufe einer Größe (vgl. **77.**) hängt mit der Erzeugung aus Einheiten durch Produktbildung, genauer mit dem kombinatorischen Produkt (vgl. **52.**) zusammen; multiplikative Kombinationen (vgl. **64.**) von ursprünglichen Einheiten zur m–ten Klasse (so bezeichnet Grassmann Kombinationen von m Stück, vgl. **64.**) heißen Einheiten m–ter Stufe, aus diesen abgeleitete Größen entsprechend Größen m–ter Stufe (vgl. auch [96] I S.179). Nach [50] 178 liegt Grassmann vor allem daran „[to make] *evident its* [the higher order system's] *independence from the initial mode of generation“*.

#102 Grassmann umgeht geschickt die Schwierigkeit, ob bei zwei Systemen von Einheiten, die als gleich erkannt sind, auch die Reihenfolge der Einheiten berücksichtigt wird oder nicht. **7.** folgt unmittelbar und gibt entsprechend die koordinatenweise Definition der Subtraktion.

#103 Hier hat Engel folgende wichtige Abänderung gegenüber dem Original vorgenommen: *„Die Nummern 8, 16 und 18 sind in der Originalausgabe unrichtiger Weise als E r k l ä r u n g e n bezeichnet“* ([71] I,2 S.385). Die erwähnte Nummer **16.** bringt eine alternative Definition der Relation *„in einer Zahlbeziehung stehen“* (daß nämlich die Gleichung $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$ nichttrivial lösbar ist); Nummer **18.** zeigt, daß es zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit bereits ausreichend ist, aufsteigend zu untersuchen.

#104 Der Ausdruck $a + b + c$ wurde zuvor als $(a + b) + c$ festgelegt.

#106 **10.** gibt die koordinatenweise Definition der Skalarmultiplikation, **11.** analog der Division durch ein Skalar.

#107 Der Ausdruck $a\beta\gamma$ wird nicht explizit erklärt; vgl. #104.

#109 Es folgen die Beweise. Interessant ist der Beweis der nichttrivialen Richtung von 6). Dort wird die Annahme, ein $\alpha_i\beta$ sei von Null verschieden, zum Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Einheiten geführt (entscheidend geht ein, daß Null nie als Einheit gilt, s.o.). Es ist dabei von n solchen Einheiten die Rede. Die Argumentation hängt aber offenbar von der Annahme endlich vieler Einheiten nicht ab, es sei denn, man vertritt die Meinung, das vektorielle Distributivgesetz erstrecke sich nur auf endlich viele Summanden.

A.2 Hankels *Theorie der complexen Zahlensysteme*

[82] V

Wie überhaupt die Entwickelung mathematischer Begriffe und Vorstellungen historisch zwei
#111 entgegengesetzte Phasen zu durchlaufen pflegt, so auch die des Imaginären. Zunächst erschien der Begriff als paradox, streng genommen unzulässig, unmöglich; indess schlugen die wesentlichen Dienste, welche er der [S.VI] Wissenschaft leistete, im Laufe der Zeit alle Zweifel an seiner Legitimität nieder [...]

[...] zum factischen Beweis der Möglichkeit von Zahlen, deren Einheiten nicht allen Gesetzen
#112 der „arithmetica universalis“* folgen, wenigstens einige abweichende Zahlensysteme zu behandeln.

[S.11]

#113 Der [...] hodegetische Grundsatz kann als das Princip der Permanenz der formalen Gesetze bezeichnet werden und besteht darin: Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend
#114 welchen anderen Inhalt bekommen. [...]

[S.12]

#115 Die rein formale Mathematik, deren Principien wir hier dargelegt haben, besteht nach eben diesen nicht in einer Verallgemeinerung der gewöhnlichen Arithmetik; sie ist eine durchaus neue Wissenschaft, deren Regeln durch letztere nicht bewiesen, sondern nur exemplificirt werden. [...]

Die reine Theorie der complexen Zahlen beruht auf diesem Princip, das uns zur Statuirung der
#116 an sich willkührlichen Verknüpfungs–Gesetze solcher [complexen Zahlen] einen Leitfaden liefert [...]

Aber noch mehr: Man kann auch auf räumliche Objecte (Punkte, Strecken, Flächen- und Körperräume) Operationen anwenden, welche denen der gemeinen Arithmetik entsprechen, und
#117 die sich in überraschender Weise den natürlichen Gesetzen räumlicher Transformationen und Bewegungen anschliessen.

[S.99]

Sechster Abschnitt. *Die höheren complexen Zahlen*

[§§28ff]

Wir gehen [...] von einer Anzahl von einander unabhängiger, ursprünglicher, imaginärer
#118 Einheiten $\iota_1, \iota_2 \ldots \iota_n$ aus, welche additiv und multiplikativ sowohl unter sich, als auch mit gewöhnlichen complexen Zahlen verbunden werden können. Unter $a_k \iota_k$, wo a_k eine gemeine complexe Zahl bedeutet, verstehen wir ein commutatives Product; wir setzen ferner das associative Princip voraus, wenn es sich um die Multiplication der neuen Einheiten unter einander oder mit gemeinen complexen Zahlen handelt, lassen aber die Voraussetzung der Commutativität der Einheiten unter einander im Allgemeinen fallen.

[...]

Die Voraussetzung, dass $\iota_1 \ldots \iota_n$ von einander unabhängig sein sollen, kann [...] genauer
#119 präcisirt werden, dass zwischen den n imaginären Einheiten keine lineare Gleichung [S.100]

$$0 = a_1 \iota_1 + \ldots + a_n \iota_n$$

*ich nehme dies Wort im Folgenden überall in dem durch Newton's gleichnamiges Werk bekannten Sinne.

bestehen soll, außer wenn $a_1 = 0, \dots a_n = 0$.

#120 Bei der Addition zweier solcher Zahlen wird man zufolge der Grundgesetze dieser Operation

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1\iota_1 + \dots + a_n\iota_n) + (b_1\iota_1 + \dots + b_n\iota_n) \\ &= a_1\iota_1 + \dots + a_n\iota_n + b_1\iota_1 + \dots + b_n\iota_n \\ &= (a_1\iota_1 + b_1\iota_1) + \dots + (a_n\iota_n + b_n\iota_n)\end{aligned}$$

setzen müssen, und wenn man:

$$(a + b)\iota = a\iota + b\iota$$

also das distributive Prinzip in diesem Falle annimmt, so hat man

$$(a_1\iota_1 + \dots + a_n\iota_n) + (b_1\iota_1 + \dots + b_n\iota_n) = (a_1 + b_1)\iota_1 + \dots + (a_n + b_n)\iota_n$$

eine Gleichung, welche man auch als Definition des Additionsbegriffes ansehen mag. Dann folgt aus ihr ohne weiteres [...] das commutative und associative Princip im allgemeinen.

Es wird nicht überflüssig sein, hier den methodischen Weg zu bezeichnen, der uns zu den Rechnungsoperationen für diese Zahlen führt: Zunächst benutzt man das Princip der Permanenz der formalen arithmetischen Gesetze, indem man die in §6 und 7 gelehrten Operationen mit allen ihren Folgerungen auf #121
die complexen Zahlen anwendet und so zu den Formeln gelangt, welche die Resultate jener Operationen darstellen. Dann aber, weil es a priori nicht feststeht, dass alle jene Gesetze der Addition und Multiplication widerspruchsfrei für die neuen Zahlen gelten, geht man synthetisch von jenen auf analytischem Wege #122
gewonnenen Formeln aus und weist nach, dass die durch sie definirte Operation den formalen Gesetzen derselben genügt. Erst wenn diese beiden Wege zurückgelegt sind, liegt die Möglichkeit, aber auch die Nothwendigkeit vor, die Operationen mit den allgemein in §6 und 7 definirten zu identificieren. #123

[S.101]

Man sieht ferner, dass wenn

$$a_1\iota_1 + \dots + a_n\iota_n = b_1\iota_1 + \dots + b_n\iota_n$$

also

$$(a_1 - b_1)\iota_1 + \dots + (a_n - b_n)\iota_n = 0,$$

nach der obigen Festlegung der linearen Independenz der n Einheiten, hieraus auf die Gleichheit der respectiven Coefficienten geschlossen werden kann.

Sämmtliche Zahlen α, welche in linearer Weise aus n unabhängigen Einheiten gebildet werden können, bilden zusammen ein System $n$ter Ordnung und ersten Grades. #124

[S.102]

Wir haben bisher nur die Zahlen ersten Grades betrachtet, welche linear aus ihren Einheiten zusammengesetzt sind. Man wird Zahlen z w e i t e n Grades erhalten, wenn sich in:

$$\alpha = a_1\kappa_1 + a_2\kappa_2 + \dots$$

unter den $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ solche Producte von Einheiten $\iota_m\iota_p$ befinden, welche von den Einheiten selbst wesentlich verschieden sind. Ebenso kann man Zahlen $m$ten Grades aus den Producten der Einheiten zu je m zusammensetzen. [...] #125

In der Verschiedenheit der particulären Bestimmung der Einheitsproducte liegt die Verschiedenheit der Systeme höherer complexer Zahlen. So könnte man, um die Gesetze der arithmetischen Multiplication, so- #126 weit als möglich, [S.103] permanent zu machen, z.B. die Commutativität erhalten und deshalb $\iota_m \iota_p = \iota_p \iota_m$ setzen [...]. Man könnte ferner, indem man jene Permanenz aufgibt, $\iota_m \iota_p = -\iota_p \iota_m$ setzen. Es wird ferner nahe liegen, die Producte der Einheiten auf die Einheiten selbst zu reduciren [...]

[S.105]

Wir haben in unserem Texte nur solcher Zahlen gedacht, bei deren Multiplication das associative und distributive Princip erfüllt ist. An und für sich aber steht dem nichts entgegen, dass man eines dieser
#127 Gesetze theilweise fallen lässt und dafür etwa das commutative permanent erhält. [...]

[S.106]

Von besonderer Bedeutung ist der Umstand, dass ein inniger Zusammenhang zwischen der Functionenlehre complexer Zahlen höherer Ordnung und dem sogenannten Operationscalcul, also einer symbolischen Zusammenfassung gewisser Zahlenoperationen besteht. So lässt sich z.B. die Funktionaldeterminante als Potenz der Derivirten einer Function höherer complexer Zahlen darstellen. Ferner lässt sich der namentlich von Cayley und seiner Schule ausgebildete „hyperdeterminant calculus" in eine Form bringen, welche in engstem Zusammenhange mit der Theorie complexer Zahlen steht, wie ich dies in nächster Zeit nachzu-
#128 weisen hoffe.

[§29]

Die in gewisser Hinsicht einfachste Multiplication höherer complexer Zahlen erhält man, wenn sich die Producte der Einheiten wieder auf die Einheiten selbst reduciren, nämlich lineare Func-
#129 tionen derselben sind. [...] eliminiren wir aus [...]

$$\begin{array}{rcl} \iota_1\iota_2 & = & a_{1,2} + a'_{1,2}\iota_1 + a''_{1,2}\iota_2 + \ldots + a^{(n)}_{1,2}\iota_n \\ \iota_1\iota_3 & = & a_{1,3} + a'_{1,3}\iota_1 + a''_{1,3}\iota_2 + \ldots + a^{(n)}_{1,3}\iota_n \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \iota_1\iota_n & = & a_{1,n} + a'_{1,n}\iota_1 + a''_{1,n}\iota_2 + \ldots + a^{(n)}_{1,n}\iota_n \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcl} -a_{1,2} - a'_{1,2}\iota_1 & = & (a''_{1,2} - \iota_1)\iota_2 + a'''_{1,2}\iota_3 + \ldots + a^{(n)}_{1,2}\iota_n \\ -a_{1,3} - a'_{1,3}\iota_1 & = & a''_{1,3}\iota_2 + (a'''_{1,3} - \iota_1)\iota_3 + \ldots + a^{(n)}_{1,3}\iota_n \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ -a_{1,n} - a'_{1,n}\iota_1 & = & a''_{1,n}\iota_2 + a'''_{1,n}\iota_3 + \ldots + (a^{(n)}_{1,n} - \iota_1)\iota_n \end{array}$$

[...] die $\iota_2, \ldots, \iota_n$. Dann werden diese durch einen Quotienten dargestellt, welcher in Zähler und
#130 Nenner eine Function $(n-1)$ten Grades von ι_1 enthält, und substituirt man sie in der Relation [S.107]:

$$\iota_1\iota_1 = a_{1,1} + a'_{1,1}\iota_1 + \ldots + a^{(n)}_{1,1}\iota_n,$$

so verwandelt sich letztere in eine Gleichung $(n+1)$ten Grades in Bezug auf ι_1, deren höchstes Glied den Coefficienten ± 1 hat, während alle anderen die gemeinen complexen Zahlen a, aber durchaus keinen Nenner enthalten, so dass also

$$\iota_1^{n+1} + b_1\iota_1^n + \ldots + b_{n+1} = 0,$$

wo die $b_1, \ldots b_{n+1}$ gemeine complexe Zahlen sind. Die Gleichung

$$x^{n+1} + b_1 x^n + \ldots + b_{n+1} = 0$$

hat nun jedenfalls n gemeine complexe Wurzeln $c_1 \ldots c_{n+1}$, so dass

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1} = -b_1 \\ c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 + \ldots = +b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1c_2 \ldots c_{n+1} = (-1)^{n+1}b_{n+1} \end{gathered}$$

also ist identisch:

$$\begin{aligned} \iota_1^{n+1} + b_1\iota_1^n + \ldots + b_{n+1} &= \iota_1^{n+1} - (c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1})\iota_1^n + \ldots \\ &\quad +(-1)^{n+1}c_1c_2 \ldots c_{n+1} \end{aligned}$$

und, da auf ι_1 alle gewöhnlichen Multiplicationsregeln anwendbar sind, hat man diese ganze Function #131

$$= (\iota_1 - c_1)(\iota_1 - c_2) \ldots (\iota_1 - c_{n+1})$$

Es ist nun ι_1 so zu bestimmen, dass dieses Product verschwindet. Geschieht dies, indem ein Factor desselben der Null gleich, also $\iota_1 = c_k$ gesetzt wird, so wäre ι_1 eine gemeine complexe Zahl und daher keine neue imaginäre Einheit. Soll sie aber eine neue imaginäre Einheit sein, so muss vorstehendes Product verschwinden, ohne dass einer seiner Factoren Null wird. [...] #132

Ein höheres complexes Zahlensystem, dessen formale Rechnungsoperationen nach den Bedingungen des §. 28 bestimmt sind, und dessen Einheitsproducte in's Besondere lineare Functionen der ursprünglichen Einheiten sind, und in welchem kein Product verschwinden kann, ohne dass einer seiner Factoren Null würde, enthält also in sich einen Widerspruch und kann nicht existiren. #133

[Ende]

Anmerkungen:

#113 Der Begriff ‚hodegetisch' bei #113 besagt, daß man sich bei der Entwicklung neuer Zahlensysteme von diesem Prinzip leiten lassen und nicht etwa völlig willkürlich vorgehen soll. Vgl. auch #116.

#116 Auf S.13 schildert Hankel, wie das *Princip* bei verschiedenen Begriffsbildungen zur Anwendung kommt. Während die Gleichung $a^M a^N = a^{M+N}$ bei positiven ganzen Exponenten aus der Definition der Potenz folgt, die entsprechend auf reelle Werte ausgedehnt wird, wurde bei complexen Exponenten diese Gleichung *„als Functionalgleichung zur Definition der Potenz erhoben"*. Ähnlich verhält es sich mit der Definition von negativen und gebrochenen Differentiationen oder der *„Erweiterung der Facultäten"* (gemeint ist vermutlich $\Gamma(x)$).

#120 Mit den *Grundgesetzen* sind $\mathcal{A}_+$ und $\mathcal{K}_+$ gemeint. Ähnlich sind mit den Operationen bei #121 die Addition und die Multiplikation gemeint.

#123 Zuerst untersucht er, worauf er geführt wird, wenn er sich vom Permanenzprinzip leiten läßt; dann tut er so, als wisse er nichts (wechselt also den Ausgangspunkt) und testet die Gesetze.

#127 Es folgen Beispiele.

#128 Ob dieser Ankündigung Taten folgten, wäre zu untersuchen.

#130 Unklar ist, wieso die dazu erforderlichen Divisionen in dem gewählten complexen Zahlensystem überhaupt durchführbar sein sollen. Die Nachprüfung der Behauptungen ist bei $n = 2$ unschwierig, allerdings bereits bei $n = 3$ mühsame Rechnerei. Ich sehe nicht, wie hier Induktion angewandt werden könnte.

