Holomorphe Differentiale auf Torsionskörpern des Carlitz-Moduls

24. September 2015

von

Manuel Erdorf

zur Erlangung des Grades

des Master of Science

angefertigt

am Lehrstuhl von Prof. Dr. Gekeler

Hiermit bestätige ich, dass ich die Masterarbeit selbstständig und nur mit Hilfe der angegebenen Hilfsmittel geschrieben habe.

Vorwort

Sei $k := \mathbb{F}_q(T)$ ein rationaler Funktionenkörper über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Des Weiteren sei $A := \mathbb{F}_q[T]$ der Polynomring über k. Um 1938 beschrieb der Mathematiker L. Carlitz einen exotischen A-Modul. Carlitz ließ A als Endomorphismenring auf der additiven Gruppe von $\overline{k}$, dem algebraischen Abschluss von k, operieren. Für ein Polynom $m \in A$ ist die Aktion von m durch ein separables Polynom $C_m(X)$ mit Koeffizienten in A gegeben. Dieser A-Modul wird auch Carlitz-Modul genannt. Die Menge der Nullstellen Λ_m von $C_m(X)$ erzeugt eine endliche, algebraische Erweiterung $K_m := k\left(\Lambda_m\right)$ von k. Erweiterungen der Form K_m werde ich in dieser Arbeit als Torsionskörper des Carlitz-Moduls bezeichnen. Die Erweiterungen K_m von k besitzen viele Eigenschaften, die die zyklischen Erweiterungen $\mathbb{Q}\left(\mu_m\right)$ von $\mathbb{Q}$ haben. Dabei bezeichnet μ_m eine m-te Einheitswurzel.

In dieser Arbeit möchte ich holomorphe Differentiale auf K_m über $\mathbb{F}_q$ konstruieren. Im Allgemeinen besitzen Differentiale ein großes Anwendungsgebiet. Zum Beispiel in der Analysis und der algebraischen Geometrie. Des Weiteren finden Differentiale eine Anwendung in der Theorie der algebraisch-geometrischen Codes, die auch Goppa-Codes genannt werden. Hierzu sei auf das Buch [Stich] verwiesen.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen, die für diese Arbeit relevant sind, angegeben. Dabei handeln die ersten vier Abschnitte von Kapitel 1 von der Theorie der Funktionenkörper. Danach werden die Begriffe der Divisoren und der Differente erläutert. Zum Abschluss von Kapitel 1 werden Differentiale eingeführt.

Das zweite Kapitel beschreibt die Eigenschaften der Torsionskörper des Carlitz-Moduls. Zuerst wird der Carlitz-Modul durch die Carlitz-Polynome eingeführt. Dann werden die m-Torsion und die Torsionskörper des Carlitz-Moduls, sowie ihre Eigenschaften, dargestellt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die Differente und das Geschlecht von K_m angegeben.

Das letzte Kapitel handelt von holomorphen Differentialen auf Torsionskörpern des Carlitz-Moduls. Dabei werden in den ersten drei Abschnitten für spezielle $m \in A$ Basen für den Raum der holomorphen Differentiale auf K_m über k konstruiert. Zum Schluss werden für beliebige $m \in A$ Mengen angegeben, die aus holomorphen Differentialen bestehen.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

In diesem Kapitel möchte ich die Begrifflichkeiten bereitstellen, die ich für diese Arbeit als grundlegend ansehe. Deshalb werden die Aussagen ohne Beweise wiedergegeben. Den interessierten Leser verweise ich auf das Buch [Stich].

Notation:

In der gesamten Arbeit bezeichnet

- $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ die Menge der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ die Menge der rationalen Zahlen.
- $\mathbb{F}_q$ den endlichen Körper mit q Elementen, wobei $q = p^s$ ist. Dabei ist p eine Primzahl und $s \in \mathbb{N}$.

1.1 Funktionenkörper, Bewertungen und Stellen

1.1.1 Definition:

Sei F ein beliebiger Körper. Ein *(algebraischer) Funktionenkörper K/F in einer Variablen über F* ist eine Körpererweiterung $K \supseteq F$, so dass K eine endliche, algebraische Erweiterung von $F(x)$ ist. Dabei ist $x \in K$ transzendent über F. Für $y \in K \setminus F$ schreiben wir auch $y \in K/F$.

1.1.2 Bemerkung:

(i) Ein Element $x \in K$ ist transzendent über F genau dann, wenn die Erweiterung $K/F(x)$ einen endlichen Grad besitzt.

(ii) Ein Funktionenkörper K/F in einer Variablen über F hat Transzendenzgrad 1.

1.1.3 Definition:

Der Konstantenkörper F heißt *perfekt*, falls alle algebraischen Erweiterungen von F separabel sind.

1.1.4 Beispiele:

(i) Der Körper $\mathbb{F}_q$ ist perfekt.

(ii) Für einen Körper F mit $char\,(F) = p$ gilt:

$$F \text{ ist perfekt} \Leftrightarrow F = F^p.$$

(iii) Körper der Charakteristik null sind perfekt.

(iv) Algebraisch abgeschlossene Körper sind ebenfalls perfekt.

1.1.5 Definition:

Ein *Bewertungsring eines Funktionenkörpers* K/F ist ein Ring $\mathcal{O} \subsetneq K$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $F \subsetneq \mathcal{O} \subsetneq K$, und

(ii) für jedes $z \in K$ gilt: $z \in \mathcal{O}$ oder $z^{-1} \in \mathcal{O}$.

Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein lokaler[1] Hauptidealring, der kein Körper ist.

Notation: $\mathcal{O}^* := \{z \in \mathcal{O} \mid \exists\, y \in \mathcal{O} \,\text{mit}\; zy = 1\}$.

1.1.6 Lemma:

Ein Bewertungsring $\mathcal{O}$ eines Funktionenkörpers K/F ist ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $P = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$.

1.1.7 Definition:

Eine *diskrete Bewertung von* K/F ist eine Abbildung $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften:

(i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$ für alle $x, y \in K$.

(iii) $v(x + y) \geq min\,\{v\,(x)\,, v\,(y)\}$ für alle $x, y \in K$.

(iv) Für alle $0 \neq a \in F$ ist $v\,(a) = 0$.

Die Bewertung v heißt *normiert,* falls $v^* := v\,|_{K^*}\colon K^* \to \mathbb{Z}$ surjektiv ist. Ist v nicht normiert, $v^*\,(K^*) = d\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$, so ist $\widetilde{v} := \frac{1}{d} \cdot v$ eine normierte diskrete Bewertung.

Bemerkung:

Für ∞ gelten folgende Rechenregeln:

(i) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ ist $\infty \gneqq a$, und

(ii) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $\infty + \infty = a + \infty = \infty + a = \infty$.

[1] Ein Ring heißt lokal, wenn dieser genau ein maximales Ideal besitzt.

1.1.8 Lemma:

Sei v eine diskrete Bewertung von K/F und seien $x, y \in K$ mit $v(x) \neq v(y)$. Dann gilt:

$$v(x+y) = min\,\{v(x), v(y)\}.$$

1.1.9 Bemerkung:

Für eine diskrete Bewertung v von K/F kann man einen Absolutbetrag $|\cdot|$ auf K definieren. Für eine reelle Zahl $0 \lneq \varrho \lneq 1$ definiert man die Funktion $|\cdot|_v\colon K \to \mathbb{R}$ durch

$$|\, y\, |_v := \left\{ \begin{array}{c} 0, \text{ falls } y = 0 \\ \varrho^{v(y)}, \text{ falls } y \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Zwei Absolutbeträge $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ heißen äquivalent, wenn $c \gneq 0$ existiert mit $|\, y\, |_1 = |\, y\, |_2^c$ für alle $y \in K$.

1.1.10 Definition:

Sei K/F ein Funktionenkörper mit Konstantenkörper F. Eine *Stelle P von K/F* ist das maximale Ideal eines Bewertungsrings $\mathcal{O}$ von K/F. Jedes Element $\pi \in P$ mit $P = \pi\mathcal{O}$ heißt *Uniformisierende von P*.

Notation: $S(K) = \{P \mid P \text{ ist eine Stelle von } K/F\}$.

1.1.11 Bemerkung:

Es gibt kanonische Bijektionen zwischen den Mengen der

(a) Stellen von K/F;

(b) Äquivalenzklassen von Absolutbeträgen auf K;

(c) normierten diskreten Bewertungen auf K.

1.1.12 Definition:

Sei $P \in S(K)$ und $\mathcal{O}_P$ der zugehörige Bewertungsring. Wir bezeichnen

$$deg(P) := [(\mathcal{O}_P/P) : F]$$

als den *Grad von P*.

Bemerkung:

Der Grad einer Stelle ist immer endlich.

1.1.13 Definition:

Sei K/F ein Funktionenkörper mit Konstantenkörper F. Weiter sei $m \in K$ und $P \in S(K)$. Dann ist P eine

(i) Nullstelle von m, falls $v_P(m) \gneq 0$.

(ii) Nullstelle von m der Ordnung n, falls $v_P(m) = n \gneq 0$.

(iii) Polstelle von m, falls $v_P(m) \lneq 0$.

(iv) Polstelle von m der Ordnung n, falls $v_P(m) = n \lneq 0$.

Anhand eines einfachen Beispiels werden im folgenden Abschnitt die hier eingeführten Begriffe veranschaulicht.

1.2 Der rationale Funktionenkörper

1.2.1 Definition:

Ein Funktionenkörper K/F heißt *rational*, falls es ein transzendentes $x \in K \setminus F$ gibt mit $K = F(x)$.

Betrachten wir nun den rationalen Funktionenkörper $F(T)$.
Für den Ring $F[T]$ gilt:
Jedes Primideal $\wp$ von $F[T]$ ist durch ein eindeutiges normiertes, irreduzibles Polynom $p(T) \in F[T]$ erzeugt. Die Lokalisierung von $F[T]$ bei $\wp$ ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_{(\wp)} = \left\{ \frac{f(T)}{g(T)} \mid f(T),\, g(T) \in F[T],\, p(T) \nmid g(T) \right\}.$$

Dies ist ein diskreter Bewertungsring. Das eindeutige maximale Ideal von $\mathcal{O}_{(\wp)}$ ist gegeben durch

$$P_{p(T)} = \left\{ \frac{f(T)}{g(T)} \mid f(T),\, g(T) \in F[T],\, p(T) \mid f(T),\, p(T) \nmid g(T) \right\}.$$

Die Stellen der Form $P_{p(T)}$ sind die endlichen Stellen von $F(T)$. Bis auf eine Stelle sind die Stellen des rationalen Funktionenkörpers von der Form $P_{p(T)}$.
Betrachten wir nun den Ring $F[\frac{1}{T}]$. Der Ring

$$\mathcal{O}_\infty = \left\{ \frac{f(T)}{g(T)} \mid f(T),\, g(T) \in F[T],\, deg(f(T)) \leq deg(g(T)) \right\}$$

ist ebenfalls ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal

$$P_\infty = \left\{ \frac{f(T)}{g(T)} \mid f(T),\, g(T) \in F[T],\, deg(f(T)) \lneqq deg(g(T)) \right\}.$$

Die Stelle P_∞ wird die Stelle bei unendlich genannt.
Zu den Stellen von $F(T)$ werden die zugehörigen Bewertungen wie folgt definiert:

1.2.2 Definition:

(i) Sei $P \in S(F(T))$ eine endliche Stelle, die zu dem normierten, irreduziblen Polynom $p(T) \in F[T]$ korrespondiert.
Die zugehörige Bewertung $v_P : F(T) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ist gegeben durch

$$v_P(x) := \left\{ \begin{array}{c} n, \text{ falls } x \neq 0 \\ \infty, \text{ falls } x = 0 \end{array} \right\},$$

wobei $x := p(T)^n \cdot \frac{f(T)}{g(T)}$ mit $f(T),\, g(T) \in F[T],\, n \in \mathbb{Z},\, p(T) \nmid f(T)$ und $p(T) \nmid g(T)$.

(ii) Sei $P_\infty \in S(F(T))$ die Stelle bei unendlich. Die diskrete Bewertung $v_\infty : F(T) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ wird definiert durch

$$v_\infty \left(\frac{f(T)}{g(T)} \right) := \left\{ \begin{array}{c} deg(g(T)) - deg(f(T)), \text{ falls } f(T) \neq 0 \\ \infty, \text{ falls } f(T) = 0 \end{array} \right\},$$

wobei $f(T),\, g(T) \in F[T]$ mit $g(T) \neq 0$.

1.2.3 Lemma:

Sei $P \in S(F(T))$ eine endliche Stelle mit Uniformisierender $p(T) \in F[T]$. Dabei ist $p(T)$ ein normiertes, irreduzibles Polynom. Des Weiteren sei $P_\infty \in S(F(T))$ die Stelle bei unendlich. Dann gilt:

(i) $deg(P) = deg(p(T))$.

(ii) $deg(P_\infty) = 1$.

Da wir ab Kapitel 2 den Konstantenkörper $\mathbb{F}_q$ betrachten, setzen wir nun $F = \mathbb{F}_q$. Des Weiteren sei $A := \mathbb{F}_q[T]$, $k := \mathbb{F}_q(T)$ und v_{P_T} die Bewertung zur Stelle P_T. Betrachten wir nun (k, v_{P_T}) als metrischen Raum. Die Cauchyfolgen in k bilden unter komponentenweiser Addition und Multiplikation einen Ring $\mathcal{R}$. Außerdem erzeugen die Nullfolgen ein maximales Ideal $\mathcal{I}$ in $\mathcal{R}$. Indem wir nun den Ring $\mathcal{R}$ nach dem maximalen Ideal $\mathcal{I}$ faktorisieren, erhalten wir den Körper

$$\mathbb{F}_q((T)) := \left\{ f = \sum_{n \leq i \leq \infty} a_i \cdot T^i \mid n \in \mathbb{Z},\, a_i \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

Dieser ist vollständig[2] bezüglich der kanonischen Fortsetzung von v_{P_T} auf $\mathbb{F}_q((T))$. Der Körper $\mathbb{F}_q((T))$ wird die Vervollständigung von k bei P_T genannt. Die Vervollständigung von k bei ∞ ist der Ring der formalen Laurent-Reihen, der gegeben ist durch

$$k_\infty := \mathbb{F}_q\left(\left(\tfrac{1}{T}\right)\right) = \left\{ f = \sum_{n \leq i \leq \infty} a_i \cdot \left(\tfrac{1}{T}\right)^i \mid n \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

1.3 Erweiterungen von Funktionenkörpern

Sei K/F ein Funktionenkörper mit Konstantenkörper F.

1.3.1 Definition:

(i) Ein Funktionenkörper L/E wird *algebraische Erweiterung von* K/F genannt, falls $L \supseteq K$ eine algebraische Körpererweiterung ist und $E \supseteq F$.

(ii) L ist eine *geometrische Erweiterung*, falls $E = F$ ist.

In diesem Abschnitt bezeichnet L/E eine algebraische Erweiterung von K/F.

1.3.2 Definition:

Es sei P (bzw. $\wp$) eine Stelle von K (bzw. von L) und es bezeichnet $\mathcal{O}_P \subseteq K$ (bzw. $\mathcal{O}_\wp \subseteq L$) den korrespondierenden diskreten Bewertungsring. Eine Stelle $\wp \in S(L)$ *liegt über* $P \in S(K)$, falls $\mathcal{O}_P = K \cap \mathcal{O}_\wp$ und $P = \wp \cap \mathcal{O}_P$.

Notation: $\wp \mid P :\Longleftrightarrow \wp$ liegt über P.

1.3.3 Definition:

Sei $\wp \in S(L)$ mit $\wp \mid P$. Dabei ist $P \in S(K)$.

(i) Der *Verzweigungsindex* von $\wp$ über P ist eine ganze Zahl $e := e(\wp \mid P)$ mit

$$v_\wp(x) = e \cdot v_P(x) \text{ für alle } x \in K.$$

(ii) Sei $L(\wp)$ (bzw. $K(P)$) der *Restklassenkörper* von $\wp$ (bzw. P). Die Zahl $f(\wp \mid P) := [L(\wp) : K(P)]$ heißt der Restklassengrad von $\wp$ über P.

