

ZUM NULLSTELLENVERHALTEN
PERIODISCHER NICHTARCHIMEDISCHER
FUNKTIONEN IN POSITIVER
CHARAKTERISTIK

Masterarbeit

zur Erlangung des Grades
des Master of Science

vorgelegt
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Philipp Stopp

angefertigt

am Lehrstuhl von Herrn Prof. Dr. E.-U. Gekeler

Saarbrücken,
September 2011

Ich erkläre hiermit an Eides statt, diese Arbeit selbstständig geschrieben und keine Hilfsmittel außer den angegebenen verwendet zu haben.

Inhaltsverzeichnis

Einführung	3
Kapitel 1. Situation und Grundlagen	7
1.1. Funktionenkörper versus Zahlkörper	7
1.2. Einführung der Gosspolynome	9
1.3. Die Vermutung	16
Einschub: Notationen und Festlegungen	18
Kapitel 2. Die Lösungsstrategie	19
2.1. Die obere Halbebene und Fundamentalbereiche	20
2.2. Nullstellensuche über nullstellenfreie Bereiche	22
2.3. Die Laurententwicklung von C_k	23
2.4. Endgültige Formulierung der Vermutung	25
Kapitel 3. Hilfsmittel	27
3.1. Hilfsaussagen zu Kapitel 2	27
3.2. Hilfsaussagen zu Kapitel 4	33
Kapitel 4. Der Beweis der Vermutung und Folgerungen	37
4.1. Allgemeine Vorüberlegungen	37
4.2. Die Hauptaussage und ihr Beweis	40
4.3. Folgerungen	44
4.4. Vergleich mit bereits bewiesenen Aussagen	50
Kapitel 5. Verallgemeinerungen und Spezialfälle	53
5.1. Primzahlpotenzen	53
5.2. Ein- und zweidimensionale Gitter	55
5.3. Spezielle Wahlen für k	57
Anhang	63
Anhang A: Nichtarchimedische Analysis	63
Anhang B: Newtonpolygone	67
Symbolverzeichnis	71
Literaturverzeichnis	73
Stichwortverzeichnis	75

Einführung

In der „klassischen“ Situation, das heißt beim Rechnen mit Körpern der Charakteristik 0, sind \mathbb{Z} -periodische Summen der Gestalt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^k},$$

für eine natürliche Zahl k und ein z aus dem Körper der komplexen Zahlen, von zahlentheoretischem Interesse. Beispielsweise ist für ein k , mit $k \geq 2$, bekannt, dass gilt:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^k} = c \cdot \frac{E_k(q)}{1 - q^k},$$

mit einer Konstanten $c = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}$, sowie $q = e^{2\pi i z}$ und einem sogenannten *Eulerischen Polynom* $E_k(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Der Verdienst des amerikanischen Mathematikers David Goss ist es, entsprechende Analoga im Fall eines Körpers der Charakteristik p , wobei p eine Primzahl ist, angegeben und erstmals untersucht zu haben. Ausgehend von einem diskreten \mathbb{F}_q -Untervektorraum Λ von C_∞ , wobei q eine Primzahlpotenz ist und C_∞ den vervollständigsten algebraischen Abschluss von $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$ bezeichnet, betrachtet man die Funktionen

$$t_\Lambda(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda} \quad \text{sowie} \quad C_{k,\Lambda}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^k},$$

für $z \in C_\infty$. Für diese Summen kann man zeigen, dass Polynome $G_{k,\Lambda}(X) \in C_\infty[X]$ existieren, sodass jeweils

$$G_{k,\Lambda}(t_\Lambda(z)) = C_{k,\Lambda}(z)$$

gilt. Man bezeichnet diese als *Gosspolynome*.

Sie nehmen insbesondere in der Theorie der Modulformen und Modulfunktionen eine wichtige Rolle ein. So beispielsweise für die Gruppe $GL(2, A)$, wobei $\Lambda = A$ der Polynomring $\mathbb{F}_q[T]$ ist, und deren Kongruenzuntergruppen.

Zum ersten Mal systematisch untersucht wurden die Beziehungen zwischen den Objekten $C_{k,\Lambda}$, $G_{k,\Lambda}$ sowie t_Λ und ihre Einordnung in den Kontext zur Theorie der Modulformen von D. Goss in [Gos80]. Unter anderem vom selben Autor und auch von dem deutschen Mathematiker Ernst-Ulrich Gekeler erschienen im Laufe der Zeit weitere Arbeiten mit neuen Ergebnissen zur Situation, sodass dieses Gebiet insbesondere noch immer Teil der aktuellen mathematischen Forschung ist. Der Anspruch der vorliegenden Arbeit liegt deshalb darin, diesen Resultaten einige weitere ergebnisbringende Überlegungen hinzuzufügen und bekannte Aussagen teilweise zu erweitern. Ausgangspunkt sind dabei die Erkenntnisse von [Gek11], die

wir von der Einschränkung auf das *Gitter* A loslösen und auf einen allgemeinen \mathbb{F}_p -Untervektorraum von C_∞ übertragen werden. Die Lösungsstrategie die dabei in der speziellen Situation des Manuskripts von E.-U. Gekeler vorlag, können wir mit einigen kleinen Veränderungen auf unsere Situation übertragen, weshalb eine Orientierung an diesem eleganten Vorgehen die erste Wahl war.

Als Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit wird im vierten Kapitel eine umfassende Aussage zur Nullstellenverteilung von $C_{k,\Lambda}$ präsentiert: Der Betrag einer Nullstelle $z \in C_\infty$ von $C_{k,\Lambda}$ stimmt immer mit dem Betrag von einem der Elemente der gewählten Basis des zugrundeliegenden Vektorraumes Λ überein. Sodann können wir die Nullstellen aus dem sogenannten Fundamentalebenebereich dieser Funktion bereits auf gewissen Teilstücken lokalisieren, und sogar direkt Aussagen über die Beträge sowie die Anzahl der Nullstellen des zugehörigen Gosspolynoms treffen. Diese Resultate sind dabei vollständig der von uns bis zu diesem Zeitpunkt entwickelten Theorie zu verdanken, die auf Hilfsmittel wie zum Beispiel die nichtarchimedische Analysis oder die nichtarchimedische Konturintegration, sowie die Untersuchung bestimmter Potenzsummen zurückgreift.

Von diesen Zielsetzungen ausgehend, wurde die folgende Vorgehensweise zur systematischen Untersuchung zum Nullstellenverhalten der Funktionen $C_{k,\Lambda}$ sowie der zugehörigen Gosspolynome $G_{k,\Lambda}$ gewählt:

Die Hauptausrichtung dieser Arbeit liegt in der logischen Entwicklung einer Lösungsstrategie zum Beweis der obengenannten angestrebten Aussage und schließlich dessen Durchführung. Nach einem Grundlagenkapitel werden daher im Anschluss zunächst alle notwendigen Konzepte in einem möglichst allgemeinen Rahmen präsentiert. Hierzu, und auch bei den Vorüberlegungen zum Beweis der Hauptaussage im vierten Kapitel, sind etliche rechenaufwendige und wenig tiefsinnige Schritte notwendig, die der besseren Lesbarkeit wegen an entsprechender Stelle weitestgehend ausgegliedert und in einem eingeschobenen dritten Kapitel abgelegt wurden. Dieses kann beim ersten Lesen durchaus übersprungen werden; für ein größtmögliches Verständnis ist dessen Lektüre allerdings unabdingbar. Den Abschluss der Arbeit bildet schließlich eine Zusammenstellung von Folgerungen und Verallgemeinerungen, die sich nun ohne große Mühe aus den Resultaten von Kapitel 4 ergeben.

Genauer lassen sich die einzelnen Kapitel wie folgt aufschlüsseln:

Im Kapitel zur Situation und den Grundlagen der vorliegenden Arbeit stellen wir als erstes die Funktionenkörpertheorie vor, deren wichtigstes Konzept, die Theorie der nichtarchimedischen Analysis, dem damit noch nicht vertrauten Leser im Anhang A als kurze Übersicht zur Verfügung gestellt wird. Nachdem wir uns zunächst einen Überblick zur Einordnung in den passenden mathematischen Kontext erarbeitet haben, kommen wir im zweiten Abschnitt zu einem der zu untersuchenden Objekte, den Gosspolynomen. Es werden dabei neben der Motivation, diese aufgrund des eigenständigen Interesses an der damit in Verbindung stehenden Funktionen $C_{k,\Lambda}(z)$ einzuführen, auch die wichtigsten Eigenschaften aufgezeigt und mit Beispielen unterstrichen. Den Abschluss des Kapitels stellt schließlich eine erste Formulierung der Hauptaussage dieser Arbeit dar. Diese stellen wir aufgrund bekannter Aussagen eines vergleichbaren Kontextes auf.

Da wir uns an der dortigen Strategie orientieren werden, bietet es sich an, im Anschluss in Form eines Einschubs eine kurze Übersicht über die verwendeten Schreibweisen zu geben, um Fehlinterpretationen vorzubeugen.

Im zweiten Kapitel machen wir uns zunächst mit den Gebieten vertraut, in denen wir arbeiten: Einem Teilbereich der sogenannten Drinfeldschen oberen Halbebene und dem Fundamentalbereich der Funktion $C_{k,\Lambda}$. Die danach im zweiten Abschnitt erläuterte Theorie ist der wesentliche Schritt zum Gelingen unserer Hauptaussage. Es handelt sich dabei um die sogenannte nichtarchimedische Konturintegration, mit deren Hilfe wir das Vorkommen von Nullstellen auf bestimmten Kreisringen ausschließen können. Für die Anwendung der entsprechenden Argumente benötigen wir allerdings die Laurententwicklung der Funktion $C_{k,\Lambda}(z)$. Die Bestimmung dieser unendlichen Summendarstellung ist Bestandteil des dritten Abschnittes. Im letzten Kapitelteil werden schließlich die Überlegungen zur finalen Formulierung der Vermutung als Auflistung von mehreren Äquivalenzen zusammengeführt. Da die Nullstellenverteilung von Polynomen mithilfe der sogenannten Newtonpolygone kodiert werden kann, wurden deren wichtigste Eigenschaften für den damit noch nicht vertrauten Leser in einem kurzen Abriss darüber im Anhang B zusammengestellt.

Das dritte Kapitel stellt in der Reihenfolge ihrer Verwendung die im zweiten und vierten Teil der Arbeit ausgelassenen Rechnungen und Argumentationsketten bereit. Dieses sollte nicht als eigenständiger Teil der Arbeit verstanden werden; vielmehr bietet es sich beim Lesen an, die fortgelassenen Beweise bei Bedarf hier nachzuschlagen, sodass man vom zweiten Kapitel ausgehend direkt mit dem vierten fortfahren sollte.

Wie schon dessen Titel vermuten lässt, steht dort der Beweis unserer Vermutung im Mittelpunkt, welcher den Höhepunkt unserer Untersuchungen darstellt. Nachdem zunächst nachfolgend wichtige Bezeichnungen eingeführt und gewisse Potenzsummen untersucht werden, ist die Durchführung des Hauptbeweises im zweiten Abschnitt nachzulesen. Es folgt ein Kapitelteil mit einer ganzen Reihe an Aussagen zu Nullstellenverteilungen, die sich an dieser Stelle unmittelbar ergeben. Unterstrichen werden deren vielfältige Anwendungsmöglichkeiten durch ausführliche Beispiele. Im letzten Abschnitt ziehen wir schlussendlich ein Resümee zu den erarbeiteten Ergebnissen mittels eines Vergleichs zu den bereits vorliegenden Ergebnissen der Referenz [Gek11].

Dabei haben wir bei weitem noch nicht alle Möglichkeiten der nun etablierten Theorie ausgeschöpft, sodass wir einigen weiteren Konsequenzen und Verallgemeinerungen noch ein eigenes Kapitel widmen. Dabei gehen unsere Überlegungen in zwei Richtungen. Zum einen versuchen wir uns soweit dies möglich ist von der Einschränkung auf Primzahlen als Elementzahl des zugrundeliegenden Körpers zu lösen, wodurch wir eine Aussage erhalten, die zusammen mit dem zweiten Abschnitt zur fast vollständigen Kontrolle der Situation für ein- und zweidimensionale Gitter im allgemeinen Kontext führt. Der zweite Ansatzpunkt ist der Grad k des Gosspolynoms, der, falls er einen bestimmten Wert besitzt, zu interessanten Ergebnissen führt. Untersuchungen diesbezüglich bilden den Abschluss unseres Studiums der vorliegenden Problemstellung im Rahmen dieser Masterarbeit.

Literatur. Wie bereits erwähnt, dienten dieser Masterarbeit vorwiegend die Arbeiten von E.-U. Gekeler und D. Goss mit entsprechendem Kontext als Grundlage. Hauptsächlich Rückgriff genommen wurde dabei auf das Manuskript [Gek11], worin in ähnlicher Situation wie hier mit derselben Strategie ein vergleichbares Ergebnis erzielt werden konnte. Bei den Überlegungen, die ich davon und auch aus

anderen Quellen übernahm, habe ich am Ende des zugehörigen Beweises, welcher oftmals expliziter formuliert wurde, ein Zitat dafür angegeben, wo dieser mit einer ähnlichen Strategie geführt wird. Neben den Standardwerken zur Theorie der Gosspolynome von den beiden obengenannten Autoren sind als zusätzliche Literatur zum Einstieg oder der Vertiefung der vorliegenden Situation die Werke zur nichtarchimedischen Analysis und starren Analysis zu empfehlen; darunter etwa die Bücher von A. F. Monna [Mon70], sowie J. Fresnel und M. van der Put [FrPu04] oder der Abschnitt zu ersterem bei D. Goss [Gos96].

Notationen. Neben den grundlegenden Konventionen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} \\ \text{und } \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, \dots\}, \end{aligned}$$

verwenden wir, soweit dabei keine Doppelbelegungen entstünden, der Konsistenz halber die in unserem Zusammenhang allgemein üblichen Symbole und Schreibweisen. Für einige weniger grundlegende Objekte mussten dabei Kompromisse eingegangen werden, sodass eine kurze Zusammenstellung der häufig gebrauchten Ausdrücke im Anschluss an das erste Kapitel der Übersicht dienlich erschien. Weitere Notationen werden an entsprechender Stelle erläutert und sind auch im Symbolverzeichnis aufgeführt. Die im Stichwortverzeichnis aufgeführten Begriffe sind bei ihrem erstmaligen Erscheinen im Text hervorgehoben.

Dank. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich in der Vorbereitung und während des Schreibens dieser Masterarbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler für das interessante Thema, seine stete Hilfe sowie die wertvollen Anregungen und Ideen. Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für den notwendigen Rückhalt und ihre Unterstützung. Besonderer Dank gilt auch meinen Korrekturleserinnen, die viel Zeit dafür investiert haben.

Situation und Grundlagen

Gegenstand der Untersuchungen der vorliegenden Masterarbeit sind unter anderem die sogenannten *Goss*-Polynome. Dieses einführende Kapitel stellt die Grundsituation vor, in der wir ebenjene studieren, und führt den Leser schließlich schon zu einer ersten Formulierung unserer Hauptaussage. Dazu müssen zunächst weitere relevante Objekte definiert und deren Zusammenhänge sowie grundlegenden Eigenschaften erarbeitet werden. Diese bilden den Grundstein für alle weiteren Argumentationen, und wir werden daher oft darauf zurückgreifen.

Im ersten Abschnitt geben wir einen kurzen Abriss der Theorie der Funktionenkörper und erläutern Besonderheiten, die sich in unserer nichtarchimedischen Situation ergeben. In diesem Kontext führen wir anschließend die sogenannte Gitterfunktion und damit zusammenhängende Objekte ein, die uns schließlich direkt zu den Goss-Polynomen führen. Im letzten Kapitelteil können wir dann, nach dem Vergleich mit bereits etablierter Theorie, erstmals Vermutungen zur Lage der Nullstellen der Funktion $C_{k,\Lambda}$ formulieren.

Die im dritten Abschnitt gemachten Konventionen, welche für den weiteren Verlauf bis auf Spezialfälle fixiert sind, werden in einem Einschub, der sich unmittelbar anschließt, nochmals aufgegriffen und übersichtlich dargestellt.

Insbesondere sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass wir uns in der vorliegenden Arbeit *ausschließlich auf die Betrachtung einer Primzahl p mit zugehörigem endlichen Körper \mathbb{F}_p beschränken*. Eine Übertragung auf Primzahlpotenzen ist für viele Aussagen möglich, allerdings gelingt der Beweis des Hauptergebnisses (bislang) nur für Primzahlen. An welchen Stellen dies explizit ausgenutzt werden muss, wird an entsprechender Stelle in Kapitel 4 beim Beweis des Hauptsatzes aufgezeigt.

1.1. Funktionenkörper versus Zahlkörper

Zu Beginn wollen wir kurz auf die Hintergründe der Theorie der Funktionenkörper eingehen, indem wir die Analogie zu den Zahlkörpern analysieren. Für den damit noch nicht vertrauten Leser sei auch auf den Anhang zur *nichtarchimedischen Analysis* (ab Seite 63) verwiesen, wo weitere Details zur Situation erläutert werden.

Es sei also p eine Primzahl und \mathbb{F}_p der entsprechende Körper mit p Elementen. Wir bezeichnen dann mit

$$A := \mathbb{F}_p[T]$$

den Polynomring über \mathbb{F}_p in der Unbestimmten T , und versehen diesen mit der üblichen Gradfunktion $\deg : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, x \mapsto \deg(x)$ (und vereinbaren die Konvention $\deg(0) := -\infty$).

Den Quotientenkörper von A bezeichnen wir mit K , das heißt

$$K := \mathbb{F}_p(T).$$

Eine *Bewertung* auf K ist gegeben durch $v_\infty : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit der normierenden Festlegung $v_\infty\left(\frac{1}{T}\right) = 1$. Es gilt dann

$$v_\infty\left(\frac{f}{g}\right) = \deg(g) - \deg(f),$$

für $f, g \in A$. Wir definieren den zugehörigen *nichtarchimedischen Absolutbetrag* durch

$$|x|_\infty := |x| := p^{-v_\infty(x)},$$

für $x \in K$.

Weiterhin können wir K an der Stelle $\frac{1}{T}$ bezüglich der Bewertung v_∞ komplettieren und erhalten

$$K_\infty := \mathbb{F}_q\left(\left(\frac{1}{T}\right)\right),$$

den *Körper der formalen Laurentreihen in T^{-1}* . K_∞ ist vollständig und lokalkompakt in der $1/T$ -Topologie.

Schließlich sei

$$C_\infty := \widehat{K}_\infty$$

die *Komplettierung des algebraischen Abschlusses von K_∞* , mit den kanonischen Fortsetzungen von v_∞ und $|\cdot|$, welche wir mit denselben Symbolen bezeichnen. Dann ist $|C_\infty^*| = p^\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und es gilt, dass C_∞ algebraisch abgeschlossen ist (vergleiche dazu den Anhang zur nichtarchimedischen Analysis, ab Seite 63).

Damit ergeben sich folgende Analogien zur klassischen Zahlkörpersituation:

$$A \sim \mathbb{Z}, \quad K \sim \mathbb{Q}, \quad K_\infty \sim \mathbb{R}, \quad C_\infty \sim \mathbb{C}.$$

Deren Berechtigung wird durch einige identische oder vergleichbare Eigenschaften unterstrichen: Es sind sowohl A als auch \mathbb{Z} euklidisch, beide diskret in ihren jeweiligen Komplettierungen K_∞ beziehungsweise \mathbb{R} (bezüglich der archimedischen Bewertung auf \mathbb{Q}), und je mit kompakten Quotienten K_∞/A (vergleiche dazu [Gos96, 3, Prop3.1.1]) respektive $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

Die endlichen abelschen Erweiterungen von A und \mathbb{Q} , in beiden Fällen durch klassische abelsche Klassenkörpertheorie beschrieben, können durch Adjunktion von Torsionspunkten des sogenannten *Carlitz-Moduls* beziehungsweise von Einheitswurzeln konstruiert werden.

Vergleichbare Gemeinsamkeiten gelten für die nichtabelschen Klassenkörpertheorien von K und \mathbb{Q} . Ebenso gibt es eine Analogie zwischen klassischen (elliptischen) Modulformen/Modulkurven und Drinfeldschen Modulformen/Modulkurven. [Gek11, §1]

Dies motiviert insbesondere die Einführung einer Entsprechung der oberen Halbebene von \mathbb{C} . Eine solche ist die sogenannte *Drinfeldsche obere Halbebene* $\Omega := C_\infty \setminus K_\infty$, auf der, wie man leicht sieht, die Gruppe $\Gamma := \mathrm{GL}(2, A)$ durch gebrochen lineare Transformationen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

operiert. Also übernimmt Γ die Rolle von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ im klassischen Fall.

Grundlegende Teilmengen von C_∞ sind die Folgenden.

1.1.1. Definition. *Wir nennen*

$$B^+(z, \varrho) := \{\omega \in C_\infty \mid |\omega - z| \leq \varrho\}$$

die abgeschlossene Kugel vom Radius $\varrho \in |C_\infty^*|$ um den Punkt $z \in C_\infty$; und

$$B(z, \varrho) := \{\omega \in C_\infty \mid |\omega - z| < \varrho\}$$

die offene Kugel vom Radius $\varrho \in |C_\infty^*|$ um den Punkt $z \in C_\infty$.

1.1.2. Bemerkung. (i) Aus der in unserer nichtarchimedischen Situation geltenden verschärften Dreiecksungleichung folgt: Ist $z' \in B(z, \varrho)$, so ist $B(z, \varrho) = B(z', \varrho)$. Analoges gilt für $B^+(z, \varrho)$.

(ii) Um Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ nur aus Analogie zum archimedischen Fall gewählt wurden. Vom topologischen Standpunkt aus ist die Bezeichnung irreführend. Betrachte dazu etwa die Mengen

$$\partial B(z, \varrho) := \{\omega \in C_\infty \mid |\omega - z| = \varrho\},$$

welche Kugelränder beschreiben. Diese sind offen im topologischen Sinn, denn zu jedem Punkt $\omega \in \partial B(z, \varrho)$ existiert eine (im topologischen Sinn) offene Kugel, die eine Teilmenge von $\partial B(z, \varrho)$ ist: $B(\omega, \varrho')$. Das heißt also, dass jede Vereinigung von solchen Mengen $\partial B(z, \varrho)$ offen ist. Also insbesondere auch $B^+(z, \varrho)$ und $B(z, \varrho)$ (sowie deren Komplemente), denn es gilt: $B(z, \varrho) = \cup_{\varrho' < \varrho} \partial B(z, \varrho')$.

Somit sind $B^+(z, \varrho)$ und $B(z, \varrho)$ beide sowohl offene als auch abgeschlossene Mengen im topologischen Sinn (bezüglich der gewöhnlichen Topologie). Da C_∞ diese Eigenschaft besitzt, handelt es sich um einen sogenannten *total unzusammenhängenden Raum*.

Ein Problem, das sich daraus ergibt, ist beispielsweise das Fehlen eines Analogons zur *analytischen Fortsetzung* einer komplexwertigen Funktion. Dieses existiert in der normalen nichtarchimedischen Situation nicht. Eine Theorie, die entsprechende Aussagen liefert, ist die der *starr analytischen Räume* (nachzulesen in [FrPu04]). Man versieht deshalb Ω mit einer sogenannten *Grothendieck-Topologie*, wodurch man eine starr analytische Struktur auf der Drinfeldschen oberen Halbebene erhält. Damit macht es schließlich Sinn, von analytischen (holomorphen, meromorphen) Funktionen auf Ω zu sprechen.

Mit diesen Betrachtungen ist eine hinreichend ausgearbeitete Grundsituation gegeben, um nun die in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehenden Objekte einzuführen.