#131 Wie man deutlich erkennt, ruht der Beweis auf dem Ineinssetzen der Null des höheren complexen Zahlensystems mit der der gemeinen complexen Zahlen ($\mathbb{C}$). Diese Auffassung weicht von der heutigen ab, wonach die Null des Grundkörpers nicht dasselbe ist wie die der Algebra. In die selbe Richtung geht eine moderne Kritik an den Ausdrücken der Form $a - \iota$ in der zweiten Fassung der Ausgangsgleichungen oder der Form $\iota - c$ in der Folge von #131. Hankel hat dieses Verfahren gerechtfertigt mit seiner Festlegung der Reichweite der Verknüpfungen in #118. Während die Multiplikation von Einheiten untereinander aber anderen Verhältnissen unterliegt als die der Einheiten mit gewöhnlichen complexen Zahlen (wodurch Hankel im Grunde die Verschiedenheit der beiden Verknüpfungen anerkennt), ist das bei der Addition nicht der Fall (wie ja durch die Anwendung des Permanenzprinzips in #123 deutlich wird); daher fallen für ihn auch beide Verknüpfungen und insbesondere ihre neutralen Elemente zusammen. So verzichtet er auch bei der Definition der linearen Unabhängigkeit (vgl. #119) darauf, zu sagen, was ‚0‘ eigentlich sein soll — so als wäre das klar (und tatsächlich *ist* es ihm klar).

#132 Es folgt eine Bemerkung darüber, daß bei verschwindender Determinante des Gleichungssystems ebenfalls $\iota_1 \in \mathbb{C}$ folgt.

A.3 Peanos *Calcolo geometrico*

[144] V

PREFAZIONE

Il calcolo geometrico, in generale, consiste in un sistema di operazioni a eseguirsi su enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fa sopra i numeri. [...] Il calcolo geometrico presenta #134
analogia colla geometria analitica; ne differisce in ciò, che, mentre nella geometria analitica i calcoli si fanno sui numeri che determinano gli enti geometrici, in questa nuova scienza i calcoli si fanno sugli enti stessi. #135

[S.VI]

I concetti di linea, bivettore, formazione di seconda specie corrispondono esattamente alle es- #136
pressioni forza, coppia, sistema di forze applicate ad un corpo rigido, della meccanica. [...]

Le formazioni di 1^a specie, quelle di 2^a prodotti di due formazione di 1^a specie, e le formazioni di 3^a specie corrispondono pure, [S.VII] [...] a ciò che in geometria proiettiva chiamasi punto, retta, piano; [...]

L'ultimo capitolo tratta sommariamente delle trasformazioni dei sistemi lineari in generale e delle formazioni geometriche in particolare. Lo sviluppo ulteriore delle questioni accennate in questi due capitoli mi avrebbe fatto varcare i limiti propostimi. [...] #137

Sarei lieto delle mie fatiche nello scrivere questo libro (e questa sarà l'unica ricompensa ch'io ne aspetti), se esso servirà a divulgar fra i matematici alcune delle idee del Grassmann. È però mia opinione che, fra non molto tempo, questo calcolo geometrico, o qualche cosa di analogo, si sostituirà a metodi attualmente in uso nell'insegnamento superiore. #138

[S.XI]

Il calcolo di quaternioni ha già una vasta letteratura, che qui è inutile citare [...]. #139

I quaternioni di Hamilton non compaiono nel calcolo sviluppato nel presente opuscolo, non es- #140
sendo essi nè formazioni geometriche, nè segni d'allena delle operazioni introdotte sulle formazioni. Un ente qui considerato, avente qualche proprietà dei quaternioni, è la trasformazione dei vettori nello spazio, indicata col segno $m + |(\mathrm{I}*)$, ove m è un numero, I un vettore (N. 86, 2.; V. pure N. 83, 14.) #141

I fatti geometrici che si possono esprimere coi quaternioni, si esprimono pure, e in generale con maggior semplicità, colle notazioni di Grassmann sviluppate nel presento libro. #142

[...]

[S.141]

Capitolo ix.
Trasformazioni di sistemi lineari.

72. Esistono dei sistemi di enti sui quali sono dati le seguenti definizioni:

1. È definita l'*eguaglianza* di due enti **a** e **b** del sistema, cioè è definita una proposizione, #143
indicata con $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, la quale esprime una condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti, e non da altre, e la quale soddisfa alle equazioni logiche:

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b}) = (\mathbf{b} = \mathbf{a}), \quad (\mathbf{a} = \mathbf{b}) \cap (\mathbf{b} = \mathbf{c}) < (\mathbf{a} = \mathbf{c}).$$

2. È definita la *somma* di due enti **a** e **b**, vale a dire è definito un ente, indicato con $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, che appartiene pure al sistema dato, e che soddisfa alle condizioni:

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b}) < (\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

e il valor comune dei due membri dell'ultima eguaglianza si indicherà con $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

3. Essendo $\mathbf{a}$ un ente del sistema, ed m un numero intero e positivo, colla scrittura $m\mathbf{a}$
#144 intenderemo la somma di m enti eguali ad $\mathbf{a}$. È facile riconoscere, essendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, ...$ enti del sistema, $m, n, ...$ numeri interi e positivi, che

$$(\mathbf{a}=\mathbf{b}) < (m\mathbf{a}=m\mathbf{b}); \quad m(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = m\mathbf{a}+m\mathbf{b}; \quad (m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a}+n\mathbf{a};$$
$$m(n\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a}; \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

[S.142]

#145 Noi supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura $m\mathbf{a}$, qualunque sia il numero reale m, in guisa che siano ancora soddisfatte le equazioni precedenti. L'ente $m\mathbf{a}$ si dirà *prodotto* del numero (reale) m per l'ente $\mathbf{a}$.

4. Infine supporremo che esiste un ente del sistema, che diremo *ente nullo*, e che indicheremo
#146 con 0, tale che, qualunque sia l'ente $\mathbf{a}$, il prodotto del numero 0 per l'ente $\mathbf{a}$ dia sempre l'ente 0, ossia

$$0\mathbf{a} = 0.$$

Se alla scrittura $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ si attribuisce il significato $\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}$, si deduce:

$$\mathbf{a}-\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}+0 = \mathbf{a}.$$

#147 DEF. *I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1, 2, 3, 4, in guisa da soddisfare alle condizioni imposte, diconsi* sistemi lineari.

Si deduce che se $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, ...$ sono enti d'uno stesso sistema lineare, $m, n, p, ...$ numeri reali ogni funzione lineare omogenea della forma $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}+p\mathbf{c}+...$ rappresenta un ente dello stesso sistema.

#148 Costituiscono sistemi lineari i numeri reali e le formazioni della stessa specie nello spazio.

Costituiscono pure sistemi lineari le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, i vettori nel piano o nello spazio, e così via. Ma i punti dello spazio non costituiscono un sistema lineare, perchè le loro somme, secondo le definizioni date, non sono più punti, ma formazioni
#149 qualunque di prima specie.

73. DEF. *Più enti* $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2...\mathbf{a}_n$ *d'un sistema lineare diconsi fra loro* dipendenti, *se si possono determinare n numeri* $m_1 m_2 ... m_n$*, non tutti nulli, in guisa che risulti*

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + ... + m_n\mathbf{a}_n = 0.$$

In questo caso un qualunque degli enti, il cui coefficiente non sia nullo, si può esprimere qual funzione lineare omogenea dei rimanenti.

[S.143]

Se gli enti $\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_n$ sono fra loro indipendenti, e se fra essi passa una relazione $m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + ... + m_n\mathbf{a}_n = 0$, si deduce $m_1 = 0, ... m_n = 0$.

Essendo $A\ B...$ formazioni di prima specie nello spazio, le equazioni $AB = 0, ABC = 0, ABCD = 0$ esprimono la dipendenza fra 2 o 3 o 4 formazioni. 5 formazioni di prima specie nello spazio sono sempre fra loro dipendenti.

DEF. *Numero delle dimensioni d'un sistema lineare è il massimo numero di enti fra loro indipendenti che si possono prendere nel sistema.*

#150 Ad esempio le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, o nello spazio, formano sistemi lineari rispettivamente a 2, 3 e 4 dimensioni; i vettori nel piano o nello spazio formano sistemi a 2 e 3 dimensioni; le formazioni di seconda specie nello spazio formano un sistema a 6 dimensioni. I numeri reali formano un sistema lineare ad una dimensione; i numeri immaginarii o complessi ordinarii formano un sistema a due dimensioni. Un sistema lineare può anche avere infinite dimensioni.

TEOR. *Se il sistema A è ad* n *dimensioni, presi nel sistema* n *enti independenti* $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$, *e dato un nuovo ente* $\mathbf{a}$, *si possono sempre determinare* n *numeri* $x_1 ... x_n$, *in guisa che risulti*

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n. \tag{1}$$

Inoltre essi sono determinati univocamente, ossia

$$(x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n = x_1'\mathbf{a}_1 + ... + x_n'\mathbf{a}_n) = (x_1 = x_1') \cap ... \cap (x_n = x_n'). \tag{2}$$

Infatti, poichè il sistema $\mathbf{a}$ è ad n dimensioni, fra gli $n+1$ enti $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, ...\mathbf{a}_n$ passerà una relazione della forma della definizione $1^{\mathbf{a}}$; in questa relazione il coefficiente di $\mathbf{a}$ non è nullo, perchè altrimenti passerebbe una relazione fra $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$, cosa contraria all'ipotesi; risolta quindi questa relazione rispetto ad $\mathbf{a}$ si ha la formula a dimostrarsi.

Se poi fosse $x_1\mathbf{a}_1 + ... = x_1'\mathbf{a}_1 + ...$, si deduce $(x_1 - x_1')\mathbf{a}_1 + ... = 0$; e quindi, poichè $\mathbf{a}_1 ...$ sono indipendenti, $x_1 = x_1', x_2 = x_2', ...$

[S.144]

DEF. *Essendo* $\mathbf{a}_1, ...\mathbf{a}_n$ n *enti indipendenti d'un sistema ad* n *dimensioni, i numeri* $x_1 ... x_n$ *che soddisfano alla relazione (1) diconsi le* coordinate *di* $\mathbf{a}$ *rispetto agli* enti di riferimento $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$.

Le formule

$$(x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n) + (y_1\mathbf{a}_1 + ... + y_n\mathbf{a}_n) = (x_1 + y_1)\mathbf{a}_1 + ... + (x_n + y_n)\mathbf{a}_n, \tag{3}$$

$$m(x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n) = mx_1\mathbf{a}_1 + ... + mx_n\mathbf{a}_n, \tag{4}$$

dànno le coordinate della somma di due enti, e del prodotto d'un numero m per un ente in funzione delle coordinate di questi enti. Le coordinate dell'ente 0 sono tutte nulle.

La definizione precedente coincide colle *definizioni date ai N. 34, 38, 46, 50, 60 per le formazioni* #151 *di prima specie su d'una retta, pei vettori nel piano, per le formazioni di prima e seconda specie nel piano, ecc.*

Se $x_1 ... x_n$ sono le coordinate di $\mathbf{a}$ rispetto agli enti di riferimento $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$, ossia

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n,$$

e si conoscono le coordinate di $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$ rispetto ad un altro gruppo di enti di riferimento $\mathbf{b}_1 ... \mathbf{b}_n$, ossia

$$\mathbf{a}_1 = m_{11}\mathbf{b}_1 + ... + m_{1n}\mathbf{b}_n, ..., \mathbf{a}_n = m_{n1}\mathbf{a}_1 + ... + m_{nn}\mathbf{a}_n[\checkmark]$$

sostituendo si deduce:

$$\mathbf{a} = (m_{11}x_1 + ... + m_{n1}x_n)\mathbf{b}_1 + ... + (m_{1n}x_1 + ... + m_{nn}x_n)\mathbf{b}_n.$$

Si hanno in tal modo calcolate le coordinate di $\mathbf{a}$ rispetto a $\mathbf{b}_1 ... \mathbf{b}_n$; esse sono funzioni lineari ed omogenee delle coordinate di $\mathbf{a}$ rispetto ad $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$; i coefficienti di queste funzioni sono le coordinate di $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$ rispetto a $\mathbf{b}_1 ... \mathbf{b}_n$.

74. Un ente d'un sistema si può considerare come costante o variabile.

[S.145]

DEF. *Diremo che l'ente variabile* $\mathbf{a}$ *d'un sistema lineare ad un numero finito di dimensioni, ha* *per limite l'ente fisso* $\mathbf{a}_0$*, se le coordinate di* $\mathbf{a}$*, rispetto ad enti fissi, hanno per limite le coordinate di* $\mathbf{a}_0$.

Risulta dalle cose dette che il limite non dipende dagli enti di riferimento.

Un ente variabile $\mathbf{a}$ d'un sistema lineare può essere funzione d'una variabile numerica t; su questa funzione si possono dare le definizioni di *derivata, derivate successive, integrale indefinito* e *definito* che si ricavano dai N[i] 66, 67 e 70, leggendo 'ente d'un sistema lineare' invece di 'formazione geometrica'; sono pure applicabili i teoremi ivi trovati, che si referiscono puramente alle somme, moltiplicazioni per numeri, e coordinate.

Un ente $\mathbf{y}$, funzione d'un ente $\mathbf{x}$, dicesi *funzione continua*, se il limite della funzione è la funzione del limite. Si suppone naturalmente definito il limite dell'ente $\mathbf{x}$ e dell'ente $\mathbf{y}$. Se l'ente $\mathbf{y}$ d'un sistema lineare ad un numero finito di dimensioni è funzione continua dell'ente $\mathbf{x}$ appartenente pure ad un sistema lineare ad un numero finito di dimensioni, le coordinate di $\mathbf{y}$ sono funzioni (numeriche) continue delle coordinate di $\mathbf{x}$.

75. DEF. *Un'operazione* $\mathbf{R}$*, a eseguirsi su ogni ente* $\mathbf{a}$ *d'un sistema lineare* A*, dicesi* distributiva, *se il risultato dell'operazione* $\mathbf{R}$ *sull'ente* $\mathbf{a}$*, che indicheremo con* $\mathbf{Ra}$*, è pure un ente d'un sistema lineare, e sono verificate le identità*

$$\mathbf{R}(\mathbf{a}+\mathbf{a}') = \mathbf{Ra}+\mathbf{Ra}', \quad \mathbf{R}(m\mathbf{a}) = m(\mathbf{Ra}),$$

ove $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{a}'$ *sono enti qualunque del sistema* A*, ed* m *un numero reale qualunque.*

L'ente $\mathbf{Ra}$, cioè il risultato dell'operazione distributiva $\mathbf{R}$ sull'ente $\mathbf{a}$, dicesi *funzione distributiva* di $\mathbf{a}$. Un'operazione distributiva si chiamerà anche *trasformazione lineare,* o *trasformazione* senz'altro. Se l'ente $\mathbf{Ra}$ appartiene allo stesso sistema lineare A cui appartengono gli enti $\mathbf{a}$,
#152 l'operazione $\mathbf{R}$ si dirà una *sostituzione.* L'ente $\mathbf{Ra}$ dicesi anche prodotto della trasformazione $\mathbf{R}$ per l'ente $\mathbf{a}$.

[S.146]

Essendo $\mathbf{R}$ un'operazione distributiva, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, ...$ enti del sistema A, e $m, n, ...$ numeri, si avrà:

$$\mathbf{R}(ma+nb+...) = m\mathbf{Ra}+n\mathbf{Rb}+...$$
$$\mathbf{R}0 = 0.$$

L'unica operazione distributiva a eseguirsi sui numeri (reali), e il cui risultato sia ancora un
#153 numero, è la moltiplicazione. Se A e B sono formazioni geometriche di specie qualunque, il loro prodotto progressivo o regressivo AB è funzione distributiva di ambi i fattori. Le operazioni
#154 indicate coi segni $\perp$ e $|$, da eseguirsi sui vettori d'un piano, o sui vettori e bivettori dello spazio, sono operazioni distributive.

#155 La moltiplicazione d'un ente d'un sistema lineare per un numero m è un'operazione distributiva. Una qualunque delle coordinate dell'ente $\mathbf{a}$ d'un sistema ad n dimensioni, rispetto ad enti fissi, è funzione distributiva di $\mathbf{a}$, come indicano le formule (3) e (4) del N. 73.

Si osservi che delle due condizioni imposte ad una operazione per essere distributiva, la seconda è conseguenza della prima per m commensurabile; se m è incommensurabile, essa si può pur dedurre dalla prima, supposta p.e. la continuità della formazione $\mathbf{Ra}$.