[2]Ein Körper K heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in K konvergent ist.

1.3.4 Proposition:

Sei $P \in S(K)$ und $\wp \in S(L)$. Des Weiteren sei M/D eine algebraische Erweiterung von L/E und $\mathcal{P} \in S(M)$ mit $\mathcal{P} \mid \wp$. Dann gilt:

(i) $e(\mathcal{P} \mid P) = e(\mathcal{P} \mid \wp) \cdot e(\wp \mid P)$.

(ii) $f(\mathcal{P} \mid P) = f(\mathcal{P} \mid \wp) \cdot f(\wp \mid P)$.

1.3.5 Satz:

Sei L/E eine endliche Erweiterung von K/F und sei $P \in S(K)$. Des Weiteren seien $\wp_1, \wp_2, ..., \wp_m$ Stellen von L, die über P liegen. Dann gilt:

$$\sum_{1 \leq i \leq m} e(\wp_i \mid P) \cdot f(\wp_i \mid P) = [L : K].$$

1.3.6 Definition:

Sei L/E eine Erweiterung von K/F vom Grad n und sei $P \in S(K)$ und $\wp \in S(L)$.

(i) $\wp \mid P$ ist *verzweigt*, falls $e(\wp \mid P) \gneqq 1$.

(ii) $\wp \mid P$ ist *unverzweigt*, falls $e(\wp \mid P) = 1$.

(iii) P zerfällt vollständig in L/K, falls es genau n verschiedene Stellen $\wp \in S(L)$ mit $\wp \mid P$ gibt.

(iv) P ist *voll verzweigt* in L/K, falls es genau eine Stelle $\wp \in S(L)$ mit $\wp \mid P$ gibt, d.h. $e(\wp \mid P) = n$.

(v) $\wp \mid P$ ist *zahm verzweigt*, falls $e(\wp \mid P) \gneqq 1$ und $char(F) \nmid e(\wp \mid P)$.

(vi) $\wp \mid P$ ist *wild verzweigt*, falls $e(\wp \mid P) \gneqq 1$ und $char(F) \mid e(\wp \mid P)$.

(vii) P ist *verzweigt in* L/K, falls mindestens eine Stelle $\wp \mid P$ verzweigt ist.

(viii) P ist *unverzweigt in* L/K, falls alle Stellen $\wp \mid P$ unverzweigt sind.

(ix) P ist *zahm verzweigt in* L/K, falls P verzweigt ist in L/K und keine Stelle $\wp \mid P$ wild verzweigt ist.

(x) P ist *wild verzweigt in* L/K, wenn mindestens eine Stelle $\wp \mid P$ wild verzweigt ist.

1.4 Galois-Erweiterungen von Funktionenkörpern

Sei M/N eine endliche Erweiterung und sei $Aut(M)$ die Automorphismengruppe von M. Es bezeichnet

$$Aut(M/N) := \{\sigma \in Aut(M) \mid \sigma\,|_N = id\}$$

die Automorphismengruppe von M/N.
Die Erweiterung M/N ist galoissch genau dann, wenn $\mid Aut(M/N) \mid = [M : N]$ ist. In diesem Fall wird $Aut(M/N)$ als Galoisgruppe $Gal(M/N)$ von M/N bezeichnet.

1.4.1 Definition:

Eine Erweiterung L/E von einem Funktionenkörper K/F heißt *galoissch*, falls L/K eine endliche Galois-Erweiterung ist.

Im späteren Verlauf dieser Arbeit müssen wir wissen, wie die Galoisgruppe auf den Stellen eines Funktionenkörpers operiert. Dazu betrachten wir folgende Aussagen:

1.4.2 Lemma:

Sei L/E eine Galois-Erweiterung eines Funktionenkörpers K/F, $P \in S(K)$ und $\wp \in S(L)$ mit $\wp \mid P$. Dann ist $\sigma(\wp) := \{\sigma(x) \mid x \in \wp\}$ eine Stelle von L, wobei $\sigma \in Gal(L/K)$. Des Weiteren gilt:

(i) $\sigma(\wp) \mid P$.

(ii) $v_{\sigma(\wp)}(a) = v_\wp(\sigma^{-1}(a))$ für alle $a \in L$.

(iii) $e(\sigma(\wp) \mid P) = e(\wp \mid P)$.

(iv) $f(\sigma(\wp) \mid P) = f(\wp \mid P)$.

1.4.3 Satz:

Sei L/K eine Galois-Erweiterung von K/F und sei $P \in S(K)$.
Dann operiert die Galoisgruppe transitiv auf der Menge $\{\wp \in S(L) \mid \wp \mid P\}$.

1.5 Divisoren

Es sei K/F ein Funktionenkörper mit Konstantenkörper F.

1.5.1 Definition:

Sei $P \in S(K)$. Elemente der Form

$$D = \sum_{P \in S(K)} a_P \cdot P$$

mit $a_P \in \mathbb{Z}$ und fast alle $a_P = 0$, bilden unter koeffizientenweiser Addition eine Gruppe. Die Gruppe

$$Div(K) := \left\{ D = \sum_{P \in S(K)} a_P \cdot P \text{ mit } a_P \in \mathbb{Z} \text{ und fast alle } a_P = 0 \right\}$$

heißt die *Divisorgruppe von K/F.* Die Elemente von $Div(K)$ werden als *Divisoren* von K/F bezeichnet.

1.5.2 Bemerkung:

(i) Einige Autoren verwenden für Divisoren die Produktschreibweise anstatt der Summenschreibweise.

(ii) Der Träger eines Divisors D ist definiert durch

$$supp(D) := \{P \in S(K) \mid a_P \neq 0\}.$$

(iii) Ein Divisor der Form $D = P$ mit $P \in S(K)$ heißt *Primdivisor.*

1.5.3 Definition:

Für $Q \in S(K)$ und $D = \sum_{P \in S(K)} a_P P$ sei $v_Q(D) := a_Q$ die *Bewertung von D an der Stelle Q.*

Durch diese Definition folgt nun, dass $supp(D) = \{P \in S(K) \mid v_P(D) \neq 0\}$ und

$$D = \sum_{P \in supp(D)} v_P(D) \cdot P.$$

1.5.4 Definition:

(i) Für $D_1, D_2 \in Div(K)$ und für alle $P \in S(K)$ definieren wir

$$D_1 \leq D_2 :\Longleftrightarrow v_P(D_1) \leq v_P(D_2).$$

(ii) Ein *positiver (oder effektiver) Divisor* ist ein Divisor D mit $D \geq 0$.

(iii) Der *Grad eines Divisors D* ist definiert durch

$$deg(D) := \sum_{P \in S(K)} v_P(D) \cdot deg(P),$$

wobei $deg(P) = [\mathcal{O}_P/P : F]$.

1.5.5 Definition:

Sei $0 \neq x \in K$ und es sei N die Menge der Nullstellen und Z die Menge der Polstellen von x in $S(K)$. Dann heißt

(i) $(x)_0 := \sum\limits_{P \in N} v_P(x) \cdot P$ der *Nullstellendivisor von x.*

(ii) $(x)_\infty := \sum\limits_{P \in Z} (-v_P(x)) \cdot P$ der *Poldivisor von x.*

(iii) $(x) := (x)_0 - (x)_\infty$ der *Hauptdivisor von x.*

1.5.6 Bemerkung:

(i) Die konstanten Elemente $0 \neq x \in K$ sind charakterisiert durch

$$x \in F \Longleftrightarrow (x) = 0.$$

(ii) Nach Definition 1.1.13 folgt: $(x)_0 \geq 0$ und $(x)_\infty \geq 0$.

(iii) Für den Hauptdivisor von x gilt:

$$\begin{aligned}(x) = (x)_0 - (x)_\infty &= \sum_{P \in N} v_P(x)P + \sum_{P \in Z} v_P(x)P \\ &\overset{S(K)=N\dot{\cup}Z}{=} \sum_{P \in S(K)} v_P(x)P\end{aligned}$$

(iv) Des Weiteren gilt für den Hauptdivisor von xy mit $x, y \in K$:

$$\begin{aligned}(xy) = \sum_{P \in S(K)} v_P(xy)P &\overset{1.1.7(ii)}{=} \sum_{P \in S(K)} (v_P(x) + v_P(y))P \\ &= \sum_{P \in S(K)} v_P(x)P + \sum_{P \in S(K)} v_P(y)P \\ &= (x) + (y)\end{aligned}$$

(v) Da nur endlich viele Null- und Polstellen existieren, sind die Definitionen von 1.5.5 sinnvoll.

1.5.7 Definition:

Für einen Divisor $D = \sum_{P \in S(K)} v_P(D) \cdot P \in Div(K)$ ist der *Riemann-Roch-Raum zum Divisor D* wie folgt definiert:

$$\mathcal{L}(D) := \{x \in K \mid v_P(x) \geq -v_P(D), \ \ \forall P \in S(K)\}.$$

Bemerkung:

Der Riemann-Roch-Raum spielt eine wichtige Rolle in der Theorie von algebraischen Funktionenkörper. Des Weiteren enthält die Definition von algebraisch-geometrischen Codes den Riemann-Roch-Raum.

1.5.8 Lemma:

Sei $D \in Div(K)$. Dann ist $\mathcal{L}(D)$ ein Vektorraum über F.

1.5.9 Definition:

Für $D \in Div(K)$ heißt $l(D) := dim(\mathcal{L}(D))$ die *Dimension des Divisors D.*

1.5.10 Satz:

Sei $x \in K/F$ nicht konstant und seien $(x)_0$ bzw. $(x)_\infty$ der Nullstellen- bzw. Poldivisor von x. Dann gilt:

$$deg((x)_0) = deg((x)_\infty) = [K : F(x)].$$

Bemerkung:

Satz 1.5.10 besagt, dass alle Hauptdivisoren den Grad null besitzen.

Wenden wir uns nun einem speziellen und wichtigen Divisor zu, der Differente eines Funktionenkörpers.

1.6 Die Differente eines Funktionenkörpers

In diesem Abschnitt bezeichnet L/E eine endliche, separable Erweiterung des Funktionenkörpers K/F mit Konstantenkörper F. Für jede Stelle $P \in S(K)$ sei $\Re_P$ der ganze Abschluss von $\mathcal{O}_P$ in L. Des Weiteren bezeichnet $tr_{L/K} : L \to K$ die Spurabbildung.

1.6.1 Definition: (lokale Differente)

(i) Es sei $C_{\Re_P/\mathcal{O}_P} := \{x \in L \mid tr_{L/K}(xb) \in \mathcal{O}_P,\ \forall b \in \Re_P\}$.

(ii) $\mathcal{D}_{\Re_P/\mathcal{O}_P} := \{y \in L \mid xy \in \Re_P,\ \forall x \in C_{\Re_P/\mathcal{O}_P}\}$ heißt die *Differente von* $\Re_P$ *über* $\mathcal{O}_P$.

Bemerkung:

Der Ring $\Re_P$ ist ein Dedekind-Ring mit Quotientenkörper L, $C_{\Re_P/\mathcal{O}_P}$ ist ein gebrochenes Ideal von $\Re_P$, und $\mathcal{D}_{\Re_P/\mathcal{O}_P}$ ist ein Ideal von $\Re_P$. Die Differente lässt sich schreiben als

$$\mathcal{D}_{\Re_P/\mathcal{O}_P} = \prod_{\substack{\wp \\ \text{max. Ideal von } \Re_P}} \wp^{n_\wp},$$

fast alle $n_\wp = 0$, $n_\wp \in \mathbb{N}_0$.

Notation: $d(\wp) := n_\wp$.

1.6.2 Definition: (globale Differente)

Sei $P \in S(K)$ und $\mathcal{P} \in S(L)$ mit $\mathcal{P} \mid P$. Die *Differente von* L/K wird definiert durch

$$Diff(L/K) := \sum_{\mathcal{P} \in S(L)} d(\mathcal{P}) \cdot \mathcal{P}.$$

Die wichtigsten Eigenschaften dieses Divisors werden im folgenden Satz angegeben:

1.6.3 Satz:

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Eine Stelle $\mathcal{P} \in S(L)$ ist verzweigt über K.

(ii) $\mathcal{P} \mid \mathcal{D}_{\Re_P/\mathcal{O}_P}$.

(iii) $d(\mathcal{P}) \neq 0$.

Folgender Satz enthält Aussagen über den Wert von $d(\mathcal{P})$.

1.6.4 Satz:

Sei $\mathcal{P} \in S(L)$ mit $\mathcal{P} \mid P$. Dann gilt:

(i) $d(\mathcal{P}) \geq e(\mathcal{P} \mid P) - 1$, mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{P} \mid P$ zahm verzweigt ist.

(ii) $d(\mathcal{P}) \geq e(\mathcal{P} \mid P) \Longleftrightarrow \mathcal{P} \mid P$ ist wild verzweigt.

(iii) Nur endlich viele Stellen von L sind verzweigt über K.

1.6.5 Bemerkung:

Aus Satz 1.6.3 und Satz 1.6.4 (iii) folgt, dass die Differente von L/K eine endliche Summe von Stellen ist.

1.7 Derivationen und Differentiale

In diesem Abschnitt bezeichnet K/F ein Funktionenkörper mit Konstantenkörper F. Bevor wir Differentiale einführen, wenden wir uns den Derivationen zu.

1.7.1 Definition:

Sei M ein Modul über K. Eine Abbildung $d : K \to M$ heißt eine *Derivation von* K/F, falls d folgende Eigenschaften besitzt:

(i) d ist F-linear.

(ii) Für alle x, $y \in K$ gilt:

$$d(xy) = x \cdot d(y) + y \cdot d(x).$$

1.7.2 Lemma:

Sei $d : K \to M$ eine Derivation von K/F in M. Dann gilt:

(i) $\forall a \in F : d(a) = 0$.

(ii) $d(x^n) = n \cdot x^{n-1} \cdot d(x)$ für $x \in K$ und $n \geq 0$.

(iii) Für $x \in K$ gilt: $d(x^p) = 0$, falls F Charakteristik p besitzt.

(iv) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(y \cdot d(x) - x \cdot d(y))}{y^2}$ für x, $y \in K$ und $y \neq 0$.

Erinnerung:

Ein Element $x \in K$ ist ein separierendes Element von K/F, falls $K/F(x)$ eine separable, algebraische Erweiterung ist.

1.7.3 Lemma: (Eindeutigkeitslemma)

Sei x ein separierendes Element von K/F und seien d_1, $d_2 : K \to M$ Derivationen von K/F mit $d_1(x) = d_2(x)$. Dann gilt:

$$d_1 = d_2.$$

1.7.4 Definition:

Sei x ein separierendes Element von K/F. Die eindeutig bestimmte Derivation $d_x : K \to K$ von K/F mit der Eigenschaft $d_x(x) = 1$ heißt *Derivation bezüglich* x. Wir schreiben dafür auch $\frac{d}{dx}$.

Bemerkung:

Nach dem Eindeutigkeitslemma ist d_x eindeutig bestimmt.

1.7.5 Beispiel:

Sei K eine separable, algebraische Erweiterung von $\mathbb{F}_q(T)$. Dann ist d_T die eindeutig bestimmte Derivation von $K/\mathbb{F}_q$, die die „ übliche" Ableitung nach T auf $\mathbb{F}_q(T)$ fortsetzt. Zum Beispiel gilt:

(i) $d_T(T) = 1$.

(ii) $d_T\left(T^2 + T + 1\right) = 2T + 1$ für $q \neq 2$.

1.7.6 Notation:

Von nun an wird die Menge der Derivationen von K/F wie folgt bezeichnet:

$$Der(K/F) := \{d : K \to K \mid d \text{ ist eine Derivation von } K/F\}.$$

Bemerkung:

Die Menge $Der(K/F)$ bildet unter punktweiser Addition und skalarer Multiplikation einen K-Vektorraum.