1.2. Einführung der Gosspolynome

Motiviert wird die Betrachtung der Gosspolynome durch den folgenden, bereits in der Einführung angesprochenen Zusammenhang: Beim Studium der Drinfeldschen Modulformen ist die Untersuchung von Analoga zu den klassischen trigonometrischen Funktionen und zugehörigen Identitäten notwendig. Genau diese Entsprechungen sind die sogenannten Gosspolynome, betrachtet in $C_\infty[X]$. Interessiert ist man vor allem an (der Größe von) deren Nullstellen. Diese werden in der vorliegenden Arbeit für Gosspolynome zu einem diskreten \mathbb{F}_p -Untervektorraum von C_∞ hinreichend gut bestimmt.

Bevor wir zur Formulierung der entsprechenden Aussage kommen, wollen wir uns in diesem Abschnitt zunächst einen Überblick über die Gosspolynome verschaffen. Dabei sind zuerst noch die Räume zu benennen, mit denen wir arbeiten werden.

1.2.1. Definition. Ein (\mathbb{F}_p) -Gitter in C_∞ ist ein diskreter \mathbb{F}_p -Untervektorraum Λ von C_∞ .

Dabei meint der Begriff der Diskretheit hier, dass der Schnitt von Λ mit jeder Kugel $B^+(0, p^r)$, mit $r \in \mathbb{N}_0$, in C_∞ endlich ist. Das heißt, es ist $\Lambda = \cup_{r \in \mathbb{N}_0} \Lambda_r$ mit *endlichen Gittern* $\Lambda_r = \Lambda \cap B^+(0, p^r)$. Aufgrund dieser Eigenschaft wollen wir uns nachfolgend zunächst auf den Fall eines endlichen Gitters Λ zurückziehen; eine Verallgemeinerung auf beliebige Gitter wird dann später problemlos vonstattengehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei somit Λ *vorübergehend von der Dimension* $n \geq 1$ über \mathbb{F}_p .

1.2.2. Definition. Man nennt

$$e_\Lambda(z) := z \cdot \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right),$$

für $z \in C_\infty$, die Gitterfunktion oder die Exponentialfunktion zu Λ .

Bemerkung. In obiger Definition meint \prod das Produkt über die von Null verschiedenen Gitterelemente. Analog verwenden wir entsprechend \sum für die Summe über die von Null verschiedenen Elemente.

Die wichtigsten Eigenschaften von e_Λ sind nachfolgend aufgeführt.

1.2.3. Lemma. Die Gitterfunktion e_Λ erfüllt:

- (o) e_Λ ist vom Grad p^n ;
- (i) e_Λ hat einfache Nullstellen an den $\lambda \in \Lambda$, und diese sind die einzigen;
- (ii) e_Λ ist \mathbb{F}_p -linear und Λ -periodisch;
- (iii) e_Λ ist von der Gestalt $e_\Lambda(z) = \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i z^{p^i}$, mit $n = \dim(\Lambda)$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n \neq 0$ und die $\alpha_i = \alpha_i(\Lambda)$ für $0 \leq i \leq n$ hängen von Λ ab;
- (iv) $\frac{d}{dz} e_\Lambda = e'_\Lambda = 1$.

BEWEIS. (o) Dies resultiert daraus, dass Λ genau p^n viele Elemente besitzt.

(i) ist unmittelbar klar aufgrund der Definition von e_Λ , ebenso die Λ -Periodizität in (ii).

Zur dortigen \mathbb{F}_p -Linearität: Wir betrachten zum Beweis der Additivität

$$e_\Lambda(X + Y) \in C_\infty(Y)[X].$$

Dieses Polynom über dem Funktionenkörper $C_\infty(Y)$ hat offenbar die Nullstellenmenge $\Lambda - Y$, den Grad p^n und den Leitkoeffizienten $\alpha_n(\Lambda)$. Es ist dann

$$f(X) := e_\Lambda(X + Y) - e_\Lambda(X) - e_\Lambda(Y)$$

ein Polynom in $C_\infty(Y)[X]$, das einen Grad echt kleiner als p^n besitzt, da auch $e_\Lambda(X)$ beziehungsweise $e_\Lambda(Y)$ vom Grad p^n sind, sowie beide den Leitkoeffizienten $\alpha_n(\Lambda)$ besitzen, und sich so diese Terme gegen den entsprechenden von $e_\Lambda(X + Y)$ wegheben, was man leicht mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes einsieht. Das Polynom $f(X)$ besitzt allerdings mindestens p^n viele Nullstellen, muss also insgesamt

schon identisch Null sein. Damit ist e_Λ additiv. Auf ähnliche Weise verifiziert man die Aussage zur Skalarmultiplikation.

(iii) Die angegebene Gestalt ist eine allgemeine Aussage in Charakteristik p , wobei $\alpha_0 = 1$ aus der Definition von e_Λ folgt, und $\alpha_n \neq 0$ resultiert aus $\dim(\Lambda) = n$.

(iv) Auch diese Aussage ist ein Ergebnis aus dem Rechnen in Charakteristik p . Man betrachte dazu die Darstellung von e_Λ in (iii), leite ab und beachte, dass $\alpha_0 = 1$ gilt. \square

Diese Eigenschaften kann man leicht in folgender konkreter Situation nachvollziehen.

1.2.4. Beispiel. Es sei $\Lambda = \mathbb{F}_p \cdot \lambda$ eindimensional, mit einem $\lambda \in C_\infty^*$. Dann ist

$$e_\Lambda(z) = z \prod_{c \in \mathbb{F}_p^*} \left(1 - \frac{z}{c\lambda}\right).$$

Mit $z_1 := \frac{z}{\lambda}$ folgt:

$$\begin{aligned} e_\Lambda(z) &= z_1 \lambda \prod_{c \in \mathbb{F}_p} c^{-1} (c - z_1) \\ &= z_1 \lambda (p-1) (-1 + z_1^{p-1}) \\ &= \lambda (z_1 - z_1^{p-1}) \\ &= z - \frac{z^p}{\lambda^{p-1}} \\ &= z - \lambda^{1-p} z^p. \end{aligned}$$

Also haben wir: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -\lambda^{1-p}$ und $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$.

Bemerkung. Die Formulierung der Situation des gerade durchgeführten Beispiels wurde absichtlich unnötig kompliziert gehalten. Natürlich ist es möglich, ein gegebenes eindimensionales Gitter so zu normieren, dass die Betrachtung für $\lambda = 1$ ausreichend ist. Erste sinnvolle Beispiele entstehen daher erst für mindestens zweidimensionale Gitter, wobei der Rechenaufwand zum Beleg der Aussagen schnell erheblich ansteigt.

Uns liegt an dieser Stelle allerdings eher daran, die gesuchten Aussagen nachdrücklich zu motivieren und deren Sinn zu belegen. Daher möge der Leser auch das spätere Wiederaufgreifen dieser recht künstlichen Situation verzeihen.

Eine weitere für unseren Zusammenhang wichtige Funktion ist die folgende.

1.2.5. Definition. Man setzt für $z \in C_\infty$:

$$t_\Lambda(z) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda}.$$

Die Funktion e_Λ steht in engem Zusammenhang zu t_Λ , wie die nachfolgende Aussage zeigt.

1.2.6. Lemma. Es gilt:

$$t_\Lambda(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda} = \frac{e'_\Lambda(z)}{e_\Lambda(z)} = \frac{1}{e_\Lambda(z)}.$$

1.2.7. Bemerkung. Für den Beweis dieses Lemmas greifen wir auf folgendes Prinzip zurück:

Es sei K ein Körper. Die *logarithmische Ableitung* einer Funktion f ist das Bild von

$$D : K(X)^* \rightarrow K(X); f \mapsto \frac{f'}{f},$$

wobei f' die übliche Ableitung bezeichnet.

Man kann leicht zeigen, dass die Abbildung D eine „Produktregel“ erfüllt: Es gilt

$$D(f \cdot g) = D(f) + D(g),$$

für Funktionen f und g über K .

BEWEIS. (von Lemma 1.2.6)

Zu zeigen bleibt $t_\Lambda(z) = \frac{1}{e_\Lambda(z)}$, denn nach Lemma 1.2.3 (iv) gilt bereits

$$\frac{1}{e_\Lambda(z)} = \frac{e'_\Lambda(z)}{e_\Lambda(z)}.$$

Verwenden wir dies und betrachten die Produktdarstellung von e_Λ , so liefert die „Produktregel“ der logarithmischen Ableitung aus Bemerkung 1.2.7 wie behauptet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_\Lambda(z)} &= \frac{1}{z} + \sum'_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\lambda}} \right) \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum'_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda} \\ &= t_\Lambda(z). \end{aligned}$$

□

Schließlich führen wir noch ein weiteres Objekt ein, welches uns direkt zu den Gosspolynomen leiten wird.

1.2.8. Definition. Wir betrachten die Summe

$$C_{k,\Lambda}(z) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^k},$$

eine rationale Funktion in $z \in C_\infty$.

Die folgende grundlegende Beobachtung, dass $C_{k,\Lambda}$ als Polynom in t_Λ ausgedrückt werden kann, geht auf David Goss [Gos80, §6] zurück.

1.2.9. Satz/Definition. Es existiert eine eindeutige Folge $G_{k,\Lambda}(X)$, für $k \geq 1$, von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{F}(\Lambda)$, sodass $C_{k,\Lambda}(z) = G_{k,\Lambda}(t_\Lambda(z))$ gilt.

Diese Polynome heißen Gosspolynome.

Sie erfüllen:

- (i) $G_{k,\Lambda}$ ist normiert von Grad k ;
- (ii) $G_{k,\Lambda}(0) = 0$;
- (iii) $G_{k,\Lambda}(X) = X^k$, falls $k \leq p$;
- (iv) $G_{k,\Lambda}(X) = X(G_{k-1,\Lambda}(X) + \alpha_1 G_{k-p,\Lambda}(X) + \dots + \alpha_i G_{k-p^i,\Lambda}(X) + \dots)$, wobei man $G_{k,\Lambda} = 0$ für $k \leq 0$ setzt;
- (v) $G_{pk,\Lambda} = (G_{k,\Lambda})^p$;

(vi) $X^2 G_{k,\Lambda}^i(X) = k G_{k+1,\Lambda}(X)$.

Dabei sind die α_i in (iv) die Koeffizienten von e_Λ , siehe Lemma 1.2.3 (iii).

BEWEIS. Die Punkte (i) bis (iv) sowie (vi) gehen auf die sogenannten Newtonformeln für Potenzsummen von Nullstellen eines Polynoms zurück. Deren Einführung besitzt in unserem Rahmen keine Relevanz und ist für das weitere Verständnis und Vorgehen unerheblich. Daher sei für die recht technische Herleitung bezüglich der obengenannten Teilaussagen auf [Gek88_1, §3] und [Gos80, §6] verwiesen.

(v) Dies resultiert daraus, dass wir in Charakteristik p arbeiten:

$$\begin{aligned} G_{pk,\Lambda}(t_\Lambda(z)) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^{pk}} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^k} \right)^p \\ &= \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^k} \right)^p = (G_{k,\Lambda}(t_\Lambda(z)))^p \end{aligned}$$

Also stimmen die beiden Polynome vom Grad pk an unendlich vielen Punkten überein und sind damit identisch. \square

Um erste Beispiele für solche Gosspolynome zu bekommen, betrachten wir die *erzeugende Funktion*

$$G_\Lambda(U, X) = \sum_{k \geq 0} G_{k,\Lambda}(X) U^k,$$

mit der Unbestimmten U . Eingesetzt in Satz/Definition 1.2.9 (iv) ergibt dies

$$G_\Lambda(U, X) - XU = XU \cdot G_\Lambda(U, X) + \alpha_1 XU^p G_\Lambda(U, X) + \alpha_2 XU^{p^2} G_\Lambda(U, X) + \dots,$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} G_\Lambda(U, X) &= \frac{XU}{1 - XU - \alpha_1 XU^p - \alpha_2 XU^{p^2} - \dots} \\ &= \frac{XU}{1 - X \cdot e_\Lambda(U)}. \end{aligned}$$

Es liegt nahe, das Beispiel 1.2.4 als einfachsten Fall fortzuführen.

1.2.10. Beispiel. (i) Es sei $\Lambda = \mathbb{F}_p \cdot \lambda$ ein eindimensionales Gitter, mit einem $\lambda \in C_\infty^*$. Dann ist, wie gesehen, $e_\Lambda(z) = z + \alpha z^p$ mit $\alpha = -\lambda^{1-p}$. Es ergibt sich daher mithilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$\begin{aligned} G_\Lambda(U, X) &= XU \sum_{j \geq 0} (U + \alpha U^p)^j X^j \\ &= XU \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} \binom{j}{i} U^{j-i} \alpha^i U^{ip} X^j. \end{aligned}$$

Die Substitution $j = k - i(p-1)$ liefert

$$G_\Lambda(U, X) = XU \sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} \binom{k - i(p-1)}{i} \alpha^i X^{k-i(p-1)} U^k,$$

woraus schließlich durch Koeffizientenvergleich und Anwenden der Kriterien, nach denen der Binomialkoeffizient verschwindet, folgt:

$$G_{k+1,\Lambda}(X) = \sum_{0 \leq i \leq k/p} \binom{k-i(p-1)}{i} \alpha^i X^{k-i(p-1)+1}.$$

[Gek88_1, §3]

(ii) Mit einem Vorgehen wie in (i) erhält man für ein beliebiges endliches Gitter Λ mit $e_\Lambda(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i z^{p^i}$ als $(k+1)$ -tes Gossopolynom:

$$G_{k+1,\Lambda}(X) = \sum_{j \leq k} \sum_{\underline{i}} \binom{j}{\underline{i}} \alpha^{\underline{i}} X^{j+1},$$

wobei $\underline{i} = (i_0, \dots, i_s)$ die Menge der $(s+1)$ -Tupel ($0 \leq s \leq n$) durchläuft, welche $i_0 + i_1 + \dots + i_s = j$ und $i_0 + i_1 p + \dots + i_s p^s = k$ erfüllen, und $\alpha^{\underline{i}} = \alpha_0^{i_0} \cdot \dots \cdot \alpha_s^{i_s}$ ist. Außerdem bezeichnet $\binom{j}{\underline{i}}$ den *Multinomialkoeffizienten* $\frac{j!}{i_0! \cdot \dots \cdot i_s!}$, ausgewertet in $\mathbb{F}_p \hookrightarrow C_\infty$. [Gek88_1, §3]

Die angegebene Gestalt von $G_{k+1,\Lambda}(X)$ mag dem Leser wahrscheinlich nicht direkt einsichtig erscheinen. Wir werden allerdings im Laufe der Arbeit geeignete Techniken entwickeln, mit denen diese Form leicht nachzurechnen ist.

Damit schließen wir die Betrachtung von endlichen Gittern ab, und *ab jetzt sei Λ immer ein unendlichdimensionales Gitter*.

Der Übergang zu unendlichen Gittern vollzieht sich nun folgendermaßen:

Es sei $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \dots$ eine Folge von endlichen Gittern mit $\cup_{i \geq 0} \Lambda_i = \Lambda$, und jeweils $e_i, t_i, C_{k,i}, G_{k,i}$ die zu Λ_i gehörenden Objekte. Elementare Abschätzungen zeigen, dass für $i \rightarrow \infty$ gilt (vergleiche [Gek11, §2]):

- $e_i \rightarrow e_\Lambda$ lokal gleichmäßig als Funktion auf C_∞ .
Insbesondere ist e_Λ eine, im starr analytischen Sinne, ganze Funktion und als solche surjektiv. Auch die Eigenschaften von Lemma 1.2.3 übertragen sich. Die Gitterfunktion e_Λ ist ein konvergentes möglicherweise unendliches Produkt mit einer überall konvergenten Potenzreihenentwicklung $e_\Lambda(z) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j z^{p^j}$. Dabei sind die α_j die Grenzwerte der jeweiligen j -ten Koeffizienten der Funktionen e_i .
- $C_{k,i} \rightarrow C_{k,\Lambda}$ gleichmäßig auf abgeschlossenen Kugeln, die disjunkt zu Λ sind.
 $C_{k,\Lambda}$ ist eine meromorphe Funktion in C_∞ mit Polen der Ordnung k an den Elementen von Λ .

Folglich konvergieren die $G_{k,i}$ komponentenweise gegen ein Polynom $G_{k,\Lambda}$ mit der Eigenschaft $C_{k,\Lambda}(z) = G_{k,\Lambda}(t_\Lambda(z))$, wobei $t_\Lambda(z) = 1/e_\Lambda(z)$ ist.

Alle bislang im Fall eines endlichen Gitters erarbeiteten Eigenschaften bleiben weiterhin gültig für ein unendliches Gitter Λ .

Als Abschluss zur Einführung der wichtigsten Objekte halten wir noch fest, wie diese sich unter der Betrachtung *ähnlicher Gitter* verhalten.

1.2.11. Proposition. *Es sei $c \in C_\infty^*$.*

Bezüglich der Gitter Λ und $\Lambda' := c\Lambda$ gilt dann:

- (i) $e_{c\Lambda}(cz) = c \cdot e_\Lambda(z)$,
- (ii) $\alpha_i(c\Lambda) = c^{1-p^i} \alpha_i(\Lambda)$,
- (iii) $C_{k,c\Lambda}(cz) = c^{-k} C_{k,\Lambda}(z)$,

$$(iv) G_{k,c\Lambda}(c^{-1}X) = c^{-k}G_{k,\Lambda}(X),$$

$$(v) \text{ Schreibt man } G_{k,\Lambda}(X) = \sum_{i \leq k} g_{k,i}(\Lambda)X^{k-i}, \text{ so ist } g_{k,i}(c\Lambda) = c^{-i}g_{k,i}(\Lambda).$$

BEWEIS. (i) Man rechnet unmittelbar nach:

$$e_{c\Lambda}(cz) = cz \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{cz}{c\lambda}\right) = cz \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) = c \cdot e_{\Lambda}(z).$$

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} \alpha_i(c\Lambda)z^{p^i} &= e_{c\Lambda}(z) \stackrel{(i)}{=} c \cdot e_{\Lambda}\left(\frac{z}{c}\right) \\ &= c \sum_{i \geq 0} \alpha_i(\Lambda) \left(\frac{z}{c}\right)^{p^i} \\ &= \sum_{i \geq 0} \alpha_i(\Lambda) c^{1-p^i} z^{p^i}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich von linker und rechter Seite ergibt die Behauptung.

(iii) Wiederum durch direktes Nachrechnen folgt sogleich:

$$C_{k,c\Lambda}(cz) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(cz - c\lambda)^k} = \frac{1}{c^k} \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^k} = c^{-k}C_{k,\Lambda}(z).$$

(iv) $G_{k,\Lambda}$ ist durch Auswertung an $t_{\Lambda}(z)$ eindeutig bestimmt. Wir beweisen die Gleichung also für $X = t_{\Lambda}(z)$; denn da t_{Λ} surjektiv ist, haben wir die gesuchte Gleichheit dann in unendlich vielen Punkten etabliert. Es gilt:

$$\begin{aligned} G_{k,c\Lambda}(c^{-1}t_{\Lambda}(z)) &= G_{k,c\Lambda}(c^{-1}e_{\Lambda}^{-1}(z)) \stackrel{(i)}{=} G_{k,c\Lambda}(e_{c\Lambda}^{-1}(cz)) \\ &= G_{k,c\Lambda}(t_{c\Lambda}(cz)) \\ &= C_{k,c\Lambda}(cz) \stackrel{(iii)}{=} c^{-k}C_{k,\Lambda}(z) \\ &= c^{-k}G_{k,\Lambda}(t_{\Lambda}(z)). \end{aligned}$$

(v) Mit der angegebenen Reihenentwicklung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq k} g_{k,i}(c\Lambda)X^{k-i} &= G_{k,c\Lambda}(X) \stackrel{(iv)}{=} c^{-k}G_{k,\Lambda}(cX) \\ &= c^{-k} \sum_{i \leq k} g_{k,i}(\Lambda)c^{k-i}X^{k-i} \\ &= \sum_{i \leq k} g_{k,i}(\Lambda)c^{-i}X^{k-i}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich von linker und rechter Seite liefert die Behauptung. \square

Bemerkung. Die Aussagen (ii) und (v) bedeuten, dass α_i (beziehungsweise $g_{k,i}$) betrachtet als Funktionen auf der Menge der Gitter vom *Gewicht* $p^i - 1$ (beziehungsweise i) sind.

Damit sind alle für unsere Situation wichtigen Objekte eingeführt, deren Zusammenhang erklärt, und wir kennen bereits ihre grundlegenden Eigenschaften. Dies genügt um im Hinblick auf die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit bereits erste Überlegungen zum Nullstellenverhalten von $G_{k,\Lambda}$ anstellen zu können.

1.3. Die Vermutung

Wie bereits erwähnt, sind bei der Untersuchung der Gosspolynome besonders die Nullstellen, beziehungsweise deren Lage interessant. Aussagen diesbezüglich wollen wir zunächst für die Funktionen $C_{k,\Lambda}$ in unserer Situation, das heißt bei einem gegebenen unendlichdimensionalen \mathbb{F}_p -Gitter von C_∞ , im Rückblick auf bereits bewiesene Sachverhalte ähnlicher Konstellationen formulieren. Zugleich erhalten wir damit auch die gesuchten Ergebnisse für die Gosspolynome, wobei der Zusammenhang zwischen dem Nullstellenverhalten des Polynoms $G_{k,\Lambda}$ und der Funktion $C_{k,\Lambda}$ zum aktuellen Zeitpunkt noch nicht ersichtlich ist, sondern erst im zweiten Kapitel im Zuge von Proposition 2.4.1 erarbeitet wird.

Wichtigster Anhaltspunkt ist zunächst folgende Hypothese bezüglich einer Primzahlpotenz q und des Gitters $A' := \mathbb{F}_q[T]$, die Gekeler in [Gek11, §3] aufstellt.

1.3.1. Vermutung. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

Die Nullstellen z von $C_{k,A'}(z)$ erfüllen

$$|z| = q^n,$$

für $n \in \mathbb{N}_0$.

In obengenanntem Paper wird ein Beweis für das Gitter $\mathbb{F}_p[T]$ gegeben. Der Beweis der kompletten Aussage steht jedoch noch aus, allerdings deuten die bisher durchgeführten Rechnungen auf die Richtigkeit der Vermutung hin.

Da die Beträge der Elemente von $A' = \mathbb{F}_q[T]$ genau von der Gestalt q^n , mit einem $n \in \mathbb{N}$, sind, liegt folgende Übertragung auf unseren Fall nahe.

1.3.2. Vermutung. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $\Lambda = \langle 1 = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$ ein \mathbb{F}_p -Gitter mit $|\lambda_r| = t_r$, für $r \geq 0$, und $1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, wobei $t_i \in \{p^s \mid s \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\}$ ist, für alle i .*

Dann sind die Beträge der Nullstellen von $C_{k,\Lambda}$ allesamt Elemente der Menge

$$\{t_i \mid i \geq 0\}.$$

1.3.3. Bemerkung. (i) Zur Gestalt $\Lambda = \langle 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$:

Die Wahl von 1 als betragskleinstem erzeugenden Gitterelement und die rationalen Exponenten echt größer als 1 der Beträge der λ_i für $i > 0$ ist lediglich eine Normierung des Gitters, die uns spätere Rechnungen erleichtert. Dass die Beträge der erzeugenden Gitterelemente echt ansteigend sind, stellt allerdings eine *Einschränkung der Allgemeinheit* dar. Für die im weiteren Verlauf durchgeführten Rechnungen ist dies aber unerlässlich.

(ii) Die Konvention, dass wir die erzeugenden Gitterelemente ab dem Index 0 zählen, geht auf Notationen früherer Arbeiten zurück, in denen gewisse zugehörige Potenzsummen definiert werden, auf welche wir im weiteren Verlauf noch zurückgreifen müssen. Um diesbezüglich Konformität zu gewährleisten, wählen wir die Bezeichnung entsprechend.

(iii) *Die in obiger Vermutung angegebenen Bedingungen an Λ werden, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes verlangt ist, nun als Standard vorausgesetzt.*

(iv) Wie bereits erwähnt, steht eine Übertragung der Formulierung der Vermutung 1.3.2 bezüglich der Gosspolynome noch aus, da der Zusammenhang dazu im Moment komplett undurchsichtig ist. Es bietet sich eher an, zunächst mit den Funktionen $C_{k,\Lambda}$ zu arbeiten, und die erhaltenen Ergebnisse dann zu übertragen. Letzteres werden wir zusammenfassend in Kapitel 4, Satz 4.3.1 durchführen.