76. Introdurremo le seguenti convenzioni:

1^o Essendo $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ due trasformazioni degli enti del sistema A in enti d'uno stesso sistema lineare B, porremo

$$\mathbf{R} = \mathbf{S},$$

#156 se, qualunque sia l'ente $\mathbf{a}$ del sistema A, si ha $\mathbf{Ra} = \mathbf{Sa}$.

2^o La moltiplicazione degli enti di un sistema per un numero m, è, come si è detto, un'operazione distributiva; noi la indicheremo collo stesso numero m. Quindi le eguaglianze $\mathbf{R} = 1$, $\mathbf{R} = 0$ dicono che l'operazione $\mathbf{R}$ fa corrispondere ad ogni ente rispettivamente sè stesso, o zero.

[S.147]

3^o Essendo $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$ trasformazioni degli enti $\mathbf{a}$ d'un sistema A in enti d'uno stesso sistema lineare B, porremo

$$(\mathbf{R}+\mathbf{S})\mathbf{a} = \mathbf{Ra} + \mathbf{Sa}.$$

L'operazione indicata col segno $\mathbf{R}+\mathbf{S}$ è pure distributiva. La diremo *somma* delle due operazioni #157 $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$; essa è una nuova trasformazione degli enti di A in enti di B. Sono evidentemente soddisfatte le condizioni imposte ad una somma al N. 72.

4^o Essendo $\mathbf{R}$ una trasformazione degli enti $\mathbf{a}$ del sistema A in enti del sistema B, ed essendo $\mathbf{S}$ una trasformazione degli enti B in enti d'un sistema C, porremo

$$\mathbf{SRa} = \mathbf{S}(\mathbf{Ra}).$$

L'operazione indicata col segno $\mathbf{SR}$ è pure distributiva; la diremo *prodotto* delle due trasforma- #158 zioni $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$. L'operazione $\mathbf{SR}$ trasforma gli enti del sistema A in enti del sistema C.

Come caso particolare, poichè un numero rappresenta una trasformazione, è definito il prodotto $m\mathbf{R}$, d'una trasformazione $\mathbf{R}$ per un numero, e sono soddisfatte le condizioni imposte al N. 72, 3^o.

Si deduce che le varie trasformazioni degli enti d'un sistema A in enti di un sistema B costitu- #159 iscono un sistema lineare.

Se $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ sono trasformazioni degli enti A in enti B, e se $\mathbf{S}, \mathbf{S}'$, sono trasformazioni degli enti B in enti C, si avrà

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}+\mathbf{R}') = \mathbf{SR} + \mathbf{SR}',\ (\mathbf{S}+\mathbf{S}')\mathbf{R} = \mathbf{SR} + \mathbf{S}'\mathbf{R}.$$

Se $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$ trasformano rispettivamente gli enti A in B, gli enti B in C, e gli enti C in D, si avrà $\mathbf{T}(\mathbf{SR}) = (\mathbf{TS})\mathbf{R}$, è il loro valore comune si indicherà con $\mathbf{TSR}$; questa è una trasformazione degli enti del sistema A in enti del sistema D.

Quindi la moltiplicazione delle trasformazioni ha la proprietà distributiva rispetto alla somma, e l'associativa; ma essa non è in generale commutativa, vale a dire non è in generale $\mathbf{SR} = \mathbf{RS}$. [S.148] Quando questa condizione è soddisfatta, le due operazioni si diranno *commutabili* fra loro. Se m è un numero, $\mathbf{R}$ una trasformazione qualunque, si avrà $m\mathbf{R} = \mathbf{R}m$, ossia le trasformazioni eguali a numeri sono commutabili con ogni altra trasformazione.

77. TEOR. *Se* $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$ *sono* n *enti indipendenti d'un sistema lineare* A *ad* n *dimensioni, e* $\mathbf{b}_1 ... \mathbf{b}_n$ *sono enti pure d'un sistema lineare, è determinata una ed una sola trasformazione* $\mathbf{R}$ *del* #160 *sistema* A *che soddisfa alle condizioni*

α)
$$\mathbf{Ra}_1 = \mathbf{b}_1, ... \, \mathbf{Ra}_n = \mathbf{b}_n.$$

Infatti, ad ogni ente $\mathbf{a}$ del sistema A corrispondono gli n numeri $x_1 ... x_n$ che soddisfano alla condizione $\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n$, cioè le coordinate di $\mathbf{a}$ rispetto da $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$, le quali sono funzioni distributive di $\mathbf{a}$. Pongasi $\mathbf{Ra} = x_1\mathbf{b}_1 + ... + x_n\mathbf{b}_n$; sarà $\mathbf{Ra}$ una funzione distributiva di $\mathbf{a}$, e quindi l'operazione $\mathbf{R}$ è distributiva, e soddisfa evidentemente alle condizioni imposte (α).

Se poi $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ sono due trasformazioni che soddisfano alle condizioni (α), preso un ente qualunque $\mathbf{a} = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_n\mathbf{a}_n$ di A, si scorge subito che $\mathbf{Ra} = \mathbf{Sa}$, e quindi $\mathbf{R} = \mathbf{S}$.

DEF. *La trasformazione degli enti del sistema lineare* A *ad* n *dimensioni che fa corrispondere agli* n *enti indipendenti* $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n$ *gli enti* $\mathbf{b}_1 ... \mathbf{b}_n$ *si indicherà colla scrittura:* #161

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \dots & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

Il gruppo degli enti $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ dicesi anche il *denominatore* della trasformazione, mentre il gruppo $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ dicesi il *numeratore* della medesima. Per denominatore d'una trasformazione si può prendere un gruppo qualunque di n enti indipendenti di A. Due trasformazioni degli enti dello stesso sistema A si possono sempre ridurre allo stesso denominatore.

[S.149]

Si ricava da questa definizione, e dalle proposizioni precedenti:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \dots & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} (x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n) = x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n.$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \dots & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_1, & \mathbf{b}'_2, & \dots & \mathbf{b}'_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \right\} = (\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'_1) \cap (\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}'_2) \cap \dots \cap (\mathbf{b}_n = \mathbf{b}'_n).$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \dots & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1, & \mathbf{c}_2, & \dots & \mathbf{c}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1, & \mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_2, & \dots & \mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m\mathbf{a}_1, & m\mathbf{a}_2, & \dots & m\mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = m; \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 1; \begin{pmatrix} 0, & 0, & \dots & 0 \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_n \\ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_n \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

#162

La coordinata x_1 dell'ente $\mathbf{a}$ rispetto agli enti di riferimento $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ è, come si è detto, una funzione distributiva di $\mathbf{a}$; l'operazione che dà questa coordinata si può indicare col segno

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots & 0 \\ \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

Essendo a, b, c numeri, l'espressione $\binom{c}{b}a$ vale $\frac{c}{b}a$.

Def. *Se* $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ *è una trasformazione degli enti del sistema A ad n dimensioni negli enti del sistema B pure ad n dimensioni, e gli enti* $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ *sono fra loro indipendenti, porremo*

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

La $\mathbf{R}^{-1}$ sarà una trasformazione degli enti del sistema B in enti del sistema A; essa dicesi l'*inversa* di $\mathbf{R}$. Si ha:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = 1, \ \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = 1, \ (\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}.$$

[S.150]

#163 **78.** Fra le trasformazioni meritano menzione speciale le *sostituzioni*, ossia le trasformazioni degli enti d'un sistema lineare A in enti dello stesso sistema lineare. Sono sostituzioni le trasformazioni eguali a numeri. Le sostituzioni si possono sempre sommare e moltiplicare fra loro e con numeri.

Se $\mathbf{R}$ è una sostituzione, indicheremo con $\mathbf{R}^n$, ove n è un numero intero e positivo, il prodotto di n sostituzioni $\mathbf{R}$. Si avrà

(1) $$\mathbf{R}^m\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}; (\mathbf{R}^m)^n = \mathbf{R}^{mn}.$$

Se esiste la sostituzione $\mathbf{R}^{-1}$ inversa della $\mathbf{R}$, essendo n un numero intero positivo, porremo $\mathbf{R}^{-n} = (\mathbf{R}^{-1})^n$, e $\mathbf{R}^0 = 1$. Si deduce che, qualunque siano i numeri interi m ed n, positivi o negativi, sussitono le formule (1).

Essendo $\mathbf{R}$ una sostituzione qualunque, porremo per definizione

$$e^{\mathbf{R}} = 1 + \mathbf{R} + \frac{\mathbf{R}^2}{2!} + \frac{\mathbf{R}^3}{3!} + \ldots$$

Si suppongono estese agli enti lineari e alle trasformazioni le definizioni di serie, convergenza, e loro somma.

Si può dimostrare che la serie del secondo membro è sempre convergente, supposto che il sistema lineare A abbia un numero finito di dimensioni (V. Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari. Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, 1887).

Essendo t una variabile numerica, $\mathbf{a}_0$ un ente costante del sistema A, e fatto

$$\mathbf{a} = e^{\mathbf{R}t}\mathbf{a}_0,$$

sarà $\mathbf{a}$ funzione di t, che per $t = 0$ si riduce ad $\mathbf{a}_0$, e che soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{a}.$$

Se due sostituzioni $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$ sono fra loro commutabili, cioè [S.151] $\mathbf{RS} = \mathbf{SR}$, sono pure commutabili con esse e fra loro le sostituzioni $\mathbf{R} + \mathbf{S}, \mathbf{RS}, \mathbf{R}^{-1}, e^{\mathbf{R}}$, e tutte le sostituzioni che si ottengono da queste ripetendo le stesse operazioni. Nella ipotesi della commutabilità di $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{S}$ sarà pure $e^{\mathbf{R}+\mathbf{S}} = e^{\mathbf{R}}e^{\mathbf{S}}$.

Le varie sostituzioni che si possono ottenere da una sostituzione $\mathbf{R}$ e da numeri colle operazioni somma, moltiplicazione, inversione, esponenziale sono fra loro commutabili.

79. Sia $\mathbf{x}$ un ente d'un sistema lineare A, e sia $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ una sua funzione, il cui risultato appartenga pure ad un sistema lineare B. Essendo $\mathbf{x}'$ un ente qualunque del sistema A, porremo per definizione del primo membro

$$\left(d\,\begin{matrix}\mathbf{x}'\\ \mathbf{x}\end{matrix}\right) f(\mathbf{x}) = \lim 1/h[f(\mathbf{x} + h\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})]$$

il limite essendo ottenuto col far tendere il numero h a zero. L'ente $\left(d\,\begin{smallmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{smallmatrix}\right) f(\mathbf{x})$ appartiene al sistema lineare B, ed è funzione di $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{x}'$. All'ente $\mathbf{x}'$ si dà il nome di differenziale della variabile indipendente $\mathbf{x}$, e all'ente $\left(d\,\begin{smallmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{smallmatrix}\right) f(\mathbf{x})$ quello di differenziale della funzione $f(\mathbf{x})$. Quando sia ben fissata la variabile indipendente $\mathbf{x}$ e il suo differenziale $\mathbf{x}'$, al posto di $\left(d\,\begin{smallmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\end{smallmatrix}\right) f(\mathbf{x})$ scriveremo semplicemente la lettera d.

Se p.e. $f(x)$ è una funzione numerica del numero x, avente derivata $f'(x)$, si avrà

$$\left(d\,\begin{matrix}1\\ x\end{matrix}\right) f(x) = f'(x),\ \left(d\,\begin{matrix}h\\ x\end{matrix}\right) f(x) = f'(x)h.$$

Se il sistema lineare A ha m dimensioni, e quello B ha n dimensioni, posto

$$\begin{array}{lclcl}\mathbf{x} & = & x_1\mathbf{a}_1+ & \ldots & +x_m\mathbf{a}_m\\ \mathbf{x}' & = & x'_1\mathbf{a}_1+ & \ldots & +x'_m\mathbf{a}_m\\ \mathbf{y} & = & y_1\mathbf{b}_1+ & \ldots & +y_n\mathbf{b}_n,\end{array}$$

[S.152] ove $\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1 ... \mathbf{b}_n$ sono gli enti di riferimento nei sistemi A e B, se l'ente $\mathbf{y}$ è funzione di $\mathbf{x}$, le variabili numeriche $y_1 ... y_n$, sono funzioni dei numeri $x_1 ... x_m$, e si avrà:

$$\left(d \ {}^{\mathbf{x}'}_{\mathbf{x}}\right) \mathbf{y} = \left(\frac{dy_1}{dx_1} x_1' + ... + \frac{dy_1}{dx_m} x_m'\right) \mathbf{b}_1 + ... \\ + \left(\frac{dy_n}{dx_1} x_1' + ... + \frac{dy_n}{dx_m} x_m'\right) \mathbf{b}_n,$$

supposta la continuità delle derivate parziali delle y rispetto alle x.

Nella stessa ipotesi, supposto k un numero reale, e $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ due enti del sistema lineare A, si ha

$$\left(d \ {}^{k\mathbf{x}'}_{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}) = k \left(d \ {}^{\mathbf{x}'}_{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x})$$

$$\left(d \ {}^{\mathbf{x}'+\mathbf{x}''}_{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}) = \left(d \ {}^{\mathbf{x}'}_{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}) + \left(d \ {}^{\mathbf{x}''}_{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x}).$$

#164 Queste due ultime formule dicono che $\left(d^{\mathbf{x}'}_{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x})$ è funzione distributiva dell'ente $\mathbf{x}'$.

L'operazione distributiva o trasformazione, che eseguita su $\mathbf{x}'$, dà per risultato $\left(d^{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{x})$, si potrà indicare con $\left(d^{*}_{\mathbf{x}}\right)$, e si potrebbe chiamare la *derivata* dell'ente $\mathbf{y}$ rispetto all'ente $\mathbf{x}$.

[S.153]

Applicazioni.

80.

[...]

2. L'*identità* di due enti a e b, ossia l'affirmazione che a e b sono due nomi attribuiti da uno stesso ente, è una eguaglianza particolare.[...]

#165 3. Ogni eguaglianza fra gli enti d'un sistema, diversa dall'identità, equivale all'identità fra gli enti che si ottengono da quelli del sistema dato astraendo da tutte e sole quelle proprietà che distinguono un ente dai suoi eguali.

[Ende]

Anmerkungen:

#135 Peano verweist anschließend auf Leibniz, Möbius, Bellavitis, Hamilton, Grassmann. Dabei ist die Reihenfolge der letzten beiden Absicht, da Hamilton mit 1853 zitiert wird, Grassmann aber mit 1844. Nach Peanos Urteil beinhaltet Grassmann die übrigen, „*ma i concetti troppo elevati ed astrusi contenuti nell'Ausdehnungslehre impedirono la diffusione di questa scienza*" [...]. Der *Barycentrische Calcül* von Möbius entspricht dem Inhalt von Cap. II.

#137 Gemeint sind die Kapitel VIII und IX.

#139 Es ist der Text von Anm.4 zu lesen, die sich auf die Erwähnung von Hamilton auf S.V bezieht. Peano spricht von *vettori* und benutzt Hamiltons Bezeichnungen I, J, K in den Abschnitten **15.**ff (S.40ff), **20.**ff (S.49ff), **50.**ff (S.97ff; nunmehr als Einheitsvektoren mit IJK$\neq 0$), **55.** (S.105f; dito) und **63.**f (S.117ff; dito).

#140 Peano gibt ein französisches Lehrbuch von Laisant (Paris 1881) an.

#141 In dem zitierten Unterparagraphen **83.** 14. auf S.158 betrachtet Peano *sostituzioni* $\mathbf{T} = \left(\begin{array}{cc} B, & B' \\ A, & A' \end{array}\right)$ (vgl. #152 wegen des Begriffs *sostituzioni* und #161 wegen der Schreibweise; A, A' sind demnach linear unabhängige *enti* eines zweidimensionalen *sistema*). Für die speziellen *sostituzioni*

$$\mathbf{I} = \left(\begin{array}{cc} B, & A \\ A, & B \end{array}\right), \quad \mathbf{J} = \left(\begin{array}{cc} A, & -B \\ A, & B \end{array}\right), \quad \mathbf{K} = \left(\begin{array}{cc} B, & -A \\ A, & B \end{array}\right)$$

schreibt Peano die Multiplikationstafel auf, die der von $\mathbb{H}$ sehr ähnlich sieht: $\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = -\mathbf{K}^2 = 1; \mathbf{IJ} = -\mathbf{JI} = \mathbf{K}; \mathbf{IK} = -\mathbf{KI} = \mathbf{J}; \mathbf{KJ} = -\mathbf{JK} = \mathbf{I}$. Man beachte, daß mit der Schreibweise keine Matrizen, mit der Multiplikation also keine Matrizenmultiplikation gemeint ist, sondern die Verknüpfung unter #162. Interessant ist, daß Peano die Ähnlichkeit offenbar bemerkt, da er diesen Unterparagraphen **83.** 14. in der Quaternionenanmerkung (vgl. #139) erwähnt.