1.7.7 Lemma:

(i) Für jede Derivation $d \in Der(K/F)$ und jedes separierende $x \in K$ gilt: $d = d(x) \cdot d_x$.

(ii) Kettenregel: $d_y = d_y(x) \cdot d_x$, wobei $x \neq y$ separierende Elemente von K/F sind.

(iii) Für $m \in K$ gilt:

$$d_x(m) \neq 0 \iff m \text{ ist ein separierendes Element.}$$

Bemerkung:

Nach Lemma 1.7.7 (i) ist $Der(K/F)$ ein eindimensionaler Vektorraum.

Nachdem wir nun den Begriff der Derivation kennen gelernt haben, können wir uns als nächstes den Differentialen zuwenden.

1.7.8 Definition:

Ein *Differential fdx von K* ist eine Äquivalenzklasse von Paaren $(f, x) \in K \times K$, wobei gilt:

$$(f,\, x) \sim (g,\, y) :\Longleftrightarrow g = f \cdot d_y(x).$$

1.7.9 Bemerkung:

(i) Mit Hilfe der Kettenregel sieht man, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Nach Definition 1.7.8 gilt:

$$f dx = g dy \Longleftrightarrow g = f \cdot d_y(x).$$

1.7.10 Notation:

Die Menge der Differentiale von K wird folgendermaßen bezeichnet:

$$\Omega_K := \{f dx \mid f \in K \text{ und } x \in K\}.$$

1.7.11 Proposition:

(i) Es sei $x \in K$ ein separierendes Element. Dann lässt sich ein Differential $\omega \in \Omega_K$ eindeutig schreiben als $\omega = z dx$, wobei $z \in K$. Insbesondere ist Ω_K ein eindimensionaler Vektorraum über F mit Basis dx.

(ii) Für $x \in K$ gilt:

$$dx \neq 0 \Longleftrightarrow x \text{ ist separierend.}$$

1.7.12 Definition:

Für $\omega = z d\pi_P \in \Omega_K$, wobei π_P eine Uniformisierende für eine Stelle $P \in S(K)$ ist, definieren wir

$$(\omega) := \sum_{P \in S(K)} v_P(\omega) \cdot P.$$

Divisoren der Form (ω) zu einem Differential ω heißen *kanonische Divisoren*.

Bemerkung:

Die Bewertung $v_P(\omega)$ ist unabhängig von der Wahl der Uniformisierenden, denn es gilt:

$$v_P\left(\omega\right) = v_P\left(z d\pi_P\right) = v_P\left(z\right) + v_P\left(d\pi_P\right) = v_P\left(z\right) + v_P\left(1\right) = v_P\left(z\right).$$

1.7.13 Satz:

Für einen Divisor eines Differentials $0 \neq \omega = zdx \in \Omega_K$ gilt:

$$\begin{aligned} (zdx) &= (z) + (dx) \\ &= (z) - 2 \cdot (x)_\infty + Diff(K/F(x)). \end{aligned}$$

1.7.14 Definition:

Für einen Divisor $D \in Div(K)$ definieren wir den F-Vektorraum

$$\Omega_K(D) := \{\omega \in \Omega_K \mid (\omega) \geq D \,\text{oder}\, \omega{=}0\}\,.$$

1.7.15 Definition:

Ein Differential $\omega \in \Omega_K$ heißt *holomorph*, falls $\omega = 0$ oder $(\omega) \geq 0$.

Notation:

Den Raum der holomorphen Differentiale bezeichnen wir mit

$$\Omega_K(0) := \{\omega \in \Omega_K \mid (\omega) \geq 0 \,\text{oder}\, \omega = 0\}\,.$$

1.7.16 Dualitätssatz:

Sei (ω) ein kanonischer Divisor von K/F. Für einen beliebigen Divisor $D \in Div(K)$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}((\omega) - D) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_K(D). \\ f & \longmapsto & f\omega \end{array}$$

Da wir nun die Begriffe der Divisoren und der kanonischen Divisoren kennen, kommen wir nun zu einem der wichtigsten Sätze in der Theorie der algebraischen Funktionenkörper.

1.7.17 Satz: (Riemann-Roch)

Es gibt ein $g \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle kanonischen Divisoren (ω), und alle Divisoren $D \in Div(K)$ gilt:

$$l(D) = deg(D) + 1 - g + l((\omega) - D).$$

1.7.18 Definition:

Die Zahl g heißt das *Geschlecht von K/F.*

Bemerkung:

Das Geschlecht ist eine der wichtigsten Invarianten eines Funktionenkörpers. Zum Beispiel gilt: Das Geschlecht eines rationalen Funktionenkörpers $K = F(x)$ ist 0 , und umgekehrt ist im Fall $F = \mathbb{F}_q$ jeder Funktionenkörper des Geschlechts 0 ein rationaler Funktionenkörper.

1.7.19 Korollar:

Für einen kanonischen Divisor (ω) gilt:

(i) $deg((\omega)) = 2g - 2$.

(ii) $l((\omega)) = g$.

1.7.20 Korollar:

Es gilt:

$$dim_F \Omega_K(0) = g.$$

Beweis:

Nach dem Dualitätssatz gilt für den Divisor $D = 0$: $\mathcal{L}((\omega)) \xrightarrow{\cong} \Omega_K(0)$.
Nach Korollar 1.7.19 gilt: $l((\omega)) = g$. Somit ist $dim_F \Omega_K(0) = l((\omega)) = g$.

□

Bemerkung:

Durch Korollar 1.7.20 kennen wir die Kardinalität einer Basis des Raums der holomorphen Differentiale für einen beliebigen algebraischen Funktionenkörper.

Im Allgemeinen ist es nicht so leicht das Geschlecht eines Funktionenkörpers zu berechnen. Ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung des Geschlechts ist der Satz von Riemann-Hurwitz:

1.7.21 Satz: (Riemann-Hurwitz)

Sei L/K eine endliche, separable und geometrische Erweiterung von Funktionenkörpern. Es bezeichnet g_L (bzw. g_K) das Geschlecht von L (bzw.K).
Dann gilt:

$$2g_L - 2 = [L : K] \cdot (2g_K - 2) + deg_L(Diff(L/K)).$$

2 Torsionskörper des Carlitz-Moduls

In diesem Kapitel wird folgende Notation verwendet:

- $A := \mathbb{F}_q[T]$,
- $k := \mathbb{F}_q(T)$ und
- $\overline{k}$ bezeichnet den algebraischen Abschluss von k.

Im Folgenden wird die Struktur sowie die Eigenschaften der Torsionskörper des Carlitz-Moduls dargestellt. Um solche Körpererweiterungen beschreiben zu können, muss man wissen was ein Carlitz-Modul ist.

2.1 Der Carlitz-Modul

2.1.1 Definition:

Carlitz-Polynome sind Polynome mit Koeffizienten in A, die folgende Eigenschaften besitzen:

(i) $C_T(X) = TX + X^q$,

(ii) $C_{T^i}(X) = C_T(C_{T^{i-1}}(X))$,

(iii) $C_{m+n}(X) = C_m(X) + C_n(X)$ mit m, $n \in A$ und

(iv) Für alle $a \in \mathbb{F}_q$: $C_{aT^i}(X) = a \cdot C_{T^i}(X)$.

Notation:

Das Carlitz-Polynom zu einem Polynom $m \in A$ werden wir als $C_m(X)$ bezeichnen.

Als nächstes werden einige Carlitz-Polynome dargestellt, um ein Gefühl für die Struktur der Carlitz-Polynome zu bekommen.

2.1.2 Beispiele:

(i) $C_T(X) = TX + X^q$.

(ii)

$$\begin{aligned} C_{T^2}(X) &= C_T\left(C_T\left(X\right)\right) = T\left(TX + X^q\right) + \left(TX + X^q\right)^q \\ &= T^2X + \left(T^q + T\right)X^q + X^{q^2}. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} C_{T^3}(X) &= C_T\left(C_{T^2}(X)\right) \\ &= T\left(T^2X + \left(T^q + T\right)X^q + X^{q^2}\right) + \left(T^2X + \left(T^q + T\right)X^q + X^{q^2}\right)^q \\ &= T^3X + \left(T^{2q} + T^{q+1} + T^2\right)X^q + \left(T^{q^2} + T^q + T\right)X^{q^2} + X^{q^3}. \end{aligned}$$

(iv) $C_{T^2+T}(X) = C_{T^2}(X) + C_T(X) = \left(T^2 + T\right)X + \left(T^q + T + 1\right)X^q + X^{q^2}$.

(v) $C_{(q-1)\cdot T}(X) = (q-1)\cdot C_T(X) = (q-1)TX + (q-1)X^q$.

2.1.3 Proposition:

Für $m \in A$ mit $deg(m) = d$ gilt:

$$C_m(X) = \sum_{0\leq i\leq d} f_{i,m}(T)\cdot X^{q^i},$$

wobei $f_{i,m}(T) \in A$ und $deg(f_{i,m}) = q^i(d-i)$.

Beweis:

Siehe Seite 209, Proposition 12.11 in [Rosen].

2.1.4 Bemerkung:

(i) Anhand der obigen Beispiele sieht man, dass $f_0(T) = m$ ist.

(ii) $C_m(X)$ ist separabel, da für die Derivation von $C_m(X)$ bezüglich X gilt:

$$\frac{d}{dX}C_m(X) = m \neq 0.$$

2.1.5 Definition:

Für $m \in A$ und $u \in \overline{k}$ definieren wir

$$m \star u := C_m(u).$$

Diese Operation nennt man *Carlitz-Multiplikation*. Diese definiert eine A-Modulstruktur auf $\overline{k}$; der so beschriebene A-Modul heißt der *Carlitz-Modul*.

2.1.6 Bemerkung:

Der Carlitz-Modul ist ein Drinfeld A-Modul von Rang 1. Wer sich nicht mit Drinfeld-Moduln auskennt, findet eine schöne Einführung in die Theorie der Drinfeld-Moduln in [Rosen].

2.2 Die m-Torsion des Carlitz-Moduls

2.2.1 Definition:

Sei $m \in A$. Die *m-Torsion des Carlitz-Moduls* ist gegeben durch

$$\Lambda_m := \left\{ \lambda \in \bar{k} \mid C_m(\lambda) = 0 \right\}.$$

Für ein nicht konstantes Polynom $m \in A$ sei

$$\phi(m) :=\mid (A/mA)^* \mid,$$

und für $0 \neq m \in \mathbb{F}_q$ setzen wir

$$\phi(m) := 1.$$

Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die Kardinalität. Für den Ring A ist $\phi(m)$ das Analogon zur Euler'schen φ-Funktion.

2.2.2 Proposition:

(i) Für ein irreduzibles Polynom $p \in A$ mit $deg(p) = d$ und für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\phi(p^n) = q^{d(n-1)}(q^d - 1) = q^{dn} - q^{d(n-1)}.$$

(ii) Sei $m = \prod\limits_{1 \leq i \leq r} p_i^{n_i}$ mit $deg(p_i) = d_i$, $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $\forall i$ ist $n_i \geq 1$. Dann gilt:

$$\phi(m) = \prod_{1 \leq i \leq r} \left(q^{d_i n_i} - q^{d_i(n_i - 1)} \right).$$

Beweis:

Siehe Seite 4/5 in [Rosen].

Für $1 \leq i \leq r$ seien p_i normierte, verschiedene und irreduzible Polynome. Mit $m = \prod\limits_{1 \leq i \leq r} p_i^{n_i} \in A$ und $n_i \in \mathbb{N}$ besitzt die m-Torsion des Carlitz-Moduls folgende Form:

$$\Lambda_m = \bigoplus_{p_i} \Lambda_{p_i^{n_i}}.$$

Des Weiteren ist Λ_m für ein primäres Polynom ein zyklischer A-Modul. Außerdem ist der A-Modul Λ_m für jedes $0 \neq m \in A$ in natürlicherweise isomorph zu A/mA. Daher hat Λ_m genau $\phi(m)$ Erzeuger. Wer sich für die Beweise der Aussagen interessiert, kann diese in [Hayes] oder [Rosen] nachlesen. Nachdem wir uns mit den Eigenschaften der m-Torsion des Carlitz-Moduls beschäftigt haben, wenden wir uns nun den Torsionskörpern des Carlitz-Moduls zu.

2.3 Torsionskörper des Carlitz-Moduls

2.3.1 Definition:

Sei $m \in A$ nicht konstant. Man nennt einen Körper der Form $K_m := k(\Lambda_m)$ *Torsionskörper des Carlitz-Moduls*.

2.3.2 Bemerkung:

Die Erweiterung K_m/k ist eine Galois-Erweiterung, denn $C_m(X)$ ist separabel und Λ_m ist die Menge der verschiedenen Nullstellen von $C_m(X)$.

2.3.3 Satz:

Für die Erweiterung K_m/k gilt:

(i) $[K_m : k] = \phi(m)$.

(ii) $Gal\,(K_m/k) \cong (A/mA)^*$.

Beweis:

Siehe Seite 82, Theorem 2.3 in [Hayes].

2.3.4 Bemerkung:

Sei λ ein Erzeuger von Λ_m. Es ist offensichtlich, dass $C_a(\lambda)$ genau dann ein Erzeuger von Λ_m ist, wenn $a \in (A/mA)^*$. Daraus folgt, dass $K_m = k(\lambda)$ ist. Der Isomorphismus von $(A/mA)^*$ nach $Gal\,(K_m/k)$ ist durch die Abbildung $a \mapsto \sigma_a$ gegeben. Das heißt, es gibt für jedes $a \in A$ mit $ggT(a, m) = 1$ ein eindeutiger Automorphismus $\sigma_a \in Gal\,(K_m/k)$, so dass $\sigma_a(\lambda) = C_a(\lambda)$ ist.

2.3.5 Proposition:

Sei $p \in A$ ein normiertes, irreduzibles Polynom und $n \in \mathbb{N}$. Des Weiteren sei $\mathcal{O}_{p^n}$ der ganze Abschluss von A in K_{p^n}. Dann ist K_{p^n} unverzweigt an jeder Stelle $Q \neq P_p$. Die Stelle P_p ist voll verzweigt mit Verzweigungsindex $\phi\,(p^n)$. Die einzige Stelle, die über P_p liegt ist $(\lambda) = \lambda\mathcal{O}_{p^n}$, wobei λ ein beliebiger Erzeuger von Λ_{p^n} ist.

Beweis:

Siehe Seite 204/205, Proposition 12.7 in [Rosen].

2.3.6 Satz:

Sei $m = \prod_{1 \leq i \leq r} p_i^{n_i} \in A$ mit normierten, irreduziblen und verschiedenen Polynomen p_i und $n_i \in \mathbb{N}$. Dann ist K_m das Kompositum der Körper $K_{p_i^{n_i}}$. Des Weiteren sind die einzigen Stellen in A, die verzweigt sind in $\mathcal{O}_m$, die Stellen P_i mit $1 \leq i \leq r$. Dabei sind die Stellen P_i, die Stellen, die zu den Polynomen p_i korrespondieren und $\mathcal{O}_m$ der ganze Abschluss von A in K_m.

Beweis:

Siehe Seite 206, Theorem 12.8 in [Rosen].

Notation:

Für $m = \prod_{1 \leq i \leq r} p_i^{n_i} \in A$ sei im Folgenden $K_{m/p_j^{n_j}}$ das Kompositum der Körper $K_{p_i^{n_i}}$, $1 \leq i \leq r$, ohne den Körper $K_{p_j^{n_j}}$ für ein $j \in \{1, ..., r\}$.

2.3.7 Bemerkung:

Aus der vollen Verzweigung von $K_{p_i^{n_i}}$ an der Stelle P_i folgt, dass $K_{p_i^{n_i}}$ und $K_{m/p_i^{n_i}}$ linear disjunkt sind.