Der Beweis der Vermutung 1.3.2 wird im Verlaufe dieser Arbeit tatsächlich gelingen und unser Hauptergebnis sein. Um dieses zu erreichen, werden wir nun im zweiten Kapitel einen geeigneten Lösungsansatz erarbeiten und den Beweis dann in Kapitel 4 durchführen.

Einschub: Notationen und Festlegungen

Da den Kapiteln 2 bis 4 im Wesentlichen eine feste Situation betrachtet wird, wollen wir diese hier fixieren und auch für die zugehörigen Objekte an dieser Stelle verbindliche Schreibweisen einführen. Einige Teilpunkte werden dabei erst im weiteren Verlauf der Arbeit Erwähnung finden.

In den nachfolgenden Punkten wird insbesondere das zugrundeliegende Gitter Λ fixiert. Daher verzichten wir, obwohl viele Aussagen im weiteren Verlauf stark von Λ abhängen, bei der Funktion $C_{k,\Lambda}$ und dem Gosspolynom $G_{k,\Lambda}$ auf das Subskript bezüglich des Gitters und schreiben kurz C_k sowie G_k . Gleiches gilt für die Gitterfunktion e_Λ und die Funktion t_Λ ; wir verwenden dafür abkürzend e und t .

Falls nicht explizit anders gefordert, sei das Gitter Λ stets *unendlichdimensional*.

- Wir betrachten ein *unendliches, normiertes \mathbb{F}_p -Gitter* $\Lambda = \langle 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$ in C_∞ .
Dabei setzen wir insbesondere $\lambda_0 := 1$, und vereinbaren, dass einschränkend die Bedingung $1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$ erfüllt ist.
- Benötigen wir ein *endliches Gitter*, so sei dies $(m+1)$ -dimensional, das heißt von der Gestalt $\Lambda = \langle 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m \rangle$, für ein $m \in \mathbb{N}_0$. An die erzeugenden Gitterelemente stellen wir die gleichen Forderungen wie im unendlichdimensionalen Fall.
- Greifen wir aus der Menge der erzeugenden Gitterelemente ein festes heraus, so sei dieses immer λ_r mit $|\lambda_r| = t_r = p^{s_r}$, für ein geeignetes $s_r \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$. Insbesondere ist damit stets $s_0 = 0$.

- Das Gitter Λ setzt sich zusammen als $\Lambda = \Lambda_r \dot{\cup} \Lambda_{>r}$, für $r \geq 0$, wobei

$$\Lambda_r := \{\lambda \in \Lambda \mid |\lambda| \leq t_r\} \quad \text{und} \quad \Lambda_{>r} := \{\lambda \in \Lambda \mid |\lambda| > t_r\}.$$

- Bezüglich der erzeugenden Gitterelemente definieren wir die *Potenzsummen*

$$S_{r+1}(n) = \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n,$$

für $r \geq 0$.

- Zur Funktion C_k betrachten wir deren *Fundamentalebereich*

$$\mathcal{F} := \{z \in C_\infty \mid |z| = |z|_m \geq 1\},$$

wobei $|z|_m := \min_{\lambda \in \Lambda} |z - \lambda|$ die *Gitterabstandsfunktion* ist.

- Relevante Teilgebiete des Fundamentalebereichs sind die Abschnitte

$$\mathcal{F}_r := \{z \in C_\infty \mid |z| = |z|_m = |\lambda_r|\},$$

für $r \geq 0$.

Die Lösungsstrategie

Zum Nachweis der am Ende des ersten Kapitels formulierten Vermutung wollen wir nun an dieser Stelle einen geeigneten Lösungsansatz erarbeiten. Die vorliegende Grundsituation sei dabei stets wie im Einschub auf der vorherigen Seite angegeben. Wir werden zunächst die Funktion C_k näher betrachten und zur Bestimmung derer Nullstellenverteilung den indirekten Weg gehen: Wir zeigen, dass C_k außerhalb der behaupteten Gebiete keine Nullstellen besitzen kann. Dies können wir insbesondere dahingehend vereinfachen, dass wir nur bestimmte Teilabschnitte des sogenannten Fundamentalbereiches untersuchen müssen, auf welchen die Funktion C_k schon eindeutig festgelegt ist. Die entsprechenden Zusammenhänge werden dabei Stück für Stück erarbeitet, sodass wir die einzelnen Schritte im eigentlichen Beweis der Vermutung 1.3.2 später nur noch sukzessive durchlaufen müssen.

Zunächst verschaffen wir uns Gebiete, in denen wir möglichst gut arbeiten können. Das Wichtigste wird dabei obengenannter Fundamentalbereich von C_k sein, eine Teilmenge der Drinfeldschen oberen Halbebene Ω . Der zweite Abschnitt dreht sich um die wesentliche Idee hinter der angestrebten Beweisführung. Die erläuterte Theorie ist die der nichtarchimedischen Konturintegration. Um diese ausführen zu können, benötigt man Laurententwicklungen von Funktionen. Daher bestimmen wir die entsprechende zu C_k im dritten Kapitelteil. Im letzten Abschnitt führen wir schließlich alle Theorieteile zur Formulierung der Hauptaussage dieser Arbeit zusammen.

Bemerkung. (i) Mitunter benötigen die nachfolgend verwendeten Methoden Rückgriffe auf die Analysis in C_∞ ; so beispielsweise die Konvergenz unendlicher Summen oder das Umsummieren von unendlichen Doppelsummen. Der Übersichtlichkeit wegen lassen wir die (trivialen) Begründungen für solche Operationen meistens weg. Der interessierte Leser sei demnach für die entsprechenden Fragestellungen auf den Abschnitt zur nichtarchimedischen Analysis ab Seite 63 verwiesen, wo die zugehörigen Definitionen und Eigenschaften hinterlegt sind.

(ii) Des Weiteren beruhen viele Aussagen dieses Kapitels auf recht technischen Rechnungen, welche zum Teil wenig tiefsinnig sind. Zur besseren Lesbarkeit wurden deren Beweise in das dritte Kapitel verschoben, und können beim ersten Lesen übersprungen werden, da keine für das spätere Verständnis wichtigen Argumente Verwendung finden.

2.1. Die obere Halbebene und Fundamentalbereiche

Bei der Erarbeitung der Lösungsstrategie für die zum Schluss des ersten Kapitels formulierte Vermutung wollen wir uns von den Ideen zur Modulformtheorie im klassischen Fall leiten lassen. Wie in dieser Situation haben wir auch hier eine „obere Halbebene“ Ω , die wir auf unseren Fall spezialisieren werden, sodass wir dort auch einen „Fundamentaltbereich“ angeben können. Die in Kapitel 1 eingeführte analytische Struktur auf Ω vermittels einer Grothendieck-Topologie garantiert dabei, dass die nachfolgenden Überlegungen erlaubt und sinnvoll sind.

Zunächst sei daran erinnert, dass eine Funktion in C_∞ durch Angabe ihrer Null- und Polstellen eindeutig bestimmt ist. Aufgrund dieser Tatsache ist im Hinblick auf die Suche nach einem Fundamentaltbereich für die Funktion C_k die folgende leicht nachzurechnende Aussage interessant.

2.1.1. Lemma. *Es gilt:*

Die Funktion C_k besitzt keine Nullstellen z mit $|z| < 1$.

BEWEIS. Siehe Kapitel 3, auf Seite 27. □

Zusammen mit der zu beweisenden Vermutung 1.3.2 liefert dieses Lemma die Motivation zur Untersuchung der nachfolgend eingeführten Gebiete.

2.1.2. Definition. (i) *Es sei*

$$|\cdot|_m : C_\infty \rightarrow \mathbb{R}, z \rightarrow |z|_m := \min_{\lambda \in \Lambda} |z - \lambda|$$

die Gitterabstandsfunktion zu Λ auf C_∞ .

(ii) *Wir fixieren die folgenden (analytischen) Unterräume von C_∞ :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \{z \in C_\infty \mid |z| = |z|_m \geq 1\}, \\ \mathcal{F}_r &:= \{z \in C_\infty \mid |z| = |z|_m = |\lambda_r|\}, \\ \Omega_\Lambda &:= \{z \in C_\infty \mid |z|_m \geq 1\}. \end{aligned}$$

Dabei nennen wir \mathcal{F} den Fundamentaltbereich der Funktion C_k .

2.1.3. Bemerkung. (i) Die Gitterabstandsfunktion ist offenbar so konstruiert, dass stets $|z| \geq |z|_m$ ist, wobei die Gleichheit jedenfalls dann eintritt, wenn wir ein Element z vorliegen haben, für das gilt: $|z| \notin \{|\lambda_i| \mid i \geq 0\}$.

(ii) Wir verzichten auf Erläuterungen dazu, inwiefern es sich in (ii) um analytische Unterräume von C_∞ handelt. Die entsprechenden Eigenschaften stehen in Analogie zu [Gek11, §3].

(iii) Da alle Nullstellen von C_k einen Absolutbetrag größer oder gleich 1 besitzen, ist diese Funktion auf Ω_Λ/Λ schon eindeutig bestimmt. Dabei sei nochmals daran erinnert, dass C_k eine Λ -periodische, meromorphe Funktion ist.

Dass die Wahlen in der obigen Definition Sinn machen, zeigen die sich daraus ergebenden Eigenschaften.

2.1.4. Lemma. (i) *Die kanonische Abbildung $\mathcal{F}/\Lambda \rightarrow \Omega_\Lambda/\Lambda$ ist biholomorph;*

(ii) *Die Abbildung $t : \mathcal{F}/\Lambda \rightarrow B^+(0; 1) \setminus \{0\}$ ist wohldefiniert und biholomorph;*

(iii) *Die Funktion C_k ist eindeutig durch ihre Einschränkung auf \mathcal{F} bestimmt.*

Bevor wir den Beweis dieses Lemmas führen, zeigen wir noch eine Aussage zur Funktion t , die für den Teil (ii) benötigt wird.

2.1.5. Lemma. *Der Absolutbetrag von $t(z)$ auf \mathcal{F} ist gegeben durch*

$$\log_p |t(z)| = (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - (s_r - \varepsilon) p^r$$

für $|z| = p^{s_r - \varepsilon}$, mit $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varepsilon < s_r - s_{r-1}$.

Und speziell gilt

$$\log_p |t(z)| = (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r$$

für $z \in \mathcal{F}_r$.

BEWEIS. Die Herleitung dieser Formeln beruht im Wesentlichen auf dem Verwenden der Produktdarstellung der Funktion e und geschicktem Abzählen. Der recht technische Beweis wird daher erst in Kapitel 3, auf Seite 28, detailliert ausgeführt. \square

Als unmittelbare Folgerung ergeben sich zwei Aussagen, die wir im weiteren Verlauf noch benötigen werden.

2.1.6. Korollar. (i) *Der Wert von $\log_p |t(z)|$ hängt nur von $|z|$ und nicht von z selbst ab.*

(ii) *Die Abbildung t ist als Funktion in $|z|$ strikt monoton fallend.*

BEWEIS. (i) Die einzigen in den beiden Ausdrücken für $\log_p |t(z)|$ in Lemma 2.1.4 auftretenden Parameter sind die Zahlen s_i , für $0 \leq i \leq r$. Da $|z| = p^{r+\varepsilon}$, mit $0 \leq \varepsilon < s_r - s_{r-1}$, gilt, können wir mit dieser Angabe bereits die entsprechenden Formeln verwenden, und diese liefern für betragsgleiche z und z' jeweils dasselbe Ergebnis.

(ii) Ist $|z| < |z'|$, das heißt, $p^{s_r - \varepsilon} < p^{s_{r'} - \varepsilon'}$, mit $r \leq r'$, $0 < \varepsilon < s_r - s_{r-1}$ sowie $0 < \varepsilon' < s_{r'} - s_{r'-1}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \log_p |t(z)| &= (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - (s_r - \varepsilon) p^r \\ &> (p-1) \sum_{i=0}^{r'-1} s_i p^i - (s_{r'} - \varepsilon') p^{r'} \\ &= \log_p |t(z')|. \end{aligned}$$

\square

Mit Lemma 2.1.5 können wir nun den Beweis von Lemma 2.1.4 führen. Dieser ist im Kapitel 3, auf Seite 29, nachzulesen.

Wir halten schließlich noch die folgenden offensichtlichen Eigenschaften der eingeführten Bereiche fest.

2.1.7. Lemma. Für $\lambda \in \Lambda$ sind äquivalent:

- (i) $(\mathcal{F}_r + \lambda) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$,
- (ii) $\mathcal{F}_r + \lambda = \mathcal{F}_r$,
- (iii) $\lambda \in \Lambda_r$.

Rückblickend haben wir nun verschiedene Gebiete, in denen wir arbeiten können. Wir dürfen dabei in dem für die jeweilige Situation am besten geeigneten Bereich arbeiten, und können aufgrund der entsprechenden Abbildungen hin und her wechseln, ohne dabei Informationen zu verlieren.

Insbesondere bleibt festzuhalten, dass wir uns für den Beweis unserer Vermutung aus Kapitel 1 bei der Bestimmung der Nullstellenverteilung der Funktion C_k auf ihrem Fundamentalbereich \mathcal{F} zurückziehen können, und nur nachweisen müssen, dass eine Lokalisierung in den Bereichen \mathcal{F}_r , für $r \geq 0$, möglich ist.

Den genauen Zusammenhang werden wir später nochmals aufgreifen; zunächst erarbeiten wir uns nun noch eine Strategie zum Auffinden von Nullstellenbereichen.

2.2. Nullstellensuche über nullstellenfreie Bereiche

Wir streben in diesem Abschnitt das Schlüsselargument an, mit dessen Hilfe wir anschließend zeigen können, dass die im vorherigen Abschnitt betrachteten Gebiete \mathcal{F}_r , mit $r \geq 0$, tatsächlich die geeigneten zur Lokalisierung der Nullstellen von C_k sind.

Das dahinterstehende Konzept ist die sogenannte *nichtarchimedische Konturintegration*. Wir geben an dieser Stelle nur einen kurzen Überblick (vergleiche dazu auch [Gek11, §4]). Ausführlicher ist dies mit den entsprechenden Hintergründen in [GePu80, III, §1] nachzulesen. Die gesamte Theorie ist zu umfangreich, als dass man sie hier nochmals vollständig wiedergeben könnte.

Es sei allgemein eine „offene“ Kugel B um $z_0 \in C_\infty$ vom Radius $\varrho \in |C_\infty^*|$ gegeben. Wir bezeichnen deren Rand wie üblich mit $\partial B(z_0, \varrho) = \{z \in C_\infty \mid |z - z_0| = \varrho\}$ und schreiben abkürzend ∂B , falls aus dem Zusammenhang klar ist, mit welcher Kugel wir uns beschäftigen.

Der Ring $\mathcal{O}(\partial B)$ der holomorphen Funktionen auf dem Rand von B ist isomorph zu $C_\infty \langle v, v^{-1} \rangle$, dem Ring der konvergenten (möglicherweise doppelt unendlichen) Laurentreihen in der Veränderlichen v vom Absolutbetrag 1 auf ∂B . Um zwischen z und v hin und her wechseln zu können, wählen wir ein $\omega_0 \in C_\infty$ mit $|\omega_0| = \varrho$ und setzen $v := \frac{z - z_0}{\omega_0}$, welches offenbar den Ansprüchen genügt.

Entscheidend für unsere Situation ist die nachfolgende Aussage.

2.2.1. Satz/Definition. Ein invertierbares Element von $\mathcal{O}(\partial B)$ besitzt eine Darstellung der Form

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n v^n \quad \text{mit } |a_m| > \max_{n \neq m} |a_n| .$$

Wir nennen a_m den dominierenden Koeffizienten der Laurententwicklung von f . Umgekehrt ist jedes f , dessen Laurententwicklung eine solche Gestalt besitzt, invertierbar auf dem Rand von $B(z, \varrho)$. [GEPu, III, §1, Example 1.18, (4)]

Die dabei auftretende Zahl m besitzt eine eigenständige Wichtigkeit und wird später noch von Bedeutung sein.

2.2.2. Definition/Satz. *Es sei f ein invertierbares Element von $\mathcal{O}(B)$.*

Man nennt m die Ordnung $\text{ord}_{\partial B} f$ von f an ∂B .

Sie ist wohldefiniert durch die Wahl einer Orientierung auf dem Rand von $B(z, \varrho)$.

Ist f meromorph auf $B^+(z, \varrho)$, ohne Null- und Polstellen auf dem Rand, so gilt

$$m = \sum_{x \in B(z, \varrho)} \text{ord}_x(f),$$

wobei $\text{ord}_x(f)$ die Nullstellenordnung von f am Punkt $x \in B(z, \varrho)$ ist. Diese ist negativ, falls f einen Pol in x besitzt. [GEPU, III, §1, Example1.18, (4)]

Bemerkung. In unserer Situation ist die Orientierung, und dadurch auch m , mit der Wahl von $v = \frac{z-z_0}{\omega_0}$ bereits eindeutig festgelegt.

Um nun die Vermutung 1.3.2 zu bestätigen, genügt es also nachzuweisen, dass die Funktion C_k in den mutmaßlich nullstellenfreien Gebieten durch die Laurententwicklung eines invertierbaren Elementes von $\mathcal{O}(\partial B)$ beschrieben wird.

Erste Informationen darüber erarbeiten wir im nachfolgenden Abschnitt.

2.3. Die Laurententwicklung von C_k

Kommen wir nun zur Bestimmung der Laurententwicklung von $C_k(z)$ auf den Gebieten, welche wir als nullstellenfrei etablieren wollen. Unser Ziel im weiteren Verlauf der Arbeit wird es sein, nachzuweisen, dass diese Reihen eine Darstellung von der Form wie in Satz/Definition 2.2.1 besitzen.

Wir betrachten dazu, wie bereits angesprochen, Ränder von Kugeln, die einen Radius haben, der nicht als Betrag eines der erzeugenden Gitterelemente auftaucht. Es sei daher $B := B(0, \varrho)$, mit $\varrho \in |C_\infty^*|$, sowie $t_r < \varrho < t_{r+1}$ für ein geeignetes $r \geq 0$. Weiterhin betrachten wir ein $\omega_0 \in C_\infty$ mit $|\omega_0| = \varrho$ und wählen $v := z/\omega_0$ als Koordinate auf ∂B .

Zur Berechnung der Laurententwicklung auf ∂B gehen wir analog zur Strategie in Abschnitt 4 im Manuskript von E.-U. Gekeler [Gek11] vor. Wir zerlegen daher zunächst $C_k(z)$ in zwei Summanden:

Es gilt für $z = \omega_0 v \in \partial B$ und $|v| = 1$:

$$\begin{aligned} C_k(z) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^k} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k} \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k} + \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k}, \end{aligned}$$

wobei die erste Summe endlich und die zweite eventuell (für ein unendlichdimensionales Gitter Λ) unendlich ist.

Nach einfachen Umformungen gelangen wir zu recht übersichtlichen Formeln für die Koeffizienten der Laurententwicklung.

2.3.1. Satz. *Die Laurententwicklung von $C_k(z)$ auf ∂B , mit B wie oben, ist gegeben durch*

$$C_k(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n v^n \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= (-1)^k \binom{k-1+n}{n} \omega_0^n \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \lambda^{-k-n} \quad \text{für } n \geq 0, \\
a_{-k-n} &= \binom{k-1+n}{n} \omega_0^{-k-n} \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n \quad \text{für } n > 0, \text{ und} \\
a_{-1} &= \dots = a_{-k} = 0.
\end{aligned}$$

BEWEIS. Siehe Kapitel 3, auf Seite 30. \square

Es ist offensichtlich, dass wir die Koeffizienten der Laurententwicklung von C_k mit positivem Index eventuell nur schwer kontrollieren können, falls wir sie auf ein betragsmäßig dominierendes Element hin untersuchen. Im Fall eines unendlichdimensionalen Gitters haben wir nämlich jeweils unendlich viele Summanden. Wesentlich einfacher ist die Situation für die Koeffizienten mit negativem Index, da dort immer nur endliche Summen auftauchen. Glücklicherweise wird es uns im Folgenden zu zeigen gelingen, dass für die Suche nach einem dominierenden Koeffizienten der obigen Laurententwicklung von C_k auf ∂B nur die Betrachtung derer mit echt negativem Index relevant ist.

2.3.2. Satz. *Sei $m \in \mathbb{Z}$ ein Index, sodass für die Koeffizienten in der Laurententwicklung von C_k in Satz 2.3.1 die Gleichheit $|a_m| = \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$ gilt.*

Dann ist m echt negativ.

Ist dieser Satz bewiesen, so folgt (unter der Bedingung, dass ein solches m existiert!), falls wir zusätzlich noch die Eindeutigkeit dieses Indizes m nachweisen können, dass C_k ein invertierbares Element von $\mathcal{O}(\partial B)$ ist, und somit keine Nullstellen in diesem Bereich besitzen kann. Aufgrund der Wahl des Radius ϱ von $B(0; \varrho)$ resultiert dann daraus die Richtigkeit unserer Vermutung 1.3.2.

Es verbleibt zunächst allerdings noch der Beweis von Satz 2.3.2. Diesen werden wir in mehreren Schritten führen. Zunächst benötigen wir geeignete Schreibweisen.

2.3.3. Definition. *Es bezeichne $\tilde{\gamma}_r(k)$, mit $r \geq 0$, die Zahl der Nullstellen mit Multiplizitäten von C_k in \mathcal{F} , für die gilt: $t_r \leq |z| = |z|_m < t_{r+1}$.*

2.3.4. Lemma. *Es ist $\tilde{\gamma}_r(k) = \gamma_r(k)p^{r+1}$ mit einem geeigneten $\gamma_r(k) \in \mathbb{N}_0$.*

BEWEIS. Dies folgt daraus, dass die Gruppe Λ_r der Ordnung p^{r+1} auf der Menge der Nullstellen z von C_k mit $t_r \leq |z| = |z|_m < t_{r+1}$ durch Shifts $z \mapsto z + \lambda$, für $\lambda \in \Lambda_r$ operiert, da die Funktion C_k bekanntlich Λ -periodisch ist. \square

Im Hinblick auf Satz 2.3.2 stellen wir zunächst noch eine Vorüberlegung an.

2.3.5. Lemma. *Betrachte $B^+(0, R)$ in C_∞ mit einem Radius $R \geq 1$. Dann ist die Anzahl der Nullstellen minus die Anzahl der Polstellen von C_k (jeweils mit Multiplizitäten gezählt) immer negativ.*

BEWEIS. Dies beruht auf Abzählargumenten zu den Null- und Polstellen von C_k in $B^+(0, R)$. Da ersteres recht technisch ist, verschieben wir den Beweis in Kapitel 3, auf Seite 31. \square

Die Aussage dieses Lemmas impliziert: Unter der Annahme, dass die Laurententwicklung von C_k aus Satz 2.3.1 einen dominierenden Koeffizienten besitzt, folgt, dass dessen Index negativ ist.

Eine Verschärfung dieses Ergebnisses ist der Satz 2.3.2, welchen wir nun beweisen können.

BEWEIS. (von Satz 2.3.2)

Wir gehen zurück zur allgemeinen Situation des Abschnitts, und nehmen an, dass C_k auf ∂B nicht invertierbar ist. Es seien n_0 und n_1 mit $n_0 < n_1$ der kleinste und der größte Index, sodass $|a_{n_0}| = |a_{n_1}|$ gilt, sowie $|a_n| \leq |a_{n_0}|$ ist, für $n \notin \{n_0, n_1\}$. In diesem Fall besitzt C_k genau $n_1 - n_0$ Nullstellen auf dem Rand von $B(0, \varrho)$. Vergrößern wir den Radius ϱ von B um ein hinreichend kleines Stück zu ϱ' , sodass wir keine neuen Null- oder Polstellen mit aufnehmen, dann erhalten wir eine etwas größere Kugel $B' := B(0, \varrho')$, für die C_k eingeschränkt auf deren Rand $\partial B'$ invertierbar ist. In der entsprechenden Laurententwicklung $\sum_{z \in \mathbb{Z}} a'_n (v')^n$ von C_k auf $\partial B'$ wird der Koeffizient a'_{n_1} dominieren, da $n_0 < n_1$ ist. Wir können somit schließlich obiges Lemma 2.3.5 anwenden und es folgt: $n_1 < 0$. Also ist die Aussage von Satz 2.3.2 gezeigt. [Gek11, §6] \square

Damit sind die Überlegungen so weit fortgeschritten, dass wir sie im nächsten Abschnitt zusammenfügen und verschiedene Entsprechungen unserer am Ende von Kapitel 1 formulierten Vermutung 1.3.2 angeben können.