Peano stellt als nächstes (ohne Beweis) fest, daß man jedes $\mathbf{T}$ schreiben kann als $m + x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}$. Daß die *enti* B, B' lineare Funktionen der A, A' sind, ist klar wegen der Definition unter #161. Man sieht auch leicht, daß die Erzeugenden folgende Darstellung in Matrixschreibweise besitzen[96]:

$$1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right), \mathbf{I} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \mathbf{J} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right), \mathbf{K} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right).$$

Offenbar kann man die Standardbasis des $\mathbb{R}^{(2,2)}$ bezüglich dieser vier Matrizen darstellen. Die lineare Unabhängigkeit der vier Erzeugenden (die Peano nicht erwähnt) kann man leicht auch ohne diesen Übergang in die ‚heute übliche Sprache' feststellen, wenn man eine Darstellung der Null–*sostituzione* in m, x, y, z ansetzt.

Der ebenfalls zitierte Unterparagraph **86.** 2. bringt folgendes Resultat: $|(\mathrm{I}*)$ ist für einen Vektor I der Länge 1 eine *operazione distributiva*, deren Resultat auf dem Vektor U der Wert $|(\mathrm{IU})$ ist. Auf diese bereits bei #141 zu findende Begriffsbildung gehe ich in der Bemerkung zu #154 näher ein, siehe unten.

#142 Einen Vergleich zwischen beiden Systemen liefere Hyde im Am. J. Math. **6** auf S.1ff

#147 In **81.** 3. auf S.154 gibt Peano ein alternatives Axiomensystem an: Aus 1, 2, 3, 4 kann man $(a = b) = (a + c = b + c)$ schließen; umgekehrt folgt aus 1, 2, 3 und dieser Aussage 4.

#148 Mit *della stessa specie* ist natürlich gemeint, daß die *formazioni* von je einer Art ein *sistema lineare* bilden. Was unter diesen *formazioni* zu verstehen ist, steht in diesem Anhang ab S.164.

#153 In der A_1 heißt jede distributive Verknüpfung Multiplikation (S.11 bzw. [71] I,1 41-43; vgl. [25] 68).

#154 Lt. Anm.6 zur *prefazione* ersetzen $\perp$ und $|$ die Produktbezeichnung $\times$ aus dem 1887er Artikel Applicazioni; sie sind aber selbst keine zweistelligen Operationen. Die Definition von $\perp$u als zum Vektor u gleichlangen koplanaren orthogonalen Vektor „*in cui senso sia tale che il bivettore* u$\perp$u *sia positivo*" steht in **40.** (S.75); analog dazu sieht die Definition von $|$u, $|$U (u bivettore, U vettore) in **52.** (S.100) aus. In **84.** 1. (S.159f) wird $\perp$ als *sostituzione* untersucht.

[96] Allerdings sind die *enti* A, B keineswegs Körperelemente. Eine Matrixmultiplikation kann also erst stattfinden, wenn man die zwei linear unabhängigen *enti* des zweidimensionalen Raumes durch ihre Koordinaten bezüglich einer Basis — z.B. sie selbst — ersetzt hat.

Lt. DIEUDONNÉ ([43] 8) gibt es bei GRASSMANN ein *interior product*, das im Unterschied zum *scalar product* kein *product of two vectors* ist, sondern ein *product of a bivector and a vector*; Dieudonné sagt ausdrücklich *interior* und nicht *inner*, was sich im Deutschen nicht so gut wiedergeben läßt. Grassmann spricht in der A_1 von *„eingewandtem"* Produkt.

#156 Es wird die Gleichheit auf dem in der Folge betrachteten Raum $\mathcal{L}(A, B)$ erklärt.

#165 Es geht offenbar um den Übergang zur Restklasse. Peano führt als Beispiel die Vergleichung der *grandezza* an.

Es folgen nun noch einige teilweise frei zitierte Abschnitte aus den ersten Kapiteln über *formazioni*, die dazu dienen, Peanos Standardbeispiel eines Vektorraums besser kennenzulernen.

S.21:

> **1.** [...] Siano A, B, C ... dei punti nello spazio.
>
> DEF.1^a: *Diremo* linea AB *la linea diretta limitati dai due punti* A *e* B, *e immaginata descritta da un punto* P *che la percorra da* A *verso* B. [...]
>
> DEF.2^a: *Diremo* superficie ABC *la superficie piana triangolare descritta dalla linea* AP, *ove il punto* P *descriva la linea* BC, *da* B *verso* C. [...]
>
> [S.22]
>
> DEF.3^a: *Diremo* volume ABCD *il volume tetraedale descritto dalla superficie* ABP, *ove il punto* P *descriva la linea* CD, *nel senso convenuto.*
>
> Con *gr*ABCD intenderemo il numero che misura questo volume, rispetto ad un volume fisso, assunto come unità di misura.

#166 Für *linee* (S.21) und *superficie* (S.22) wird in ähnlicher Weise eine Größe *„grandezza"* eingeführt, die man zur Definition von Skalarmultiplikation heranziehen kann, was Peano in DEF.5^a von **3.** (S.24) und TEOR.3^o bzw. 5^o von **8.** (S.28) offenbar tut. Zur *grandezza* von Punkten schweigt Peano. Eine ähnliche Festlegung auf eine ‚Einheit' nimmt er auf S.73 in **37.** vor: „Fisseremo ad arbitrio una superficie ω, cui daremo il nome di *superficie unità"*

S.23:

> **3.** DEF.2^a: *Un volume* ABCD, *non nullo, dicesi* destrorso, *ovvero* descritto nel senso positivo, *se una persona diposta lungo* AB, *col capo in* A *e colle estrémita inferiori in* B, *vede la superficie* ABP, *la quale descrive il volume quando il punto* P *percorre la linea* CD, *da* C *verso* D, *a muoversi da sinistra verso destra. Se invece la stessa persona vede il piano a muoversi da destra verso sinistra, il volume si dicà* sinistrorso, *ovvero* descritto nel senso negativo.
>
> [...] Il senso d'un volume, raramente considerato nella Geometria elementare, ha grande importanza nelle ricerche che intrapréndiamo.
>
> DEF.3^a: *Diremo* rapporto di due volumi A *e* Ω, *e indicheremo con* $\frac{\mathsf{A}}{\Omega}$, *il rapporto delle loro grandezze preso col segno* $+$ *o col segno* $-$, *secondochè i due volumi hanno lo stesso senso, o senso opposto.*

Auf S.25 nutzt er diese Definition, um sagen zu können: Ist $\frac{\pi \mathrm{A}}{\pi \mathrm{B}} < 0$, so sind A und B Punkte auf verschiedenen Seiten der *superficie* π. Weiter S.23:

Sia Ω un volume determinato in grandezza e senso. Allora:

#167 DEF.4^a: *Diremo che i volumi* A *e* B *sono eguali, e scriveremo* $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, *se*

$$\frac{\mathsf{A}}{\Omega} = \frac{\mathsf{B}}{\Omega}.$$

Auf S.24 wird darauf hingewiesen, daß $\frac{\mathsf{A}}{\Omega} = \frac{\mathsf{B}}{\Omega}$ nicht gleichbedeutend ist mit $gr\mathsf{A} = gr\mathsf{B}$, da letztere Gleichung den *senso* nicht beachtet.

DEF.5^a [...] $\mathsf{A} = m\mathsf{B}$ [...], se $\frac{\mathsf{A}}{\Omega} = m\frac{\mathsf{B}}{\Omega}$

DEF.6^a [...] $\mathsf{A} = \mathsf{B} + \Gamma$, se $\frac{\mathsf{A}}{\Omega} = \frac{\mathsf{B}}{\Omega} + \frac{\Gamma}{\Omega}$

Es folgt die Angabe der Transitivität der Gleichheit aus DEF.4^a und einiger Eigenschaften der Verknüpfungen aus DEF.5^a und 6^a: Ihre Wohldefiniertheit (unter der speziellen Gleichheit aus DEF.4^a), $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{K}_+$, $\mathcal{D}_l$, $\mathcal{D}_r$.

S.25:

5. DEF.1^a: *L'insieme dei punti* A, B, C, ... *cui siano rispettivamente affissi i numeri* $m, n, p, \ldots$ *dicesi una* formazione di prima specie *e si rappresenta colla scrittura* mA+nB+pC... #168

Was dabei mit mA gemeint sein soll, ist unklar; einziger Hinweis ist TEOR.1^a in **8.**. Weniger problematisch ist die Bedeutung von + bei Punkten, denn es werden gar keine Punkte addiert, sondern *formazioni* — ein Unterschied, der eng mit $\mathcal{U}$ zusammenhängt; vgl. **7.**, #149 und #171.

Analog sehen DEF.2^a–4^a aus:

seconda specie	linee a, b, c ...
terzia...	superficie α, β, γ...
quarta...	volume $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$...

S.27

7. DEF. *Due formazioni di* $\left\{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix}\right\}$ *specie* $\left\{\begin{matrix} m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + \ldots \\ m\mathrm{a} + n\mathrm{b} + \ldots \\ m\alpha + n\beta + \ldots \end{matrix}\right\}$ *e* $\left\{\begin{matrix} m'\mathrm{A}' + n'\mathrm{B}' + \ldots \\ m'\mathrm{a}' + n'\mathrm{b}' + \ldots \\ m'\alpha' + n'\beta' + \ldots \end{matrix}\right\}$

diconsi eguali, *e si scrive*

$$\left\{\begin{matrix} m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + \ldots = m'\mathrm{A}' + n'\mathrm{B}' + \ldots \\ m\mathrm{a} + n\mathrm{b} + \ldots = m'\mathrm{a}' + n'\mathrm{b}' + \ldots \\ m\alpha + n\beta + \ldots = m'\alpha' + n'\beta' + \ldots \end{matrix}\right\}$$

se, comunque si prenda $\left\{\begin{matrix} \text{la superficie } \pi \\ \text{la linea p} \\ \text{il punto P} \end{matrix}\right\}$ *si ha sempre*

$$\left\{\begin{matrix} m\mathrm{A}\pi + n\mathrm{B}\pi + \ldots = m'\mathrm{A}'\pi + n'\mathrm{B}'\pi + \ldots \\ m\mathrm{ap} + n\mathrm{bp} + \ldots = m'\mathrm{a}'\mathrm{p} + n'\mathrm{b}'\mathrm{p} + \ldots \\ m\alpha\mathrm{P} + n\beta\mathrm{P} + \ldots = m'\alpha'\mathrm{P} + n'\beta'\mathrm{P} + \ldots \end{matrix}\right\}$$

Dabei sind Aπ, ap, αP jeweils auf S.22 in **2.** erklärte Schreibweisen für Volumina.

Peano erklärt bereits in **3.** für *volume*, wann sie gleich Null sind — ganz analog zur Gleichheit über die *grandezza* ($gr\mathsf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathsf{A} = 0$). In **6.** stellt er die entsprechende Definition für die übrigen *formazioni* auf, indem er analog zur Gleichheitsdefinition von Volumina ausgeht. Er spricht nicht aus, ob es sich um unterschiedliche Nullen handelt. #169

Der nächste Satz ist von Bedeutung beim Nachweis von $\mathcal{K}_+$:

> TEOR.1^o *Due formazioni della stessa specie, che non differiscano che per l'ordine dei termini, sono eguali fra loro.*

Auf S.27f finden sich Sätze, deren Beweis mit **7.** möglich sei und dem Leser überlassen wird. Der erste dieser Sätze ist

> **8.** TEOR.1^o *L'equazione* mA= nB *dice che i punti* A *e* B *coincidono, e che i numeri* m *ed* n *sono eguali.*

TEOR.2^o bringt die Definition von a = b, d.h. der Satz erklärt, was unter dieser Gleichheit im Blick auf **7.** zu verstehen ist. In diesem Sinne ist TEOR.3^o die Definition von ma, TEOR.4^o die Definition von $\alpha = \beta$ (der *senso* einer *superficie* wird zurückgeführt auf den *senso* des erzeugten Volumens: $\alpha P, \beta P$ *hanno stesso senso*) und TEOR.5^o die Definition von $m\alpha$. Dann folgt in **9.** die Erklärung der Addition auf *formazioni*: Für $\mathrm{S} = m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + ...$ und $\mathrm{S}' = m'\mathrm{A}' + n'\mathrm{B}' + ...$ ist $\mathrm{S} + \mathrm{S}' = m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + ... + m'\mathrm{A}' + n'\mathrm{B}'...$; diese Addition wird als assoziativ und kommutativ erkannt. Anschließend finden sich die Skalarmultiplikation mit den beiden Distributivitäten, die Wohldefiniertheit beider Verknüpfungen sowie, in Peanos Schreibweise:

$$(\mathrm{S} = \mathrm{S}') \cap (\mathrm{S}'' = \mathrm{S}''') < (\mathrm{S} + \mathrm{S}'' = \mathrm{S}' + \mathrm{S}''')$$

Dazu, daß nun die *formazioni* ein *sistema lineare* bilden, fehlen noch $\mathcal{U}$ und $\mathcal{A}_\circ$, die nicht ausdrücklich genannt werden. Beides geht aber aus der Definition der Skalarmultiplikation mit x hervor, „*la quale si ottiene moltiplicando i coefficienti di tutti i suoi termini con* x"

S.30:

> **10.** Le operazioni precedenti sono la naturale estensione delle analoghe operazioni algebriche. Ora definiremo un'operazione geometrica che non ha piú la correspondente
> #170 in algebra.

Gemeint ist das progressive Produkt. Dessen Definition bringt erstmals die explizite Beschränkung auf endlich viele Summanden. Es folgt die Ableitung seiner Eigenschaften. Auf S.VI der *prefazione* nimmt Peano die Ineinssetzungen „*prodotto progressivo/projezione* [...] *prodotto regressi-*
#171 *vo/intersezione*" vor.

13. (S.36) bringt die Definition der *massa* $m_1 + ... + m_n$ einer *formazione di prima specie* $m_1 A_1 + ... + m_n A_n$; darüber gilt der Satz: Jede *formazione di prima specie*, deren *massa* von Null verschieden ist, kann auf einen einzigen Punkt G (den Schwerpunkt) zurückgeführt werden (betreffend MÖBIUS vgl. meine Bemerkung zu #135 auf S.162); die *massa* ist sein *coefficiente*. Dieses Wort tritt erstmals bei der Definition der Skalarmultiplikation in **9.** auf und hier dann zum zweiten Mal. Formal ist die Bedeutung des *coefficiente* klar: Eine *formazione* kann man nur wieder durch eine *formazione* ausdrücken, nicht durch einen Punkt. Somit bedarf G eines Koeffizienten (vgl. #168).

S.37:

> #172 **14.** DEF. *Ogni formazione di prima specie della forma* B − A *dicesi* vettore.[...]

Offenbar kann der Koeffizient 1 bei *formazioni* auch wegfallen; vgl. wieder #168 und #171. Auf S.39 erfolgt die Konstruktion des Vektors $m(\mathrm{B} - \mathrm{A})$ für $m \in \mathbb{Z}$. Schließlich formuliert Peano auf S.55 in **24.**: DEF. *Il prodotto di due vettori dicesi* bivettore [...].

A.4 Weyls *Raum — Zeit — Materie*

RZM, S.14

§2. Grundlagen der affinen Geometrie.

Eine Translation oder Verschiebung $\mathfrak{a}$ des Raumes wollen wir bis auf weiteres als einen *Vektor* bezeichnen; später freilich werden wir mit diesem Namen eine allgemeinere Vorstellung verbinden. #173 Daß bei der Verschiebung $\mathfrak{a}$ der Punkt P in Q übergeht, werde auch so ausgedrückt: Q ist der Endpunkt des von P aus aufgetragenen Vektors $\mathfrak{a}$. Sind P und Q irgend zwei Punkte, so gibt es eine und nur eine Verschiebung $\mathfrak{a}$, die P in Q überführt; wir nennen sie den durch P und Q bestimmten Vektor und bezeichnen ihn mit $\overrightarrow{PQ}$.