2.3.8 Proposition:

Sei $\mathcal{O}_m$ der ganze Abschluss von A in K_m. Dann gilt:

$$\mathcal{O}_m = A\left[\lambda_m\right].$$

Beweis:

Siehe Seite 207, Proposition 12.9 in [Rosen].

Sei nun k_∞ die Vervollständigung von k bei unendlich (siehe Abschnitt 1.2), und sei $\overline{k}_\infty$ dessen algebraischer Abschluss.

2.3.9 Satz:

Sei $m \in A$ ein Polynom von Grad d und $C_m(X) \in k[X] \subsetneq k_\infty[X]$ das korrespondierende Carlitz-Polynom von m. Es bezeichnet v_∞ die eindeutige Erweiterung von v_∞ zu $\overline{k}_\infty$. Diese ist eine $\mathbb{Q}$-wertige Bewertung. Für jedes $1 \leq i \leq d$ existieren genau $q^i - q^{i-1}$ Wurzeln $\tilde{\lambda}$ von $C_m(X)$, so dass

$$v_\infty\left(\tilde{\lambda}\right) = d - i - \tfrac{1}{q-1}.$$

Beweis:

Siehe Seite 211, Proposition 12.13 in [Rosen].

2.3.10 Korollar:

Es existieren genau $q-1$ viele Wurzeln $\tilde{\lambda}$ von $C_m(X)$ in $\overline{k}_\infty$, so dass

$$v_\infty\left(\tilde{\lambda}\right) = d - 1 - \frac{1}{q-1}$$

ist. Für jede solche Wurzel ist $\tilde{\lambda}^{q-1} \in k_\infty$.

Nun kann man auch für $a \in A$ und $u \in \overline{k}_\infty$ die Carlitz-Multiplikation durch $a \star u := C_a(u)$ definieren.

2.3.11 Definition:

Für $m \in A$ sei

$$\widetilde{\Lambda}_m := \left\{\widetilde{\lambda} \in \overline{k}_\infty \mid C_a\left(\widetilde{\lambda}\right) = 0\right\}$$

die *m-Torsion auf* $\overline{k}_\infty$.

2.3.12 Bemerkung:

Sei $\iota:\ K_m \hookrightarrow \overline{k}_\infty$ eine fixierte Einbettung über k. Da die Erweiterung K_m/k galoissch ist, sind alle Einbettungen $K_m \hookrightarrow \overline{k}_\infty$ über k von der Form $\iota\circ\sigma$. Dabei ist $\sigma \in Gal\left(K_m/k\right)$. Die Einbettung ι bezeichnet eine Stelle $\wp_\infty \in S\left(K_m\right)$ mit $\wp_\infty \mid P_\infty$.
Die Einbettung ι bildet Λ_m auf $\widetilde{\Lambda}_m$ ab. Denn für $\lambda \in \Lambda_m$ gilt:

$$C_m\left(\lambda\right) = 0 \Longrightarrow C_m\left(\iota\lambda\right) = 0.$$

Nach Satz 2.3.9 existiert ein Element $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\Lambda}_m$, so dass $v_\infty\left(\widetilde{\lambda}\right) = d - 1 - \frac{1}{q-1}$, wobei $d = deg(m)$ ist.

2.3.13 Lemma:

Sei $m \in A$ mit $deg(m) = d$ und sei $\widetilde{\lambda}$ ein Erzeuger von $\widetilde{\Lambda}_m$ mit $v_\infty\left(\widetilde{\lambda}\right) = d - 1 - \frac{1}{q-1}$. Des Weiteren sei $0 \neq a \in A$ mit $deg(a) \lneq d$. Dann gilt:

$$v_\infty\left(C_a\left(\widetilde{\lambda}\right)\right) = d - deg(a) - 1 - \frac{1}{q-1}.$$

Beweis:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
v_\infty\left(C_a\left(\widetilde{\lambda}\right)\right) &\overset{2.1.3}{=} v_\infty\left(\sum_{0\le i\le d-1} f_{i,a}\cdot\widetilde{\lambda}^{q^i}\right)\\
&\overset{1.1.8}{=} \min_{0\le i\le d-1}\left\{v_\infty\left(f_{i,a}\cdot\widetilde{\lambda}^{q^i}\right)\right\}\\
&= \min_{0\le i\le d-1}\left\{v_\infty\left(f_{i,a}\right)+v_\infty\left(\widetilde{\lambda}^{q^i}\right)\right\}\\
&= \min_{0\le i\le d-1}\left\{-deg\left(f_{i,a}\right)+q^i v_\infty\left(\widetilde{\lambda}\right)\right\}\\
&\overset{2.1.3}{=} \min_{0\le i\le d-1}\left\{-q^i\left(deg(a)-i\right)+q^i\left(d-1-\tfrac{1}{q-1}\right)\right\}\\
&= \min_{0\le i\le d-1}\left\{q^i\left(d-1-\tfrac{1}{q-1}-deg(a)+i\right)\right\}\\
&= d-deg(a)-1-\tfrac{1}{q-1}.
\end{aligned}
$$

□

2.3.14 Satz:

Sei $J=\left\{\sigma_a\in Gal\left(K_m/k\right)\mid a\in\mathbb{F}_q^*\right\}$ und sei K_m^+ der Fixkörper von J. Dann zerfällt die Stelle $P_\infty\in S(k)$ vollständig in K_m^+ und jede Stelle über P_∞ in K_m^+ ist voll und zahm verzweigt in K_m.

Beweis:

Siehe Seite 212, Theorem 12.14 in [Rosen].

Bemerkung:

Da die Galoisgruppe transitiv auf den Stellen operiert, kennen wir nun die Bewertungen von λ an den Stellen $\wp\in S\left(K_m\right)$ mit $\wp\mid P_\infty$. Genauer:

2.3.15 Satz:

Sei λ ein Erzeuger von Λ_m. Dabei ist $m\in A$ mit $deg(m)=d$. Des Weiteren sei $a\in(A/mA)^*$. Für $0\le deg(a)\le d-1$ gilt für die Bewertungen an den Stellen $\wp\mid P_\infty$:

$$v_\wp(\lambda)=(q-1)(d-deg(a))-q.$$

Beweis:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
v_{\sigma_a^{-1}(\wp_\infty)}(\lambda) &\overset{1.4.2(ii)}{=} v_{\wp_\infty}(\sigma_a(\lambda)) \\
&= v_{\wp_\infty}(C_a(\lambda)) \\
&= e(\wp_\infty \mid P_\infty) \cdot v_\infty(C_a(\lambda)) \\
&= (q-1)\left(d - deg(a) - 1 - \tfrac{1}{q-1}\right) \\
&= (q-1)(d-deg(a)) - q.
\end{aligned}
$$

Da die Galoisgruppe transitiv auf den Stellen $\wp \in S(K_m)$ mit $\wp \mid P_\infty$ operiert, gilt für die Bewertungen von λ an den Stellen $\wp_a := \sigma_a^{-1}(\wp_\infty)$:

$$v_{\wp_a}(\lambda) = (q-1)(d-deg(a)) - q.$$

□

2.3.16 Bemerkung:

Sei $p \in A$ ein normiertes, irreduzibles Polynom mit $deg(p) = d$. Des Weiteren sei λ ein Erzeuger von Λ_p und $a \in (A/pA)^*$. Dann gibt es für $0 \leq deg(a) \leq d-1$ genau

$$\frac{q^{deg(a)+1} - 1 - \left(q^{deg(a)} - 1\right)}{q-1} = \frac{q^{deg(a)}(q-1)}{q-1} = q^{deg(a)}$$

viele Stellen $\wp \mid P_\infty$, für die

$$v_\wp(\lambda) = (q-1)(d-deg(a)) - q$$

gilt.

2.3.17 Korollar:

Die Erweiterung K_m/k ist eine geometrische Erweiterung.

Beweis:

Siehe Seite 213 in [Rosen].

2.4 Die Differente und das Geschlecht der Torsionskörper des Carlitz-Moduls

Die Differente wird bei der Bestimmung von holomorphen Differentialen eine wichtige Rolle einnehmen. Des Weiteren wissen wir aus Kapitel 1, dass die Kardinalität einer Basis des Raumes der holomorphen Differentiale dem Geschlecht des Funktionenkörpers entspricht. Deshalb werden im Folgenden die Differente und das Geschlecht von K_m angegeben.

2.4.1 Satz:

Sei $Diff\,(K_m/k)$ die Differente von K_m/k, wobei $m \in p^n$. Das Polynom $p \in A$ ist normiert und irreduzibel mit $deg(p) = d$ und $n \in \mathbb{N}$. Des Weiteren ist $\mathcal{P} \in S\,(K_m)$ mit $\mathcal{P} \mid P$. Dann gilt:

$$Diff\,(K_m/k) = \left[n \cdot \left(q^{dn} - q^{d(n-1)}\right) - q^{d(n-1)}\right] \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp.$$

Beweis:

Siehe Theorem 4.1 in [Hayes].

Kommen wir nun zur Differente von K_m/k für ein beliebiges Polynom $m \in A$.

2.4.2 Satz:

Sei $m = \prod\limits_{1 \leq i \leq r} p_i^{n_i} \in A$, wobei $p_1, ..., p_r$ verschiedene, irreduzible Polynome sind. Setze $d_i := deg\,(p_i)$ und $n_i \in \mathbb{N}$ für alle i. Des Weiteren sei $s_i := n_i \cdot \phi\,(p_i^{n_i}) - q^{d_i(n_i-1)}$. Dann gilt:

$$Diff\,(K_m/k) = \sum_{1 \leq i \leq r} \left(\sum_{\mathcal{P} \mid P_i} s_i \cdot \mathcal{P} \right) + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp.$$

Beweis:

Siehe Theorem 12.7.2 in [Vi-Sa].

Betrachten wir nun das Geschlecht von K_m/k. Zuerst für ein spezielles Polynom $m \in A$:

2.4.3 Satz:

Sei g das Geschlecht von K_m/k mit $m = p^n$. Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $p \in A$ ist ein normiertes, irreduzibles Polynom mit $deg(p) = d$. Es gilt:

$$g = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot q^{d(n-1)} \cdot \left(q^d - 1\right) \cdot \left[d \cdot \tfrac{\left(nq^d - n - 1\right)}{\left(q^d - 1\right)} - \tfrac{q}{q-1}\right].$$

Beweis:

Diesen Satz kann man mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch beweisen. Dazu benötigt man den kanonischen Divisor des Differentials dT. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(dT) &\overset{1.7.13}{=} -2(T)_\infty + Diff\,(K_m/k)\\
&\overset{2.4.1}{=} -2\cdot\sum_{\wp|P_\infty}(q-1)\cdot\wp + \left[n\cdot\left(q^{dn}-q^{d(n-1)}\right)-q^{d(n-1)}\right]\cdot\mathcal{P} + \sum_{\wp|P_\infty}(q-2)\cdot\wp\\
&= \left[n\cdot\left(q^{dn}-q^{d(n-1)}\right)-q^{d(n-1)}\right]\cdot\mathcal{P} + \sum_{\wp|P_\infty}(-q)\cdot\wp
\end{aligned}
$$

Für den Grad von (dT) gilt:

$$
deg(dT) = d\cdot\left[n\cdot\left(q^{dn}-q^{d(n-1)}\right)-q^{d(n-1)}\right] + \frac{\phi(m)}{(q-1)}\cdot(-q).
$$

Nach Korollar 1.7.19 (i) ist $deg(dT)=2g-2$.
Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
g &= 1+\tfrac{1}{2}\cdot deg(dT)\\
&\overset{2.2.2(i)}{=} 1+\tfrac{1}{2}\cdot\left[d\cdot\left(n\cdot\phi\,(m)-q^{d(n-1)}\right)+\tfrac{\phi(m)}{(q-1)}\cdot(-q)\right]\\
&= 1+\tfrac{1}{2}\cdot\phi(m)\cdot\left[dn-\tfrac{dq^{d(n-1)}}{\phi(m)}-\tfrac{q}{q-1}\right]\\
&\overset{2.2.2(i)}{=} 1+\tfrac{1}{2}\cdot\left(q^{dn}-q^{d(n-1)}\right)\cdot\left[\tfrac{dn\left(q^{d}-1\right)}{q^{d}-1}-\tfrac{dq^{d(n-1)}}{q^{d(n-1)}\cdot(q^{d}-1)}-\tfrac{q}{q-1}\right]\\
&= 1+\tfrac{1}{2}\cdot q^{d(n-1)}\cdot\left(q^{d}-1\right)\cdot\left[d\cdot\tfrac{\left(nq^{d}-n-1\right)}{(q^{d}-1)}-\tfrac{q}{q-1}\right].
\end{aligned}
$$

□

Folgenden Satz hat Alice Keller in [Keller] unter anderem mit Hilfe der Riemann-Hurwitz-Formel bewiesen:

2.4.4 Satz:

Sei $\prod_{1\le i\le r} p_i^{n_i}\in A$. Dabei sind $p_1,\ldots,p_r$ verschiedene, irreduzible Polynome. Es sei $n_i\in\mathbb{N}$ und $d_i := deg\,(p_i)$. Dann gilt für das Geschlecht von K_m/k:

$$
g = 1+\frac{1}{2}\prod_{1\le i\le r}\left[\left(q^{d_i}-1\right)\cdot q^{(n_i-1)d_i}\right]\cdot\left[\sum_{1\le i\le r} d_i\cdot\frac{\left(n_iq^{d_i}-n_i-1\right)}{(q^{d_i}-1)}-\frac{q}{q-1}\right].
$$

Beweis:

Siehe [Keller].

Durch Satz 2.4.4 erhalten wir das Geschlecht von K_m/k für spezielle Polynome $m \in A$:

1. Fall:

Sei $m = \prod_{1 \leq i \leq r} p_i \in A$, wobei $p_1, ..., p_r$ verschiedene irreduzible Polynome von Grad 1 sind. Dann gilt für das Geschlecht von K_m/k:

$$g = 1 + \frac{1}{2} \cdot (q-1)^r \cdot \left[\sum_{1 \leq i \leq r} \frac{(q-2)}{(q-1)} - \frac{q}{q-1} \right].$$

2. Fall:

Sei $m = p^n \in A$ mit $deg(p) = 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für das Geschlecht von K_m/k:

$$g = 1 + \frac{1}{2} \cdot q^{(n-1)} \cdot \left[(n-1)q - (n+1) \right].$$

3. Fall:

Sei $m = p \in A$. Dabei ist p ein irreduzibles Polynom von Grad 2. Dann gilt:

$$g = \frac{q(q-1)}{2} - 1.$$

3 Holomorphe Differentiale auf Torsionskörpern des Carlitz-Moduls

In diesem Kapitel werden Basen des Raumes der holomorphen Differentiale auf Torsionskörpern des Carlitz-Moduls für spezielle Polynome $m \in \mathbb{F}_q[T]$ angegeben. Die Sätze aus Abschnitt 3.1 und 3.2 sind aus [Ward].

Notation:

Im gesamten Kapitel bezeichnet:

- $A := \mathbb{F}_q[T]$.
- $k := \mathbb{F}_q(T)$ und
- $K_m := k\,(\Lambda_m)$.

3.1 Der Fall $m = \prod_{1 \leq i \leq r} p_i$ mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, $deg\,(p_i) = 1\ \forall i$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit holomorphen Differentialen auf K_m/k für Polynome m, die in r verschiedene Linearfaktoren zerfallen. Zum Einstieg betrachten wir separat die Fälle $r = 1$ und $r = 2$.

3.1.1 Lemma:

Sei $m = p \in A$ ein lineares Polynom. Dann enthält der Raum der holomorphen Differentiale auf K_m/k bis auf $\omega = 0$ keine weiteren Elemente.

Beweis:

Nach Korollar 1.7.20 ist $dim_{\mathbb{F}_q}\Omega_{K_m}(0) = g$. Für das Geschlecht g von K_m/k folgt aus Satz 2.4.3 mit $d = 1$ und $n = 1$:

$$g = 1 + \frac{1}{2} \cdot (q-1) \cdot \left[\frac{q-2-q}{q-1}\right] = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = 0.$$

Somit ist $dim_{\mathbb{F}_q}\Omega_{K_m}(0) = 0$. Das heißt, dass bis auf $\omega = 0$ keine weiteren holomorphen Differentiale existieren.