2.4. Endgültige Formulierung der Vermutung

Wir können nunmehr mit der bislang erarbeiteten Theorie die Vermutung 1.3.2 konkret formulieren. Dazu werden wir als Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit die Gültigkeit der nachfolgenden Proposition für alle Primzahlen p und alle $k \in \mathbb{N}$ verifizieren.

Dabei geben wir auch eine Aussage für das sogenannte Newtonpolygon zu G_k an. Die Betrachtung dieser Polygone bietet sich an, da sie Informationen über die Nullstellen eines Polynoms speichern. Für den, mit der hinter den Newtonpolygonen stehenden Theorie noch nicht vertrauten Leser sei auf den entsprechenden Anhang, ab Seite 67 verwiesen, wo die für unsere Situation relevanten Aussagen zusammengestellt wurden.

2.4.1. Proposition. *Es seien eine Primzahl p und ein $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Bezüglich dieser Wahlen sind äquivalent:*

- (i) *Alle Nullstellen z von C_k erfüllen $|z| = |\lambda_r|$, für ein $r \in \mathbb{N}_0$;*
- (ii) *Alle Nullstellen z von C_k in \mathcal{F} liegen bereits in \mathcal{F}_r , für ein $r \in \mathbb{N}_0$;*
- (iii) *Alle Nullstellen $x \neq 0$ von $G_k(X)$ erfüllen*

$$\log_p |x| = (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r,$$

für ein $r \in \mathbb{N}_0$;

- (iv) *Alle Steigungen des Newtonpolygons von $G_k(X)$ sind von der Gestalt*

$$(p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r,$$

für ein $r \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS. (i) \Leftrightarrow (ii) Wir wissen, dass die Gruppe Λ durch additive Shifts auf Ω_Λ operiert und jedes $z \in \Omega_\Lambda$ zudem Λ -äquivalent mit mindestens einem und höchstens endlich vielen $z' \in \mathcal{F}$ ist. Also können wir jede Nullstelle z von C_k vom Betrag $|z| = |\lambda_r|$, für ein $r \in \mathbb{N}_0$, mit einem Element z' von \mathcal{F} identifizieren, wobei der Betrag des Elementes z' wegen der Addition von einem $\lambda \in \Lambda$ wiederum einem Wert aus der Menge $\{|\lambda_r| \mid r \geq 0\}$ entspricht.

Aufgrund der Λ -Periodizität von C_k ist das $z' \in \mathcal{F}$ insbesondere wieder eine Nullstelle von C_k und liegt in einem der \mathcal{F}_r . Da wir auf diese Weise für alle Nullstellen von C_k in C_∞ beziehungsweise \mathcal{F} argumentieren können, gelten diese Aussagen offensichtlich in beide Richtungen.

(i) \Rightarrow (iii) Wir wissen nach Aussage (i), dass eine Nullstelle z von C_k schon

$$|z| = |\lambda_r| = p^{s_r},$$

mit einem geeigneten $r \in \mathbb{N}_0$, erfüllt. Außerdem ist nach Definition/Satz 1.2.9

$$C_k(z) = G_k(t(z)),$$

und nach Lemma 2.1.5

$$\log_p |t(z)| = (1-p) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r.$$

Also erfüllt die zugehörige Nullstelle $x = t(z)$ von G_k die Gleichung

$$\log_p |x| = (1-p) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r.$$

(iii) \Rightarrow (i) Hat eine Nullstelle x von $G_k(X)$ den angegebenen Absolutbetrag, so muss nach Lemma 2.1.5 das zugehörige Urbild z bezüglich der Abbildung t den Betrag $|z| = |\lambda_r|$, für ein $r \in \mathbb{N}_0$, besitzen. Wegen der Gleichheit $C_k(z) = G_k(t(z))$ ist damit insbesondere eine Nullstelle von $C_k(z)$ gefunden. Auf diese Weise gelangt man zu allen Nullstellen von C_k , die dann insbesondere auch die behaupteten Beträge besitzen müssen.

(iii) \Leftrightarrow (iv) Dies ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes über die Newtonpolygone aus Anhang B und dem Zusammenhang zwischen dem Absolutbetrag und der Bewertung. \square

Da die erste Aussage obiger Proposition 2.4.1 in ihrer Bedeutung exakt der Vermutung 1.3.2 entspricht, liest sich diese nun folgendermaßen.

2.4.2. Vermutung. *Es seien eine Primzahl p und ein $k \in \mathbb{N}$ gegeben.*

Dann gelten die Aussagen aus Proposition 2.4.1.

Nachdem wir im aktuellen Kapitel die notwendigen Grundlagen und Vorgehensweisen zum Beweis dieser Hypothese erarbeitet haben, führen wir den Nachweis nun in Kapitel 4.

KAPITEL 3

Hilfsmittel

Um größtmögliche Übersicht zu gewährleisten, werden in den Kapiteln 2 und 4 einige Beweise zunächst ausgelassen und erst im vorliegenden Kapitel geführt. Dabei handelt es sich größtenteils um aufwendige Rechnungen oder Argumentationsketten, die für das weitere Verständnis von eher geringer Bedeutung sind. Der dahinterstehende Gedanke ist, dass die Beweise beim ersten Lesen der Arbeit durchaus übergangen werden können, falls sich der Leser nur einen groben Überblick verschaffen will. Für das vollständige Verständnis ist die Lektüre dieses Kapitels jeweils parallel zu den Kapiteln 2 und 4 hingegen unabdingbar. Die Formulierungen der zu beweisenden Aussagen werden hier nochmals rezitiert und es wird auch beim ersten Auftauchen im jeweiligen Kapitel auf die Seitenzahl der Beweisführung verwiesen, sodass der Leser direkt hier nachschlagen kann.

Im ersten Abschnitt sind die fehlenden Beweise zu Kapitel 2 in der Reihenfolge des dortigen Auftauchens der zugehörigen Aussagen aufgeführt. Der zweite Kapitelteil beinhaltet diejenigen aus Kapitel 4, ebenfalls in der entsprechenden Abfolge des Beweisbedürftigen.

3.1. Hilfsaussagen zu Kapitel 2

Beweis von Lemma 2.1.1.

Lemma. *Es gilt:*

Die Funktion C_k besitzt keine Nullstellen z mit $|z| < 1$.

BEWEIS. Zerlege C_k wie folgt:

$$C_k(z) = \frac{1}{z^k} + \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^k}.$$

Auf der rechten Seite ist dabei $|\frac{1}{z^k}| > 1$, da wir $|z| < 1$ vorausgesetzt haben. Betragsmäßig erhalten wir mit gleicher Begründung für jeden Summanden in der Summe

$$\left| \frac{1}{(z - \lambda)^k} \right| = |\lambda|^{-k},$$

was nach Wahl der erzeugenden Gitterelemente einen Ausdruck liefert, der immer kleiner oder gleich 1 ist. Damit können sich in obiger Zerlegung für $C_k(z)$ die beiden Summanden nicht gegenseitig wegheben, und es folgt die Behauptung. \square

Beweis von Lemma 2.1.5.

Lemma. *Der Absolutbetrag von $t(z)$ auf \mathcal{F} ist gegeben durch*

$$\log_p |t(z)| = (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - (s_r - \varepsilon) p^r$$

für $|z| = p^{s_r - \varepsilon}$, mit $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varepsilon < s_r - s_{r-1}$.

Und speziell gilt

$$\log_p |t(z)| = (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r$$

für $z \in \mathcal{F}_r$.

BEWEIS. Aus dem bekannten Zusammenhang $t(z) = 1/e(z)$ folgt

$$\log_p |t(z)| = -\log_p |e(z)| .$$

Daher betrachten wir zunächst $e(z)$, und zwar in der Produktdarstellung

$$e(z) = z \cdot \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) .$$

Dies ergibt für den zu berechnenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \log_p |e(z)| &= \log_p \left(|z| \cdot \left| \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{\lambda - z}{\lambda} \right) \right| \right) \\ &= \log_p |z| + \sum_{\lambda \in \Lambda} \log_p \left| \frac{\lambda - z}{\lambda} \right| . \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\log_p \left| \frac{\lambda - z}{\lambda} \right| = \begin{cases} s_r - \varepsilon - \log_p |\lambda| & , \text{ falls } |z| > |\lambda| \\ \log_p |\lambda| - \log_p |\lambda| = 0 & , \text{ falls } |z| \leq |\lambda| . \end{cases}$$

Also verkürzt sich die Summe in obigem Ausdruck für $\log_p |e(z)|$ zu:

$$\begin{aligned} \log_p |e(z)| &= \log_p |z| + \sum_{\lambda \in \Lambda_{r-1}} \log_p \left| \frac{\lambda - z}{\lambda} \right| & (3.1.1) \\ &= (s_r - \varepsilon) + \sum_{\lambda \in \Lambda_{r-1}} (s_r - \varepsilon - \log_p |\lambda|) , \end{aligned}$$

wobei wir noch $|z| = p^{s_r - \varepsilon}$ verwendet haben. Abzählen der Elemente von Λ_{r-1} liefert

$$\begin{aligned}
\log_p |e(z)| &= (s_r - \varepsilon) + \sum_{i=0}^{r-1} (p-1)p^i (s_r - \varepsilon - s_i) \\
&= (1-p) \sum_{i=1}^{r-1} s_i p^i + (s_r - \varepsilon) + (p-1)(s_r - \varepsilon) \sum_{i=0}^{r-1} p^i \\
&= (1-p) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i + (s_r - \varepsilon) + (p-1)(s_r - \varepsilon) \left(\frac{1-p^r}{1-p} \right) \\
&= (1-p) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i + (s_r - \varepsilon) p^r.
\end{aligned}$$

Damit ist $\log_p |t(z)| = (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - (s_r - \varepsilon) p^r$, was dem gesuchten Ausdruck entspricht.

Die angegebene Formel für $z \in \mathcal{F}_r$ erhält man daraus mit $\varepsilon = 0$. \square

Beweis von Lemma 2.1.4.

- Lemma.** (i) Die kanonische Abbildung $\mathcal{F}/\Lambda \rightarrow \Omega_\Lambda/\Lambda$ ist biholomorph;
(ii) Die Abbildung $t : \mathcal{F}/\Lambda \rightarrow B^+(0;1) \setminus \{0\}$ ist wohldefiniert und biholomorph;
(iii) Die Funktion C_k ist eindeutig durch ihre Einschränkung auf \mathcal{F} bestimmt.

BEWEIS. (i) Nach Konstruktion der Gitterabstandsfunktion erhalten wir eine Gruppenoperation von Λ auf Ω_Λ durch Shifts um ein $\lambda \in \Lambda$; das heißt, für ein $z \in \Omega_\Lambda$ liefert $z \mapsto z + \lambda$ wieder ein Element von Ω_Λ . Diese Operation beschreibt auch die gesuchte kanonische Abbildung $\mathcal{F}/\Lambda \rightarrow \Omega_\Lambda/\Lambda$.

(ii) Wir verwenden zunächst Teil (i), um eine Abbildung $\mathcal{F}/\Lambda \xrightarrow{\cong} \Omega_\Lambda/\Lambda$ zu erhalten. Den biholomorphen Isomorphismus $\Omega_\Lambda/\Lambda \rightarrow B^+(0;1) \setminus \{0\}$ liefert schließlich t . Man beachte dazu zunächst die Surjektivität von e als Abbildung von C_∞ in sich selbst. Da $e(z) = 0$ genau dann gilt, wenn $z \in \Lambda$ ist, ist die Abbildung t mit dem Urbildbereich Ω_Λ/Λ wohldefiniert, und mit $t(z) = 1/e(z)$ ist das Bild stets ungleich 0. Für den weiteren Bildbereich können wir uns auf die Eigenschaften des Betrages von $t(z)$ aus Lemma 2.1.5 berufen, welches auch für Ω_Λ anstelle von \mathcal{F} gilt.

Das Bild $t(z)$, mit $z \in \Omega_\Lambda$, ist ein Element von $B^+(0;1)$, falls $\log_p |t(z)| \leq 0$ ist.

Nach dem Beweis von Lemma 2.1.5 gilt mit $|z| = p^{r+\varepsilon}$, für $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varepsilon < s_r - s_{r-1}$, bereits

$$\log_p |t(z)| = -\log_p |e(z)| = -(s_r - \varepsilon) - \sum_{i=0}^{r-1} (p-1)p^i (s_r - \varepsilon - s_i) \leq 0,$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass schon jeder Summand kleiner oder gleich 0 ist. Somit ist $t(z) \in B^+(0;1)$, falls $z \in \Omega_\Lambda$.

Es bleibt noch die umgekehrte Richtung zu zeigen: Ein $w \neq 0$ mit $|w| \leq 1$ kann nur von $t(z)$ mit $z \in \Omega_\Lambda$ angenommen werden. Nehmen wir dazu an, dass $z \notin \Omega_\Lambda$ (und $z \notin \Lambda$) gilt, das heißt, dass $|z|_m < 1$ ist. Da das Gitter Λ nur Elemente λ mit $|\lambda| \geq 1$ besitzt, muss dann schon $|z|_m = |z| < 1$ gelten.

Es ist deshalb nach einer Rechnung wie im Beweis von Lemma 2.1.5 (vergleiche ab Gleichung (3.1.1)):

$$\begin{aligned} \log_p |e(z)| &= \log_p |z| + \sum_{\lambda \in \Lambda_0} (\log_p |z| - 0) \\ &= \log_p |z| + (p-1) \log_p |z| \\ &= p \cdot \log_p |z| < 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\log_p |t(z)| = -\log_p |e(z)| > 0$, also $|t(z)| > 1$, was uns mittels einer Kontraposition die Behauptung liefert.

(iii) folgt unmittelbar aus (i) und Bemerkung 2.1.3 (iii). \square

Beweis von Satz 2.3.1.

Satz. Die Laurententwicklung von $C_k(z)$ auf ∂B , mit B wie in Abschnitt 2.3, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_k(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n v^n \quad \text{mit} \\ a_n &= (-1)^k \binom{k-1+n}{n} \omega_0^n \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \lambda^{-k-n} \quad \text{für } n \geq 0, \\ a_{-k-n} &= \binom{k-1+n}{n} \omega_0^{-k-n} \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n \quad \text{für } n > 0, \text{ und} \\ a_{-1} &= \dots = a_{-k} = 0. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir untersuchen die Zerlegung

$$\begin{aligned} C_k(z) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^k} \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k} + \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k}, \end{aligned}$$

und betrachten die beiden Summen getrennt.

Zunächst:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k}.$$

Wir beschränken uns zuerst auf den Summanden zu einem festen λ . Es gilt für alle $\lambda \in \Lambda_{>r}$: $|\lambda| > |\omega_0| = |z|$. Daher können wir nach geeigneter Umformung den binomischen Lehrsatz anwenden:

$$\frac{1}{(z-\lambda)^k} = \left(\frac{-1}{\lambda(1-\frac{z}{\lambda})} \right)^k = (-\lambda)^k \sum_{i \geq 0} \binom{-k}{i} \lambda^{-i} (-\omega_0)^i v^i.$$

Der Binomialkoeffizient schreibt sich dabei nach Anwenden der bekannten Definition als

$$\binom{-k}{i} = (-1)^i \binom{k-1+i}{i}.$$

Betrachten wir nun wieder die gesamte Summe über alle $\lambda \in \Lambda_{>r}$, so haben wir eine Doppelsumme, wobei die innere davon genügend schnell konvergiert, sodass

wir die Summationsreihenfolge vertauschen können.

Dies liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k} &= \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} (-\lambda)^{-k} \sum_{i \geq 0} \binom{k-1+i}{i} \lambda^{-i} \omega_0^i v^i \\ &= (-1)^k \sum_{i \geq 0} \binom{k-1+i}{i} \omega_0^i \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \lambda^{-k-i} v^i. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun noch die zweite Summe:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_r} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k}.$$

Zunächst sei wieder λ fest gewählt. Es gilt für alle $\lambda \in \Lambda_r$: $|\lambda| < |\omega_0| = |z|$. Man erhält wiederum mit dem binomischen Lehrsatz:

$$\frac{1}{(z - \lambda)^k} = z^{-k} \frac{1}{(1 - \frac{z}{\lambda})^k} = \omega_0^{-k} v^{-k} \sum_{i \geq 0} \binom{k-1+i}{i} \lambda^i \omega_0^{-i} v^{-i}.$$

Summieren wir nun noch über alle $\lambda \in \Lambda_r$, so liefert dies (ebenfalls mit zulässiger Vertauschung der Summationsreihenfolge):

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_r} \frac{1}{(\omega_0 v - \lambda)^k} = \sum_{i \geq 0} \binom{k-1+i}{i} \omega_0^{-k-i} \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^i v^{-k-i}.$$

Es bleibt noch das Verschwinden von a_{-1}, \dots, a_{-k} nachzuweisen. Dazu müssen wir die zweite Summe betrachten, da diese die Koeffizienten mit negativem Index liefert. Es sind automatisch $a_{-1} = \dots = a_{-k+1} = 0$, da wir ab $i = 0$ summieren und damit den Koeffizienten a_{-k} zu v^{-k} erhalten. Dieser ist ebenfalls 0, denn die Summe $\sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^0$ erstreckt sich über p^{r+1} viele Elemente mit Wert 1 (was in Charakteristik p den Wert 0 ergibt).

Damit sind alle Aussagen verifiziert. [Gek11, §4] □

Beweis von Lemma 2.3.5.

Lemma. Betrachte $B^+(0, R)$ in C_∞ mit einem Radius $R \geq 1$.

Dann ist die Anzahl der Nullstellen minus die Anzahl der Polstellen von C_k (jeweils mit Multiplizitäten gezählt) immer negativ.

BEWEIS. Die Polstellen von C_k sind offenbar genau die Elemente von Λ , die einen Betrag kleiner oder gleich R haben. Wählen wir ein $r_0 \in \mathbb{N}_0$, welches maximal mit $|\lambda_{r_0}| \leq R$ ist, dann liegen innerhalb der betrachteten Kugel genau p^{r_0+1} viele Polstellen, jede mit Vielfachheit k . Also ist der zweite Summand des für die Behauptung zu berechnenden Terms gegeben durch $k \cdot p^{r_0+1}$.

Bestimmen wir nun noch die Anzahl der Nullstellen von C_k in $B^+(0, R)$.

Wir wissen bereits, dass C_k in $\mathcal{F} \cap B^+(0, R)$ mit der Wahl von r_0 schon maximal

$$\sum_{r=0}^{r_0} \tilde{\gamma}_r(k)$$

viele Nullstellen besitzt, wobei $\tilde{\gamma}_r(k)$, wie in Definition 2.3.3 eingeführt, die Zahl der Nullstellen von C_k in

$$\mathcal{F}_r^1 := \{z \in C_\infty \mid t_r \leq |z| = |z|_m < t_{r+1}\},$$

für $0 \leq r \leq r_0$, ist.

Aufgrund der Λ -Periodizität von C_k und der Wahl von λ_{r_0} gilt weiterhin: Ist $z \in B^+(0, R) \cap \mathcal{F}$ eine Nullstelle von C_k , so ist $z + \lambda$ für alle λ aus Λ_{r_0} eine Nullstelle von C_k in $B^+(0, R)$. Für ein $\lambda \in \Lambda_{r_0}$ haben wir genau p^{r_0+1} viele Wahlmöglichkeiten. Auf diese Weise erhalten wir schon alle Nullstellen von C_k in $B^+(0, R)$, denn durch den Shift eines Elementes von $\mathcal{F} \cap B^+(0, R)/\Lambda$ um ein $\lambda \in \Lambda_{r_0}$ ist eine biholomorphe Abbildung $\mathcal{F} \cap B^+(0, R)/\Lambda \rightarrow B^+(0, R)/\Lambda$ gegeben (vergleiche dazu Lemma 2.1.4 (i), welches sich unmittelbar auf unsere Situation überträgt). Zusammen mit obiger Überlegung erhalten wir somit

$$\sum_{r=0}^{r_0} \tilde{\gamma}_r(k) \cdot p^{r_0+1}$$

als obere Abschätzung für die gesuchte Nullstellenanzahl in $B^+(0, R)$.

Allerdings zählen wir dabei manche Nullstellen mehrfach: Allgemein ist für $z \in \mathcal{F}_r^1$, mit $r \geq 0$, auch $(z + \lambda) \in \mathcal{F}_r^1$ genau dann, wenn $\lambda \in \Lambda_r$ ist. Denn: Für $z \in \mathcal{F}_r^1$ ändert sich $|z|$ bei Addition von $\lambda \in \Lambda_r$ nicht, und es gilt weiterhin $|z| = |z|_m$. Da Λ_r , für $0 \leq r \leq r_0$, genau p^r viele Elemente besitzt, lautet also die korrekte Anzahl der Nullstellen von C_k in $B^+(0, R)$ somit

$$\sum_{r=0}^{r_0} \frac{\tilde{\gamma}_r(k) \cdot p^{r_0+1}}{p^r} = p^{r_0+1} \sum_{r=0}^{r_0} \frac{\tilde{\gamma}_r(k)}{p^r} = p^{r_0+1} \sum_{r=0}^{r_0} \gamma_r(k),$$

wobei im letzten Schritt Lemma 2.3.4 benutzt wurde.

Also: Gelingt es uns zu zeigen, dass

$$\sum_{r=0}^{r_0} \gamma_r(k) < k$$

gilt, so folgt die Behauptung, denn die Anzahl der Polstellen von C_k in $B^+(0, R)$ ist ja, wie oben bewiesen wurde, durch $k \cdot p^{r_0+1}$ gegeben.

Dazu fixieren wir für ein r zwischen 0 und r_0 den Bereich \mathcal{F}_r^1 und zwei Nullstellen z_0 und z_1 von C_k , die in \mathcal{F}_r^1 liegen. Aufgrund der Identität $C_k(z) = G_k(t(z))$ muss dann auch $G_k(t(z_0)) = 0 = G_k(t(z_1))$ gelten.

Die Bilder der Λ -periodischen Funktion t sind genau dann gleich, wenn sich z_0 und z_1 nur durch ein Element von Λ_r unterscheiden; denn $t(z)$ ist nur von $|z|$ und nicht von z selbst abhängig, und der Betrag von z_0 respektive z_1 ändert sich bei Addition von $\lambda \in \Lambda_r$ nicht. Mit $\tilde{\gamma}_r(k) = \gamma_r(k)p^{r+1}$ ist also $\gamma_r(k)$ die Anzahl der Nullstellen von G_k im Kreisring

$$\{w \in C_\infty \mid w = t(z), z \in \mathcal{F}_r^1\}.$$

Da t als Funktion in $|z|$ betrachtet, wie in Korollar 2.1.6 (ii) gezeigt wurde, strikt monoton fallend ist, können wir in den Bereichen \mathcal{F}_r^1 , für $0 \leq r \leq r_0$, unabhängig voneinander jeweils gleich argumentieren (denn es gibt keine Nullstellen aus jeweils verschiedenen \mathcal{F}_r^1 , die gleiches Bild unter der Abbildung t besitzen können), und es folgt, dass $\sum_{r=0}^{r_0} \gamma_r(k)$ eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen von G_k im Kreisring

$$\{w \in C_\infty \mid w = t(z), z \in \mathcal{F} \cap B^+(0, R)\} \leftrightarrow B^+(0; 1)$$

ist.