[S.15]

Diejenige Translation $\mathfrak{c}$, die durch Hintereinanderausführung zweier Translationen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ entsteht, werde als die Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet: $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Aus der Definition der Summe ergibt sich 1) die Bedeutung der Multiplikation (Wiederholung) und der Teilung eines Vektors durch eine ganze Zahl; 2) der Sinn der Operation $-$, welche den Vektor $\mathfrak{a}$ in den inversen $-\mathfrak{a}$ verkehrt; 3) was unter dem Vektor 0 zu verstehen ist, nämlich die alle Punkte festlassende »Identität«. Es ist $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a}, \mathfrak{a} + (-\mathfrak{a}) = 0$. Weiter folgt daraus die Bedeutung des Symbols $\pm\frac{m\mathfrak{a}}{n} = \lambda\mathfrak{a}$, in welchem m und n irgend zwei natürliche Zahlen sind und λ den Bruch $\pm\frac{m}{n}$ bezeichnet. Durch die Forderung der Stetigkeit ist damit auch festgelegt, was unter dem Vektor $\lambda\mathfrak{a}$ zu verstehen ist, wenn λ eine beliebige reelle Zahl. Wir stellen folgendes einfache Axiomensystem der affinen Geometrie auf.

I. Vektoren.

Je zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *als ihre »Summe«; eine Zahl* λ *und ein Vektor* $\mathfrak{a}$ *bestimmen eindeutig einen Vektor* $\lambda\mathfrak{a}$*, das »*λ*–fache von* $\mathfrak{a}$*«(Multiplikation). Diese Operationen genügen folgenden Gesetzen.*

α) Addition.

1. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ *(kommutatives Gesetz).*

2. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ *(assoziatives Gesetz).*

3. Sind $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *irgend zwei Vektoren, so gibt es einen und nur einen* $\mathfrak{x}$*, für welchen die Gleichung* $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ *gilt. Er heißt die Differenz* $\mathfrak{c} - \mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{a}$*. (Möglichkeit der Subtraktion).*

β) Multiplikation.

1. $(\lambda + \mu)\mathfrak{a} = (\lambda\mathfrak{a}) + (\mu\mathfrak{a})$ *(erstes distributives Gesetz).*

2. $\lambda(\mu\mathfrak{a}) = (\lambda\mu)\mathfrak{a}$ *(assoziatives Gesetz).*

3. $1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

4. $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a}) + (\lambda\mathfrak{b})$ *(zweites distributives Gesetz).*

Die Gesetze β) folgen für rationale Multiplikatoren λ, μ aus den Additionsaxiomen, falls wir die Multiplikation mit solchen Faktoren wie oben aus der Addition *erklären*. Gemäß dem Prinzip #174 der Stetigkeit nehmen wir sie auch für beliebige reelle Zahlen in Anspruch, formulieren sie aber ausdrücklich als Axiome, da sie sich in dieser Allgemeinheit rein logisch nicht aus den Additionsaxiomen herleiten lassen. Indem wir darauf verzichten, die Multiplikation auf die Addition zurückzuführen, setzen wir uns in den Stand, aus dem logischen Aufbau der Geometrie die schwer zu greifende Stetigkeit ganz zu verbannen. 4. faßt die Ähnlichkeitssätze zusammen. #175

γ) Das »*Dimensionsaxiom*«, das hier seine Stelle im System findet, werden wir erst hernach formulieren.

[S.16]

II. Punkte und Vektoren.

1. Je zwei Punkte A und B bestimmen einen Vektor $\mathfrak{a}$; in Zeichen $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$. Ist A irgend ein Punkt, $\mathfrak{a}$ irgend ein Vektor, so gibt es einen und nur einen Punkt B, für welchen $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}$ ist.

2. Ist $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{a}, \overrightarrow{BC} = \mathfrak{b}$, so ist $\overrightarrow{AC} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

In diesen Axiomen treten zwei Grundkategorien von Gegenständen auf, die Punkte und die Vektoren; drei Grundbeziehungen, nämlich diejenigen, welche durch die Symbole

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}, \qquad \overrightarrow{AB} = \mathfrak{a} \tag{1}$$

ausgedrückt werden. Alle Begriffe, die sich allein mit ihrer Hülfe rein logisch definieren lassen, gehören zur affinen Geometrie; alle Sätze, welche sich aus diesen Axiomen rein logisch folgern lassen, bilden das Lehrgebäude der affinen Geometrie, das somit auf der hier gelegten axiomatischen Basis deduktiv errichtet werden kann. Übrigens sind unsere Axiome nicht alle logisch unabhängig voneinander, sondern die Additionsaxiome für Vektoren ($I\alpha$, 2. und 3.) folgen aus denen, (II),
#176 welche die Beziehung zwischen Punkten und Vektoren regeln. Es lag uns aber daran, daß die Axiome (I) über Vektoren für sich allein schon ausreichen, um alle Tatsachen, welche nur die Vektoren (und nicht die Beziehungen zwischen Punkten und Vektoren) betreffen, aus ihnen zu folgern.

Aus den Additionsaxiomen ($I\alpha$) läßt sich schließen, daß ein bestimmter Vektor 0 existiert, der für jeden Vektor $\mathfrak{a}$ die Gleichung $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a}$ erfüllt; aus den Axiomen II ergibt sich weiter, daß $\overrightarrow{AB}$
#177 dann und nur dann dieser Vektor 0 ist, wenn die Punkte A und B zusammenfallen.

#178 [...] [S.17]

Eine endliche Anzahl von Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ heißt *linear unabhängig*, wenn

$$\xi_1\mathfrak{e}_1 + \xi_2\mathfrak{e}_2 + \cdots + \xi_1\mathfrak{e}_h \tag{2}$$

nur dann $= 0$ ist, falls sämtliche Koeffizienten ξ verschwinden. Unter dieser Voraussetzung bilden, wie wir uns ausdrücken wollen, die sämtlichen Vektoren von der Form (2) eine *h–dimensionale lineare Vektor–Mannigfaltigkeit*, und zwar diejenige, welche von den Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \cdots, \mathfrak{e}_h$ »*aufgespannt*« wird. Eine h–dimensionale lineare Vektor–Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ kann, unabhängig von der besonderen »*Basis*« $\mathfrak{e}_i$, folgendermaßen gekennzeichnet werden:

1. Die beiden Grundoperationen: Addition zweier Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl führen nicht aus der Mannigfaltigkeit heraus; d.h. die Summe zweier zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Vektoren wie auch das Produkt eines zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Vektors mit einer beliebigen reellen Zahl liegt stets wieder in $\mathfrak{M}$.

2. Es existieren in $\mathfrak{M}$ wohl h linear unabhängige Vektoren, aber je $h+1$ sind voneinander linear abhängig.

Aus der 2. Eigenschaft (die aus unserer ursprünglichen Definition mit Hilfe der elementarsten Sätze über lineare Gleichungen folgt) entnehmen wir, daß die Dimensionszahl h für die Mannigfaltigkeit als solche charakteristisch ist und nicht abhängig von der speziellen Vektorbasis, durch welche wir sie »*aufspannen*«.

Das in der obigen Tabelle der Axiome noch ausgelassene *Dimensionsaxiom* kann jetzt so formuliert werden:

γ) *Es gibt n linear unabhängige Vektoren, aber je $n+1$ sind voneinander linear abhängig,*
#179 oder: die Vektoren bilden eine n–dimensionale lineare Mannigfaltigkeit.

[Ende]

Anmerkungen:

Weyls sämtliche Axiome sollen mit $\mathcal{W}$ abgekürzt werden.

#173 Auf S.33 ist zu lesen: *„Fortan gebrauchen wir das Wort »Vektor« nicht mehr synonym für »Verschiebung«, sondern für »Tensor 1. Stufe«“.*

#176 Beweis der unter #176 ausgesprochenen Behauptungen: Seien $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{a}, \overrightarrow{BC}=\mathfrak{b}$ sowie $\overrightarrow{CD}=\mathfrak{c}$. Es ist nach $\mathcal{W}$ *II.* 2

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}).$$

Weiter sind bei gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ und gegebenem Punkt A wegen $\mathcal{W}$ *II.* 1 die Darstellungen $\overrightarrow{AB}=\mathfrak{a}, \overrightarrow{AC}=\mathfrak{c}$ eindeutig bestimmt. Es ist nun nach $\mathcal{W}$ *II.* 2 sicher ein Vektor $\mathfrak{x}$ vorhanden, für den die Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$ gilt (die ja mit $\overrightarrow{AB}+\mathfrak{x}=\overrightarrow{AC}$ übereinstimmt), namlich $\overrightarrow{BC}$ — wenn man noch in Betracht zieht, daß B und C gemäß $\mathcal{W}$ *II.* 1 einen Vektor bestimmen.

Hierbei kann übrigens mit ‚bestimmen‘ sinnvollerweise nur ‚eindeutig bestimmen‘ gemeint sein. Wäre nämlich etwa $\mathfrak{a}=\overrightarrow{AB}=\mathfrak{b}$ und zugleich $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$, so wäre die Transitivität der Gleichheitsrelation verletzt. Weyl geht zwar nicht explizit auf diese Relation ein, es besteht aber kein Zweifel, daß sie in seinem Axiomensystem vorhanden ist, da sonst alle Eindeutigkeitsaussagen leer wären.

#177 Zeige für beliebige $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{a}, \mathfrak{b}+\mathfrak{y}=\mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{x}=\mathfrak{y}=: 0.$$

(Daß nämlich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ existieren, ist klar wegen $\mathcal{W}\ I\alpha\,3$.)

Zum Beweis: Mit der Wohldefiniertheit der Addition folgt aus der ersten der beiden Ausgangsgleichungen $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ (wegen $\mathcal{W}\ I\alpha\,2$. ist die Bedeutung von $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}+\mathfrak{x}$ klar). Die zweite Ausgangsgleichung zusammen mit $\mathcal{W}\ I\alpha\,1$. ergibt dann $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}+\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$. Wenn man nun wieder Klammern um $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ setzt, so wird klar, daß wegen der in $\mathcal{W}\ I\alpha\,3$. behaupteten Eindeutigkeit schon $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\mathfrak{x}$ sein muß, also auch $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}+\mathfrak{x}=\mathfrak{a}+\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\mathfrak{a}+\mathfrak{y}$ und somit (wieder wegen $\mathcal{W}\ I\alpha\,3$.) $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}$. Die *Eindeutigkeit* der 0 folgt also nicht erst auf dem üblichen Wege, sondern schon wegen $\mathcal{W}\ I\alpha\,3$.

Damit ist auch gezeigt, daß $0\mathfrak{x}=0\ \forall \mathfrak{x}\in\mathfrak{M}$, denn es gilt wegen $\mathcal{W}\ I\beta\ 1$. insbesondere für eine reelle, von 0 verschiedene Zahl λ, daß $\lambda\mathfrak{x}=(\lambda+0)\mathfrak{x}=\lambda\mathfrak{x}+0\mathfrak{x}$, also muß $0\mathfrak{x}=0$ sein.

Noch nicht gezeigt ist $AB=0 \Leftrightarrow A=B$. $AA=0$ ist trivial nach $\mathcal{W}$ *II.* 2; daß umgekehrt in $AB=0$ für B nur A gewählt werden kann, geht aus der Einzigkeitsaussage des zweiten Teiles von $\mathcal{W}$ *II.* 1 und $AA=0$ hervor.

#178 Weyl motiviert nun den Begriff der Linearkombination translativ.

A.5 Wieners *The Group of the Linear Continuum*

[196] 332f

A *vector–system* [...] is defined as in my previous paper [d.h. [195]] as a system K of elements (represented by capitals), associated with entities called vectors (represented by Greek letters), real numbers (represented by lower case letters), and the operations $\odot, \oplus$, and $\| \ \|$ by the following laws:—

(1) If ξ and η are vectors, $\xi \oplus \eta$ is a vector.

#180 (2) If ξ is a vector and $n \geq 0$, $n \odot \xi$ is a vector.

(3) If ξ is a vector, $\|\xi\|$ is a non-negative real number.

(4) $n \odot (\xi \oplus \eta) = (n \odot \xi) \oplus (n \odot \eta)$

(5) $m \odot (n \odot \xi) = mn \odot \xi$.

(6) $(m \odot \xi) \oplus (n \odot \xi) = (m + n) \odot \xi$.

(7) $\|m \odot \xi\| = m\|\xi\|$.

(8) $\|\xi \oplus \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$.

(9) If A and B belong to K, there is associated with them a unique vector AB.

(10) $\|AB\| = \|BA\|$.

(11) Given an element A of K and a vector ξ, there is an element B of K such that $AB = \xi$.

(12) $AC = AB \oplus BC$.

(13) $\|AB\| = 0$ when and only when $A = B$.

(14) If $AB = CD, DC = BA$.

A system (Vr), or a *restricted vector system* is a vector system of at least two elements in which the sum of two vectors is independent of their order, and in which, if A, B, and C are any three distinct elements such that $\|AB\| = \|AC\|$, then there is a finite set $B_1, B_2, \ldots, B_n$ of elements such that

(1) $B_1 = B, B_n = C$.

(2) For all k, $\|AB_k\| = \|AB\|$.

(3) For all k, $\|B_k B_{k+1}\| < \|AB\|$.

[Ende]

Anmerkungen:

Wieners sämtliche Axiome sollen mit $\mathcal{WN}$ abgekürzt werden. V sei die Menge der „*entities called vectors*“

Moore stellt fest ([127] 279): „*Wiener's axiom system* [...] *had certain failings. It did not state that* $\oplus$ *was commutative, associative, or had an identity, as one might expect. Moreover, his operation* $n \odot \xi$ *was defined only for non–negative real numbers* [...]. *Consequently, Wiener did not consider the inverse of his vector addition*“. Ähnlich äußert sich auch Dorier in [52] 294.

Moores Bewertung des Axiomensystems ist nicht ganz nachzuvollziehen. Er zählt zwar Beziehungen auf, die nicht ausdrücklich postuliert werden („*it did not state* ... “; „*Moreover,* ... “), aber erstens ist Moores eigene Aufzählung ihrerseits unvollständig — verglichen mit dem heutigen Axiomensystem eines normierten Vektorraums —, und zweitens weist er nicht darauf hin, daß einige der Beziehungen, die nicht ausdrücklich genannt sind, aus den vorliegenden gewonnen werden können.

Dazu eine Tabelle (ich gebe den fehlenden Eigenschaften fortlaufende Nummern in Fortsetzung von Wieners Liste; auf die *restricted systems* nehme ich keinen Bezug. Zur Verdeutlichung, daß diese Axiome bei Wiener nicht genannt werden, erhalten sie im folgenden kein Präfix $\mathcal{WN}$):

	Die Eigenschaft	wird von Moore aufgezählt	ist ableitbar
(15)	$\xi \oplus \eta = \eta \oplus \xi \ \forall \xi, \eta \in V$	ja	?
(16)	$(\xi \oplus \eta) \oplus \tau = \xi \oplus (\eta \oplus \tau) \ \forall \xi, \eta, \tau \in V$	ja	ja
(17)	$(\exists \theta \in V)\,(\forall \xi \in V) : \xi \oplus \theta = \xi$	ja	ja
(18)	$(\forall \xi \in V)(\exists \xi' \in V) : \xi \oplus \xi' = \theta$	ja	ja
(19)	$1 \odot \xi = \xi \ \forall \xi \in V$	nein	?
(20)	$\|\theta\| = 0, \|\xi\| > 0 \ \forall \xi \in V \setminus \{\theta\}$	nein	ja
(21)	$n \odot \xi \in V \ \forall \xi \in V, n \in \mathbb{R}_{-}$	ja	nein

Hat Moore die Ableitbarkeit (deren Beweis im folgenden gegeben wird) einfach nicht bemerkt, oder war sie ihm nicht wichtig? Zu letzterer Variante, der bewußten Nichtbeachtung, hätte Moore dann das Recht, wenn Wiener die fehlenden Axiome nicht als ableitbar erwähnt bzw. nirgends benutzt (was zu untersuchen wäre). Denn dann läßt sich schließlich nicht sagen, ob sie Wiener bewußt waren, und insofern können sie aus historischer Sicht nicht als Bestandteil seines Vektorraumbegriffs angesprochen werden. Dabei liegt ein besonderes Gewicht auf dem ‚Benutzen' der Axiome, denn wenn die von Wiener mit Hilfe seines Vektorraumbegriffes erarbeiteten Ergebnisse ohne die fraglichen Axiome zustandekamen, sind letztere *nur* noch ableit*bar*, potentiell, sozusagen nur virtuell existent. Damit soll nicht etwa gesagt werden, daß die Wienersche Theorie irgendwie unvollständig wäre, denn alles, was man aus nichtgenannten Axiomen ableiten kann, die ihrerseits aus genannten abgeleitet werden können, kann man auch aus genannten ableiten (vgl. dazu auch Abschnitt 3.3.4). Ein Vergleich der beiden letzten Spalten kann helfen.