□

3.1.2 Lemma:

Sei $m = p_1 p_2$ mit $p_1 \neq p_2$ und $deg\,(p_1) = deg\,(p_2) = 1$. Dann bildet die Menge

$$\mathcal{B} := \left\{\lambda_1^{-\alpha_1} \cdot \lambda_2^{-\alpha_2} dT \mid \alpha_1 \leq q-2,\ 0 \leq \alpha_2 \leq q-2,\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq q,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

eine Basis für $\Omega_{K_m}(0)$ über $\mathbb{F}_q$. Dabei ist λ_1(bzw. λ_2) ein beliebiger Erzeuger der p_1-Torsion (bzw. p_2-Torsion) des Carlitz-Moduls Λ_{p_1} (bzw. Λ_{p_2}).

Beweis:

Die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ sind holomorph:
Nur die Stellen P_1, P_2 und P_∞ sind verzweigt in K_m. Diese Stellen sind zahm verzweigt mit Verzweigungsindex $e = q-1$. Nach Satz 1.6.4 ist die Differente von K_m/k gegeben durch

- $Diff\,(K_m/k) = \sum\limits_{\wp|P_1} (q-2)\wp + \sum\limits_{\wp|P_2} (q-2)\wp + \sum\limits_{\wp|P_\infty} (q-2)\wp.$

Für den Divisor des Differentials dT gilt nach Satz 1.7.13:

$$\begin{aligned}
(dT) &= -2\cdot (T)_\infty + Diff\,(K_m/k) \\
&= -2\cdot \sum_{\wp|P_\infty} -e\cdot v_\infty(T)\cdot\wp + Diff\,(K_m/k) \\
&= -2\cdot \sum_{\wp|P_\infty} (q-1)\wp + \sum_{\wp|P_\infty} (q-2)\wp + \sum_{\wp|P_1} (q-2)\wp + \sum_{\wp|P_2} (q-2)\wp \\
&= \sum_{\wp|P_1} (q-2)\wp + \sum_{\wp|P_2} (q-2)\wp + \sum_{\wp|P_\infty} (-q)\wp.
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt:

- $(\lambda_1) = \sum\limits_{\wp|P_1} \wp + \sum\limits_{\wp|P_\infty} -\wp,$
- $(\lambda_2) = \sum\limits_{\wp|P_2} \wp + \sum\limits_{\wp|P_\infty} -\wp.$

Mittels dieser Ergebnisse erhalten wir für $\omega \in \mathcal{B}$ den Divisor (ω):

$$\begin{aligned}
(\omega) &\overset{1.5.6(iv)}{=} \left(\lambda_1^{-\alpha_1}\right) + \left(\lambda_2^{-\alpha_2}\right) + (dT) \\
&= \sum_{\wp|P_1} -\alpha_1\wp + \sum_{\wp|P_\infty} \alpha_1\wp + \sum_{\wp|P_2} -\alpha_2\wp + \sum_{\wp|P_\infty} \alpha_2\wp \\
&\quad + \sum_{\wp|P_1} (q-2)\wp + \sum_{\wp|P_2} (q-2)\wp + \sum_{\wp|P_\infty} -q\wp \\
&= \sum_{\wp|P_1} (q-2-\alpha_1)\,\wp + \sum_{\wp|P_2} (q-2-\alpha_2)\,\wp + \sum_{\wp|P_\infty} (\alpha_1+\alpha_2-q)\,\wp.
\end{aligned}$$

Diese Differentiale sind holomorph genau dann, wenn $(\omega) \geq 0$ ist.
Das heißt, es muss gelten:

1. $q-2-\alpha_1 \geq 0$, das heißt $\alpha_1 \leq q-2$,
2. $q-2-\alpha_2 \geq 0$, also $\alpha_2 \leq q-2$,

3. $\alpha_1 + \alpha_2 - q \geq 0$, das heißt $\alpha_1 + \alpha_2 \geq q$.

Da die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ diese Bedingungen erfüllen, sind alle Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ holomorph.
Nach Korollar 1.7.20 ist $dim_{\mathbb{F}_q}\Omega_{K_m}(0) = g$. Man muss also zeigen, dass $\mid \mathcal{B} \mid = g$ ist. Für das Geschlecht g erhält man nach Satz 2.4.4 mit $r = 2$ und
$d_1 = d_2 = n_1 = n_2 = 1$:

$$\begin{aligned} g &= 1 + \tfrac{1}{2} \cdot (q-1)^2 \left[\tfrac{2\cdot(q-2)}{q-1} - \tfrac{q}{q-1}\right] \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} \cdot (q-1) \cdot (q-4) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\left(q^2 - 5q + 4\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(q^2 - 5q + 6\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(q-2)(q-3)\,. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Kardinalität von $\mathcal{B}$.
Der höchste Wert den α_2 annehmen kann ist $q-2$. Somit ist der kleinste Wert den α_2 durchläuft gleich 2. Damit nimmt α_1 die Werte von 2 bis $q-2$ an. Für $\alpha_1 = h \in \{2, ..., q-2\}$ gilt: $q - h \leq \alpha_2 \leq q - 2$.
Somit ist die Zahl der Möglichkeiten von α_2 für $\alpha_1 = h$:
$q - 2 - (q - h - 1) = q - 2 - q + h + 1 = h - 1$.
Daraus folgt:

$$\mid \mathcal{B} \mid = \sum_{2 \leq h \leq q-2} (h-1) = \sum_{1 \leq h \leq q-3} h = \frac{(q-3+1)(q-3)}{2} = g.$$

Somit ist $\mid \mathcal{B} \mid = g$.
Nun muss man noch die $\mathbb{F}_q$-lineare Unabhängigkeit der Elemente $\omega \in \mathcal{B}$ zeigen.
Nach dem Dualitätssatz reicht es zu zeigen, dass die Elemente

$$\gamma \in \overline{\mathcal{B}} := \left\{\lambda_1^{-\alpha_1}\lambda_2^{-\alpha_2} \mid \alpha_1 \leq q-2,\ 0 \leq \alpha_2 \leq q-2,\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq q\right\}$$

linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind.
Es sei $c_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathbb{F}_q$. Dann gilt:

$$\sum_{\alpha_1}\sum_{\alpha_2} c_{\alpha_1,\alpha_2} \cdot \lambda_1^{-\alpha_1}\lambda_2^{-\alpha_2} \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \sum_{\alpha_2}\lambda_2^{-\alpha_2}\sum_{\alpha_1} c_{\alpha_1,\alpha_2} \cdot \lambda_1^{-\alpha_1} = 0.$$

Wegen der linearen Disjunktheit von K_{p_1} und K_{p_2} sind die Elemente $\lambda_2^{-\alpha_2}$ linear unabhängig sogar über K_{p_1}.
Deshalb ist

$$\sum_{2 \leq \alpha_1 \leq q-2} c_{\alpha_1,\alpha_2} \cdot \lambda_1^{-\alpha_1} = 0$$

für jedes α_2. Da nun die Elemente $\lambda_1^{-\alpha_1}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind, gilt für alle α_1 und α_2:

$$c_{\alpha_1,\alpha_2} = 0.$$

Somit sind die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$.
Daraus folgt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\Omega_{K_m}(0)$ über $\mathbb{F}_q$ ist.

$\square$

3.1.3 Beispiel:

Sei $p_1 = T$ und $p_2 = T + 1$. Wir betrachten nun den Fall $m = T \cdot (T + 1)$. Um eine Basis angeben zu können müssen wir zuerst die Erzeuger λ_i von Λ_{p_i} bestimmen. Die Carlitz-Polynome sind gegeben durch

- $C_T(X) = X^q + TX$ und
- $C_{T+1}(X) = X^q + (T + 1)X$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^q + T\lambda_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \left(\lambda_1^{q-1} + T\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \vee \lambda_1^{q-1} = -T \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \vee \lambda_1 = (-T)^{\frac{1}{q-1}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda_2^q + (T+1)\lambda_2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda_2 \left(\lambda_2^{q-1} + T + 1\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda_2 = 0 \vee \lambda_2 = (-(T+1))^{\frac{1}{q-1}}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.1.2 erhalten wir für $q = 5$ eine Basis des Raumes der holomorphen Differentiale von K_m über $\mathbb{F}_q$. Sie ist gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left\{ (T(T+1))^{-\frac{3}{4}}\, dT,\ (-T)^{-\frac{3}{4}} (-(T+1))^{-\frac{1}{2}}\, dT,\ (-T)^{-\frac{1}{2}} (-(T+1))^{-\frac{3}{4}}\, dT \right\}.$$

Folgender Satz ist aus [Ward]:

3.1.4 Satz:

Sei $m = \prod_{1\le i\le r} p_i \in A$ mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $deg\,(p_i) = 1$. Des Weiteren seien λ_i Erzeuger von Λ_{p_i} über A. Dann bildet die Menge

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{1\le i\le r} \lambda_i^{-\alpha_i} dT \mid \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \alpha_1 \le q-2,\ 0 \le \alpha_2, ..., \alpha_r \le q-2,\ \sum_{1\le i\le r} \alpha_i \ge q \right\}$$

eine Basis des Raums der holomorphen Differentiale von K_m über $\mathbb{F}_q$.

Beweis:

Man muss zeigen, dass $\mathcal{B}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Die Differentiale von $\mathcal{B}$ sind holomorph.
2. $\mid \mathcal{B} \mid = g$, wobei g das Geschlecht von K_m ist.
3. Die Elemente von $\mathcal{B}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$.

1. Holomorphie:
Nach Satz 2.4.2 mit $n_i = d_i = 1$ für $1 \le i \le r$ ist

$$Diff\,(K_m/k) = \sum_{1\le i\le r} \left(\sum_{\wp \mid P_i} (q-2)\wp \right) + \sum_{\wp\mid P_\infty} (q-2)\wp.$$

Des Weiteren ist

$$(dT) = \sum_{1\le i\le r} \left(\sum_{\wp \mid P_i} (q-2)\wp \right) + \sum_{\wp\mid P_\infty} (-q)\wp$$

und für alle $1 \le i \le r$ gilt:

$$(\lambda_i) = \sum_{\wp\mid P_i} \wp + \sum_{\wp\mid P_\infty} -\wp.$$

Daraus folgt, für den Divisor von $\omega \in \mathcal{B}$:

$$(\omega) = \sum_{1\le i\le r} \left(\sum_{\wp \mid P_i} (q-2-\alpha_i)\wp \right) + \sum_{\wp\mid P_\infty} \left(\sum_{1\le i\le r} \alpha_i - q \right) \wp.$$

Diese Differentiale sind holomorph genau dann, wenn $(\omega) \ge 0$ ist. Das heißt, es muss gelten:

- $q-2-\alpha_i \geq 0$, das heißt $\alpha_i \leq q-2$ für alle $1 \leq i \leq r$.
- $\sum\limits_{1\leq i\leq r} \alpha_i - q \geq 0$, also $\sum\limits_{1\leq i\leq r} \alpha_i \geq q$.

Da die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ diese Bedingungen erfüllen, sind alle Differentiale der Menge $\mathcal{B}$ holomorph.

2. $\mid \mathcal{B} \mid = g$:
Beweis durch Induktion über r.
I.A.: Siehe Lemma 3.1.2.
I.V.: Für $\overline{m} := \prod\limits_{1\leq i\leq r-1} p_i$ gilt:

$$\mid \mathcal{B} \mid = g\left(\overline{m}\right) \overset{2.4.4}{=} 1 + \frac{1}{2} \cdot (q-1)^{r-1} \cdot \left[\sum_{1\leq i\leq r-1} \frac{(q-2)}{(q-1)} - \frac{q}{q-1}\right].$$

I.S.: $r-1 \rightsquigarrow r$.
Sei nun

$$2 \leq \sum_{1\leq i\leq r-1} \alpha_i = h.$$

Ist nämlich $\sum\limits_{1\leq i\leq r-1} \alpha_i \lneq 2$, so gibt es keine holomorphen Differentiale der Form $\prod\limits_{1\leq i\leq r} \lambda_i^{-\alpha_i} dT$, denn

$$\sum_{1\leq i\leq r-1} \alpha_i + \alpha_r \lneq 2 + q - 2 = q.$$

Da wir aber gezeigt haben, dass alle Elemente in $\mathcal{B}$ holomorph sind, muss $\sum\limits_{1\leq i\leq r-1} \alpha_i \geq 2$ sein.
Da nach Voraussetzung $\alpha_r \leq q-2$ ist, ist die Anzahl der möglichen Werte für α_r gleich $h-1$, denn:

$$\sum_{1\leq i\leq r-1} \alpha_i + \alpha_r \overset{!}{\geq} q \Longleftrightarrow h + \alpha_r \geq q \Longleftrightarrow \alpha_r \geq q-h.$$

$$\rightsquigarrow \mid \{q-h \leq \alpha_r \leq q-2\} \mid = q-2-(q-h-1) = h-1.$$

Um nun die Kardinalität von $\mathcal{B}$ besser bestimmen zu können, führen wir folgende Menge ein:

$$S_{r-1,h} := \left\{(\alpha_1, ..., \alpha_{r-1}) \in \mathbb{Z}^{r-1} \mid \alpha_1 \leq q-2,\ 0 \leq \alpha_2, ..., \alpha_{r-1} \leq q-2,\ \sum_{1\leq i\leq r-1} \alpha_i = h\right\}.$$

Nun bestimmen wir die Kardinalität von $S_{r-1,h}$ für $h \leq q-1$:
(Der Grund wieso wir $h \leq q-1$ betrachten wird bei der Berechnung der Kardinalität von $\mathcal{B}$ klar.)
Falls $h = q-1$ ist, dann hat jede der $r-2$ Variablen genau $q-2-(0-1) = q-1$ Möglichkeiten. Da $\alpha_1 \leq q-2 \lneq q-1$ ist, ist $\alpha_2 = ... = \alpha_{r-1} = 0$ nicht möglich. Falls $2 \leq h \lneq q-1$ ist, so ist $\alpha_2 = ... = \alpha_{r-1} = 0$ zulässig. Denn für $\alpha_1 = q-2$ ist die Summe der α_i größer gleich h. Man erhält somit:

$$| S_{r-1,h} |= \left\{ \begin{array}{cc} (q-1)^{r-2}-1 & , \text{falls } h = q-1 \\ (q-1)^{r-2} & , \text{falls } 2 \leq h \leq q-1 \end{array} \right\} =: (ii).$$

Kommen wir nun zur Kardinalität der Menge $\mathcal{B}$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mid \mathcal{B} \mid &= \sum_{2 \le h \le \infty} (h-1) \cdot \mid S_{r-1,h} \mid \\
&= \sum_{2 \le h \le q-1} (h-1) \cdot \mid S_{r-1,h} \mid + \sum_{q \le h \le \infty} (h-1) \cdot \mid S_{r-1,h} \mid \\
&= \sum_{2 \le h \le q-1} (h-1) \cdot \mid S_{r-1,h} \mid + (q-1) \cdot \sum_{q \le h \le \infty} \mid S_{r-1,h} \mid \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{2 \le h \le q-1} (h-1) \cdot \mid S_{r-1,h} \mid + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= \sum_{1 \le h \le q-2} h \cdot \mid S_{r-1,h+1} \mid + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{1 \le h \le q-3} h \cdot (q-1)^{r-2} + (q-2) \cdot \left[(q-1)^{r-2} - 1\right] + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= \sum_{1 \le h \le q-3} h \cdot (q-1)^{r-2} + (q-2)(q-1)^{r-2} - (q-2) + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= \sum_{1 \le h \le q-2} h \cdot (q-1)^{r-2} - (q-2) + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= (q-1)^{r-2} \cdot \sum_{1 \le h \le q-2} h - (q-2) + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= (q-1)^{r-2} \cdot \tfrac{1}{2}(q-2)(q-1) - (q-2) + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= \tfrac{1}{2}(q-2)(q-1)^{r-1} - q + 2 + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= \tfrac{1}{2}(q-2)(q-1)^{r-1} + 1 - (q-1) + (q-1) \cdot g\,(\overline{m}) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(q-2)(q-1)^{r-1} + (q-1) \cdot (g\,(\overline{m}) - 1) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(q-2)(q-1)^{r-1} + (q-1) \cdot \left[\tfrac{1}{2}(q-1)^{r-1} \cdot \left(\sum_{1 \le i \le r-1} \tfrac{(q-2)}{(q-1)} - \tfrac{q}{q-1}\right)\right] \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(q-1)^{r} \cdot \tfrac{(q-2)}{(q-1)} + \tfrac{1}{2}(q-1)^{r} \cdot \left(\sum_{1 \le i \le r-1} \tfrac{(q-2)}{(q-1)} - \tfrac{q}{q-1}\right) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(q-1)^{r} \cdot \left(\sum_{1 \le i \le r} \tfrac{(q-2)}{(q-1)} - \tfrac{q}{q-1}\right) \\
&\overset{2.4.4}{=} g.
\end{aligned}
$$

Damit ist $\mid \mathcal{B} \mid = g$. Es bleibt die lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{F}_q$ zu zeigen.

3. Lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{F}_q$:
Wegen dem Dualitätssatz reicht es zu zeigen, dass die Elemente aus

$$\overline{\mathcal{B}_r} := \left\{ \prod_{1\le i\le r} \lambda_i^{-\alpha_i} \mid \alpha_1 \le q-2,\ 0 \le \alpha_i \le q-2,\ 2 \le i \le r,\ \sum_{1\le i\le r} \alpha_i \ge q \right\}$$

linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind. Dies zeigen wir durch Induktion nach r.
I.A: Siehe Lemma 3.1.2.
I.V.: Die Elemente aus $\overline{\mathcal{B}}_{r-1}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$.
I.S.: $r-1 \rightsquigarrow r$.
Seien $c_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} \in \mathbb{F}_q$. Es gilt:

$$\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} \cdot \prod_{1\le i\le r} \lambda_i^{-\alpha_i} \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \sum_{0\le\alpha_r\le q-2} \lambda_r^{-\alpha_r} \sum_{\alpha_1,..,\alpha_{r-1}} c_{\alpha_1,..,\alpha_r} \prod_{1\le i\le r-1} \lambda_i^{-\alpha_i} = 0.$$

Da K_{p_r} und K_{m/p_r} linear disjunkt sind, sind die Elemente $\lambda_r^{-\alpha_r}$ mit $0 \le \alpha_r \le q-2$ linear unabhängig über K_{m/p_r}. Deshalb gilt für alle α_r

$$\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1}} c_{\alpha_1,..,\alpha_r} \prod_{1\le i\le r-1} \lambda_i^{-\alpha_i} = 0. \qquad (\star)$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus $(\star)$:

$$\forall\, (\alpha_1, ..., \alpha_r) : \ c_{\alpha_1,..,\alpha_r} = 0.$$

Somit sind die Elemente von $\mathcal{B}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$. Daraus folgt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\Omega_{K_m}(0)$ über $\mathbb{F}_q$ ist.

□

3.2 Der Fall $m = p^n$ mit $deg(p) = 1$ und $n \geq 2$

3.2.1 Bemerkung:

In diesem Fall ist die Stelle P voll verzweigt in K_m, das heißt es existiert genau eine Stelle $\mathcal{P} \in S(K_m)$, die über P liegt. Dagegen ist nach Satz 2.3.14 die Stelle P_∞ zahm verzweigt in K_m. Die Stelle P_∞ zerfällt in genau $\frac{\phi(m)}{q-1} = \frac{q^{n-1}(q-1)}{q-1} = q^{n-1}$ Stellen über K_m.

Es gilt nun folgender Satz aus [Ward]:

3.2.2 Satz:

Sei $m = p^n \in A$ mit $deg(p) = 1$ und $n \geq 2$. Dann bildet die Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{B} := \quad \{\lambda_1^{-\alpha_1} \cdot \prod_{2\leq i\leq n} \lambda_i^{\alpha_i} dT \mid \quad & nq^n - (n+1)q^{n-1} - q^{n-1}\alpha_1 + \sum_{2\leq i\leq n} q^{n-i}\alpha_i \geq 0, \\ & \alpha_1 - \sum_{2\leq i\leq n} \alpha_i - q \geq 0,\ \alpha_1 \leq nq - (n+1), \\ & 0 \leq \alpha_2, ..., \alpha_n \leq q-1,\ \alpha_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n\}\end{aligned}$$

eine Basis des Raumes der holomorphen Differentiale von K_m über $\mathbb{F}_q$. Dabei ist $\lambda_i := C_{p^{n-i}}(\lambda)$ ein Erzeuger von Λ_{p^i} und $\lambda := \lambda_n$ ein Erzeuger von Λ_{p^n}.

Beweis:

Folgendes ist zu zeigen:

(i) Die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ sind holomorph.

(ii) $\mid \mathcal{B} \mid = g$, wobei g das Geschlecht von K_m ist.

(iii) Die Elemente von $\mathcal{B}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$.

Zu (i):
Sei $\mathcal{P} \in S(K_m)$ mit $\mathcal{P} \mid P$ und sei $\wp \in S(K_m)$ mit $\wp \mid P_\infty$. Nach Satz 2.4.1 mit $d = 1$ ergibt sich für die Differente von K_m/k:

$$Diff\,(K_m/k) = \left[nq^n - (n+1) \cdot q^{n-1}\right] \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(dT) &\overset{1.7.13}{=} -2(T)_\infty + Diff\,(K_m/k) \\ &= -2 \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-1) \cdot \wp + Diff\,(K_m/k) \\ &= \left[nq^n - (n+1)q^{n-1}\right] \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (-q) \cdot \wp.\end{aligned}$$

Sei nun λ ein Erzeuger von Λ_{p^n}. Dann gilt:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \Lambda_{p^n}/\Lambda_{p^{n-i}} & \xrightarrow{\cong} & \Lambda_{p^i} \\ & \lambda & \longmapsto & C_{p^{n-i}}(\lambda) =: \lambda_i. \end{array}$$

Für die Bewertung von λ_i an der einzigen Stelle $\mathcal{P}_i \in S\left(K_{p^i}\right)$ mit $\mathcal{P}_i \mid P$ gilt:

$$v_{\mathcal{P}_i}(\lambda_i) = 1,$$

da λ_i eine Uniformisierende ist. Da $\mathcal{P}_i$ über K_m voll verzweigt ist, ist die Bewertung von λ_i an der Stelle $\mathcal{P} \in S(K_m)$ mit $\mathcal{P} \mid \mathcal{P}_i$:

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{P}}(\lambda_i) &\overset{1.3.3}{=} e(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}_i) \cdot v_{\mathcal{P}_i}(\lambda_i) \\ &\overset{1.3.6(iv)}{=} \left[K_m : K_{p^i}\right] \cdot 1 \\ &= \tfrac{q^n - q^{n-1}}{q^i - q^{i-1}} \\ &= \tfrac{q^{n-1}(q-1)}{q^{i-1}(q-1)} \\ &= \tfrac{q^{n-1}}{q^{i-1}} \\ &= q^{n-i}. \end{aligned}$$

Somit ist die Bewertung von $\omega \in \mathcal{B}$ an der Stelle $\mathcal{P}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{P}}(\omega) &= -\alpha_1 v_{\mathcal{P}}(\lambda_1) + \sum_{2 \le i \le n} \alpha_i v_{\mathcal{P}}(\lambda_i) + v_{\mathcal{P}}(dT) \\ &= nq^n - (n+1)q^{n-1} - \alpha_1 q^{n-1} + \sum_{2 \le i \le n} \alpha_i q^{n-i}. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zu den Bewertungen von λ_i an den Stellen $\wp \in S(K_m)$ mit $\wp \mid P_\infty$. Sei $\wp_\infty := \wp_i$ die ausgezeichnete Stelle von K_{p^i} mit $\wp_\infty \mid P_\infty$. Wir setzen $\wp_a := \sigma_a^{-1}(\wp_\infty)$. Dann erhalten wir mit Hilfe von Satz 2.3.15:

$$v_{\wp_a}(\lambda_i) = (q-1)(i - deg(a)) - q \ge -1.$$

Dabei ist $0 \le deg(a) \le i-1$ für $0 \ne a \in A$. Außerdem ist jede Stelle von K_{p^i}, die über P_∞ liegt, unverzweigt in K_{p^n}. Deshalb gilt für alle $\wp \mid P_\infty$:

$$v_\wp(\lambda_i) \ge -1.$$

Also gilt für $\omega \in \mathcal{B}$:

$$v_{\wp}(\omega) \geq \alpha_1 - \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i - q.$$

Daher erfüllt $\omega \in \mathcal{B}$ folgende Bedingungen:

1. $v_{\mathcal{P}}(\omega) \geq 0$.

2. $v_{\wp}(\omega) \geq 0$.

Somit sind die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ holomorph.

Zu (ii):
Nach Satz 2.4.4 (2. Fall) gilt für das Geschlecht von K_m:

$$g = 1 + \frac{1}{2} \cdot q^{n-1} \cdot [(n-1)q - (n+1)]\,.$$

Kommen wir nun zur Kardinalität von $\mathcal{B}$.
Aus den Bedingungen $\alpha_1 - \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i - q \geq 0$ und $\alpha_1 \leq nq - (n+1)$ folgt:

$$\sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i + q \leq \alpha_1 \leq nq - (n+1).$$

Den kleinsten Wert nimmt α_1 bei $\alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ an. Deswegen ist

$$q \leq \alpha_1 \leq nq - (n+1).$$

Es ist

$$\alpha_1 - \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i - q \geq 0 \Longleftrightarrow \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i \leq \alpha_1 - q.$$

Aus $0 \leq \alpha_i \leq q-1$ für $2 \leq i \leq n$ folgt:

$$0 \leq \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i \leq \alpha_1 - q.$$

Den größten Wert, den $\sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i$ annehmen kann liegt bei $\alpha_1 = nq - (n+1)$ und ist

$$nq - (n+1) - q = (n-1)q - (n+1).$$

Daraus folgt:

$$\mid \mathcal{B} \mid = \sum_{0 \leq j \leq (n-1)q-(n+1)} \left(\sum_{0 \leq t \leq j} \left| \left\{ (\alpha_2, .., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-1} \mid \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i = t \right\} \right| \right)$$

Als nächstes bestimmen wir die Kardinalität der Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ (\alpha_2, .., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n-1} \mid \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i = t,\ 0 \leq \alpha_i \leq q-1,\ 2 \leq i \leq n \right\}.$$

Dazu verwendet man die Arbeit von Murty, siehe [Murty]. Um $\mid \mathcal{M} \mid$ zu erhalten, muss man den x^t-ten Koeffizient der erzeugenden Funktion betrachten:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{0 \leq i \leq q} x^i \right)^{n-1} &= (1-x^q)^{n-1} (1-x)^{-(n-1)} \\ &= \left[\sum_{0 \leq l \leq n-1} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \cdot x^{ql} \right] \cdot \left[\sum_{0 \leq r \leq \infty} \tbinom{n-2+r}{r} \cdot x^r \right]. \end{aligned}$$

Der t-te Koeffizient ist

$$\sum_{l,r} (-1)^l \binom{n-1}{l} \cdot \binom{n-2+r}{r} \cdot x^{ql+r},$$

wobei die Summe durch die Werte von l und r läuft mit:

$$\begin{aligned} & ql + r = t, \quad r \geq 0,\ 0 \leq l \leq n-1 \\ \Longleftrightarrow\ & r = t - ql, \quad t \geq ql,\ 0 \leq l \leq n-1 \\ \Longleftrightarrow\ & r = t - ql, \quad \tfrac{t}{q} \geq l,\ 0 \leq l \leq n-1. \end{aligned}$$

In unserer Situation ist der höchste Wert von t gleich $(n-1)q-(n+1)$. Es gilt:

$$\frac{(n-1)q-(n+1)}{q} - (n-1) = -\frac{(n+1)}{q}.$$

Daher ist die obere Grenze für l durch $\frac{t}{q}$ gegeben. Da l ganzzahlig ist, ist $l \leq \left\lfloor \frac{t}{q} \right\rfloor$. Deshalb gilt:

$$\mid \mathcal{M} \mid = \sum_{0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{t}{q} \right\rfloor} (-1)^l \binom{n-1}{l} \cdot \binom{n-2+t-ql}{n-2}.$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\mid \mathcal{B} \mid &= \sum_{0\le j\le (n-1)q-(n+1)} \left(\sum_{0\le t\le j} \left(\sum_{0\le l\le \lfloor \frac{t}{q} \rfloor} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \cdot \tbinom{n-2+t-ql}{n-2} \right)\right) \\
&= \sum_{0\le l\le \lfloor \frac{(n-1)q-(n+1)}{q} \rfloor} \left(\sum_{0\le j\le (n-1-l)q-(n+1)} \left(\sum_{0\le t\le j} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \cdot \tbinom{n-2+t}{n-2} \right)\right) \\
&= \sum_{0\le l\le \lfloor n-1-\frac{(n+1)}{q} \rfloor} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \sum_{0\le j\le (n-1-l)q-(n+1)} \left(\sum_{0\le t\le j} \tbinom{t+n-2}{n-2} \right) \\
&= \sum_{0\le l\le \lfloor n-1-\frac{(n+1)}{q} \rfloor} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \sum_{0\le j\le (n-1-l)q-(n+1)} \left(\sum_{n-2\le t\le j+n-2} \tbinom{t}{n-2} \right) \\
&= \sum_{0\le l\le \lfloor n-1-\frac{(n+1)}{q} \rfloor} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \sum_{0\le j\le (n-1-l)q-(n+1)} \tbinom{j+n-1}{n-1} \\
&= \sum_{0\le l\le \lfloor n-1-\frac{(n+1)}{q} \rfloor} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \sum_{n-1\le j\le (n-1-l)q-2} \tbinom{j}{n-1} \\
&= \sum_{0\le l\le \lfloor n-1-\frac{(n+1)}{q} \rfloor} (-1)^l \tbinom{n-1}{l} \cdot \tbinom{(n-1-l)q-1}{n}.
\end{aligned}
$$

Durch Induktion nach n kann man zeigen:

$$
\sum_{0\le l\le \lfloor n-1-\frac{(n+1)}{q} \rfloor} (-1)^l \binom{n-1}{l} \cdot \binom{(n-1-l)q-1}{n} = 1+\frac{1}{2}\cdot q^{n-1}\left[(n-1)q-(n+1)\right].
$$

Daher ist $\mid \mathcal{B} \mid = g$.