Da aber $G_k(X)$ den Grad k besitzt und durch X teilbar ist, muss schon $\sum_{r=0}^{r_0} \gamma_r(k) < k$ gelten, was noch zu beweisen war. [Gek11, §6] \square

3.2. Hilfsaussagen zu Kapitel 4

Beweis von Satz (4.1.6).

Satz. Für die Potenzsumme $S_{r+1}(n)$ zu einem $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $S_{r+1}(n)$ lässt sich schreiben als

$$S_{r+1}(n) = \sum_{\substack{\underline{j}=(j_0, \dots, j_r) \\ \sum_{i=0}^r j_i = n \\ 0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}}} \binom{n}{\underline{j}} (-1)^{r+1} \lambda_0^{j_0} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_r^{j_r},$$

falls $0 < n \equiv 0 \pmod{p-1}$ und $l(n) \geq (r+1)(p-1)$ ist.

Für alle anderen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $S_{r+1}(n) = 0$.

(ii) Mit der Darstellung von $S_{r+1}(n) \neq 0$ aus (i) gilt:

$$\log_p |S_{r+1}(n)| = -\sigma_0(n)s_r + \sigma_1(n)(s_1 - s_r) + \dots + \sigma_{r-1}(n)(s_{r-1} - s_r) + ns_r.$$

BEWEIS. (i) Wir erhalten zunächst für die Potenzsumme zu einem festen n mittels des Multinomialsatzes :

$$\begin{aligned} S_{r+1}(n) &= \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n \\ &= \sum_{\lambda \in \langle 1, \lambda_1, \dots, \lambda_r \rangle} \lambda^n \\ &= \sum_{\underline{c} \in \mathbb{F}_p^{r+1}} (c_0 + c_1 \lambda_1 + \dots + c_r \lambda_r)^n \\ &= \sum_{\underline{c} \in \mathbb{F}_p^{r+1}} \sum_{\substack{\underline{j}=(j_0, \dots, j_r) \\ \sum_{i=0}^r j_i = n}} \binom{n}{\underline{j}} (c_0 \lambda_0)^{j_0} (c_1 \lambda_1)^{j_1} \cdots (c_r \lambda_r)^{j_r}, \end{aligned}$$

mit $j_i \in \mathbb{N}$.

Da die beiden vorkommenden Summen jeweils endlich sind, dürfen wir umordnen:

$$S_{r+1}(n) = \sum_{\substack{\underline{j}=(j_0, \dots, j_r) \\ \sum_{i=0}^r j_i = n}} \binom{n}{\underline{j}} \sum_{\underline{c} \in \mathbb{F}_p^{r+1}} (c_0 \lambda_0)^{j_0} (c_1 \lambda_1)^{j_1} \cdots (c_r \lambda_r)^{j_r}.$$

Nutzen wir nun noch aus, dass

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_p} a^k = \begin{cases} -1 & , \text{ falls } 0 < n \equiv 0 \pmod{p-1} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt, und wenden dies $(r+1)$ -mal an, so folgt:

$$S_{r+1}(n) = \sum_{\substack{\underline{j}=(j_0, \dots, j_r) \\ \sum_{i=0}^r j_i = n \\ 0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}}} \binom{n}{\underline{j}} (-1)^{r+1} \lambda_0^{j_0} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_r^{j_r},$$

wie behauptet.

Insbesondere muss also, wegen $\sum_{i=0}^r j_i = n$ und $j_i \equiv 0 \pmod{p-1}$, für $0 \leq i \leq r$, auch $0 < n \equiv 0 \pmod{p-1}$ gelten.

Außerdem folgt aus $\sum_{i=0}^r j_i = n$ und $0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}$, für $0 \leq i \leq r$, wegen $j_i \equiv l(j_i) \pmod{p-1}$, für $0 \leq i \leq r$ (vergleiche dazu Lemma 4.1.4 (i)), schon $l(n) \geq (r+1)(p-1)$.

Damit sind alle Behauptungen von Teil (i) gezeigt.

(ii) Wir zeigen: *In dem Ausdruck*

$$S_{r+1}(n) = \sum_{\substack{\underline{j}=(j_0, \dots, j_r) \\ \sum_{i=0}^r j_i = n \\ 0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}}} \binom{n}{\underline{j}} (-1)^{r+1} \lambda_0^{j_0} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_r^{j_r}$$

besitzt der Summand zu

$$\underline{j}^{(0)} = (\sigma_0(n), \sigma_1(n), \dots, \sigma_{r-1}(n), n - \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_i(n)),$$

den größten Betrag.

Denn dies liefert die Behauptung: Es ist dann

$$\begin{aligned} \log_p |S_{r+1}(n)| &= \sum_{i=0}^r \log_p |\lambda_i^{j_i}| \\ &= \underbrace{s_0}_{=0} j_0 + s_1 j_1 + \dots + s_r j_r \\ &= s_1 \sigma_1(n) + \dots + s_{r-1} \sigma_{r-1}(n) + s_r (n - \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_i(n)) \\ &= -\sigma_0(n) s_r + \sigma_1(n) (s_1 - s_r) + \dots + \sigma_{r-1}(n) (s_{r-1} - s_r) + n s_r. \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt noch mit einging, dass $\left| \binom{n}{\underline{j}} \right| = 1$ ist.

Es verbleibt der Beweis der eingangs formulierten Aussage:

Zur Anordnung der j_i , für $0 \leq i \leq r$: Da $|\lambda_0| = 1 < |\lambda_1| < \dots < |\lambda_r|$ gilt, müssen wir $j_0 \leq \dots \leq j_r$ mit minimalen j_0, \dots, j_{r-1} und einem größtmöglichen j_r wählen, damit der gesamte Summand $\binom{n}{\underline{j}} (-1)^{r+1} \lambda_0^{j_0} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_r^{j_r}$ maximalen Betrag besitzt.

Wir fixieren nun ein solches \underline{j} und sammeln die Bedingungen dafür, dass der zugehörige Ausdruck in der Summendarstellung von $S_{r+1}(n)$ aus (i) nicht verschwindet: Dazu untersuchen wir zunächst das Verschwinden des Multinomialkoeffizienten $\binom{n}{\underline{j}}$.

Per Definition gilt:

$$\binom{n}{\underline{j}} := \frac{n!}{j_0! \cdots j_r!} = \prod_{i=0}^r \binom{\sum_{k=0}^i j_k}{j_i},$$

mit $\sum_{i=0}^r j_i = n$. Damit $\binom{n}{\underline{j}}$ ungleich 0 ist, muss also $\binom{\sum_{k=0}^i j_k}{j_i} \neq 0$, für $0 \leq i \leq r$, gelten. Da nach einem Satz von Kummer (vergleiche [Rib89, 2, II, D]) gilt, dass der Binomialkoeffizient genau dann nicht verschwindet, wenn bei Subtraktion des unteren Eintrages vom oberen Eintrag kein p -adischer Übertrag entsteht, ist $\binom{n}{\underline{j}}$ genau dann ungleich 0, wenn wir ausgehend von $j_0 \leq \dots \leq j_r$ fordern, dass gilt

(vergleiche Definition 4.1.3 für die Bedeutung von „ $<_p$ “):

$$\begin{aligned} j_0 &<_p n \\ j_1 &<_p n - j_0 \\ &\vdots \\ j_{r-1} &<_p n - (j_0 + \dots + j_{r-2}) \\ j_r &= n - (j_0 + \dots + j_{r-1}). \end{aligned}$$

Das heißt, die p -adischen Entwicklungen der j_i , für $0 \leq i \leq r$, summieren sich zu der p -adischen Entwicklung von n auf.

Ausgehend von diesen Bedingungen kommen wir nun zur Bestimmung der j_i , für $0 \leq i \leq r$:

Nach Teil (i) muss für das Nichtverschwinden des Ausdrucks

$$\binom{n}{\underline{j}} (-1)^{r+1} \lambda_0^{j_0} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_r^{j_r}$$

weiterhin $0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}$, für $0 \leq i \leq r$, sowie $l(n) \geq (r+1)(p-1)$ und $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ gelten. Letzteres ist nach Lemma 4.1.4 (ii) äquivalent zu $l(n) \equiv 0 \pmod{p-1}$.

Das minimale j_0 , welches allen Bedingungen genügt, ist offensichtlich $\sigma_0(n)$. Für die Wahl von j_1 folgt mit $j_1 > j_0$ und einer analogen Überlegung $j_1 = \sigma_1(n)$. Genauso erhält man $j_i = \sigma_i(n)$, für $2 \leq i \leq r-1$. Für j_r bleiben noch $l(n) - r(p-1)$ viele Digits aus der p -adischen Entwicklung von n übrig. Dies sind wegen $l(n) \geq (r+1)(p-1)$ mindestens $(p-1)$ viele, und da $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ gelten muss, ist deren Summe kongruent zu 0 modulo $(p-1)$. Also genügt $j_r := n - \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_i(n)$ allen geforderten Bedingungen.

Das so konstruierte \underline{j} ist wie behauptet das angegebene $\underline{j}^{(0)}$. \square

Eine Hilfsaussage zum Beweis von Satz 4.2.1.

Lemma. *Mit den Bezeichnungen wie im Beweis zu Satz 4.2.1 gilt:*

$$\sigma_i(n) - \sigma_i(n_0) \geq 0,$$

für $0 \leq i \leq r-1$, wobei in allen Fällen Gleichheit eintreten kann.

Für n muss (wie auch schon für n_0) insbesondere die Bedingung $n <_p (k-1)^*$ erfüllt sein. Wir haben n_0 aus der minimalen Anzahl an ersten Digits von $(k-1)^*$ konstruiert. Da $n > n_0$ gilt, ist der j -te Digit von n , für $j \geq 1$, immer größer oder gleich als der j -te Digit von n_0 . Das liefert unmittelbar die gesuchte Ungleichung. Dass diese scharf ist, zeigt die folgende Überlegung: Im, in Hinblick auf die Abschätzung schlechtestmöglichen Fall stimmt n bezüglich der Digits mit denen von n_0 überein und besitzt noch mindestens $(p-1)$ größere (wegen $l(n) \equiv 0 \pmod{p-1}$). Das heißt, dann gilt $\sigma_i(n) - \sigma_i(n_0) = 0$, für $0 \leq i \leq r-1$.

Der Beweis der Vermutung und Folgerungen

Im Vordergrund dieses Kapitels steht der Beweis von Vermutung 2.4.2, in den alle bislang gemachten Überlegungen mit eingehen. Nach dessen Gelingen ergeben sich im Hinblick auf die relevanten Objekte C_k und G_k direkt umfassende Aussagen zur Anzahl und Lage derer Nullstellen, welche wir im zweiten Abschnitt nachweisen und mit Beispielen unterstreichen. Dabei sind viele Parallelen zu bereits bekannten Aussagen auffällig, sodass es für den abschließenden Kapitelteil nahe liegt, einen Vergleich dazu zu ziehen. Ebenso setzen wir dabei auch das gesamte Vorgehen in Relation zum Manuskript [Gek11], in welchen mit einer vergleichbaren Situation gearbeitet wird.

Im gesamten Kapitel betrachten wir die Situation, welche im Einschub auf Seite 18 als Standard vorausgesetzt wurde. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine Wiederholung, da alle Objekte zum Einsatz kommen, und verweisen den Leser darauf, an der entsprechenden Stelle nachzuschlagen.

Da wir zum Beweis der Hauptaussage auf einige Aussagen bezüglich der p -adischen Entwicklungen ganzer Zahlen zurückgreifen müssen, geben wir im ersten Abschnitt des Kapitels einen kurzen Überblick darüber. An gleicher Stelle untersuchen wir Eigenschaften der Potenzsummen, welche in den Formeln für die Koeffizienten der Laurententwicklung von C_k vorkommen. Auch diese spielen im Beweis von Vermutung 2.4.2 eine entscheidende Rolle.

4.1. Allgemeine Vorüberlegungen

Wir stellen in diesem Abschnitt im allgemeinen Rahmen verschiedene Schreibweisen und leicht nachzurechnende Aussagen zusammen, die zum Verständnis des Hauptbeweises im nächsten Abschnitt und den Folgerungen daraus im dritten Teil dieses Kapitels notwendig sind.

4.1.1. Definition. *Es sei $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Man bezeichnet die Zerlegung*

$$n = n_0 + n_1p + n_2p^2 + \dots + n_Np^N,$$

mit $n_i \in \{0, \dots, p-1\}$, für $i \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$ und einer Primzahl p , als die p -adische Entwicklung von n .

Dabei nennen wir die n_i die Koeffizienten der p -adischen Entwicklung von n , und bezeichnen mit

$$l(n) := \sum_{i=0}^n n_i$$

die Koeffizientensumme der p -adischen Entwicklung von n .

(ii) Ausgehend von der p -adischen Entwicklung von n in (i) ist

$$n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_0\text{-mal}} + \underbrace{p + \dots + p}_{n_1\text{-mal}} + \dots + \underbrace{p^N + \dots + p^N}_{n_N\text{-mal}} = \sum_{j \geq i} p^{ij}$$

die Zerlegung der p -adischen Entwicklung von n in Digits. Ein Digit von n ist also eine p -Potenz.

(iii) Wir bezeichnen mit

$$\sigma_i(n) = \sum_{j=i(p-1)+1}^{(i+1)(p-1)} p^{ij}$$

den „ $(i+1)$ -ten $(p-1)$ -Block von Digits von n “.

Besitzt die p -adische Entwicklung von n nicht genügend viele Digits, so ergänzen wir die zugehörige Reihe in (ii) mit Nullen.

(iv) Wir schreiben

$$n^* = \sum_{i \geq 0} (p-1-n_i)p^i,$$

mit den Koeffizienten n_i aus (i). Fassen wir dies als unendliche p -adische Entwicklung auf, so sind deren Koeffizienten für $i > N$ jeweils $(p-1)$.

(v) Wir bezeichnen mit

$$\mu_r(n) = \sum_{1 \leq j \leq r(p-1)} p^{ij}$$

die Summe der $r(p-1)$ ersten Digits der p -adischen Entwicklung von $(n-1)^*$.

Bemerkung. Auch für negative ganze Zahlen lässt sich eine p -adische Entwicklung angeben. Diese besteht aus unendlich vielen Summanden. Wie man leicht einsieht, entspricht zum Beispiel n^* als p -adische Zahl aufgefasst $-n-1$.

4.1.2. Beispiel. Es sei $n = 50$ und $p = 3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n &= 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3; \\ l(n) &= 2 + 1 + 2 + 1 = 6; \\ \sigma_0(n) &= 2, \\ \sigma_1(n) &= 3 + 1 \cdot 3^2 = 12, \\ \sigma_2(n) &= 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 = 36, \\ \sigma_3(n) &= \sigma_4(n) = \dots = 0; \\ (n-1)^* &= 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + \dots; \\ \mu_1(n) &= 1 + 1 \cdot 3 = 4, \\ \mu_2(n) &= 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 = 112, \\ \mu_3(n) &= 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^5 = 436, \\ &\dots \end{aligned}$$

4.1.3. Definition/Lemma. Es seien $n, m \in \mathbb{Z}$ gegeben, mit den p -adischen Entwicklungen

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n_1p + n_2p^2 + \dots, \\ m &= m_0 + m_1p + m_2p^2 + \dots, \end{aligned}$$

mit $n_i, m_i \in \{0, \dots, p-1\}$, für $i \geq 0$.

Wir schreiben

$$n <_p m,$$

falls für alle $i \geq 0$ gilt: $n_i \leq m_i$.

Dadurch erhalten wir eine Ordnungsrelation.

Bezüglich der eingeführten Bezeichnungen werden wir im weiteren Verlauf auf die nachfolgenden Aussagen zurückgreifen.

4.1.4. Lemma. *Es seien $k, n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Es gilt*

$$n \equiv l(n)(p-1),$$

also speziell

$$n \equiv 0(p-1) \iff l(n) \equiv 0(p-1).$$

(ii) *Es gilt:*

$$\binom{k-1+n}{n} \neq 0 \iff n <_p (k-1)^*.$$

BEWEIS. (i) Die erste Kongruenz ergibt sich unmittelbar aus

$$p^i \equiv 1(p-1),$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Es gilt, dass der Binomialkoeffizient $\binom{k-1+n}{n}$ genau dann nicht verschwindet, wenn bei Subtraktion der Zahl n von $k-1+n$ kein p -adischer Übertrag entsteht (vergleiche den Satz von Kummer in [Rib89, 2, II, D]). Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass für alle i gilt: Die Addition der Koeffizienten k_i , welche in der p -adischen Entwicklung von $k-1$ auftauchen, und der n_i , welche in der p -adischen Entwicklung von n auftauchen, liefert immer eine Zahl, die echt kleiner als p ist; also ausgeschrieben: $k_i + n_i < p$. Aufgrund der Definition von $(k-1)^*$ und der majorisierten Ordnung gelten dann folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} (n_i < p - k_i, \text{ für alle } i) &\iff (n_i \leq p - 1 - k_i, \text{ für alle } i) \\ &\iff (n <_p (k-1)^*, \text{ für alle } i). \end{aligned}$$

Also sind wir durch lauter Äquivalenzumformungen auf der rechten Seite der Behauptung angelangt. \square

Damit haben wir alle in unserem Rahmen relevanten Bezeichnungen und Eigenschaften in Bezug auf gegebene p -adische Entwicklungen festgehalten.

Im zweiten Teil dieses Abschnittes werden wir die nachfolgend eingeführten *Potenzsummen* untersuchen.

4.1.5. Definition. *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$.*

Wir schreiben

$$S_{r+1}(n) := \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n,$$

für $r \geq 0$.

4.1.6. Satz. Für die Potenzsumme $S_{r+1}(n)$ zu einem $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $S_{r+1}(n)$ lässt sich schreiben als

$$S_{r+1}(n) = \sum_{\substack{\underline{j}=(j_0, \dots, j_r) \\ \sum_{i=0}^r j_i = n \\ 0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}}} \binom{n}{\underline{j}} (-1)^{r+1} \lambda_0^{j_0} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_r^{j_r},$$

falls $0 < n \equiv 0 \pmod{p-1}$ und $l(n) \geq (r+1)(p-1)$ ist.

Für alle anderen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $S_{r+1}(n) = 0$.

(ii) Ist $S_{r+1}(n) \neq 0$, so gilt:

$$\log_p |S_{r+1}(n)| = -\sigma_0(n)s_r + \sigma_1(n)(s_1 - s_r) + \dots + \sigma_{r-1}(n)(s_{r-1} - s_r) + ns_r.$$

Der Beweis des Satzes ist in Kapitel 3, ab Seite 33 nachzulesen.

Damit sind alle Vorbereitungen getroffen, um im nächsten Kapitelteil den Nachweis von Vermutung 2.4.2 auszuführen.

4.2. Die Hauptaussage und ihr Beweis

Dieser Abschnitt steht ganz im Zeichen des Beweises unserer Hauptaussage.

Wir weisen dazu den ersten Teil von Proposition 2.4.1 nach.

4.2.1. Satz. Es seien eine Primzahl p und ein $k \in \mathbb{N}$ gegeben.

Dann gilt:

Alle Nullstellen z von C_k in \mathcal{F} liegen bereits in den \mathcal{F}_r , mit $r \geq 0$.

Ohne weitere Rechnung folgt dann wie bereits in Kapitel 2 gesehen die Richtigkeit unserer Vermutung 2.4.2.

4.2.2. Korollar. Für alle Primzahlen p und alle $k \in \mathbb{N}$ gelten die äquivalenten Aussagen von Proposition 2.4.1.

Es verbleibt der Beweis von Satz 4.2.1. Der Übersicht halber unterteilen wir diesen in mehrere Schritte und gliedern teilweise Zwischenbeweise in Kapitel 3 oder Abschnitt 4.1 aus, da die zugehörigen Aussagen entweder plausibel sind oder der Nachweis größeren technischen Aufwand mit sich bringt.

BEWEIS. (von Satz 4.2.1)

Wir betrachten für ein festes unendlichdimensionales \mathbb{F}_p -Gitter

$$\Lambda = \langle 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$$

in C_∞ , mit den im Einschub auf Seite 18 festgelegten Eigenschaften, die Funktion

$$C_k(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^k},$$

mit $k \in \mathbb{N}$, in ihrem Fundamentalebene

$$\mathcal{F} = \{z \in C_\infty \mid |z| = |z|_m \geq 1\}.$$

(i) Es genügt offenbar zu zeigen, dass ein $z \in \mathcal{F}$ mit $|\lambda_r| < |z| < |\lambda_{r+1}|$, für $r \geq 0$, keine Nullstelle von C_k sein kann.

(ii) Um die Aussage in (i) nachzuweisen, stützen wir uns auf die bereits mehrfach zitierte und im Anhang hinterlegte Theorie der nichtarchimedischen Analysis und

der in diesem Kontext in Abschnitt 2.2 betrachteten nichtarchimedischen Konturintegration.

Für ein festes λ_r , mit $r \geq 0$ und $|\lambda_r| = p^{s_r}$, aus der Menge der erzeugenden Elemente des Gitters Λ betrachten wir die offene Kugel

$$B := B(0; p^{s_r + \varepsilon}) = \{z \in C_\infty \mid |z| < p^{s_r + \varepsilon}\},$$

wobei $0 < \varepsilon < |\lambda_{r+1}| - |\lambda_r|$ sei, mit dem Rand $\partial B = \{z \in C_\infty \mid |z| = p^{s_r + \varepsilon}\}$. Als Koordinate auf dem Rand von B wählen wir $v := z/\omega_0$ mit einem festen $\omega_0 \in C_\infty$, welches $|\omega_0| = p^{s_r + \varepsilon}$ erfüllt.

Können wir zeigen, dass die Laurententwicklung von C_k von der Gestalt

$$v^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n v^n \quad \text{mit } |a_0| > \max_{n \neq 0} |a_n|, m \in \mathbb{Z},$$

ist, so liegt ein invertierbares Element von $\mathcal{O}(B)$ vor, und dies liefert die Aussage in (i) (vergleiche dazu auch die Überlegungen am Ende von Abschnitt 2.2).

(iii) Die Laurententwicklung von C_k ist laut Satz 2.3.1 gegeben als

$$\begin{aligned} C_k(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n v^n \quad \text{mit} \\ a_n &= (-1)^k \binom{k-1+n}{n} \omega_0^n \sum_{\lambda \in \Lambda_{>r}} \lambda^{-k-n}, \quad n \geq 0, \\ a_{-k-n} &= \binom{k-1+n}{n} \omega_0^{-k-n} \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n, \quad n > 0, \end{aligned}$$

und $a_{-1} = \dots = a_{-k} = 0$.

Wir müssen also nur noch überprüfen, ob diese Entwicklung schon die in (ii) angegebene Gestalt besitzt. Dazu muss nach der Sprechweise in Satz/Definition 2.2.1 gezeigt werden, dass die obige Laurententwicklung von $C_k(z)$ einen dominierenden Koeffizienten besitzt. Wir wissen nach Satz 2.3.2 bereits: Falls ein solcher Koeffizient existiert, so ist dessen Index schon echt kleiner als 0. Also können wir uns auf die Betrachtung der Koeffizienten a_{-k-n} , für $n > 0$, aus der Laurententwicklung von $C_k(z)$ beschränken.

(iv) Wir fixieren nun einen Koeffizienten a_{-k-n} , mit $n > 0$, aus der Laurententwicklung in (iii) und betrachten diesen genauer. Für dessen Nichtverschwinden muss nach der Formel in (iii) gelten:

$$(\alpha) \binom{k-1+n}{n} \neq 0 \quad \text{und gleichzeitig} \quad (\beta) \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n \neq 0.$$

Wir untersuchen die beiden Bedingungen getrennt.