Zu den Beweisen:

(16) Nach $\mathcal{WN}$ (11) lassen sich $A, B, C, D \in K$ bestimmen, so daß $\xi = AB, \eta = BC, \tau = CD$. Die Assoziativität ist dann gleichbedeutend mit $AC \oplus CD = AB \oplus BD$ — was offenbar aus zweimaliger Anwendung von $\mathcal{WN}$ (12) folgt.

(17) Wähle zu $\xi \in V$ ein $A \in K$ und wende $\mathcal{WN}$ (11) an: Es gibt B in K mit $AB = \xi$; dieses B ist eindeutig wegen $\mathcal{WN}$ (9). Aus $\mathcal{WN}$ (12) folgt $AB = AA \oplus AB$, also offenbar $\xi = AA \oplus \xi$. Will man jetzt das gesuchte θ mit AA identifizieren, sollte man noch zeigen, daß $AA = BB \ \forall A, B \in K$, um die Konstruktion von der Wahl von A unabhängig zu machen. Dazu überlegt man sich zunächst, daß es nur einen Vektor der Norm 0 in V gibt.

Seien etwa $\xi, \eta \in V, \xi \neq \eta$. Wähle ein A in K; nach $\mathcal{WN}$ (11) gibt es B in K mit $\xi = AB$. Ebenso gibt es B' mit $\eta = AB'$. Dabei ist $B \neq B'$, denn es war ja vorausgesetzt, daß $\xi \neq \eta$, also $AB \neq AB'$; es gilt aber $AB \neq AB' \Rightarrow B \neq B'$, denn das ist gerade gleichbedeutend mit $B = B' \Rightarrow AB = AB'$ — und das ist in $\mathcal{WN}$ (9) enthalten („unique"). Wäre nun $\|\xi\| = \|\eta\| = 0$, so wäre $\|AB\| = \|AB'\| = 0$, also mit $\mathcal{WN}$ (13) $B = A = B'$.

Damit ist gezeigt, daß es höchstens einen Vektor der Norm 0 gibt; da AA und BB nach $\mathcal{WN}$ (13) solche Vektoren sind für beliebige $A, B \in K$, müssen sie gleich sein, und es macht Sinn, allgemein θ zu schreiben. Mit $\mathcal{WN}$ (7) sieht man dann noch, daß konkret $\theta = 0 \odot \xi \ \forall \xi \in V$ und $\theta = n \odot \theta \ \forall n \in \mathbb{R}_0^+$.

Man kann auf die Verwendung der Normstruktur verzichten, wenn man statt (17) und (18) die Aussage aus #176 in der auf S.169 angegebenen Weise zeigt.

(18) Sei $\xi = AB$ gemäß $\mathcal{WN}$ (11). Nach $\mathcal{WN}$ (12) gilt $AB \oplus BA = AA = \theta$, wobei BA gemäß $\mathcal{WN}$ (9) eindeutig definiert ist. Man kann also BA als ξ' ansprechen.

(20) Klar nach $\mathcal{WN}$ (3) und den Überlegungen zur Norm von θ im Beweis von (17).

Ich halte es für unwahrscheinlich, daß man (15) aus den Axiomen ableiten kann, da Wiener die Kommutativität ausdrücklich als Eigenschaft eines *restricted vector system* fordert. Zu (19) kann ich keine Aussage machen; meine nichtunitäre Instanz aus Abschnitt 4.4.2.2 kann m.E. nicht so erweitert werden, daß sie Wieners Axiome über die Punktstruktur erfüllt. Die Definition der Ausdrücke in (21) ist nach dem auf S.96 geschilderten Verfahren möglich, läßt sich aber nicht streng aus den Axiomen ableiten.

A.6 Dicksons *Algebras and their Arithmetics*

[39] 9

4. Definition of an algebra over any field. [...] The elements of an algebra will be denoted by small Roman letters, while the numbers of a field F will be denoted by small Greek letters.

An *algebra* A over a field F is a system consisting of a set S of two or more elements $a, b, c \dots$ and three operations $\oplus, \odot$ and $\circ$, of the types specified below, which satisfy postulates I–V. The #181
operation $\oplus$, called *addition*, and the operation $\odot$, called *multiplication*, may be performed upon any two (equal or distinct) elements a and b of S, taken in that order, to produce unique elements $a \oplus b$ and $a \odot b$ of S, which are called the *sum* and *product* of a and b, respectively. The operation $\circ$, called *scalar multiplication*, may be performed upon any number α of F and any element a of S, or upon a and α, to produce a unique element $\alpha \circ a$ or $a \circ \alpha$ of S, called a *scalar product.* #182

[S.10]

For simplicity we shall write $a + b$ for $a \oplus b$, ab for $a \odot b$, αa for $\alpha \circ a$ and $a\alpha$ for $a \circ \alpha$, and we shall speak of the elements of S as elements of A . #183

We assume that addition is commutative and associative:

I. $$a + b = b + a, \qquad (a + b) + c = a + (b + c),$$

whence the sum $a_1 + \dots + a_t$ of $a_1, \dots, a_t$ is defined without ambiguity.

For scalar multiplication, we assume that

II. $$\alpha a = a\alpha, \qquad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \qquad (\alpha a)(\beta b) = (\alpha\beta)(ab),$$

III. $$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \qquad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b.$$

Multiplication is assumed to be distributive with respect to addition:

IV. $$(a + b)c = ab + ac, \qquad c(a + b) = ca + cb.$$

But multiplication need not be either commutative or associative. [...]

The final assumption serves to exclude algebras of infinite order : #184

V. The algebra A has a finite basis.

This shall mean that A contains a finite number of elements $v_1, \dots, v_m$ such that every element of A can be expressed as a sum $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ of scalar products of $v_1, \dots, v_m$ by numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ of F.

The reader who desires to avoid technical discussions may omit the proof below that postulates I–V imply property VI, and at once assume VI instead of V. #185

[S.11]

VI. The algebra A contains elements $u_1, \dots, u_n$ such that every element x of A can be expressed in one and *only one* way in the form

(3) $$\xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n,$$

where $\xi_1, \dots \xi_n$ are numbers of the field F.

[...]

We shall now deduce certain results from I–V which will enable us to prove VI. We first prove that $1 \cdot x = x$ for every x in A. By V, $x = \sum \alpha_i v_i$. Then, by III_2 and II_2, #186

#187
$$1 \cdot x = \sum 1 \cdot (\alpha_i v_i) = \sum (1 \cdot \alpha_i) v_i = \sum \alpha_i v_i = x.$$

Write $z_i = 0 \cdot v_i$ for $i = 1, \dots, m$ and $z = z_1 + \dots + z_m$. By III_1 for $\alpha = 0, \beta = 1$, we have $a = 0 \cdot a + a$. Take $a = \alpha_i v_i$ and note that, by II_2,

$$0 \cdot (\alpha_i v_i) = (0 \cdot \alpha_i) v_i = 0 \cdot v_i = z_i. \tag{6}$$

#188 Hence $\alpha_i v_i = z_i + \alpha_i v_i$. Summing for $i = 1, \dots, m$, we get $x = z + x$. [...]

[S.22]

13. Second definition of an algebra. Each element $x = \sum \xi_i u_i$ of an algebra A over F, defined in §4, has a unique set of co–ordinates $\xi_1, \dots \xi_n$ in F with respect to a chosen set of basal units $u_1, \dots, u_n$. Hence with x may be associated a unique n–tuple $[\xi_1, \dots \xi_n]$ of n ordered
#189 numbers of F. Using this n–tuple as a symbol for x, we may write equations (10_1), (13), (14) in
#190 the following form:

$$[\xi_1, \dots, \xi_n] + [\eta_1, \dots, \eta_n] = [\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n], \tag{20}$$

$$[\xi_1, \dots, \xi_n] \cdot [\eta_1, \dots, \eta_n] = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j \gamma_{ij1}, \dots, \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j \gamma_{ijn} \right], \tag{21}$$

$$\rho[\xi_1, \dots, \xi_n] = [\xi_1, \dots, \xi_n]\rho = [\rho\xi_1, \dots, \rho\xi_n], \rho \text{ in } F. \tag{22}$$

These preliminaries suggest the following definition by W. R. Hamilton of an algebra A over
#191 F: Choose any n^3 constants γ_{ijk} of F, consider all *n–tuples* $[\xi_1, \dots, \xi_n]$ of n ordered numbers of F, and define addition and [S.23] multiplication of n–tuples by formulas (20) and (21), and scalar multiplication of a number of [$\checkmark$] ρ of F and an n–tuple by formula (22). To pass to the definition in §4, employ the particular n–tuples

$$u_1 = [1, 0, \dots, 0], \quad u_2 = [0, 1, \dots, 0], \dots, \quad u_n = [0, \dots, 0, 1] \tag{23}$$

#192 as basal units. [...] Hence, an algebra of n–tuples is an algebra according to §4 and conversely.

14. Comparison of the two definitions of an algebra. Under the definition in §4, an algebra over a field F is a system consisting of a set of wholly undefined elements and three undefined operations which satisfy five postulates.

Under Hamilton's definition in §13, an algebra of order n over F is a system consisting of of F, a set of partially* defined elements $[\xi_1, \dots, \xi_n]$, and three defined operations, while no postulates are imposed on the system other than that which partially determines the elements. This definition really implies a definite set (23) of basal units. A transformation of units leads to a new algebra
#193 (equivalent to the initial algebra) with new values for the n^3 constants γ_{ijk}.

[S.24]

#194 But under the definition in §4, no specific set of basal units is implied*, and we obtain the same algebra (not merely an equivalent one) when we make a transformation of units with coefficients
#195 in F. That definition by wholly undefined elements is well adapted to the treatment of difference
#196 algebras (§25) which are abstract algebras whose elements are certain classes of things. The same
#197 definition without postulate V is convenient in the study of algebras of infinite order (not treated in this book), an example being the field of all real numbers regarded as an algebra over the field of rational numbers.

---

*[Originalfußnote von S.23] Each element is an n–tuple of numbers in F. In particular, if F is a finite field of order p, there are evidently exactly p^n elements.

[Ende]

Anmerkungen:

Dicksons sämtliche Axiome sollen mit $\mathcal{DICK}$ abgekürzt werden.

#186 Dickson selbst benutzt hier den $\cdot$ für die Skalarmultiplikation entgegen seiner vorherigen Konvention.

#187 Offenbar ist Dicksons $\cdot$ eher inkonsequent.

#188 Dickson fährt damit fort, auf dem üblichen Wege die Eindeutigkeit von z bezüglich der letztgenannten Eigenschaft zu zeigen; ferner zeigt er $0 \cdot x = z,\ zx = xz = z\ \forall x \in A$ und $\rho z = z\ \forall \rho \in A$. Schließlich definiert er $-x$ (er fordert ja keine Gruppenstruktur, erklärt also den Ausdruck $-x$ mithilfe der Skalarmultiplikation), zeigt $z = a + (-a)$ und beweist $\mathcal{DICK}$ VI.

#190 Die drei Gleichungen (10_1), (13), (14) stehen auf S.17, beziehen sich auf $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i$ und lauten $x + y = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i) u_i,\ xy = \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi_i \eta_j \gamma_{ijk} \cdot u_k$ sowie $\rho x = x\rho = \sum_{i=1}^{n} (\rho_i \xi_i) u_i$ (ρ in F). Dabei sind die γ_{ijk} die Strukturkonstanten der Algebra, d.h. $u_i u_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} \cdot u_k\ (i, j = 1, \ldots, n)$.

#192 Dickson zeigt die Äquivalenz der Definitionen und bemerkt, daß zu jeder Wahl der n^3 Konstanten γ_{ijk} eine Algebra existiert.

#196 Differenzenalgebren bestehen nach dem genannten Paragraphen aus Kongruenzklassen gegebener Algebren nach einem *linear set* (der linearen Hülle einer Menge linear unabhängiger Vektoren, S.25).

Den in der Fußnote auf S.24 genannten Begriff der linearen Unabhängigkeit erklärt Dickson auf S.13f.

*[Originalfußnote von S.24] To emphasize this point, we may understand postulate V (that a finite basis exists) to mean that there is an upper limit to the number of linearly independent elements which can be chosen in the algebra.

A.7 SCHAUDERS *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*

[164]

In seiner Inauguraldissertation betrachtet Herr Banach[1]) abstrakte Mengen E, in denen die Operation der Addition erklärt ist. Sein Axiomensystem ist dem folgenden gleichwertig:

I. E bildet eine kommutative (Abelsche) Gruppe mit der Addition als Verknüpfungsgesetz.

II. Für jedes Element $\mathfrak{e}$ ist die Gleichung

$$\mathfrak{e} = 2 \cdot x, \mathfrak{e} \,\varepsilon\, E,$$

#198 lösbar[2]).

#199 Dabei bezeichnen wir mit $n \cdot x$ das durch n-malige Addition entstandene Element

$$n \cdot x = \overbrace{x + x + \ldots + x.}^{n}\,^{3})$$

III. E ist ein vollständiger Raum, in dem aber der Distanzbegriff gewisse Bedingungen erfüllt. Bezeichnen wir mit Norm eines Elementes $\mathfrak{e}$ (in Zeichen $\|\mathfrak{e}\|$) seine Entfernung von Null, so sei die Distanz $\overline{xy}$ zweier beliebiger Elemente x, y gleich:

$$\overline{xy} = \|x - y\|.$$

#200

Weiter soll für jedes natürliche n

$$\|n \cdot \mathfrak{e}\| = n \cdot \|\mathfrak{e}\|$$

sein.

Aus diesen Axiomen folgert man leicht die drei ursprünglichen Bedingungen des Herrn Banach:

[S.48]

1. Für jede reelle Zahl c und beliebiges $\mathfrak{e}$ aus E ist das Element $c \cdot \mathfrak{e}$ eindeutig definiert.
2. E ist ein Modul in Bezug auf den Körper der reellen Zahlen.
3. $\|c \cdot \mathfrak{e}\| = |c| \cdot \|\mathfrak{e}\|$.

Außerdem bedürfen wir noch folgender Postulate:

#201 IV. Es gibt in E eine feste endliche oder unendliche Folge von normierten „Basiselementen“ $\{\mathfrak{e}_i\}$, $\|\mathfrak{e}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$, so daß jedes $\mathfrak{e}$ aus E eine eindeutige Darstellung

$$\mathfrak{e} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathfrak{e}_i,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \mathfrak{e} - \sum_{i=1}^{n} c_i \mathfrak{e}_i \right\| = 0$$

zuläßt.

#202 V. Für ein festes n ist der Koeffizient $c_n(\mathfrak{e})$ eine „beschränkte Funktionaloperation“ in E, d.h. es gibt eine Zahl M_n, so daß

$$\|c_n(\mathfrak{e})\| \leqq M_n \|\mathfrak{e}\|, \quad \mathfrak{e}\,\varepsilon\, E.$$

Eine den Axiomen I. bis V. genügende Gesamtheit von Dingen bezeichnen wir als lineares Vektorfeld V [...].

Alle in der Analysis vorkommenden Funktionalräume können bei entsprechender Normierung als Vektorfelder betrachtet werden. #203

[Ende]

Anmerkungen:

Schauders sämtliche Axiome sollen mit $\mathcal{SCH}$ abgekürzt werden; das von ihm gegebene angebliche Axiomensystem von Banach mit $\mathcal{B}_S$. Ich werde in Abänderung von Schauders Schreibweise bei der Multiplikation reeller Zahlen untereinander, also etwa bei der rechten Seite von $\mathcal{B}_S$ 3., auf den Punkt $\cdot$ verzichten.

Exemplarisch führe ich hier den Beweis von $\mathcal{B}_S$ 1. aus.