Zu (iii):
Es reicht zu zeigen, dass die Elemente der Menge

$$
\overline{\mathcal{B}}_n := \left\{ \lambda_1^{-\alpha_1} \cdot \prod_{2\le i\le n} \lambda_i^{\alpha_i} \mid \alpha_j \in \mathbb{Z}, 0 \le j \le n, \text{ erfüllen die Bedingungen aus } \mathcal{B} \right\}
$$

linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind. Dies beweisen wir durch Induktion nach n.
I.A.: $n = 2$.
Seien $c_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathbb{F}_q$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\alpha_1,\alpha_2} c_{\alpha_1,\alpha_2} \lambda_1^{-\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} = 0 \\
\iff & \sum_{0\le \alpha_2\le q-1} \lambda_2^{\alpha_2} \sum_{\alpha_1} c_{\alpha_1,\alpha_2} \lambda_1^{-\alpha_1} = 0.
\end{aligned}
$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Elemente $\lambda_2^{\alpha_2}$ für $0 \leq \alpha_2 \leq q-1$ über K_P, gilt für jedes α_2:

$$\sum_{\alpha_1} c_{\alpha_1,\alpha_2} \lambda_1^{-\alpha_1} = 0.$$

Da die Elemente $\lambda_1^{-\alpha_1}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind, sind für alle (α_1, α_2) die Koeffizienten $c_{\alpha_1,\alpha_2} = 0$.
I.V.: Für ein $n \geq 3$ sind die Elemente aus $\overline{\mathcal{B}}_{n-1}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$.
I.S.: $n-1 \rightsquigarrow n$.
Seien $c_{\alpha_1,..,\alpha_n} \in \mathbb{F}_q$. Es gilt:

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} c_{\alpha_1,..,\alpha_n} \lambda_1^{-\alpha_1} \prod_{2 \leq i \leq n} \lambda_i^{\alpha_i} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{0 \leq \alpha_n \leq q-1} \lambda_n^{\alpha_n} \sum_{\alpha_1,..,\alpha_{n-1}} c_{\alpha_1,..,\alpha_n} \lambda_1^{-\alpha_1} \prod_{2 \leq i \leq n-1} \lambda_i^{\alpha_i} = 0.$$

Da die Elemente $\lambda_n^{\alpha_n}$ mit $0 \leq \alpha_n \leq q-1$ linear unabhängig über K_p sind, ist für alle α_n

$$\sum_{\alpha_1,..,\alpha_{n-1}} c_{\alpha_1,..,\alpha_n} \lambda_1^{-\alpha_1} \prod_{2 \leq i \leq n-1} \lambda_i^{\alpha_i} = 0. \qquad (\star)$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus $(\star)$ für alle $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$:

$$c_{\alpha_1,..,\alpha_n} = 0.$$

Daher sind die Elemente $\omega \in \mathcal{B}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$.
Aus (i), (ii) und (iii) folgt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\Omega_{K_m}(0)$ über $\mathbb{F}_q$ ist.

$\square$

3.3 Der Fall $m = p$ mit irreduziblem p und $deg(p) = 2$

In diesem Abschnitt konstruieren wir holomorphe Differentiale auf Torsionskörpern des Carlitz-Moduls für normierte, irreduzible Polynome von Grad 2.

3.3.1 Bemerkung:

Sei $\mathcal{P} \in S(K_m)$ mit $\mathcal{P} \mid P$. Nach Satz 2.4.1 mit $n = 1$ und $d = 2$ ist

$$Diff\,(K_m/k) = \left(q^2 - 2\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp.$$

Des Weiteren gilt:

$$(dT) = \left(q^2 - 2\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (-q) \cdot \wp$$

und

$$(\lambda) = \mathcal{P} + \sum_{\substack{a \in A,\\ 0 \leq deg(a) \leq 1}} \left(\sum_{\wp_a \mid P_\infty} \left[(q-1)\,(2 - deg(a)) - q \right] \wp_a \right),$$

dabei ist λ ein Erzeuger von Λ_m. Nach Bemerkung 2.3.16 gibt es genau ein $\wp$ mit $v_\wp(\lambda) = q - 2$ und q $\wp$'s mit $v_\wp(\lambda) = -1$. Betrachten wir nun die Divisoren von den Differentialen der Form $\lambda^{-\alpha} dT$:

$$\left(\lambda^{-\alpha} dT\right) \;=\; \left(\lambda^{-\alpha}\right) + (dT) = -\alpha \cdot (\lambda) + (dT).$$

Damit solche Differentiale holomorph sind, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. $q^2 - 2 - \alpha \geq 0$, das heißt $\alpha \leq q^2 - 2$.
2. $(2-q)\alpha - q \geq 0$, also $\alpha \leq \frac{q}{2-q}$.
3. $\alpha - q \geq 0$, das heißt $\alpha \geq q$.

Da Bedingung 2 und 3 sich gegenseitig ausschließen, können Differentiale der Form $\lambda^{-\alpha} dT$ nicht holomorph sein. Deshalb können wir nicht das gleiche Konstruktionsverfahren anwenden, wie in Abschnitt 3.1 und 3.2. Stattdessen gilt folgender Satz:

3.3.2 Satz:

Sei $m = p$ ein normiertes, irreduzibles Polynom von Grad 2. Dann bildet die Menge

$$\mathcal{B} := \left\{ \lambda^i \mu^j \frac{dT}{p} \mid 1 \leq i + j \leq q - 2 \text{ und } 0 \leq i,\, j \leq q-2,\; i, j \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

eine Basis des Raumes der holomorphen Differentiale von K_m über $\mathbb{F}_q$. Dabei bezeichnen λ und μ zwei verschiedene Erzeuger von Λ_m mit $\lambda \neq b\mu$ für $b \in \mathbb{F}_q$.

Beweis:

Die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ sind holomorph:
Sei $\mathcal{P} \in S(K_m)$ mit $\mathcal{P} \mid P$. Aus Satz 2.4.1 mit $d = 2$ und $n = 1$ folgt:

$$Diff\,(K_m/k) = \left(q^2 - 2\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(dT) &= -2(T)_\infty + Diff\,(K_m/k) \\
&= -2 \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-1) \cdot \wp + \left(q^2 - 2\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp \\
&= \left(q^2 - 2\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (-q) \cdot \wp.
\end{aligned}$$

Daher ist der Divisor von $\frac{dT}{p}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dT}{p}\right) &= (dT) + \left(\frac{1}{p}\right) \\
&= (dT) + e\,(\mathcal{P} \mid P) \cdot v_P\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} e\,(\wp \mid P_\infty) \cdot v_\infty\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \wp \\
&= (dT) + \left(q^2 - 1\right) \cdot (-1) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-1) \cdot 2 \cdot \wp \\
&= \left[q^2 - 2 - \left(q^2 - 1\right)\right] \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} \left[-q + 2(q-1)\right] \cdot \wp \\
&= -\mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp.
\end{aligned}$$

Wenden wir uns nun dem Divisor eines Erzeugers λ von Λ_m zu. Da λ eine Uniformisierende ist, ist $v_{\mathcal{P}}(\lambda) = 1$. Nach Bemerkung 2.3.16 gibt es genau ein $\wp$ mit $v_\wp(\lambda) = q - 2$ und q $\wp$'s mit $v_\wp(\lambda) = -1$. Es ist

$$\begin{aligned}
\left(\lambda^i \mu^j \frac{dT}{p}\right) &= \left(\lambda^i\right) + \left(\mu^j\right) + \left(\frac{dT}{p}\right) \\
&= i \cdot (\lambda) + j \cdot (\mu) + \left(\frac{dT}{p}\right).
\end{aligned}$$

Somit gilt für $\omega \in \mathcal{B}$:

1. $v_{\mathcal{P}}(\omega) = i + j - 1 \geq 0$, da $i + j \geq 1$ ist.
2. $v_\wp(\omega) \geq q - 2 - (i + j) \geq 0$, da $i + j \leq q - 2$ ist.

Also sind die Differentiale aus der Menge $\mathcal{B}$ holomorph.
Als nächstes zeigen wir, dass $\mid \mathcal{B} \mid = g$ ist. Für das Geschlecht g von K_m gilt nach Satz 2.4.4 (3. Fall):

$$g = \frac{q(q-1)}{2} - 1.$$

Bestimmen wir nun die Kardinalität von $\mathcal{B}$. Für $i \in \{0, ..., q-2\}$ folgt:

$$max\,\{0,\, 1-i\} \leq j \leq q-2-i.$$

Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für j bei einem festen i gegeben durch

$$q-2-i-[max\,\{0,\, 1-i\}-1] = q-1-i-max\,\{0,\, 1-i\}\,.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mid \mathcal{B} \mid &= \sum_{0\leq i\leq q-2} (q-1-i-max\,\{0,\, 1-i\}) \\
&= \sum_{1\leq i\leq q-2} (q-1-i) + q - 2 \\
&= (q-2)\,(q-1) - \sum_{1\leq i\leq q-2} i + q - 2 \\
&= (q-2)\,(q-1) - \tfrac{(q-2)(q-2+1)}{2} + q - 2 \\
&= (q-2)\,(q-1) - \tfrac{(q-2)(q-1)}{2} + q - 2 \\
&= \tfrac{(q-2)(q-1)}{2} + q - 2 \\
&= \tfrac{q^2-3q+2+2q-4}{2} \\
&= \tfrac{q^2-q-2}{2} \\
&= \tfrac{q(q-1)}{2} - 1 \\
&= g.
\end{aligned}$$

Damit ist $\mid \mathcal{B} \mid = g$. Es bleibt zu zeigen, dass die Differentiale $\omega \in \mathcal{B}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind. Dafür reicht, die lineare Unabhängigkeit der $\lambda^i\mu^j$ zu zeigen. Dabei sei oBdA $q \gneqq 2$.
Sei nun

$$0 = \sum_{1\leq l\leq q-2} \left(\sum_{i+j=l} a_{i,j}\lambda^i\mu^j \right)$$

eine Relation mit der geringsten Zahl von Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{F}_q$ mit $a_{i,j} \neq 0$. Wir bezeichnen diese Relation mit (Y). Für $b \in \mathbb{F}_q^* \hookrightarrow Gal\,(K_p/k)$ genügen auch $\sigma_b(\lambda) = b\lambda =: \widetilde{\lambda}$ und $\sigma_b(\mu) = b\mu =: \widetilde{\mu}$ der Relation (Y). Dann ist

$$0 = \sum_{1 \leq l \leq q-2} \left(\sum_{i+j=l} a_{i,j} \left(\widetilde{\lambda}\right)^i (\widetilde{\mu})^j \right), \quad \text{das heißt}$$

$$0 = \sum_{1 \leq l \leq q-2} \left(\sum_{i+j=l} a_{i,j} b^l \lambda^i \mu^j \right).$$

Treten nun in (Y) verschiedene homogene Terme $\sum\limits_{i+j=l} a_{i,j}\lambda^i\mu^j$ auf, so kann durch geeignete Wahl von b die Relation verkürzt werden. Deshalb muss die Relation (Y) homogen sein, das heißt folgende Gestalt besitzen:

$$0 = \sum_{i+j=l} a_{i,j}\lambda^i\mu^j$$

für ein festes $l \in \{1, 2, ..., q-2\}$. Damit muss man Folgendes zeigen:
Für ein festes $l \in \{1, ..., q-2\}$ gilt:

$$0 = \sum_{i+j=l} a_{i,j}\lambda^i\mu^j \Longrightarrow \forall i,\, j : \; a_{i,j} = 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & 0 = \sum_{i+j=l} a_{i,j}\lambda^i\mu^j \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 = \sum_{0 \leq i \leq l} a_{i,l-i}\lambda^i\mu^{l-i} \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 = \sum_{0 \leq i \leq l} a_{i,l-i}\lambda^i\mu^{l-i}\mu^{-l} \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 = \sum_{0 \leq i \leq l} a_{i,l-i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i. \end{aligned}$$

Somit bleibt zu zeigen:
Der Grad des Minimalpolynoms von $\frac{\lambda}{\mu}$ über k ist größer als $q-2$.
Um dies zu zeigen, betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{c} k(\lambda) \\ | \\ k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \\ | \\ k \end{array}$$

Es gilt:

$$[k(\lambda) : k] = \left[k(\lambda) : k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] \cdot \left[k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) : k\right].$$

Nach Satz 2.3.3 ist $[k(\lambda):k] = \phi(m) = q^2-1$. Es ist offensichtlich, dass $Gal\left(k(\lambda)/k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right) \supseteq \mathbb{F}_q^*$ ist. Betrachten wir uns ein Element $\sigma_a \in (A/pA)^*$ mit $deg(a)=1$, so dass

$$\frac{\lambda}{\mu} \stackrel{!}{=} \sigma_a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Es gilt:

$$\sigma_a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = C_a\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{a\lambda + l(a)\lambda^q}{a\mu + l(a)\mu^q}.$$

Dabei ist $l(a)$ der Leitkoeffizient von a. Daraus folgt:

$$\begin{array}{rc}
& \frac{\lambda}{\mu} = \frac{a\lambda+l(a)\lambda^q}{a\mu+l(a)\mu^q} \\
\iff & a\lambda\mu + l(a)\lambda\mu^q = a\lambda\mu + l(a)\lambda^q\mu \\
\iff & l(a)\lambda\mu^q = l(a)\lambda^q\mu \\
\iff & \lambda\mu^q = \lambda^q\mu \\
\iff & \lambda^{q-1} = \mu^{q-1}.
\end{array}$$

$\Rightarrow \{\lambda, \mu\}$ ist $\mathbb{F}_q$- linear abhängig.
Dies ist aber ein Widerspruch, da λ und μ nach Voraussetzung linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind. Deshalb ist

$$Gal\left(k(\lambda)/k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right) \cong \mathbb{F}_q^*.$$

Also ist $\left[k(\lambda):k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] = q-1$. Daraus folgt:

$$\left[k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right):k\right] = \frac{[k(\lambda):k]}{\left[k(\lambda):k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right]} = \frac{q^2-1}{q-1} = q+1 \gneq q-2.$$

Daher ist der Grad des Minimalpolynoms von $\frac{\lambda}{\mu}$ größer als $q-2$.
Daraus folgt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des Raums der holomorphen Differentiale über $\mathbb{F}_q$ ist.

$\square$

3.4 Der allgemeine Fall

In diesem abschließenden Abschnitt werden wir mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens von Abschnitt 3.3 holomorphe Differentiale auf Torsionskörper des Carlitz-Moduls für beliebige Polynome $m \in A$ konstruieren. Anders als in den vorangegangenen Abschnitten wird nur eine Menge von holomorphen Differentialen und keine Basis des Raums der holomorphen Differentiale angegeben.
Betrachten wir zuerst den Fall $m = p$. Dabei bezeichnet $p \in A$ ein normiertes, irreduzibles Polynom von Grad d. Außerdem sei $\mathcal{P} \in S(K_m)$ mit $\mathcal{P} \mid P$. Nach Satz 2.4.1 mit $n = 1$ ist

$$Diff\,(K_p/k) = \left(q^d - 2\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp.$$

Daraus erhalten wir den Divisor von $\frac{dT}{p}$:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{dT}{p}\right) &= (dT) + \left(\tfrac{1}{p}\right) \\
&= -2\,(T)_\infty + Diff\,(K_p/k) + \left(\tfrac{1}{p}\right) \\
&= -2 \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-1) \cdot \wp + \left(q^d - 2\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-2) \cdot \wp \\
&\quad + \sum_{\wp \mid P_\infty} (q-1) \cdot d \cdot \wp - \left(q^d - 1\right) \cdot \mathcal{P} \\
&= -\mathcal{P} + \sum_{\wp \mid P_\infty} \left[(d-1)\,q - d\right] \cdot \wp.
\end{aligned}$$

Sei nun λ ein Erzeuger von Λ_p. Da λ eine Uniformisierende ist, ist $v_{\mathcal{P}}(\lambda) = 1$. Des Weiteren gilt nach Satz 2.3.15

$$v_{\wp_a}(\lambda) = (q-1)(d - deg(a)) - q$$

für $0 \leq deg(a) \leq d-1$. Somit ist der Divisor von λ gegeben durch

$$(\lambda) = \mathcal{P} + \sum_{\substack{a \in A, \\ 0 \leq deg(a) \leq d-1}} \left(\sum_{\wp_a \mid P_\infty} \left[(q-1)(d - deg(a)) - q\right] \cdot \wp_a \right).$$

Man erkennt sofort, dass für $deg(a) = d-1$ die Bewertung $v_{\wp_a}(\lambda) = -1$ ist. Und für $0 \leq deg(a) \leq d-2$ ist $v_{\wp_a}(\lambda) \geq 0$.
Daher sind Differentiale der Form

$$\prod_{1 \leq i \leq q^d - 1} \lambda_i^{\alpha_i} \frac{dT}{p} \quad \text{mit } 1 \leq \sum_{1 \leq i \leq q^d - 1} \alpha_i \leq (d-1)q - d$$

holomorph. Dabei sind λ_i verschiedene Erzeuger von Λ_p.
Aufgrund der Tatsache, dass viele λ_i linear abhängig über $\mathbb{F}_q$ sind, ist die Anzahl solcher Differentiale viel größer als das Geschlecht von K_p. Wenn wir nun analog zu Satz 3.3.2 vorgehen, das heißt wir wählen d verschiedene über $\mathbb{F}_q$ linear unabhängige Erzeuger von Λ_p, erhalten wir:

3.4.1 Satz:

Sei $m = p$. Dabei ist $p \in A$ ein normiertes, irreduzibles Polynom mit $deg(p) = d$. Des Weiteren seien λ_i, $1 \leq i \leq d$, linear unabhängige Erzeuger von Λ_p über $\mathbb{F}_q$. Dann besteht die Menge

$$\mathcal{M}_1 := \left\{ \prod_{1\leq i\leq d} \lambda_i^{\alpha_i} \frac{dT}{p} \mid \alpha_i \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq \sum_{1\leq i\leq d} \alpha_i \leq (d-1)q - d,\ 0 \leq \alpha_i \leq (d-1)q - d \right\}$$

ausschließlich aus holomorphen Differentialen.