Zu (α) : Für den Binomialkoeffizienten gilt in \mathbb{F}_p , wie in Lemma 4.1.4 (ii) bewiesen wird:

$$\binom{k-1+n}{n} \neq 0 \iff n <_p (k-1)^*.$$

Zu (β) : Der zu untersuchende Ausdruck ist die Potenzsumme $S_{r+1}(n)$, welche wir bereits mit Definition 4.1.5 eingeführt haben. In Satz 4.1.6 (i) wurde gezeigt, dass

sich diese Summe schreiben lässt als

$$S_{r+1}(n) = \sum_{\substack{j=(j_0, \dots, j_r) \\ \sum j_i = n \\ 0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}}} \binom{n}{j} (-1)^{r+1} \lambda_0^{j_0} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_r^{j_r} .$$

Dabei waren die Bedingungen $\sum j_i = n$ und $0 < j_i \equiv 0 \pmod{p-1}$, jeweils für $0 \leq i \leq r$, notwendig, wobei wir durch letztere von 0 verschiedene Summanden erhalten. Weiterhin sahen wir, dass die Zahl n folglich den Anforderungen $l(n) \geq (r+1)(p-1)$ und $0 < n \equiv 0 \pmod{p-1}$ genügen muss.

(v) Die in Schritt (iv) herausgearbeiteten Bedingungen an die natürliche Zahl n bezüglich des Nichtverschwindens des Koeffizienten a_{-k-n} in der Laurententwicklung von C_k , lassen sich damit wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} a_{-k-n} \neq 0 &\Leftrightarrow \left\{ \binom{k-1+n}{n} \neq 0 \text{ und } \sum_{\lambda \in \Lambda_r} \lambda^n \neq 0 \right\} \\ &\Leftrightarrow \{n <_p (k-1)^* \text{ und } l(n) \geq (r+1)(p-1) \text{ und } 0 < n \equiv 0 \pmod{p-1}\} . \end{aligned}$$

(vi) Wir werden nun zeigen, dass unter den Koeffizienten a_{-k-n} , welche den Bedingungen aus (v) genügen, ein betragsmäßig dominierender zu finden ist, der nach den Überlegungen aus Schritt (iii) schon der dominierende Koeffizient der Laurententwicklung von C_k ist. Dazu benötigen wir Informationen über den Betrag der a_{-k-n} , für $n > 0$.

(vii) Es gilt, mit $n > 0$:

$$\log_p |a_{-k-n}| = \log_p |\omega_0| + \log_p |S_{r+1}(n)| ,$$

wobei der Binomialkoeffizient $\binom{k-1+n}{n}$ keinen Beitrag liefert, da er den Betrag 1 besitzt. In der Gleichung ist weiterhin $\log_p |\omega_0| = s_r + \varepsilon$ und

$$\log_p |S_{r+1}(n)| = -\sigma_0(n)s_r + \sigma_1(n)(s_1 - s_r) + \dots + \sigma_{r-1}(n)(s_{r-1} - s_r) + ns_r ,$$

was der Aussage von Satz 4.1.6 (ii) entspricht.

Es sei an dieser Stelle angemerkt: Die Argumente aus den Schritten (i) bis (vi) besitzen alle auch Gültigkeit für eine Primzahlpotenz q anstelle einer Primzahl p . Der Beweis des gerade verwendeten zweiten Teils von Satz 4.1.6 ist allerdings nur für Primzahlen p gültig, denn es werden zum Beispiel gewisse p -adische Überträge untersucht, deren Verhalten bei entsprechenden q -adischen Entwicklungen, wobei q eine Primzahlpotenz ist, weder übertragbar, noch kontrollierbar ist.

(viii) Wir setzen nun

$$n_0(k, r) := \mu_{r+1}(k) ,$$

und zeigen in den Schritten (ix) bis (xi), dass a_{-k-n_0} der in (vi) gesuchte Koeffizient ist. Dabei schreiben wir abkürzend $n_0 := n_0(k, r)$.

(ix) Die Zahl n_0 erfüllt alle Bedingungen aus (v).

Denn: Wir konstruieren n_0 aus den $(r+1)(p-1)$ ersten Digits der p -adischen Entwicklung von $(k-1)^*$, also ist $n <_p (k-1)^*$. Für die Digitsumme $l(n)$ gilt in der zu erfüllenden Ungleichung sogar Gleichheit: $l(n) = (r+1)(p-1)$. Also gilt wegen Lemma 4.1.4 (i) weiterhin $n \equiv 0 \pmod{p-1}$.

(x) Es gilt: $-k - n_0$ ist der erste negative Index, für den der zugehörige Koeffizient der Laurententwicklung von C_k nicht verschwindet.

Denn: In Schritt (ix) wurde gezeigt, dass in der Bedingung $l(n) \geq (r+1)(p-1)$ mit der Wahl von n_0 bereits die Gleichheit gilt. Da weiterhin die Digits von n_0 kleinstmöglich bezüglich der Bedingung $n <_p (k-1)^*$ gewählt wurden, folgt die behauptete Minimalität von $-k-n_0$.

(xi) Wegen (x) bleibt zu zeigen: Es sei $n > n_0$ ein Index mit $a_{-k-n} \neq 0$. Dann gilt:

$$|a_{-k-n}| < |a_{-k-n_0}|.$$

Denn: Mit den Überlegungen aus Schritt (vii) ist die zu zeigende Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} (k-n) \cdot \log_p |\omega_0| + \log_p |S_{r+1}(n)| &< (k-n_0) \cdot \log |\omega_0| + \log_p |S_{r+1}(n_0)| \\ \Leftrightarrow \log_p |S_{r+1}(n)| + \log_p |S_{r+1}(n_0)| &< (s_r + \varepsilon)(n - n_0). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Für $r = 0$ und damit $s = 0$ ist die letzte Ungleichung erfüllt, denn einerseits ist wegen $\log_p |S_1(n)| = 0$, für alle n wie oben (wie man leicht nachrechnet), die linke Seite von (4.2.1) schon 0, und andererseits haben wir auf der rechten Seite eine natürliche Zahl, die echt größer als 0 ist.

Es sei also nun $r \geq 1$. Für die linke Seite von Ungleichung (4.2.1) erhalten wir mit der Formel aus Schritt (vii):

$$\begin{aligned} \log_p |S_{r+1}(n)| + \log_p |S_{r+1}(n_0)| &= -(\sigma_0(n) - \sigma_0(n_0))s_r \\ &\quad + (\sigma_1(n) - \sigma_1(n_0))(s_1 - s_r) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (\sigma_{r-1}(n) - \sigma_{r-1}(n_0))(s_{r-1} - s_r) \\ &\quad + (n - n_0)s_r. \end{aligned}$$

Dabei sind in den einzelnen Summanden, jeweils für $0 \leq i \leq r-1$, die Faktoren $(\sigma_i(n) - \sigma_i(n_0))$ größer oder gleich 0 (vergleiche den Beweis dazu in Kapitel 3, auf Seite 35), und die Faktoren $(s_i - s_r)$ immer echt kleiner als 0, da in allen entsprechenden Fällen $|\lambda_i| < |\lambda_r|$ gilt. Also ist der gesamte Ausdruck auf der rechten Seite, abgesehen von letzten Summanden, in jedem Fall kleiner oder gleich 0. Damit können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \log_p |S_{r+1}(n)| + \log_p |S_{r+1}(n_0)| &\leq (n - n_0)s_r \\ &< (s_r + \varepsilon)(n - n_0). \end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt verwendet, dass $\varepsilon > 0$ gewählt wurde. Damit ist die Ungleichung (4.2.1) in allen möglichen Fällen etabliert.

Also ist a_{-k-n_0} der dominierende Koeffizient der Laurententwicklung von C_k und es folgt die Behauptung. \square

Mit analogen Argumenten ergibt sich als unmittelbare Folgerung:

4.2.3. Korollar. *Es sei Λ ein endliches Gitter der Dimension $m+1$, mit den wie im Einschub auf Seite 18 geforderten Eigenschaften.*

Es gilt die Aussage von Satz 4.2.1 mit $0 \leq r \leq m$.

BEWEIS. Dass die Funktion C_k für ein endliches Gitter keine Nullstellen in den Bereichen

$$\{z \in C_\infty \mid |\lambda_i| < |z| < |\lambda_{i+1}|\},$$

für $1 \leq i \leq m-1$, besitzt, folgt analog zum Beweis von Satz 4.2.1, wie man unmittelbar einsieht.

Derselbe Beweis zeigt aber auch, dass C_k keine Nullstellen z mit $|z| > |\lambda_m|$ besitzt. \square

Aus dem Gelingen des Hauptbeweises ergeben sich noch einige weitere Konsequenzen, die wir nun erarbeiten wollen.

4.3. Folgerungen

Bevor wir zu konkreten Beispielen zu Satz 4.2.1 kommen, wollen wir zunächst einen genaueren Blick auf die Nullstellen der Funktion C_k in ihrem Fundamentalbereich \mathcal{F} werfen, denn es ergeben sich nun einige interessante Eigenschaften derer.

Wir kennen bereits aus Kapitel 2 Formeln für die Nullstellen von C_k in gewissen Teilgebieten von \mathcal{F} . Gehen wir dazu zurück zur Situation von Definition 2.3.3 und den danach folgenden Aussagen, welche wir nun präzisieren können: Es ist jetzt $\tilde{\gamma}_r(k) = \gamma_r(k)p^{r+1}$ die Zahl der Nullstellen mit Multiplizitäten von C_k in \mathcal{F} , für die gilt: $t_r = |z| = |z|_m < t_{r+1}$.

Bemerkung. Die Abschätzung der Nullstellen von G_k im jeweiligen Kreisring aus dem Beweis zu Lemma 2.3.5 wird dank Satz 4.2.1 nun zur Gleichheit. Es gilt also: Die Zahl der Nullstellen von G_k im Kreisring

$$\{w \in C_\infty \mid w = t(z), z \in \mathcal{F}, 1 \leq |z| = |z|_m \leq t_r\}$$

ist gegeben durch $\sum_{i=0}^r \gamma_i(k)$.

Mit den Rechnungen im Beweis von Lemma 2.3.5 folgt für $\gamma_r(k)p^{r+1}$, die Anzahl der Nullstellen von C_k in \mathcal{F}_r : $\gamma_r(k)$ ist die Anzahl der Nullstellen x von $G_k(X)$, mit

$$\log_p |x| = (p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r,$$

und im Gesamten ist

$$\gamma(k) := k - \sum_{r \geq 0} \gamma_r(k) \tag{4.3.1}$$

die Multiplizität von 0 als Nullstelle von G_k , wobei die letzte Summe natürlich immer endlich ist.

Unser Ziel ist es nun, eine konkrete Formel bezüglich $\gamma_i(k)$, für $i \geq 0$, und $\gamma(k)$ anzugeben.

Die zugehörige Situation ist diejenige aus dem Beweis von Satz 4.2.1: Wir betrachten die Kugel $B := B(0; p^{s_r + \varepsilon})$. Die Anzahl der Nullstellen von C_k innerhalb von B ist dann gegeben durch $\sum_{i=0}^r \gamma_i(k)p^{r+1}$. Also ist die Ordnung von C_k auf ∂B , berechnet über die Anzahl der Nullstellen minus die Anzahl der Polstellen:

$$\text{ord}_{\partial B}(C_k) = \sum_{i=0}^r \gamma_i(k)p^{r+1} - kp^{r+1}. \tag{4.3.2}$$

Andererseits wissen wir aber nach Definition und Wahl von $n_0(k, r) = \mu_{r+1}(k)$ im Beweis zu Satz 4.2.1, dass auch gilt

$$\text{ord}_{\partial B}(C_k) = -k - \mu_{r+1}(k). \tag{4.3.3}$$

Setzen wir nun die beiden Gleichungen (4.3.2) und (4.3.3) zusammen, so können wir rekursiv die $\gamma_i(k)$, für $i \geq 0$, bestimmen.

Diese Aussage ist Teil des nachfolgenden Satzes, welcher alle bekannten Aussagen zur Nullstellenverteilung von C_k und $G_k(X)$ zusammenstellt.

4.3.1. Satz. *Wir greifen auf die in Abschnitt 4.1 eingeführten Bezeichnungen zurück. Es gilt:*

(i) *Alle Nullstellen von C_k in \mathcal{F} liegen schon in einem der \mathcal{F}_r , für $r \geq 0$.*

Demnach sind alle Steigungen des Newtonpolygons zum Gossopolynom $G_k(X)$ von der Gestalt

$$(p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r.$$

(ii) *Die Anzahl an Nullstellen von C_k in \mathcal{F}_r ist $\gamma_r(k)p^{r+1}$.*

Dementsprechend ist bezüglich des Newtonpolygons $NP(G_k(X))$ die Zahl $\gamma_r(k)$ die Länge des Segmentes mit Steigung $(p-1) \sum_{i=0}^{r-1} s_i p^i - s_r p^r$.

Dabei ist $\gamma_r(k)$ gegeben durch

$$\gamma_r(k) = \frac{(p-1)k + p\mu_r(k) - \mu_{r+1}(k)}{p^{r+1}},$$

für $r \geq 0$.

Liegt ein Gitter der endlichen Dimension $m+1$ vor, so ist $\gamma_r(k) = 0$ für $r > m$.

(iii) *Es sei $\bar{r}(k)$ die kleinste Zahl r , sodass $\mu_r(k) + k \equiv 0 \pmod{p^N}$.*

Dann ist $\gamma_r(k) = 0$ für $r \geq \bar{r}(k)$ und $\gamma_r(k) \neq 0$ für $0 \leq r < \bar{r}(k)$.

Für ein endliches Gitter der Dimension $m+1$ gilt die letzte Aussage nur, falls $\bar{r}(k) \leq m+1$ ist.

(iv) *Der Repräsentant aus $\{0, \dots, p-2\}$ von $l(k-1)$ modulo $p-1$ sei $R(k)$.*

Dann ist die Multiplizität $\gamma(k)$ von 0 als Nullstelle von $G_k(X)$ gegeben durch

$$\gamma(k) = (R(k) + 1)p^{\lfloor l(k-1)/(p-1) \rfloor},$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer bezeichnet.

Für ein endliches Gitter ist

$$\gamma(k) = k - \sum_{i=0}^{\bar{m}} \gamma_i(k),$$

mit $\bar{m} = \max(m, \bar{r} - 1)$.

BEWEIS. (i) Dies wurde im Verlaufe bereits formuliert und erlangt nun mit Satz 4.2.1 Gültigkeit.

(ii) Mit gleicher Begründung wie in Teil (i) ist hier nur noch die Formel für $\gamma_i(k)$, für $i \geq 0$, nachzurechnen.

Dazu setzen wir die Gleichungen (4.3.2) und (4.3.3) zusammen und führen eine Induktion nach i durch.

Für $i = 0$ haben wir:

$$\begin{aligned} \gamma_0(k)p - kp &= -k - \mu_1(k) \\ \Leftrightarrow \gamma_0(k) &= \frac{kp - k - \mu_1(k)}{p} = \frac{k(p-1) - \mu_1(k)}{p}, \end{aligned}$$

was offenbar dem gesuchten Ausdruck für $i = 0$ entspricht.

Setzen wir nun voraus, dass die Gleichung für $i = 0$ bis $i = r - 1$ richtig ist, so folgt für den Schritt von $r - 1$ nach r :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^r \gamma_i(k)p^{r+1} - kp^{r+1} = -k - \mu_{r+1}(k) \\
\Leftrightarrow & \gamma_r(k)p^{r+1} - kp^{r+1} + \\
& \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(p-1)k + p\mu_i(k) - \mu_{i+1}(k)}{p^{i+1}} p^{r+1} = -k - \mu_{r+1}(k) \\
\Leftrightarrow & \gamma_r(k)p^{r+1} - kp^{r+1} + \\
& \sum_{i=0}^{r-1} [p^{-i+r+1}k - p^{-i+r} + p^{-i+r+1}\mu_i(k) - \mu_{i+1}(k)p^{-i+r}] = -k - \mu_{r+1}(k) \\
\Leftrightarrow & \gamma_r(k)p^{r+1} + p^{r+1}k - pk + p^{r+1}\mu_0(k) - \mu_r(k)p - kp^{r+1} = -k - \mu_{r+1}(k) \\
& \Leftrightarrow \gamma_r(k)p^{r+1} - pk - \mu_r(k)p = -k - \mu_{r+1}(k).
\end{aligned}$$

Dies liefert:

$$\begin{aligned}
\gamma_r(k) &= \frac{-k - \mu_{r+1}(k) + pk + \mu_r(k)p}{p^{r+1}} \\
&= \frac{(p-1)k + p\mu_r(k) - \mu_{r+1}(k)}{p^{r+1}}.
\end{aligned}$$

Also ist der Induktionsschritt vollzogen, und damit (ii) im unendlichdimensionalen Fall verifiziert.

Für endliche Gitter ergibt sich die Aussage daraus, dass C_k , wie in Korollar 4.2.3 bewiesen wurde, keine Nullstellen z mit $|z| > |\lambda_m|$ besitzt.

(iii) Die Existenz eines solchen $\bar{r}(k)$ folgt, da $\mu_r(k)$ für $r \rightarrow \infty$ die Zahl $-k$ approximiert. Denn wie bereits im Anschluss an Definition 4.1.1 angemerkt wurde, entspricht $(k-1)^*$ dem Wert $-k$, aufgefasst als p -adische Zahl.

Wir betrachten zum Beweis der Eigenschaften von $\bar{r}(k)$ die p -adische Entwicklung

$$\mu_r(k) = \sum_{i \geq 0} l_{r,i} p^i.$$

Weiterhin sei $\bar{i}(r, k)$ die kleinste Zahl, sodass $l_{r,i} < l_i = p - 1 - k_i$ ist, wobei die k_i die Koeffizienten der p -adischen Entwicklung von $(k-1)^*$ seien (diese existiert, da die p -adische Entwicklung von $\mu_r(k)$ endlich ist, denn $\mu_r(k)$ ist eine natürliche Zahl). Da unabhängig von k schon $\mu_0(k) = 0$ ist, haben wir also zum Beispiel $\bar{i}(0, k) = \min\{i \mid k_i < p - 1\}$.

Wir werden nun bezüglich der Zahlen $\bar{r}(k)$ und $\bar{i}(r, k)$ einige Eigenschaften herausarbeiten, um später mit deren Hilfe durch eine Kette von Äquivalenzen die Behauptung zeigen zu können.

Es gilt offensichtlich $\bar{i}(r+1, k) \geq \bar{i}(r, k) + 1$ nach der Konstruktion der $\mu_r(k)$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $\bar{i}(r, k) \geq N$ gilt. Außerdem ist $l_{r,i} = 0$ für $i > \bar{i}(r, k)$. Mit letzterem und den jeweiligen p -adischen Entwicklungen ist dann

$$\begin{aligned}
k + \mu_r(k) &= (k-1) + 1 + \mu_r(k) \\
&= (k_{\bar{i}(r,k)} + 1 + l_{r,\bar{i}(r,k)})p^{\bar{i}(r,k)} + \\
&\quad k_{\bar{i}(r,k)+1}p^{\bar{i}(r,k)+1} + k_{\bar{i}(r,k)+2}p^{\bar{i}(r,k)+2} + \dots
\end{aligned}$$

Dies liefert, falls die Gleichheit

$$p(k + \mu_r(k)) = k + \mu_{r+1}(k)$$

gewährleistet ist, dass dann schon

$$\bar{i}(r+1, k) = \bar{i}(r, k) + 1,$$

sowie

$$\begin{aligned} k_i + l_{r, \bar{i}} &= k_{\bar{i}+1} + l_{r+1, \bar{i}+1}, \\ k_{\bar{i}+1} &= k_{\bar{i}+2}, \\ k_{\bar{i}+2} &= k_{\bar{i}+3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

gelten, wobei wir ab jetzt abkürzend $\bar{i} := \bar{i}(r, k)$ schreiben.

Da $(k-1)$ eine natürliche Zahl ist und somit $k_i = 0$ für ein hinreichend großes i gilt, vereinfachen sich die letzten Gleichungen zu

$$k_{\bar{i}} + l_{r, \bar{i}} = l_{r+1, \bar{i}+1} \quad \text{und} \quad k_{\bar{i}+1} = k_{\bar{i}+2} = \dots = 0.$$

Also haben wir, beginnend mit dem Ausnutzen von Aussage (ii), folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \gamma_r(k) = 0 &\Leftrightarrow p(k + \mu_r(k)) = k + \mu_{r+1}(k) \\ &\Leftrightarrow \bar{i}(r+1, k) \geq \bar{i}(r, k) + 1 \text{ und, mit } \bar{i} := \bar{i}(r, k), \\ &\quad k_i + l_{r, \bar{i}} = l_{r+1, \bar{i}+1}, k_{\bar{i}+1} = k_{\bar{i}+2} = \dots = 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{i}(r, k) \geq N \\ &\Leftrightarrow \mu_r(k) + k \equiv 0 \pmod{p^N} \\ &\Leftrightarrow r \geq \bar{r}(k), \end{aligned}$$

wobei die beiden letzten aus den gemachten Definitionen folgen; die vorletzte aus derjenigen von $\bar{i}(r, k)$, die letzte aus der von $\bar{r}(k)$. Damit ist (iii) für unendliche Gitter gezeigt. [Gek11, §6]

Der endliche Fall ergibt sich unmittelbar aus der Aussage in (ii) bezüglich dieser Situation.

(iv) Laut Gleichung (4.3.1) ist $\gamma(k) = k - \sum_{r \geq 0} \gamma_r(k)$. Setzt man dies über Gleichung (4.3.2) in (4.3.3) ein, so folgt, dass gilt:

$$\gamma(k) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k + \mu_r(k)}{p^r}.$$

Nach (iii) sind aber die $\gamma_r(k)$, mit $r \geq 0$, schon 0 für $r \geq \bar{r}(k)$. Das heißt, dass der Grenzwert exakt an der Stelle \bar{r} erreicht wird. Um diesen zu berechnen, müssen wir nun also nur noch die p -adische Entwicklung von $\mu_{\bar{r}}(k)$ bestimmen, denn die von $k-1$ kennen wir ja bereits.

Ein Vergleich mit der Definition von \bar{r} aus (iii) zeigt, dass \bar{r} so konstruiert ist, dass diese Zahl minimal ist mit der Eigenschaft

$$\bar{r}(p-1) \geq l_0 + l_1 + \dots + l_{N-1} = N(p-1) - l(k-1) + k_N, \quad (4.3.4)$$

wobei im letzten Schritt die Definition von $l(k-1)$ mit einging. Umstellen liefert

$$(N - \bar{r})(p-1) + k_N \leq l(k-1).$$

Unser $\mu_{\bar{r}}(k)$ besitzt wegen der Äquivalenzen im Beweis zu (iii) eine p -adische Entwicklung der Gestalt

$$l_0 + l_1 + \dots + l_{N-1}p^{N-1} + ap^N + bp^{N+1},$$

mit $b = 0$, falls $a < p - 1 - k_N$, und $a + b \in \{0, 1, \dots, p - 2\}$ (vergleiche dazu die Konstruktion von $\mu_r(k)$, für $r \geq 0$, und die Bedingungen an $\bar{i}(r, k)$).

Es verbleibt die Bestimmung von a und b :

Der Rest $a + b$ ist genau die Zahl, welche in Gleichung (4.3.4) zum Abschätzen benötigt wird, das heißt, es gilt:

$$\begin{aligned} a + b &= \bar{r} \cdot (p - 1) - (l_0 + l_1 + \dots + l_{N+1}) \\ &= \bar{r} \cdot (p - 1) - N(p - 1) + l(k - 1) - k_N \\ &= l(k - 1) - k_N - (\bar{r} - N)(p - 1). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $R := R(k)$ für den Repräsentanten von $l(k - 1)$ modulo $(p - 1)$, so führt uns dies zu folgender Fallunterscheidung:

$$\alpha) R \geq k_N \quad \text{und} \quad \beta) R < k_N.$$

Im Fall α) ist dann $a + b = R - k_N$ und $N - \bar{r} = \lfloor l(k - 1)/(p - 1) \rfloor$. Wegen $R - k_N \leq p - 1 - k_N$ muss dann schon $a = R - k_N$ und $b = 0$ gelten. Addition der p -adischen Entwicklungen liefert folglich $k + \mu_{\bar{r}}(k)$. Also ist

$$\gamma(k) = \frac{(R + 1)p^N}{p^{\bar{r}}} = (R + 1)p^{N - \bar{r}} = (R + 1)p^{\lfloor l(k - 1)/(p - 1) \rfloor}.$$

Im Fall β) ist $a + b = p - 1 + R - k_N$ und $N - \bar{r} = \lfloor l(k - 1)/(p - 1) \rfloor - 1$. Es folgt hier $a = p - 1 - k_N$ und $b = R$. Also:

$$\begin{aligned} \gamma_r(k) &= \frac{k + \mu_{\bar{r}}(k)}{p^{\bar{r}}} = \frac{(R + 1)p^{N+1}}{p^{\bar{r}}} \\ &= (R + 1)p^{N - \bar{r} + 1} = (R + 1)p^{\lfloor l(k - 1)/(p - 1) \rfloor}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir in beiden Fällen die Behauptung. [Gek11, §6]

Der Nachsatz für endlichdimensionale Gitter ergibt sich wiederum aufgrund der zugehörigen Aussage in (ii). \square

Bemerkung. Die Formel für $\gamma_r(k)$ in Teil (ii) des Satzes ist unabhängig vom zugrundeliegenden Gitter Λ , denn die erzeugenden Gitterelemente spielen keine Rolle bei der Berechnung.