$(\forall c \in \mathbb{R})\,(\exists! z \in \mathbb{Z}, \exists! \alpha \in [0,1[)\,:\; c = z + \alpha$. Definiere $c \cdot \mathfrak{e} := z \cdot \mathfrak{e} + \alpha \cdot \mathfrak{e}$; dabei ist die Bedeutung des ersten Summanden klar nach $\mathcal{SCH}$ II., wenn man Schauders Definition in der üblichen Weise auf nichtpositive n erweitert (vgl. Abschnitt 5.2.3.2). Der zweite Summand muß noch definiert werden. Es gilt bekanntlich der Satz (vgl. z.B. das Zahlentheoriebuch von Bundschuh): Es gibt eine eindeutige Darstellung der Form

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i},$$

wobei die $\alpha_i \in \{0,1\}$ sind und wie folgt mit Hilfe einer weiteren Folge $(\beta_i)_{i=1}^{\infty}$ bestimmt werden:

$$\beta_1 := \alpha, \quad \beta_{i+1} := 2\beta_i - [2\beta_i]\,, \quad \alpha_i := [2\beta_i].$$

Wegen $\alpha_i \in \{0,1\}$ $\forall i$ ist $\frac{\alpha_i}{2^i} \cdot \mathfrak{e}$ nach $\mathcal{SCH}$ II. eindeutig definiert. Setze nun

$$\alpha \cdot \mathfrak{e} := \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_i}{2^i} \cdot \mathfrak{e} \right).$$

Es bleibt zu zeigen, daß die rechtsstehende Reihe konvergiert. Nach $\mathcal{SCH}$ III. ist das gleichbedeutend mit

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon)(\forall n \geq n_\varepsilon) : \left\| \sum_{i=n}^{n+k} \left(\frac{\alpha_i}{2^i} \cdot \mathfrak{e} \right) \right\| < \varepsilon \quad \forall k \in N_0.$$

Daß für Schauders Norm die Dreiecksungleichung gilt, wird in Abschnitt 4.6.2.1 dargelegt. Ferner ist sie homogen in $1/2^i$, denn wenn x das nach $\mathcal{SCH}$ II. vorhandene Gruppenelement mit $x = \frac{1}{2^i} \cdot \mathfrak{e}$ ist, so gilt $\|\frac{1}{2^i} \cdot \mathfrak{e}\| = \|x\| = \frac{1}{2^i} 2^i \|x\| = \frac{1}{2^i} \|2^i \cdot x\| = \frac{1}{2^i} \|\mathfrak{e}\|$, wobei sich die vorletzte Gleichheit nach

[1]) [Verweis auf [6] S.135]
[2]) Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus den übrigen Axiomen.
[3]) $+$ ist das Zeichen für die Addition.

$\mathcal{SCH}$ III. ergibt. Damit

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=n}^{n+k}\left(\frac{\alpha_i}{2^i}\cdot\mathfrak{e}\right)\right\| \leq \sum_{i=n}^{n+k}\left\|\frac{\alpha_i}{2^i}\cdot\mathfrak{e}\right\| = \sum_{i=n}^{n+k}\frac{\alpha_i}{2^i}\|\mathfrak{e}\| = \|\mathfrak{e}\|\sum_{i=n}^{n+k}\frac{\alpha_i}{2^i} &\leq \|\mathfrak{e}\|\sum_{i=n}^{n+k}\frac{1}{2^i}\\ &= \|\mathfrak{e}\|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)\\ &\leq \|\mathfrak{e}\|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.\end{aligned}$$

Wähle also n_ε so, daß $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} < \frac{\varepsilon}{\|\mathfrak{e}\|}$.

Es fällt auf, daß die Axiome, die Schauder als die BANACHschen wiedergibt, grob gesagt nur die Explizierung der in den Schauderschen implizit enthaltenen weiteren Eigenschaften sind. So wird bei der Norm die volle Homogenität gefordert; die restlichen Normeigenschaften gehen jedoch aus Schauders eigener Definition auf die als Banachsche ausgegebene über. Entsprechend wird die Vollständigkeit überhaupt nicht erwähnt (obwohl ja Banachs Axiome für einen *Banachraum*, nicht die für einen normierten Raum mit den Schauderschen zu vergleichen wären). Aber selbst wenn man diese offensichtlichen Kürzungen ergänzt, muß man feststellen, daß Schauder Banachs Axiome etwas anders wiedergibt, als dieser sie in seiner Dissertation tatsächlich aufgeschrieben hat. Denn Banach erklärt ja die Norm gerade nicht aus einer Metrik (vgl. #50; genauer wird das in Abschnitt 4.6.2.1 untersucht).

Außerdem sind die Axiome $\mathcal{B}_S$ offensichtlich redundant, da $\mathcal{B}_S$ 1. in $\mathcal{B}_S$ 2. selbstverständlich enthalten ist.

Anhang B

Verzeichnis der #–Markierungen

Literaturverzeichnis

[1] **Albert, Adrien A.**, *Modern Higher Algebra*, University of Chicago Press 1937

[2] **Alexandrov, Alexander**, *Mathematik und Dialektik*, in: Ideen des exakten Wissens (Deutsche Verlagsanstalt Stuttgart) **4** (April 1971), 251–257, oder in: [137] 47–63 (hier verwendet)

[3] **Apolin, A.**, *Die geschichtliche Entwicklung der Vektorrechnung*, in: Philosophia naturalis **12** (1970), 357–365

[4] **Artin, Emil**, *Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen*, in: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **5** (1928), 251–260, oder in: *Collected Papers (fs)*, hg. von Serge Lang et al., Springer/NY 1965, 307–316

[5] —, *The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra*, in: Bull. AMS **56** (1950), 65–72

[6] **Banach, Stefan**, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (=Dissertation), in: Fund. Math. **3** (1922) 133–181 oder in [8] II, 305–348

[7] —, *Théorie des opérations linéaires*, Warschau 1932 bzw. [8] II, 19–219

[8] —, *Œuvres*, hg. von Mazur et al. bei Éditions scientifiques de Pologne/Warschau 1979

[9] **Barnabei, Marilena**; Brini, Andrea; Rota, Gian–Carlo, *On the Exterior Calculus of Invariant Theory*, in: Journal of Algebra **96** (1985), 120–160

[10] **Bernkopf, Michael**, *The Development of Function Spaces with Particular Reference to their Origins in Integral Equation Theory*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **3** (1966), 1–96

[11] **Birkhoff, Garrett**; MacLane, Saunders, *A Survey of Modern Algebra*, MacMillan/NY 1941

[12] —, *Current Trends in Algebra*, in: Am. Math. Monthly **80** (1973), 760–782

[13] —; Kreyszig, Erwin, *The Establishment of Functional Analysis*, in: HM **11** (1984), 258–321

[14] —; Bennett, Mary Catherine, *Hilbert's „Grundlagen der Geometrie"*, in: Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **36** (1987), 343–389

[15] —; MacLane, Saunders, *A Survey of Modern Algebra: The Fifthieth Anniversary of its Publication*, in: Math. Intell. **14** (1991) No.1, 26–31

[16] **Boi, Luciano**, *The Revolution in the Geometrical Vision of Space in the Nineteenth Century, and the Hermeneutical Epistemology of Mathematics*, in [69] 183–208

[17] **Bourbaki, Nicolas**, *Éléments de mathématique*, v.a. VI, Buch II, Chap.II (1947)

[18] —, *Elemente der Mathematikgeschichte*, Hermann/Paris 1969; dt. V&R 1971

[19] **Brieskorn, Egbert**, *Über die Dialektik in der Mathematik*, in: [137] 220–286

[20] —, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*

[21] **Brouwer, Luitzen Egbertus Jan**, *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl*, in: Math. Ann. **70** (1911), 161–165

[22] **Cantor, Georg**, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, in: Crelle **84** (1878), 242–258

[23] **Chong, Chi T.**, *Some Remarks on the History of Linear Algebra*, in: Math. Medley (Singapore Mathematical Society) **13** (1985), 59–73

[24] **Contro, Walter S.**, *Von Pasch zu Hilbert*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **15** (1975/76), 283–295

[25] **Crowe, Michael J.**, *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Notre Dame/London 1967

[26] —, *Ten Laws concerning Patterns of Change in the History of Mathematics*, in: HM **2** (1975), 161–166, oder in [69] 15–20

[27] —, *Ten Misconceptions about Mathematics and its History*, in: Aspray, William; Kitcher, Philip (Hg.), *History and philosophy of modern mathematics* (= Minnesota Studies in the Philosophy of science XI), Minnesota University press 1988, 260–277

[28] **Dauben, Joseph Warren**, *Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: two Studies in the Growth of Knowledge* (1984), in [69] 49–71

[29] —, *Appendix 1992: Revolutions revisited*, in: [69] 72–82 („Appendix“ zu [28])

[30] **Dedekind, Richard**, *Supplement X*, in: Dirichlet, Peter G. Lejeune, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2.Auflage 1871, 423–462, oder in [35] III, 223–261

[31] —; Weber, Heinrich, *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen*, in: Crelle **92** (1880), 181–290, oder in [35] I, 238–350

[32] —, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen*, in: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 7.3.1885, 141–159, oder in [35] II, 1–19

[33] —, *Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen komplexen Größen* (Bemerkungen zu [32]), in: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1887, 1–7, oder in [35] II, 21–27

[34] —, *Supplement XI*, in: Dirichlet, Peter G. Lejeune, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4.Auflage 1894, 434–657, oder in [35] III, 1–222

[35] —, *Gesammelte Mathematische Werke*, hg. von Robert Fricke, Emmy Noether et al. in 3 Bänden (1930, 1931, 1932) bei Vieweg/Braunschweig

[36] **Dickson, Leonard Eugene**, *Definitions of a Linear Associative Algebra by Independent Postulates*, in: Trans. AMS **4** (1903), 21–26

[37] —, *On Hypercomplex Number Systems*, in: Trans. AMS **6** (1905), 344–348

[38] —, *Linear Algebras*, Hafner/NY 1914

[39] —, *Algebras and their Arithmetics*, Stechert/NY 1923/1938

[40] **Dieudonné, Jean**, *Algèbre lineaire et geometrie elementaire*, Hermann/Paris 1964

[41] —, *The Work of Nicholas Bourbaki*, in: Am. Math. Monthly **77** (1970), 134–145

[42] —, *Should we teach 'Modern' Mathematics?*, in: Am. Scientist **61** (1973) no.1, 16–19; hier zitiert nach der dt. Fassung in [137], 403–416

[43] —, *The Tragedy of Grassmann*, in: Linear and Multilinear Algebra (Gordon&Breach/ Yverdon) **8** (1979), 1–14

[44] —, *The Difficult Birth of Mathematical Structures (1840-1940)*, in: Mathieu, Vittorio; Rossi, Paolo (Hg.), *Scientific culture in the contemporary world*, Scientia/Milano 1979, 7–23

[45] —, *History of Functional Analysis*, North Holland/Amsterdam 1981

[46] —, *The Work of Bourbaki during the last thirty Years*, in: Not. AMS **29** (1982), 618–623

[47] —, *La notion de rigueur en mathématiques*, in: Barroso, Jorge Alberto (Hg.), *Aspects of mathematics and its applications* (=North Holland Mathematical Library 34), North Holland/Amsterdam–NY 1986, 283–294

[48] **Dold–Samplonius, Yvonne**, *Interview with Bartel Leendert van der Waerden*, in: Not. AMS **44** (1997) No.3, 313–320

[49] **Dorier, Jean Luc**, *Emergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations lineaires*, in: Chabert, Jean–Luc (Hg.), *Analyse diophantienne et géometrie algébrique*, Exposés du Séminaire d'histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré (Paris: Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Mathématiques fondamentales) (3) **2** (1993), 159–190

[50] —, *Basis and Dimension from Grassmann to v. d. Waerden*, in: Schubring, Gerd (Hg.), *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar* (=Boston Studies in the philosophy of Science 187), Kluwer/Dordrecht 1996, 175–196

[51] —, *A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory*, in: HM **22** (1995), 227–261

[52] —, *Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions*, in: Revue d'Histoire des Mathémathiques (Paris) **2** (1996) no.2, 265–307

[53] **Dress, Andreas**, *Ein Brief*, in [137] 160–179

[54] **Ebbinghaus, Heinz–Dieter** et al., *Zahlen*, Springer/Berlin 1992 3.Auflage

[55] **Endl, Kurt**, *Analytische Geometrie und lineare Algebra*, Würfel–Verlag/Gießen 1984

[56] **Fearnley–Sander, Desmond**, *Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra*, in: Am. Math. Monthly **86** (1979), 809–817

[57] —, *Hermann Grassmann and the Prehistory of Universal Algebra*, in: Am. Math. Monthly **89** (1982), 161–166

[58] **Fisher, C. S.**, *The Death of a Mathematical Theory: a Study in the Sociology of Knowledge*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **3** (1966) Nr.2, 137–159

[59] **Fréchet, Maurice**, *Les dimensions d'un ensemble abstrait*, in: Math. Ann. **68** (1910), 145–168

[60] —, *Les espaces abstraits topologiquement affines*, in: Acta Mathematica **47** (1925), 25–52

[61] **Freudenthal, Hans**, *Axiom und Axiomatik*, in: Math. Semesterberichte **5** (1956), 4–19

[62] —, *Zur Geschichte der „Grundlagen der Geometrie"*, in: Nieuw Arch. Wisk. (3) **5** (1957), 106–142

[63] —, *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19.Jahrhunderts*, in: Math. Semesterberichte **7** (1961), 2–25

[64] —, *The Main Trends in Foundations of Geometry in the 19th Century*, in: Logic, Methodology, and Philosophy of science **1** (1960/1962), hg. von E. Nagel et al., Stanford University Press, California 1962

[65] —, *The Implicit Philosophy of Mathematics History and Education*, in: Proc. ICM Warschau 1983, 1995–1709

[66] —, *History of Mathematics: a Problem and a Paradigm*, in: Nieuw Arch. Wisk. (4) **8** (1990), 217–234

[67] **Fuhrmann, P. A.**, *Functional Models of Linear Algebra*, in: Lin. Alg. Appl. **162–164** (1992), 107–151

[68] **Gelfand, Izrail M.** *Normierte Ringe*, in: Mat. Sbornik **9** (1941), 3–23, oder in *Collected Papers (fs)*, Springer/NY 1987 I (II.8), 181–201

[69] **Gillies, Donald** (Hg.), *Revolutions in Mathematics*, Oxford Science Publications, Clarendon/Oxford 1992

[70] **Grabiner, Judith V.**, *Is Mathematical Truth Time–dependent?*, in: Am. Math. Monthly **81** (1974), 354–365

[71] **Grassmann, Hermann Günther**[97], *Hermann Grassmanns Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, hg. von Friedrich Engel bei Teubner/Leipzig 1894–1911

[72] **Gray, Jeremy J.**, *Algebra in der Geometrie von Newton bis Plücker*, in: Math. Semesterberichte **36** (1989), 175–204

[73] —, *The History of the Concept of a Finite–dimensional Vector Space*, in: HM **7** (1980), 65–70

[74] —, *The Development of Mathematics: a Response to A.F.Monna: Where does the Development of Mathematics lead to?* [also [123] dieser Liste], in: Nieuw Arch. Wisk. (4) **3** (1975) Nr.3, 289–294

[75] **Hadamard, Jacques**, *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*, in: Proc. ICM Bologna 1928 I, 143–162, oder in *Œuvres*, Paris 1968 I

[76] **Hahn, Hans**, *Über Folgen linearer Operationen*, in: Monatshefte für Mathematik und Physik (Springer/Wien) **32** (1922), 3–88

[97]die beiden *Ausdehnungslehren* erhalten keine Referenznummer, vgl. Abkürzungsverzeichnis.

[77] —, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, in: Crelle **157** (1927), 214–229

[78] **Haken, Wolfgang**, *Controversial Questions about Mathematics*, in: Math. Intell. **3** (1980/81) no.3, 117–120

[79] **Halmos, Paul Richard**, *Finite Dimensional Vector Spaces*, Princeton Universitiy Press 1942

[80] **Hamel, Georg**, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$*, in: Math. Ann. **60** (1905), 459–462

[81] **Hamilton, Sir William Rowan**, *Lectures on Quaternions*, Hodges and Smith/Dublin 1853

[82] **Hankel, Hermann**, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Voss/Leipzig 1867

[83] **Hasse, Helmut**, *Die moderne algebraische Methode*, in: Jahresberichte DMV **39** (1930), 22–34

[84] **Haupt, Otto**, *Einführung in die Algebra*, Akademische Verlagsgesellschaft Geese&Portig/ Leipzig 1929

[85] **Hausdorff, Felix**, *Mengenlehre*, De Gruyter/Berlin 1927

[86] —, *Zur Theorie der linearen metrischen Räume*, in: Crelle **167** (1932), 294–311

[87] **Hawkins, Thomas**, *Hypercomplex Numbers, Lie Groups, and the Creation of Group Representation Theory*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **8** (1972), 243–287

[88] —, *The Origins of the Theory of Group Characters*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **7** (1970), 142–170

[89] **Hellinger, Ernst**, *Hilberts Arbeiten über Integralgleichung und unendliche Gleichungssysteme*, in [91] III (1935), 94–145

[90] **Heuser, Harro**, *Funktionalanalysis*, Teubner/Stuttgart 1992 3.Auflage

[91] **Hilbert, David**[98], *Gesammelte Abhandlungen*, 3 Bände, Springer/Berlin 1932, 1933, 1935

[92] **Ingraham, Mark Dean**, *A General Theory of Linear Sets*, in: Transact. AMS **27** (1925), 162–196

[93] **Jahnke, Hans Niels**, *Hilbert, Weyl und die Philosophie der Mathematik*, in: Math. Semesterberichte **37** (1990), 157–179

[94] **Kambartel, Friedrich**, *Die Strukturtheoretische Interpretation der Mathematik und der philosophische Kritizismus; zur Theorie des Zusammenhangs bei J. Vuillemin*, in: Archiv für Geschichte der Philosophie **47** (1965), 79–97

[95] **Kennedy, Hubert C.**, *The Origins of Modern Axiomatics: Pasch to Peano*, in: Am. Math. Monthly **79** (1972), 133–136

[96] **Klein, Felix**, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert*, 2 Bände, Springer/Berlin 1926, 1927

[97] **Kleinert, Ernst**, *Über das axiomatische Denken in der Mathematik*, in: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft Hamburg **13** (1993), 231–247

[98] wegen der *Grundlagen der Geometrie* vgl. Abkürzungsverzeichnis.