Beweis:

Aus den Vorüberlegungen von Satz 3.4.1 erhalten wir für $\omega \in \mathcal{M}_1$:

1. $v_{\mathcal{P}}(\omega) \geq 0$ und
2. $v_{\wp}(\omega) \geq 0$ für alle $\wp \mid P_\infty$.

Also sind alle Differentiale $\omega \in \mathcal{M}_1$ holomorph.

$\square$

Bemerkung:

Sobald $(d-1)q - d$ größer als q wird, ist $\mid \mathcal{M}_1 \mid \gneq g$. Zum Beispiel für $d = 3$ und $q = 4$ gilt für das Geschlecht von K_p nach Satz 2.4.3 mit $n = 1$:

$$g = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(4^3 - 1\right) \cdot \left[\frac{3 \cdot \left(4^3 - 2\right)}{\left(4^3 - 1\right)} - \frac{4}{3}\right] = 52.$$

Aber die Kardinalität von $\mathcal{M}_1$ ist gleich 55, das man ohne kombinatorische Mittel von Hand bestimmen kann. Das heißt, dass die Menge $\mathcal{M}_1$ im Allgemeinen keine Basis von $\Omega_{K_p}(0)$ ist.

Widmen wir uns nun der Situation, in der $m = p^n$ ist.

3.4.2 Satz:

Sei $p \in A$ ein normiertes, irreduzibles Polynom mit $deg(p) = d$. Des Weiteren sei $m = p^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann besteht die Menge

$$\mathcal{M}_2 := \left\{ \prod_{1\leq l\leq d} \left(\prod_{1\leq i\leq n} C_{p^{n-i}}(\lambda_l)^{\alpha_{l,i}} \right) \tfrac{dT}{p^n} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq \sum\limits_{1\leq l\leq d} \left(\sum\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_{l,i} \right) \leq (nd-1)q - nd, \\ \forall i,\, l:\ 0 \leq \alpha_{l,i} \leq (nd-1)q - nd \\ \exists\, l:\ \alpha_{l,1} \neq 0,\ \alpha_{l,i} \in \mathbb{N}_0 \end{array} \right\}.$$

ausschließlich aus holomorphen Differentialen. Dabei sind λ_l verschiedene Erzeuger von Λ_m, die linear unabhängig über $\mathbb{F}_q$ sind. Des Weiteren sind $C_{p^{n-i}}(\lambda_l) =: \lambda_{l,i}$ verschiedene Erzeuger von Λ_{p^i}.

Beweis:

Nach Satz 2.4.1 gilt:

$$Diff\,(K_m/k) = \left[n\left(q^{dn} - q^{d(n-1)}\right) - q^{d(n-1)}\right] \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp | P_\infty} (q-2) \cdot \wp.$$

Daraus folgt:

$$(dT) = \left[n \cdot \left(q^{dn} - q^{d(n-1)}\right) - q^{d(n-1)}\right] \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp | P_\infty} (-q) \cdot \wp.$$

Daher gilt für den Divisor des Differentials $\frac{dT}{p^n}$:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{dT}{p^n}\right) &= (dT) + \left(\tfrac{1}{p^n}\right) \\ &= (dT) - n\left(q^{dn} - q^{d(n-1)}\right) \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp | P_\infty} (q-1)nd \cdot \wp \\ &= -q^{d(n-1)} \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp | P_\infty} (-q + ndq - nd) \cdot \wp \\ &= -q^{d(n-1)} \cdot \mathcal{P} + \sum_{\wp | P_\infty} \left[(nd-1)\,q - nd\right] \cdot \wp. \end{aligned}$$

Sei nun λ ein Erzeuger von Λ_{p^n}. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{p^n}/\Lambda_{p^{n-i}} & \xrightarrow{\cong} & \Lambda_{p^i} \\ \lambda & \longmapsto & C_{p^{n-i}}(\lambda) =: \lambda_i. \end{array}$$

Da P in K_{p^i} voll verzweigt ist, liegt genau eine Stelle $\mathcal{P}_i \in S\left(K_{p^i}\right)$ über P. Da λ_i eine Uniformisierende ist, ist $v_{\mathcal{P}_i}(\lambda_i) = 1$. Wegen der vollen Verzweigung von $\mathcal{P}_i$ über K_m gilt:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathcal{P}}(\lambda_i) &= e(\mathcal{P} \mid \mathcal{P}_i) \cdot v_{\mathcal{P}_i}(\lambda_i) \\
&= \left[K_{p^n} : K_{p^i}\right] \\
&= \frac{q^{d(n-1)}\left(q^d-1\right)}{q^{d(i-1)}\left(q^d-1\right)} \\
&= q^{d(n-i)}.
\end{aligned}
$$

Nach Satz 2.3.15 gilt für die Bewertungen von λ_i an den Stellen $\wp_a := \sigma_a^{-1}(\wp_\infty)$ mit $\wp_a \mid P_\infty$:

$$
v_{\wp_a}(\lambda_i) = (q-1)(id-t) - q
$$

wobei $0 \leq deg(a) \leq id-1$. Man erkennt sofort, dass nur für $deg(a) = id-1$ die Bewertung von λ_i an der Stellen $\wp_a \mid P_\infty$ gleich -1 wird. Für alle anderen Werte von $deg(a)$ sind die Bewertungen von λ_i an diesen Stellen größer 0. Deshalb ist an diesen Stellen die Holomorphie-Bedingung von $\omega \in \mathcal{M}$ sicher erfüllt.
Daraus folgt für $\omega \in \mathcal{M}_2$:

- $v_{\mathcal{P}}(\omega) = \sum\limits_{1\leq l\leq d}\left(\sum\limits_{1\leq i\leq n} q^{d(n-i)}\alpha_{l,i}\right) - q^{d(n-1)} \geq 0$, da $\omega \in \mathcal{M}_2$.
- $v_{\wp_a}(\omega) \geq \sum\limits_{1\leq l\leq d}\left(\sum\limits_{1\leq i\leq n}(-1)\cdot\alpha_{l,i}\right) + (nd-1)q - nd \geq 0$, da $\omega \in \mathcal{M}_2$.

Somit besteht $\mathcal{M}_2$ ausschließlich aus holomorphen Differentialen.

□

Für den allgemeinen Fall erhalten wir:

3.4.3 Satz:

Sei $m = \prod\limits_{1\leq i\leq r} p_i^{n_i} \in A$. Dabei sind p_i verschiedene, normierte und irreduzible Polynome mit $deg(p_i) = d_i$ und $n_i \in \mathbb{N}$. Dann besteht die Menge

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_3 := \quad & \Big\{ \prod_{1\leq i\leq r}\left(\prod_{1\leq l\leq d_i}\left(\prod_{1\leq j\leq n_i} C_{p_i^{n_i-j}}(\lambda_{i,l})^{\alpha_{i,l,j}}\right)\right)\frac{dT}{m} \;\Big|\; \quad \forall\, i \exists\, l:\ \alpha_{i,l,1} \neq 0, \\
& r \leq \sum_{i,l,j}\alpha_{i,l,j} \leq \left(\sum_i n_i d_i - 1\right)q - \sum_i n_i d_i,\ \alpha_{i,l,j} \in \mathbb{N}_0\Big\}
\end{aligned}
$$

ausschließlich aus holomorphen Differentialen. Dabei ist $\lambda_{i,l,j} := C_{p_i^{n_i-j}}(\lambda_{i,l})$ ein Erzeuger von $\Lambda_{p_i^j}$ und $\lambda_{i,l}$ sind verschiedene Erzeuger von Λ_m.

Beweis:

Nach Satz 2.4.2 gilt:

$$Diff\,(K_m/k) = \sum_{1\leq i\leq r}\left(\sum_{\mathcal{P}_i|P_i} q^{(n_i-1)d_i}\left(n_i\left(q^{d_i}-1\right)-1\right)\mathcal{P}_i\right) + \sum_{\wp|P_\infty}(q-2)\cdot\wp.$$

Somit gilt für den Divisor von $\frac{dT}{m}$:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{dT}{m}\right) &= \left(\tfrac{1}{m}\right) + (dT)\\
&= \sum_{1\leq i\leq r} n_i\cdot\left(\tfrac{1}{p_i}\right) + (dT)\\
&= \sum_{1\leq i\leq r}\left(\sum_{\mathcal{P}_i|P_i} - n_i\cdot\left(q^{d_i n_i} - q^{d_i(n_i-1)}\right)\mathcal{P}_i\right) + \sum_{\wp|P_\infty}\left((q-1)\sum_{1\leq i\leq r} n_i d_i\right)\wp\\
&\quad + \sum_{1\leq i\leq r}\left(\sum_{\mathcal{P}_i|P_i} q^{(n_i-1)d_i}\left(n_i\left(q^{d_i}-1\right)-1\right)\mathcal{P}_i\right) + \sum_{\wp|P_\infty}(-q)\wp\\
&= \sum_{1\leq i\leq r}\left(\sum_{\mathcal{P}_i|P_i} - q^{(n_i-1)d_i}\mathcal{P}_i\right) + \sum_{\wp|P_\infty}\left[\left(\sum_{1\leq i\leq r} n_i d_i - 1\right)q - \sum_{1\leq i\leq r} n_i d_i\right]\wp.
\end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 3.4.2 erhalten wir $v_{\mathcal{P}_i}\left(\lambda_{i,l,j}\right) = q^{(n_i-j)d_i}$ und $v_\wp\left(\lambda_{i,l,j}\right) \geq (q-1)(jd_i - deg(a)) - q$ für $0 \leq deg(a) \leq jd_i - 1$. Daher gilt für die Bewertungen von (ω) mit $\omega \in \mathcal{M}_3$:

1. $v_{\mathcal{P}_i}(\omega) = q^{(n_i-j)d_i}\alpha_{i,l,j} - q^{(n_i-1)d_i} \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$.
2. $v_\wp(\omega) \geq \sum_{1\leq i\leq r}(n_i d_i - 1)\,q - \sum_{1\leq i\leq r} n_i d_i - \sum_{i,l,j}\alpha_{i,l,j} \geq 0.$

Somit ist $\omega \in \mathcal{M}_3$ holomorph.

□

3.4.4 Schlussbemerkung:

Wir haben nun gesehen, dass die Mengen $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_3$ aus holomorphen Differentialen bestehen. Aber man stellt zügig fest, dass diese Mengen größer sind als das Geschlecht von K_m. Das heißt, dass unter diesen Differentialen $\mathbb{F}_q$-lineare Relationen bestehen. Daher sind diese Mengen im Allgemeinen keine Basen für den Raum der holomorphen Differentiale über $\mathbb{F}_q$. Des Weiteren wissen wir nicht, ob die Menge $\mathcal{M}_1$ (bzw.$\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$) alle Elemente einer Basis des Raumes der holomorphen Differentiale von K_m über $\mathbb{F}_q$ enthält.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen, 1
$\mathbb{N}_0$	$\{0\} \cup \mathbb{N}$, 1
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen, 1
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen, 1
$\mathbb{F}_q$	der endliche Körper mit Charakteristik p, 1
$\mathcal{O}$	Bewertungsring eines Funktionenkörpers, 2
P	Stelle von K/F, 3
$S(K)$	Stellenmenge von K, 3
$deg(P)$	Grad einer Stelle P, 3
$\mathcal{O}_{(\wp)}$	Lokalisierung von $F[T]$ bei $\wp$, 4
$P_{p(T)}$	endliche Stelle, 4
$\mathcal{O}_\infty$	Lokalisierung von $F\left[\frac{1}{T}\right]$ bei $\wp$, 4
P_∞	Stelle bei unendlich, 5
$v_\wp(x)$	Bewertung zur Stelle $\wp$, 5
$v_\infty(x)$	Bewertung zur Stelle P_∞, 5
A	bezeichnet $\mathbb{F}_q[T]$, 5
k	bezeichnet $\mathbb{F}_q(T)$, 5
k_∞	Vervollständigung von k bei ∞, 6
$\wp \mid P$	die Stelle $\wp$ liegt über der Stelle P, 6
$e\,(\wp \mid P)$	Verzweigungsindex von $\wp$ über P, 6
$f\,(\wp \mid P)$	Restklassengrad von $\wp$ über P, 6
$Gal\,(M/N)$	Galoisgruppe von M/N , 8
$Div(K)$	Divisorgruppe von K, 9
$v_Q(D)$	Bewertung eines Divisors D an der Stelle Q, 9
$deg(D)$	Grad eines Divisors D, 10

$(x)_0$	Nullstellendivisor von x, 10
$(x)_\infty$	Poldivisor von x, 10
(x)	Hauptdivisor von x, 10
$\mathcal{L}(D)$	Riemann-Roch-Raum zum Divisor D, 11
$l(D)$	Dimension des Divisors D, 11
$Diff\,(L/K)$	Differente von L/K, 12
$Der\,(K/F)$	Menge der Derivationen von K/F, 14
Ω_K	Menge der Differentiale von K, 15
(ω)	kanonischer Divisor von $\omega \in \Omega_K$, 15
$\Omega_K\,(0)$	Raum der holomorphen Differentiale von K, 16
g	Geschlecht eines Funktionenkörpers, 17
$\overline{k}$	algebraischer Abschluss von k, 18
$C_m(X)$	Carlitz-Polynom, 18
Λ_m	m-Torsion des Carlitz-Moduls, 20
K_m	Torsionskörper des Carlitz-Moduls, 21
$K_{m/p_j^{n_j}}$	Kompositum der Körper $K_{p_i^{n_i}}$ ohne $K_{p_j^{n_j}}$, 22
$\widetilde{\Lambda}_m$	m-Torsion auf $\overline{k}_\infty$, 23
$\wp_\infty$	ausgezeichnete Stelle von K_m mit $\wp_\infty \mid P_\infty$, 23
$\wp_a$	bezeichnet $\sigma_a^{-1}\,(\wp_\infty)$, 25

Literaturverzeichnis

[Hayes]: D. R. Hayes, Explicit class field theory for rational function fields, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 189, S. 77-91, 1974

[Keller]: A. Keller, Extremaleigenschaften von Kreisteilungserweiterungen rationaler Funktionenkörper, Diplomarbeit, Arbeitsgruppe Gekeler, Universität des Saarlandes, 1999

[Murty]: V. N. Murty, Counting the Integer Solutions of a Linear Equation with Unit Coefficients, Mathematics Magazine, Vol. 54, No. 2, S. 79-81, 1981

[Rosen]: M. Rosen, Number Theory in Function Fields, Springer-Verlag, 2002

[Stich]: H. Stichtenoth, Algebraic Function Fields and Codes, Springer-Verlag, 2008

[Vi-Sa]: G. D. Villa-Salvador, Topics in the Theory of Algebraic Function Fields, Birkhäuser-Verlag, 2006

[Ward]: K. A. Ward, Explicit Galois representations of automorphisms on holomorphic differentials in characteristic p, arXiv:1408.6391v9[math.NT], 12. Nov. 2014