Insbesondere ist damit die Länge der jeweiligen Abschnitte des zugehörigen Newtonpolygons nicht vom Gitter Λ abhängig. Lediglich die entsprechenden Steigungen variieren, falls man betragsmäßig andere erzeugende Gitterelemente vorliegen hat.

Diese Bemerkung sei nochmals an Hand von Beispielen unterstrichen, welche alle Ergebnisse von Satz 4.3.1 demonstrieren.

4.3.2. Beispiel. (i) Wir betrachten

$$\Lambda = \langle 1, T, T^2, \dots \rangle = \mathbb{F}_p[T]$$

für $p = 3$. Es sei weiterhin $k = 43$, also $k - 1 = 2 \cdot 2^3 + 3^2 + 3^3$.

Damit ist $l(k - 1) = 2 + 1 + 1 = 4$ und $R(k) = 0$ (da $4 \equiv 0(2)$ gilt). Weiterhin erhalten wir

$$(k - 1)^* = 2 + 0 \cdot 3 + 3^2 + 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + \dots,$$

sodass gilt:

$$\mu_0(k) = 0, \mu_1(k) = 2, \mu_2(k) = 2 + 3^2, \mu_3(k) = 2 + 3^2 + 3^3 + 2 \cdot 3^4, \dots$$

Aufgrund der Formel

$$\gamma_r(k) = \frac{(p-1)k + p\mu_r(k) - \mu_{r+1}}{p^r},$$

für $r \geq 0$, ergibt sich also

$$\gamma_0(k) = 28, \gamma_1(k) = 6, \gamma_2(k) = \gamma_3(k) = \dots = 0$$

und

$$\gamma(k) = 43 - (28 + 6) = 9 = 3^2 = (R(k) + 1)p^{\lfloor l(k-1)/(p-1) \rfloor}.$$

Somit ist G_{43} durch X^9 teilbar und die für die Knickpunkte des Newtonpolygons relevanten Koeffizienten sind diejenigen mit Index 9, $9 + 6 = 15$ und $15 + 28 = 43$. Über die Steigungen können wir nun das Newtonpolygon „von rechts nach links“ konstruieren, beginnend mit $(43, 0)$.

Zunächst haben wir einen Abschnitt der Länge 28 mit Steigung

$$(3-1) \sum_{i=0}^{-1} s_i 3^i - s_0 3^0 = 0;$$

dies liefert den Punkt $(15, 0)$.

Der letzte Abschnitt besitzt die Länge 6 und die Steigung

$$(3-1) \sum_{i=0}^0 s_i 3^i - s_1 3^1 = 0 - 3 = -3;$$

dies liefert den Punkt $(9, 18)$.

Also besitzt damit insgesamt $NP(G_{43}(X))$ die Knickpunkte $(9, 18)$, $(15, 0)$ und $(43, 0)$.

Bemerkung. Die berechneten Ergebnisse stimmen exakt mit denen von [Gek11, §6, Example 6.14, (i)] überein. Also unterstreicht dies die Konformität mit dem bereits Bekannten.

(ii) Wir betrachten

$$\begin{aligned} \Lambda &= \langle 1, T^2, T^5, T^9, T^{14} \dots \rangle \\ &= \langle \lambda_i \mid \lambda_0 = T^0; \lambda_{i+1} = \lambda_i T^{i+2}, \text{ für } i \geq 0 \rangle \subseteq \mathbb{F}_p[T] \end{aligned}$$

für $p = 2$. Es sei weiterhin $k = 49$, also $k - 1 = 2^4 + 2^5$.

Damit ist $l(k-1) = 2$ und $R(k) = 0$ (da $2 \equiv 0(1)$ gilt). Weiterhin erhalten wir

$$(k-1)^* = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^6 + 2^7 + \dots,$$

sodass gilt:

$$\mu_0(k) = 0, \mu_1(k) = 1, \mu_2(k) = 3, \mu_3(k) = 7, \mu_4(k) = 15, \mu_5(k) = 79, \dots$$

Mit der Formel für $\gamma_r(k)$ aus Proposition 4.3.1 ergibt sich also

$$\gamma_0(k) = 24, \gamma_1(k) = 12, \gamma_2(k) = 6, \gamma_3(k) = 3, \gamma_4(k) = \gamma_5(k) = \dots = 0$$

und

$$\gamma(k) = 49 - (24 + 12 + 6 + 3) = 4 = 2^2 = (R(k) + 1)p^{\lfloor l(k-1)/(p-1) \rfloor}.$$

Somit ist G_{49} durch X^4 teilbar und die für die Knickpunkte des Newtonpolygons relevanten Koeffizienten sind diejenigen mit Index 4, $4 + 3 = 7$, $7 + 6 = 13$, $13 + 12 =$

25 und $25 + 24 = 49$. Wie in Beispiel (i) berechnen wir nun die Steigungen der Strecken dazwischen. Beginnend mit $(49, 0)$ ergibt sich.

Eine Strecke der Länge 24 mit Steigung

$$\sum_{i=0}^{-1} s_i 2^i - s_0 2^0 = 0;$$

also den Punkt $(25, 0)$.

Eine Strecke der Länge 12 mit Steigung

$$\sum_{i=0}^0 s_i 2^i - s_1 2^1 = -2 \cdot 2 = -4;$$

also den Punkt $(13, 48)$.

Eine Strecke der Länge 6 mit Steigung

$$\sum_{i=0}^1 s_i 2^i - s_2 2^2 = 2 \cdot 2^1 - 5 \cdot 4 = -16;$$

also den Punkt $(7, 144)$.

Eine Strecke der Länge 3 mit Steigung

$$\sum_{i=0}^2 s_i 2^i - s_3 2^3 = 2 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 - 9 \cdot 8 = -48;$$

also den Punkt $(4, 288)$.

Damit besitzt das Newtonpolygon $NP(G_{43}(X))$ die Knickpunkte $(4, 288)$, $(7, 144)$, $(13, 48)$, $(25, 0)$ und $(49, 0)$.

Bemerkung. Dieses Beispiel bestätigt, wie sich das Newtonpolygon unter Änderung der erzeugenden Gitterelemente verhält. In [Gek11, §6, Example6.14, (ii)] wurden unter denselben Voraussetzungen, aber für das Gitter $\Lambda = \mathbb{F}_p[T]$, mit $p = 2$, folgende Knickpunkte errechnet: $(4, 102)$, $(7, 60)$, $(13, 24)$, und $(49, 0)$. Somit hat sich die horizontale Länge der einzelnen Strecken nicht verändert, wohl aber deren Steigung.

Damit schließen wir den Abschnitt zu den Folgerungen aus dem Hauptsatz ab.

Wie schon im Beispiel angeklungen ist, stehen die Ergebnisse in recht guter Beziehung zu bereits bekannten Sachverhalten. Einen Vergleich diesbezüglich ziehen wir im Nachfolgenden.

4.4. Vergleich mit bereits bewiesenen Aussagen

Anlass zur Untersuchung der Fragestellungen der vorliegenden Masterarbeit gaben die Ergebnisse der Arbeit [Gek11] von E.-U. Gekeler und die Möglichkeit, die dortigen Strategien bezüglich $\Lambda = \mathbb{F}_p[T] = A$ für die hiesige Situation adaptieren zu können.

Dass dieses tatsächlich gelang, belegt der Hauptbeweis im zweiten Abschnitt dieses Kapitels. Trotzdem mussten zum Teil Einschnitte und Abstriche gemacht werden, die hauptsächlich der allgemeineren Situation geschuldet sind. Auf Anmerkungen diesbezüglich wurde im Laufe der Untersuchungen weitestgehend verzichtet, da eine entsprechende Zusammenstellung an dieser Stelle sinnvoll erschien, um die einzelnen Argumentationsketten so wenig wie möglich zu unterbrechen.

Zusätzlich sollen auch auffallende Analogie zwischen beiden Arbeiten an dieser Stelle Erwähnung finden.

- Gleich zu Beginn haben wir die Betrachtung von Primzahlpotenzen als Elementanzahl unseres Grundkörpers ausgeschlossen. Diese Einschränkung musste in beiden Arbeiten gemacht werden, da die q -adischen Entwicklungen beziehungsweise ihre Überträge in verschiedenen Zusammenhängen schlichtweg kaum zu kontrollieren sind. Näheres dazu greifen wir auch in Abschnitt 5.1 nochmals auf.
- Die grundlegende Strategie zum Beweis der Hauptaussage ist strukturell identisch: Suche von nullstellenfreien Bereichen über nichtarchimedische Konturintegration - dazu Bestimmung der Laurententwicklung von C_k - Untersuchung derer Koeffizienten - Auffinden eines dominierenden unter denjenigen mit negativem Index.
Insbesondere führte eine Untersuchung von Letzterem jeweils auf den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten.
- Innerhalb der einzelnen Schritte gab es aber zum Teil wesentliche Unterschiede:
 - Die Nullstellengebiete besitzen Radien, die von den erzeugenden Gitterelementen abhängig sind. Im Fall des festen Gitters A ist dies vergleichsweise einfach handhabbar.
 - Die Koeffizienten der Laurententwicklung besitzen eine ähnliche Struktur, allerdings ist die Theorie der darin vorkommenden Potenzsummen fast komplett verschieden (beachte dazu für das Gitter A auch die Referenz [Gek88_2]), und die Berechnung von $\log_p(S_{r+1}(n))$ in unserer Situation aufwendiger und grundverschieden.
- Aufgrund der Vorgabe eines allgemeinen endlichen, beziehungsweise unendlichen \mathbb{F}_p -Gitters, ergab sich wegen der variablen Beträge der gittererzeugenden Elemente zunächst eine neue Formel für den Betrag der Bilder unter der Abbildung t (wobei allerdings die Beweisidee des Abzählens der Gitterelemente beide Male erfolgreich war), was sich auf die Formulierung der Vermutung bezüglich der Beträge der Nullstellen von G_k und der Steigungen des zugehörigen Newtonpolygons auswirkte. Letzteres änderte sich dabei im Vergleich zu passenden Situationen für das Gitter A aber nur dahingehend, dass wir eine vertikale Streckung zu erwarten haben (siehe dazu auch Beispiel 4.3.2(ii)).

Damit schließen wir die Theorie zum Hauptergebnis dieser Arbeit ab.

Die gerade angestellten Überlegungen liefern aber zum Teil Ansätze für weitere Überlegungen, sodass wir diese im abschließenden Kapitel zumindest in Ansätzen weiterverfolgen werden.

Verallgemeinerungen und Spezialfälle

Es ist sicherlich wünschenswert Argumente zu finden, die Übertragungen der Aussagen aus dem vierten Kapitel auf Primzahlpotenzen als Elementanzahl des Grundkörpers zulassen. Leider liegt zu diesem Zeitpunkt nur ein kleines Teilergebnis vor, das allerdings, wie wir sehen werden, bezüglich zweidimensionaler Gitter fast zur vollständigen Problemlösung führt. Für Gitter der Dimension 1 ist die Situation nach den bisherigen Überlegungen sogar bereits gelöst, wie wir an entsprechender Stelle anmerken werden. Etwaige weitere Verallgemeinerungen scheinen (bislang) nicht mit unseren Methoden beweisbar, komplett ausschließen sollte man dies aber nicht.

Ein anderer Ansatzpunkt für tiefere Untersuchungen sind die Formeln in Satz 4.3.1 bezüglich des Nullstellenverhaltens von G_k , welche aufgrund der Terme zu $\mu_r(k)$ sehr stark von der Gestalt des Parameters k abhängen. Für spezielle k ergeben sich, wie wir sehen werden, so ohne aufwendige Rechnungen direkt konkrete Aussagen, die bislang auf zum Teil viel aufwendigeren Argumentationen beruhten. Gleichzeitig können wir mit diesen Ergebnissen die Gestalt des zugehörigen Newtonpolygons durch Berechnen der Knickpunkte sofort angeben.

Die Sammlung weiterführender Überlegungen zu den Ergebnissen von Kapitel 4 beginnen wir mit einer Aussage hinsichtlich der Anzahl der Nullstellen von C_k im „ersten“ relevanten Kreisring: Auch falls ein Körper mit q Elementen zugrundeliegt, gibt es kein z mit $1 < |z| < |\lambda_1|$, sodass $C_k(z) = 0$ gilt. Fast nahtlos schließt sich daran der zweite Abschnitt an, wo wir die zu endlichen Gittern der Dimension 1 oder 2 gehörenden Gosspolynome bezüglich ihrer Nullstellenverteilung vollständig klassifizieren werden. Für zweidimensionale Gitter müssen wir uns dabei wieder auf den Grundkörper \mathbb{F}_p beschränken. Im letzten Kapitelteil beschäftigen wir uns mit einem anderen Parameter dieser Polynome, ihrem Grad k . Wir erhalten für Zahlen k mit bestimmten p -adischen Entwicklungen sehr übersichtliche Ergebnisse, wobei wir uns auch dabei auf \mathbb{F}_p -Gitter beschränken müssen.

5.1. Primzahlpotenzen

Die in der Einleitung angesprochene Aussage für eine Primzahlpotenz q , die wir in diesem Abschnitt stets als Elementanzahl des zugrundeliegenden endlichen Körpers voraussetzen, ist ein Analogon zur Proposition 6.9 im Manuskript [Gek11].

Dazu benötigen wir zunächst noch eine Hilfsaussage zu Potenzsummen, die schon im Beweis von Satz 4.1.6 (i) Anwendung fand, und nun noch für Primzahlpotenzen nachgewiesen wird.

5.1.1. Lemma. *Es gilt:*

$$S_1(n) = \begin{cases} -1 & , 0 < n \equiv 0 \pmod{q-1} \\ 0 & , \text{sonst} . \end{cases}$$

BEWEIS. Es gilt offensichtlich:

$$S_1(n) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} a^n = \begin{cases} -1 & , 0 < n \equiv 0 \pmod{q-1} \\ 0 & , \text{sonst} . \end{cases}$$

□

Nun kommen wir zu der versprochenen Aussage.

5.1.2. Proposition. *Es gilt:*

Die Funktion C_k besitzt keine Nullstellen z in \mathcal{F} mit $1 < |z| < |\lambda_1|$.

Beziehungsweise äquivalent: Das Newtonpolygon $NP(G_k(X))$ hat keine Steigungen echt zwischen 0 und $-q \log_q |\lambda_1|$.

BEWEIS. Wir werden zum Nachweis wie beim Beweis von Satz 4.2.1 vorgehen. Es bleibt also der Kreisring zwischen 1 und $|\lambda_1|$ zu untersuchen. Entscheidend nach unserer Theorie (die bis zu diesem Zeitpunkt für ein allgemeines q gültig ist) sind die Koeffizienten der Laurententwicklung mit negativem Index. Auch hier werden wir diese auf ein dominierendes Element hin untersuchen.

Dazu betrachten wir zunächst das Nichtverschwinden des zugehörigen Ausdrucks:

$$\begin{aligned} a_{-k-n} &= \binom{k-1+n}{n} \omega_0^{-k-n} \sum_{\lambda \in \langle 1 \rangle} \lambda^n \\ &= \binom{k-1+n}{n} \omega_0^{-k-n} S_1(n) \\ &= \binom{k-1+n}{n} \omega_0^{-k-n} \begin{cases} -1 & , 0 < n \equiv 0 \pmod{q-1} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Identität aus obenstehendem Lemma angewandt wurde. Also gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} a_{-k-n} \neq 0 &\Leftrightarrow (0 < n \equiv 0 \pmod{q-1}) \quad \text{und} \quad \binom{k-1+n}{n} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (0 < n \equiv 0 \pmod{q-1}) \quad \text{und} \quad n <_p (k-1)^* , \end{aligned}$$

wobei wir auch hier wieder wie im Hauptbeweis nach dem Verschwinden der Binomialkoeffizienten und der Potenzsumme aufgeteilt haben. Zudem sind wiederum alle Schritte für ein allgemeines q zulässig.

Wählt man nun n_0 als die Summe der $(q-1)$ ersten Digits der p -adischen Entwicklung von $(k-1)^*$, so ist $-k-n_0$ offenbar der kleinste Index, sodass der Koeffizient a_{-k-n} nicht verschwindet.

Analog zum Hauptbeweis folgt, dass damit a_{-k-n_0} die Laurententwicklung von C_k dominiert; und auch die dortige Argumentation ist für ein allgemeines q gültig. Somit ist die erste Behauptung gezeigt.

Die Aussage bezüglich des Newtonpolygons folgt aus der Äquivalenz von (ii) und (iv) in Proposition 2.4.1, welche offensichtlich auch für Primzahlpotenzen gilt, und der dortigen Formel in (iv) für $r = 0$ und $r = 1$. \square

Damit können wir die Lage von Nullstellen der Funktion C_k , welche einem zweidimensionalen Gitter zugehörig ist, fast wie in Kapitel 4 lokalisieren, nun aber sogar für eine Primzahlpotenz q als Elementanzahl des zugrundeliegenden Körpers.

5.1.3. Bemerkung. Es sei $\Lambda = \langle 1, |\lambda_1| \rangle$, mit $\lambda_1 \in C_\infty$ und $|\lambda_1| > 1$, ein zweidimensionales \mathbb{F}_q -Gitter.

Wir wissen nach Lemma 2.1.1, welches insbesondere auch für Primzahlpotenzen gilt, dass C_k keine Nullstellen z mit $|z| < 1$ besitzen kann. Die Nullstellenfreiheit im Bereich $\{z \in C_\infty \mid 1 < |z| < |\lambda_1|\}$ liefert schließlich obige Proposition.

Also fehlt, um den Satz 4.2.1 in dieser Situation etablieren zu können, lediglich noch der Nachweis, dass die Funktion C_k für ein z mit $|z| > |\lambda_1|$ stets von 0 verschieden ist. Aufgrund der bereits mehrfach erwähnten Problematik hinsichtlich von q -adischen Entwicklungen steht dieser Beweis allerdings noch aus.

Bezug zur Situation dieser Bemerkung, unter anderem im Hinblick auf das entsprechende Newtonpolygon, nehmen wir nun im nächsten Abschnitt.

5.2. Ein- und zweidimensionale Gitter

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 4 und dem Abschnitt 5.1 ist ohne weitere Rechnung eine vollständige Klassifizierung der Funktion C_k , des Gosspolynoms G_k sowie des Newtonpolygons $NP(G_k(X))$ bezüglich der unserem Rahmen interessanten Eigenschaften in der Situation für ein- und zweidimensionale Gitter möglich. Insbesondere gelten alle Aussagen bezüglich Gitter der Dimension 1 für einen Grundkörper mit q Elementen (wobei q eine Primzahlpotenz ist), was bereits an entsprechender Stelle angemerkt wurde.

Ausgangspunkt sind die Äquivalenzen in Proposition 2.4.1 die auch hier in beiden Fällen nach den bisherigen Überlegungen Gültigkeit besitzen, sodass wir auch die Formeln aus Satz 4.3.1 verwenden dürfen.

Eindimensionale Gitter.

Wie in Bemerkung 1.3.3 allgemein erläutert wurde, ist die Betrachtung des Gitters $\Lambda = \mathbb{F}_q$, für eine Primzahlpotenz q , ausreichend, um die Kontrolle über alle eindimensionalen Gitter bezüglich der für uns relevanten Fragestellungen zu erlangen. In dieser Situation gilt:

- Die Funktion C_k ist von der Gestalt

$$C_k(z) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \frac{1}{(z-a)^k} = G_k(t(z)),$$

$$\text{mit } t(z) = \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \frac{1}{z-a}.$$

- C_k besitzt ausschließlich Nullstellen z mit $|z| = 1$.
- Alle Nullstellen z von C_k in \mathcal{F} liegen bereits in

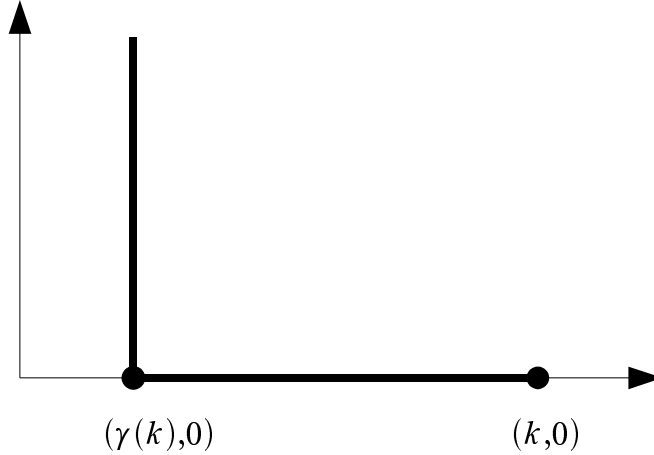
$$\mathcal{F}_0 = \{z \in C_\infty \mid |z| = |z|_m = 1\}.$$

- Alle Nullstellen $x \neq 0$ von $G_k(X)$ besitzen den Betrag 1.

- Die Nullstelle 0 von G_k besitzt die Multiplizität

$$\gamma(k) = k - \gamma_0(k) = k - \frac{(q-1)k - \mu_1(k)}{q} = \frac{k + \mu_1(k)}{q}.$$

- Die einzige im Newtonpolygon $NP(G_k(X))$ vorkommende Steigung (neben ∞) ist 0. Also ist es von der folgenden Gestalt:



Der einzige Knickpunkt ist somit $(\gamma(k), 0)$.

Zweidimensionale Gitter.