[98] **Koethe, Gottfried**; Toeplitz, Otto, *Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen*, in: Crelle **171** (1934), 193–226

[99] **Koetsier, Teun**, *Cauchy's Rigorous Calculus: A Revolution in Kuhn's Sense?*, in: Nieuw Arch. Wisk. (4) **5** (1987), 335–354

[100] **Koppelman, Elaine**, *The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **8** (1971/72), 155–242

[101] **Kreisel, Georg**, *Die formalistisch–positivistische Doktrin der mathematischen Präzision im Licht der Erfahrung*, in: [137] 64–137

[102] **Kreyszig, Erwin**, *Zur Entwicklung der zentralen Ideen in der Funktionalanalysis*, in: Elem.Math. **41** (1986), 25-35

[103] —, *Über die weitere Entwicklung der Funktionalanalysis bis 1932*, in: Elem. Math. **41** (1986), 49-57

[104] —, *Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis*, in: Elem. Math. **45** (1990), 117–130

[105] **Krull, Wolfgang**, *Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen*, in: Math. Z. **23** (1925), 161–196

[106] **Kuhn, Thomas Samuel**, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press 1973 2nd enlarged edition

[107] **Ky Fan**, *Some Aspects of the Development of Linear Algebra in the Last Sixty Years*, in: Lin. Alg. Appl. **162–164** (1992), 15–22

[108] **Lewis, Albert C.**, *Hermann Grassmann's 1844* Ausdehnungslehre *and Schleiermacher's* Dialektik, in: Annals of Science (London) **34** (1977), 103–162, oder in: Jahnke, Hans Niels; Otte, Michael, *Epistemological and social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth century*, Reidel/Dordrecht (1981)

[109] **Lorey, W.**, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts*, Teubner, Berlin 1916, in: Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, hg. von F. Klein, III, Heft 9

[110] **MacLane, Saunders**[99], *History of abstract algebra: Origin, Rise and Decline of a movement*, in: Tarwater, J. Dalton et al. (Hg.), *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics* (=Mathematical series of texas technical university 13), Lubbock/Texas 1981, 3–35

[111] —, *v.d.Waerden's Modern Algebra*, in: Not. AMS **44** (1997) No.3, 321–322

[112] **Mainzer, Klaus**, *Geschichte der Geometrie*, Zürich 1980

[113] **Mathias, A. R. D.**, *The Ignorance of Bourbaki*, in: Math. Intell. **14** (1992) No.3, 4–13

[114] **May, Kenneth O.**, *Growth and Quality of the Mathematical Literature*, in: Isis **59** (1968), 363–371

[115] **Mehrtens, Herbert**, *T. S. Kuhns Theories and Mathematics: a Discussion Paper on the „New Historiography" of Mathematics*, in: HM **3** (1976), 297–320 oder in [69] 21–41

[99] vgl. auch Birkhoff, Garrett.

[116] —, *Das soziale System der Mathematik und seine politische Umwelt*, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **20** (1988) Nr.1, 28–37

[117] —, *Appendix (1992): Revolutions Reconsidered*, in [69] 42–48

[118] **Meschkowski, Herbert**, *Probleme des Unendlichen (Werk und Leben Georg Cantors)*, Vieweg/Braunschweig 1967

[119] **Monna, Antonie Frans**, *Calcolo geometrico, ein Interesse erweckendes Buch von G. Peano*, in: Euclides **47** (1971/72), 211–214

[120] —, *Functional Analysis in Historical Perspective*, Wiley/NY 1973

[121] —, *Banach's théorie des opérations linéaires*, in: Nieuw Arch. Wisk. (3) **23** (1975), 67–71

[122] —, *Évolutions in mathématique*, Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht **14** (1981)

[123] —, *Where does the Development of Mathematics lead to?*, in: Nieuw Arch. Wisk. (4) **1** (1983), 33–56

[124] —, *The Way of Mathematics and Mathematicians; a Historical–philosophical Study*, Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht **17** (1984)

[125] —, *Two Worlds of Mathematics*, in: Nieuw Arch. Wisk. (4) **5** (1987), 277–283

[126] —, *Towards Theoretical History of Mathematics*, in: Nieuw Arch. Wisk. (4) **6** (1988), 211–225

[127] **Moore, Gregory H.**, *The Axiomatization of Linear Algebra: 1875–1940*, in: HM **22** (1995), 262–303

[128] **von Neumann, John**, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, in: Math. Ann. **102** (1930), 370–427

[129] —, *Allgemeine Eigenwerttheorie hermitescher Funktionaloperatoren* , in: Math. Ann. **102** (1930), 49–131

[130] —, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer 1932

[131] —, *Der Mathematiker*, in: [137] 28–49

[132] **Noether, Emmy**, *Idealtheorie in Ringbereichen*, in: Math. Ann. **83** (1921), 24–66, oder in [135] 354–396

[133] —, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, in: Math. Ann. **96** (1926), 26–61, oder in [135] 493–528

[134] —, *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*, in: Math. Z. **30** (1929), 641–692, oder in [135]

[135] —, *Gesammelte Abhandlungen (fs)*, hg. von N. Jacobson, Springer/Berlin 1983

[136] **Nový, Luboš**, *Origins of Modern Algebra*, Noordhoff/Leyden 1973

[137] **Otte, Michael** (Hg.), *Mathematiker über die Mathematik*, Springer 1974

[138] —, *Kuhn Revisited*, in: Jahnke, Hans Niels et al., *History of mathematics and education: Ideas and Experiences* Göttingen 1996 (=V&R–Studien 11), 213–239

[139] —, *The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz*, in: HM **16** (1989), 1–35

[140] **Parshall, Karen Hunger**, *J. H. M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **32** (1985), 223–349

[141] —, *A Century–old Snapshot of American Mathematics*, in: Math. Intell. **12** (1990) no.3, 7–11

[142] —, *The 100th Anniversary of the Death of Invariant Theory?*, in: Math. Intell. **12** (1990) no.4, 10–16

[143] —, *Mathematics in National Contexts (1875-1900): An International Overview*, in: Proc. ICM Zürich 1994, 1581–1591

[144] **Peano, Guiseppe**, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Bocca/Turin 1888; eine englische Fassung findet man mit MR 57 #5653 (K); ein Facsimile der Titelseite hat [204] auf S.XXIII abgedruckt.

[145] —, *Intégration par séries des équations différentielles*, in: Math. Ann. **32** (1888), 450–456 (die italienische Originalfassung heißt *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* und steht in den Atti della Accademia delle scienze di Torino, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturale **22** (1887), 437–446)

[146] —, *Gli elementi di calcolo geometrico*, Candeletti/Turin 1891

[147] —, *Saggio di calcolo geometrico*, in: Atti della Accademia delle scienze di Torino, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturale **31** (1896), 952–975 oder in [148] III, S.167–186

[148] —, *Opere scelte*, 3 Bände, Cremonese/Roma 1957

[149] **Pincherlé, Salvatore**[100], *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, in: Math. Ann. **49** (1897) 325–382

[150] —, Ugo Amaldi, *Le operazioni distributive e le lore applicazione all'analize*, Zanichelli/Bologna 1901

[151] **Poincaré, Jules Henri**, *Hilbert, Professeur à l'Université de Göttingen: Les Fondements de la Géométrie (Grundlagen der Geometrie) ...* , in: Bulletin des sciences mathématiques (Gauthier–Villars/Paris) (2) **26** (1902), 249–272; eine englische Fassung steht in Bull. AMS **10** (1903), 1–23

[152] **Purkert, Walter**, *Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs I*, in: NTM **8** (1971) no.1, 23–37; *II*, in: NTM **10** (1973) no.2, 8–20

[153] **Pycior, Helena M.**, *Benjamin Peirce's „Linear Associative Algebra"*, in: Isis **70** (1979), 537-551

[154] —, *George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra*, in: HM **8** (1981), 23–45; Dorier 79

[155] —, *Internalism, Externalism, and beyond: 19th–century British Algebra*, in: HM **11** (1984), 424–441

[156] **Reich, Karin**, *Das Eindringen des Vektorkalküls in die Differentialgeometrie*, in: Arch. Hist. Ex. Sci. **40** (1989), 275–303

[100] wegen Peirce, Benjamin, *Linear Associative Algebra* vgl. Abkürzungsverzeichnis.

[157] **Riesz, Frigyes**, *Die Genesis des Raumbegriffs*, in: Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn **24** (1907), 309–353 oder in [160] A7 (110–154)

[158] —, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, in: Math. Ann. **69** (1910), 449–497 oder in [160] C10 (441–489)

[159] —, *Über lineare Funktionalgleichungen*, in: Acta Mathematica **41** (1918), 71–98 oder in [160] F6 (1053–1080)

[160] —, *Gesammelte Arbeiten (fs)*, hg. von Ákos Császár im Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften/Budapest 1960; die Ausgabe umfaßt zwei Bände mit fortlaufenden Seitenzahlen; jede Arbeit erhält ein Kürzel, bestehend aus einem Buchstaben (Zuweisung zu einem Sachgebiet) und einer Zahl (chronologische Nummer innerhalb des Sachgebiets)

[161] **Rowe, David E.**, *„Jewish Mathematics" at Goettingen in the Era of Felix Klein*, in: Isis **77** (1986), 422–449

[162] —, *The Philosophical Views of Klein and Hilbert*, in: Sasaki, Chikara et al., *The Intersection of History and Mathematics*, Birkhäuser/Basel 1994

[163] **Scanlan, Michael**, *Who were the American Postulate Theorists?*, in: Journal of Symbolic Logic **56** (1991), 981–1002

[164] **Schauder, Julius**, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, in: Math. Z. **26** (1927), 47–65 bzw. in *Œuvres*, Warszawa 1978, 63–82

[165] **Schimmack, Rudolf**, *Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition*, in: Abhandlungen der kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher **90** (1908), 5–104

[166] **Schlote, Karl–Heinz**, *Zur Geschichte der Algebrentheorie — Peirces „Linear Associative Algebra"* —, in: Schriftenreihe zur Geschichte von Naturwissenschaft, Technik und Medizin NTM **20** (1983), Nr.1, 1–20

[167] **Schmidt, Otto**, *Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette*, in: Math. Z. **29** (1928), 34–41

[168] **Scholz, Erhard**, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré* (Diss 1979 Brieskorn)

[169] —, *Herrmann Grassmanns Analysis in Vektorräumen*, in: Math. Semesterberichte **31** (1984) Nr.2, 177–194

[170] **Scorza, G.**: *Le Algebre di ordine qualunque e le matrici de Riemann*, in: Rend. Circ. Mat. Palermo **45** (1921) 1–204

[171] **Sierpinska, Anna**, *The Diachronic Dimension in the Research on Understanding*, Quelle vgl. [138], 289–318

[172] **Sperner, Emanuel**, *Moderne Denkweisen der Mathematik*, Hamburger Universitätsreden 31 (1964)

[173] **Steinitz, Ernst**, *Algebraische Theorie der Körper*, in: Crelle **137** (1910), 167–309

[174] —, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, in: Crelle **143** (1913), 128–175 u. Forts.

[175] **Struve, Horst**, *On the Epistemology of Mathematics in History and in School*, Quelle vgl. [138] 319–334

[176] **Thom, René**, *"Modern" Mathematics: an Educational and Philosophic Error?*, in: Am. Scientist **59** (1971) no.6, 695-699; dt. in [137], 371-401

[177] **Thurston, William P.**, *On Proof and Progress in Mathematics*, in: Bull. AMS n.s. **30** (1994), 161–177

[178] **Toepell, Michael**, *Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie"*, Göttingen 1986 (=V&R–Studien 2)

[179] —, *Zum Einfluß Hermann Grassmanns auf die Grundlagen der Geometrie*, in: Schreiber, Peter (Hg.), *Hermann Grassmann: Werk und Wirkung*, Ernst–Moritz–Arndt–Universität Greifswald 1995, 71–86

[180] **Toeplitz, Otto**, *Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, in: Rend. Circ. Mat. Palermo **28** (1909), 88–96

[181] **Volkert, Klaus Thomas**, *Die Krise der Anschauung*, Göttingen 1986 (=V&R–Studien 3)

[182] **van der Waerden, Bartel Leendert**, *Moderne Algebra*, 2 Bände, Springer/Berlin 1930, 1931

[183] —, *Klassische und moderne Axiomatik*, in: Elem. Math. **22** (1967), 1–4

[184] —, *Hamiltons Entdeckung der Quaternionen*, Veröffentlichung der Joachim Jungius–Gesellschaft der Wissenschaften, V&R 1973

[185] —, *On the Sources of my Book 'Moderne Algebra'*, in: HM **2** (1975), 31–40

[186] **Wedderburn, Joseph Henry Maclagan**, *Hypercomplex Numbers*, in: Proc. Lond. Math. Soc. (2) **6** (1907), 77–118

[187] —, *Algebras which do not possess a Finite Basis*, in: Transactions AMS **26** (1924), 395–426

[188] **Weierstraß, Karl Theodor**, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen*, in: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Jahrgang 1884, 395–414, oder in *Gesammelte Werke* (Berlin 1894–1927) II, 311–332

[189] **Weil, André**, *Sul calcolo funzionale lineare*, in: Rendiconti della reale Accademia nazionale dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali **6** (1927), 773–777 oder in *Œuvres Scientifiques* (Springer/NY 1979) 5–8

[190] **Weyl, Hermann**[101], *A Half Century of Mathematics*, in: Am. Math. Monthly **58** (1951), 523–553 bzw. [192] **152**

[191] —, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel/Leipzig 1928

[192] —, *Gesammelte Abhandlungen (fs)*, hg. von K. Chandrasekharan bei Springer/Berlin 1968

[193] **Wieleitner, H.**, *Zur Frühgeschichte der Räume von mehr als drei Dimensionen*, in: Isis **7** (1925), 486–489

[101] wegen *Raum — Zeit — Materie* vgl. Abkürzungsverzeichnis.

[194] **Wiener, Norbert**, *On the Theory of Sets of Points in Terms of Continuous Transformations*, in: Proc. ICM Strasbourg 1920, 312–315

[195] —, *Limit in Terms of Continuous Transformation*, in: Bull. Soc. Math. France **50** (1922), 119–134

[196] —, *The Group of the Linear Continuum*, in: Proceedings of the London Mathematical Society (2) **20** (1922), 329–346

[197] —, *Note on a Paper of M.Banach*, in: Fund. Math. **4** (1922), 136–143

[198] **Wilder, Raymond L.**, *The Origin and Growth of Mathematical Concepts*, in: Bull. AMS **59** (1953), 423–448

[199] —, *The Role of the Axiomatic Method*, in: Am. Math. Monthly **74** (1967), 115–127

[200] **Wussing, Hans**, *Zum historischen Verhältnis von Intension und Extension*, in: NTM **4** (1967) no.10, 23–34

[201] —, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs*, Berlin 1969

[202] —, *Zur Entwicklungsgeschichte naturwissenschaftlicher Begriffe*, in: NTM **7** (1970) no.2, 15–29

[203] —, *Historiographie der Mathematik — Ziele, Methoden, Aufgaben*, in: NTM **14** (1977) no.2, 91–97

[204] **Zaddach, Arno**, *Grassmanns Algebra in der Geometrie*, BI 1994

[205] **Zheng, Yuxin**, *Non–Euclidean Geometry and Revolutions in Mathematics*, in [69] 169–182