Wie in Bemerkung 1.3.3 allgemein erläutert wurde, ist die Betrachtung des Gitters $\Lambda = \mathbb{F}_p + \lambda_1 \cdot \mathbb{F}_p$, mit $\lambda \in C_\infty$, $|\lambda_1| > 1$ sowie einer Primzahl p , ausreichend, um die Kontrolle über alle eindimensionalen Gitter bezüglich der für uns relevanten Fragestellungen zu erlangen. In dieser Situation gilt:

- Die Funktion C_k ist von der Gestalt

$$C_k(z) = \sum_{(c_1, c_2) \in \mathbb{F}_p^2} \frac{1}{(z - c_1 - \lambda_1 c_2)^k} = G_k(t(z)),$$

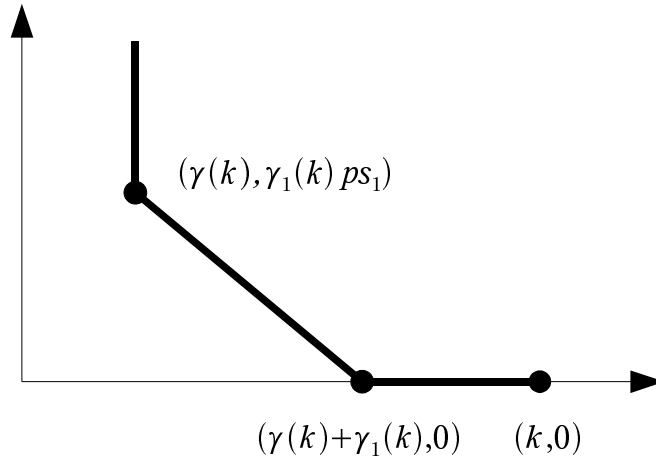
mit

$$t(z) = \sum_{(c_1, c_2) \in \mathbb{F}_p^2} \frac{1}{z - c_1 - \lambda_1 c_2}.$$

- C_k besitzt ausschließlich Nullstellen z mit $|z| = 1$ oder $|z| = |\lambda_1|$. (Dies folgt direkt aus Lemma (2.1.1) und Korollar (5.1.3).)
- Alle Nullstellen z von C_k in \mathcal{F} liegen bereits in $\mathcal{F}_0 \dot{\cup} \mathcal{F}_1$.
- Alle Nullstellen $x \neq 0$ von $G_k(X)$ besitzen den Betrag 1 oder $p^{-p \log_p |\lambda_1|}$.
- Die Nullstelle 0 von G_k besitzt die Multiplizität

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= k - \gamma_0(k) - \gamma_1(k). \\ &= k - \frac{(p-1)k - \mu_1(k)}{p} - \frac{(p-1)k + p\mu_1(k) - \mu_2(k)}{p^2} \\ &= \frac{k + \mu_2(k)}{p^2}. \end{aligned}$$

- Die einzigen im Newtonpolygon $NP(G_k(X))$ vorkommenden Steigungen (neben ∞) sind $-p \cdot s_1$ und 0. Also ist es von der folgenden Gestalt



Die Knickpunkte sind somit $(\gamma(k), \gamma_1(k) \cdot ps_1)$ und $(\gamma(k) + \gamma_1(k), 0)$.

Damit sind die relevanten Fragestellungen in der Situation von ein- und zweidimensionalen Gittern vollständig geklärt und im konkreten Fall müssen nur noch die Werte für q (beziehungsweise p) und k eingesetzt werden.

Den letzten Parameter, welcher den Grad des Gosspolynoms G_k beschreibt, untersuchen wir nun noch gesondert im abschließenden Kapitelteil.

5.3. Spezielle Wahlen für k

In diesem Abschnitt kehren wir zur Situation von Satz 4.2.1 zurück, der insbesondere nur auf Grundlage von Körpern mit p Elementen gezeigt wurde.

Es gibt einige bestimmte Typen von Gosspolynomen, für die sich die entsprechenden Aussagen von Satz 4.3.1 sehr stark vereinfachen. Ausschlaggebend dafür ist ein bestimmter Wert ihres Grades k , da die p -adische Entwicklung von k in vielen Formeln die tragende Rolle spielt.

Der Fall $0 < k = c \cdot p^n$, mit $c \in \{1, \dots, p-1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Für solche k kennen wir bereits die Gestalt der zu C_k gehörigen Gosspolynome. Die Form

$$G_k(X) = X^k$$

ergibt sich unmittelbar aus der Aussage (iii) und der Rekursionsformel (iv) in Satz/Definition 1.2.9.

Unsere Ergebnisse aus dem vierten Kapitel sind damit konsistent, wie die nachfolgende Rechnung zeigt:

Um die $\gamma_i(k)$, für $i \geq 0$, sowie $\gamma(k)$ zu bestimmen, geben wir zunächst die weiteren

relevanten Parameter an:

$$\begin{aligned} k-1 &= \sum_{i=0}^{n-1} (p-1)p^i + (c-1)p^n \\ (k-1)^* &= (p-c)p^n + (p-1)p^{n+1} + (p-1)p^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mu_1(k) = (p-c)p^n + (c-1)p^{n+1}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \gamma_0(k) &= \frac{(p-1)k - \mu_1(k)}{p} \\ &= \frac{(p-1)cp^n - (p-c)p^n - (c-1)p^{n+1}}{p} \\ &= 0, \end{aligned}$$

und folglich $\gamma_1(k) = \gamma_2(k) = \dots = 0$. Daraus resultiert schon, wie oben angegeben, dass $G_k(X) = X^k$ ist für $0 < k = c \cdot p^n$, mit $c \in \{1, \dots, p-1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung. Zu den gleichen Ergebnissen kommen wir auch durch Verwenden der Teile (iii) und (iv) von Satz 4.3.1:

Es ist einerseits $\bar{r}(k) = 0$, da $\mu_0(k) = 0$ und $k = cp^n$ kongruent zu 0 modulo p^N , mit $N = n$, ist.

Andererseits ist $R(k) = c-1$ (da $l(k-1) = n(p-1) + c-1$ kongruent zu $(c-1)$ modulo $(p-1)$ ist), was wegen $\lfloor l(k-1)/(p-1) \rfloor = n$ wiederum sogleich $\gamma(k) = cp^n = k$ ergibt.

Der Fall $k = p^n - 1$, mit $1 < n \in \mathbb{N}$.

Auch für solche k wird es unser Ziel sein, direkt das Gosspolynom $G_k(X)$ mit zugehörigem Newtonpolygon $NP(G_k(X))$ angeben zu können.

Wiederum müssen wir erst noch die Objekte $(k-1)^*$ und $\mu_i(k)$, für $i \geq 0$, berechnen, um die entsprechenden Formeln für die $\gamma_i(k)$, mit $i \geq 0$, und $\gamma(k)$ anwenden zu können.

Wir betrachten wieder zunächst die p -adische Entwicklung von $k-1$: Diese ist gegeben durch

$$k-1 = (p-2) + (p-1)p + \dots + (p-1)p^{n-1}.$$

Damit ist

$$(k-1)^* = 1 + (p-1)p^n + (p-1)p^{n+1} + \dots$$

Also erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned} \mu_1(k) &= 1 + (p-2)p^n, \\ \mu_2(k) &= 1 + (p-1)p^n + (p-2)p^{n+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Damit können wir zur Nullstellenverteilung kommen. Es ist

$$\begin{aligned}
\gamma_0(k) &= \frac{(p-1)k - 1 - (p-2)p^n}{p} = \frac{(p-1)(p^n - 1) - 1 - (p-2)p^n}{p} \\
&= p^{n-1} - 1, \\
\gamma_1(k) &= \frac{(p-1)k + p(1 + (p-2)p^n) - 1 - (p-1)p^n - (p-2)p^{n+1}}{p^2} \\
&= \frac{(p-1)(p^n - 1) + p(1 + p^{n+1} - 2p^n) - 1 - p^{n+1} + p^n - p^{n+2} + 2p^{n+1}}{p^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also folglich $\gamma_2(k) = \gamma_3(k) = \dots = 0$, was schließlich

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= k - \gamma_0(k) \\
&= p^n - 1 - p^{n-1} + 1 \\
&= (p-1)p^{n-1}
\end{aligned}$$

ergibt.

Zusammenfassend besitzt also das Gosspolynom $G_k(X)$ für $k = p^n - 1$, mit $1 < n \in \mathbb{N}$, außer der $(p-1)p^{n-1}$ -fachen Nullstelle 0, nur solche mit einem Betrag von 1.

Das zugehörige Newtonpolygon besitzt deshalb lediglich den Knickpunkt $((p-1)p^{n-1}; 0)$ (vergleiche dazu auch die Überlegungen zu eindimensionalen Gittern im Abschnitt 5.2).

Bemerkung. (i) Es ist allgemein bekannt, wie in [Gek88_1, §3] gezeigt wird:

Es sei Λ ein \mathbb{F}_q -Gitter in C_∞ mit einer log-Funktion $\log_\Lambda(z) = \sum_{i \geq 0} \beta_i z^{q^i}$. Falls k von der Form $k = q^n - 1$ ist, so gilt

$$G_{k,\Lambda}(X) = \sum_{0 \leq i < n} \beta_i X^{q^n - q^i}.$$

Davon ausgehend zeigt E.-U. Gekeler in [Gek11, §7] die oben errechneten Aussagen, und kommt zur selben Nullstellenverteilung sowie dem gleichen Newtonpolygon. Wir erhielten dies ohne weitere theoretische Hintergründe.

(ii) Wiederum führen auch hier die Formeln aus den Teilen (iii) und (iv) von Satz 4.3.1 zu denselben Ergebnissen:

Es ist einerseits $\bar{r}(k) = 1$, da $\mu_1(k) = 1 + (p-2)p^n$ gilt und somit $\mu_1(k) + k = p^{n+1} - p^n \equiv 0 \pmod{p^N}$ mit $N = n$ ist.

Andererseits ist $R(k) = p - 2$ (da $l(k-1) = p - 2 + (n-1)(p-1)$ kongruent zu $(p-2) \pmod{(p-1)}$), wodurch die Formel für $\gamma(k)$ wegen

$$\lfloor l(k-1)/(p-1) \rfloor = \lfloor [p-2 + (n-1)(p-1)]/(p-1) \rfloor = n-1$$

direkt $\gamma(k) = (p-2+1)p^{n-1} = (p-1)p^{n-1}$ liefert.

Der Fall $k = p^n + 1$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Mit der Zielsetzung, die $\gamma_i(k)$, für $i \geq 0$, sowie $\gamma(k)$ zu bestimmen, und analogem Vorgehen wie in den bisherigen Fällen erhalten wir hierfür:

Wir betrachten wieder zunächst die p -adische Entwicklung von $k-1$: Diese ist gegeben durch

$$k - 1 = p^n.$$

Damit ist

$$(k - 1)^* = (p - 1) + (p - 1)p + \dots + (p - 1)p^{n-1} + (p - 2)p^n + (p - 1)p^{n+1} + \dots$$

Also erhalten wir weiterhin

$$\mu_r(k) = \begin{cases} \sum_{i=0}^r (p - 1)p^i & , \text{ für } r \leq n \\ \sum_{i=0}^{r-1} (p - 1)p^i + p^r - p^n & , \text{ für } r > n. \end{cases}$$

Damit können wir zur Nullstellenverteilung kommen. Es ist

$$\begin{aligned} \gamma_0(k) &= \frac{(p - 1)k - p + 1}{p} = \frac{(p - 1)(p^n + 1) - p + 1}{p} \\ &= (p - 1)p^{n-1}, \\ \gamma_1(k) &= \frac{(p - 1)k + p(p - 1) - (p - 1) - p(p - 1)}{p^2} \\ &= (p - 1)p^{n-2}, \\ &\vdots \\ \gamma_{n-1}(k) &= p - 1, \\ \gamma_n(k) &= 0, \end{aligned}$$

also folglich $\gamma_{n+1}(k) = \gamma_{n+2}(k) = \dots = 0$, was schließlich

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= k - \sum_{i=0}^{n-1} (p - 1)p^i \\ &= p^n + 1 - (p - 1) \frac{1 - p^n}{1 - p} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ergibt.

Zusammenfassend besitzt also das Gosspolynom $G_k(X)$ für $k = p^n + 1$, mit $n \in \mathbb{N}$, die doppelte Nullstelle 0, und die Nullstellen der entsprechenden Funktion C_k in \mathcal{F} liegen schon in $\cup_{0 \leq r \leq n-1} \mathcal{F}_r$.

Auf eine genaue Angabe des zugehörigen Newtonpolygons verzichten wir an dieser Stelle. Festzuhalten bleibt jedenfalls, dass es genau n Knickstellen besitzt und man diese leicht mit obigen Ergebnissen und den Formeln aus Satz 4.3.1 errechnen kann.

Bemerkung. Wiederum führen auch hier die Formeln aus den Teilen (iii) und (iv) von Satz 4.3.1 zu denselben Ergebnissen:

Es ist einerseits $\bar{r}(k) = n$, denn die Bedingung $\mu_r(k) + k \equiv 0 \pmod{p^r}$ ist hier äquivalent zu $\mu_r(k) + p^n + 1 \equiv 0 \pmod{p^r}$ und dies gilt offensichtlich erst für $\mu_n(k) = p^n - 1$, denn dann ist $p^n - 1 + p^n + 1 = 2p^n$ und dieser Ausdruck ist kongruent zu 0 modulo p^n . Andererseits ist $R(k) = 1$, für $p > 2$, beziehungsweise $R(k) = 0$, für $p = 2$, (da $l(k - 1) = 1$), wodurch die Formel für $\gamma(k)$ im Fall $p > 2$ schon

$$\gamma(k) = (1 + 1)p^{\lfloor 1/(p-1) \rfloor} = 2$$

liefert und auch für $p = 2$ zu dem Ergebnis

$$\gamma(k) = (0 + 1) \cdot 2^{\lfloor 1/1 \rfloor} = 2$$

führt.

Damit sind alle einfach abzuhandelnden Fälle durchgesprochen, in denen die p -adische Entwicklung des Parameters k , der den Grad des Gosspolynoms G_k beschreibt, eine bestimmte Gestalt besitzt. Natürlich kann man nun noch die einzelnen Ergebnisse aus dem Abschnitt 5.2 dazu in Relation setzen, und wird feststellen, dass die beiden miteinander konsistent sind. Diese recht einfachen Überlegungen, für die ein Blick auf die entsprechenden Formeln genügt, überlassen wir daher dem Leser.

Somit schließen wir an dieser Stelle die Untersuchungen zu dem Nullstellenverhalten der Funktionen C_k und den Gosspolynomen G_k im Rahmen der vorliegenden Masterarbeit ab.

Anhang

Anhang A: Nichtarchimedische Analysis

Wir geben hier einen knappen Überblick über die in der vorliegenden Arbeit wichtigen Elemente der Theorie der *nichtarchimedischen Analysis*. Alle Resultate sind, teilweise ausführlicher, in [Gos96, 2] und [Mon70] oder auch bei [FrPu04] nachzulesen; ebenso die hier nicht ausgeführten Beweise. Wie auch in den Referenzen führen wir die Konzepte im allgemeinen Rahmen ein; die Übertragung auf unsere spezielle Situation in dieser Arbeit ist leicht einzusehen, und wird teilweise an Hand von Beispielen dargelegt.

Wir betrachten im gesamten Abschnitt einen Körper K von beliebiger Charakteristik.

Definition. Eine reellwertige Bewertung auf K ist eine Abbildung

$$v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

für die bezüglich aller $x, y \in K$ gilt:

- (i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- (iii) $v(x + y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$.

Damit wird K zu einem bewerteten Körper: Ein Element $x \in K$ ist „klein“ genau dann, wenn $v(x)$ „groß“ ist (im üblichen Sinn in \mathbb{R}). Also macht es Sinn, bezüglich v über Cauchy-Folgen zu sprechen.

Wir fordern *im Weiteren*, dass K *vollständig bezüglich v* ist. Das heißt, jede Cauchy-Folge mit Elementen in K konvergiert gegen ein Element aus K .

Definition. Sei $0 < \alpha < 1$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Man erhält einen nichtarchimedischen Absolutbetrag $|\cdot|_v : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch die Festlegung

$$|x|_v := |x| := \alpha^{-v(x)}.$$

Wie man leicht sieht, besitzt dieser die folgenden Eigenschaften.

Lemma. Für einen Absolutbetrag $|\cdot|$ gilt:

- (i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- (iii) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$;
- (iv) Es existiert ein $x \in K$ mit $|x| \neq 0; 1$;
- (v) K ist vollständig bezüglich der Metrik $d(x, y) := |x - y|$.

Bezüglich dieses Absolutbetrages sind folgende Mengen wichtig.

Definition. Man nennt

$$R := R_K := \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

den Bewertungsring von K ; und setzt weiterhin

$$M := M_K := \{x \in K \mid |x| < 1\}.$$

Lemma. Es ist R ein lokaler Ring und $M \subset R$ das zugehörige eindeutig bestimmte maximale Ideal.

Beispiel. In der speziellen Situation dieser Arbeit bedeutet das:

K ist $\mathbb{F}_p((\frac{1}{T}))$, der Körper der formalen Laurent-Reihen über \mathbb{F}_p . Ausgehend von $\mathbb{F}_p(T)$ setzt man $v(0) = \infty$ und für $x \in \mathbb{F}_p(T)^*$ erhält man bezüglich der Darstellung $(\frac{1}{T})^e x_0$, wobei Zähler und Nenner von x_0 teilerfremd zu T sind, den Wert $v(x) = e$. Der Körper $\mathbb{F}_p((\frac{1}{T}))$ ist dann die Vervollständigung von $\mathbb{F}_p(T)$ bezüglich diesem v . Die Bewertung v setzt sich stetig auf K fort. Der Bewertungsring ist $\mathbb{F}_p[[T]]$, das zugehörige maximale Ideal ist $T \cdot \mathbb{F}_p[[T]]$.

Zur genaueren Untersuchung von Bewertungen und Absolutbeträgen dient die folgende Bezeichnung.

Definition. Man nennt die Menge $G := \{|x| \mid x \in K, x \neq 0\}$ die Bewertungsgruppe von K .

Diesbezüglich führt man folgende Unterteilung ein.

Definition. (i) Man nennt K diskret bewertet, falls G eine zyklische Gruppe ist.
(ii) Ist die Gruppe G nicht zyklisch, so heißt die Bewertung dicht.

Bemerkung. Hier meint die Bezeichnung *zyklisch* für G , dass unter den Elementen von G , die echt kleiner als 1 sind, ein maximales existiert, welches dann auch den Erzeuger von G darstellt. Das heißt, es existiert eine Zahl $0 < \rho < 1$, sodass gilt:

$$G = \{\rho^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Beispiel. (i) Die p -adischen Bewertungen beziehungsweise Absolutbeträge sind diskret.

(ii) Sei K ein Körper. Betrachte die sogenannten Puisseux-Reihen $f(X) = a_1 X^{\alpha_1} + a_2 X^{\alpha_2} + \dots$, mit $a_1 \neq 0$ und $a_i \in K$, für $i > 1$, und einer wachsenden Folge $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ rationaler Zahlen. Die Menge dieser Folgen bildet wiederum einen Körper K' , dessen Bewertungsgruppe beispielsweise mit folgender Festsetzung nicht zyklisch ist: $|f(X)| = 2^{-\alpha_1}$ und $|0| = 0$.

Der oben eingeführte Absolutbetrag v lässt sich eindeutig auf eine endliche Körpererweiterung L von K fortsetzen.

Definition. Ein vollständiger Körper heißt lokaler Körper, falls er lokalkompakt bezüglich der durch v induzierten Topologie ist.

Ist ein gegebener Körper in unserem nichtarchimedischen Fall lokal, so resultiert daraus eine spezielle Wahl für die Zahl α in der Definition von $|\cdot|$: Der Bewertungsring R ist nun kompakt; und da $M \subset R$ offen ist, folgt, dass R/M ein endlicher Körper der Ordnung q , mit einer Primzahlpotenz q , ist. Deshalb wählen wir $\alpha = 1/q$. Den zugehörigen Absolutbetrag nennt man *normalisiert*.

Gehen wir nun zum algebraischen Abschluss \bar{K} von K über.

Proposition. *Sei K ein vollständiger Körper mit Bewertung v , und \bar{K} ein fester algebraischer Abschluss von K versehen mit der kanonischen Erweiterung von v . Weiterhin sei $\widehat{\bar{K}}$ die Vervollständigung von \bar{K} bezüglich v .*

Dann ist auch $\widehat{\bar{K}}$ algebraisch abgeschlossen.

BEWEIS. [Gos96, 2, Prop2.1]. □

Die Definitionen der *Konvergenz* beziehungsweise *Divergenz* von *unendlichen Reihen* der Form $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, mit Koeffizienten in K , lassen sich wie in der klassischen archimedischen Analysis formulieren. Allerdings ausschließlich in unserer Situation, und nicht im klassischen archimedischen Fall, gilt das Folgende.

Lemma. *Die unendliche Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergiert gegen ein Element von K dann, und nur dann, wenn $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ gilt.*

BEWEIS. Die „nur dann“-Aussage ergibt sich analog zur klassischen Situation. Die „dann“-Aussage folgt leicht aus der verschärften Dreiecksungleichung. □

Für den Rest des Abschnittes setzen wir K als *vollständig und algebraisch abgeschlossen* voraus.

Es sei $f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten in K . Konvergiert $f(X)$ in einem Punkt $\alpha \in K$, so muss gelten $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j \alpha^j = 0$, beziehungsweise $\lim_{j \rightarrow \infty} (v(a_j) + jv(\alpha)) = \infty$.

Definition. *Es sei*

$$\varrho(f) := - \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{v(a_j)}{j}.$$

Man nennt $\varrho(f)$ die Konvergenzordnung von $f(X)$.

Aus dieser Definition ergibt sich leicht die folgende Aussage.

Lemma. *Es sei $\alpha \in K$.*

Dann konvergiert $f(X)$ in α , falls $v(\alpha) > \varrho(f)$, und divergiert, falls $v(\alpha) < \varrho(f)$.

Weiterhin ist wegen der nichtarchimedischen Situation die Antwort bezüglich der Konvergenzfrage für den Fall $v(\alpha) = \varrho(f)$ für alle $\alpha \in K$ dieselbe.

Die letzte Aussage des Lemmas gilt deshalb, da eine Reihe genau dann konvergiert, wenn $|a_n| \cdot |x|^n \rightarrow 0$, und dies hängt nur von der Norm $|x|$ ab und nicht von einem bestimmten x mit gegebenem Betrag.

Wir unterstreichen dies mit einem Beispiel.

Beispiel. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{X^n}{n}.$$

Es gilt

$$|a_n| = p^{\text{ord}_p(n)},$$

und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1$.

Also konvergiert die Reihe für alle α mit $|\alpha| < 1$; Divergenz liefern die α mit $|\alpha| > 1$.

Betrachten wir nun ein α mit $|\alpha| = 1$, so haben wir $|a_n X^n| = p^{\text{ord}_p(n)} \geq 1$. Das heißt, die Reihe divergiert für alle α mit $|\alpha| = 1$.

Wir wollen uns nun eine Produktdarstellung bezüglich der Nullstellen von f erarbeiten.

Diese wird nur für geeignete Funktionen gültig sein.

Definition. Es sei $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$.

Die Funktion f heißt ganz genau dann, wenn $\varrho(f) = -\infty$ ist (das heißt, genau dann, wenn $f(\alpha)$ für alle $\alpha \in K$ konvergiert).

Eine wichtige Eigenschaft ganzer Funktionen ist die Folgende.

Proposition. Ist $f : K \rightarrow K$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen, so ist f schon konstant.

BEWEIS. [Gos96, 2, Prop2.13]. □

Damit können wir nun die versprochene Produktformel angeben, die ein Analogon zum Weierstraßschen Produktsatz darstellt.

Satz. Es sei $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ eine ganze Funktion mit der Nullstellenmenge $\{0 = \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots\}$, wobei die μ_i , für $i \geq 0$, paarweise verschieden sind.

Dann ist $-\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(\mu_t)$, und f lässt sich zerlegen in

$$f(X) = cX^n \prod_{i \geq 1} \left(1 - \frac{X}{\mu_i}\right)^{m_i},$$

mit einer Konstanten c und den Nullstellenordnungen n in $\alpha = 0$, sowie jeweils m_i in $\alpha = \mu_i$, für $i > 0$.

Umgekehrt gilt: Ist $\{0 = \mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots\}$ wie oben und $c \in K$, dann definiert ein Produkt wie oben eine ganze Funktion.

BEWEIS. [Gos96, 2, Thm2.14]. □

Daraus können wir auf eine unmittelbare Folgerung schließen. Diese bezieht sich auf den sogenannten Divisor einer Funktion, welcher in unserem Fall gegeben ist als die formale Summe $\sum_{i > 0} m_i \mu_i$.

Korollar. Eine ganze Funktion ist bis auf eine Konstante eindeutig durch ihren Divisor bestimmt.

Mit diesem Resultat beenden wir die kurze Einführung in die Theorie der nichtarchimedischen Analysis.

Anhang B: Newtonpolygone

Wir geben in diesem Abschnitt eine kurze Einführung zur Theorie der sogenannten Newtonpolygone, die mit dem Hauptergebnis dieser Masterarbeit in Verbindung stehen, da sie als grundlegende Eigenschaft Informationen über die Nullstellen von Polynomen kodieren.

Es sei noch angemerkt, dass wir uns dabei auf die Betrachtung von Polynomen beschränken; eine entsprechende Formulierung für Potenzreihen ist möglich. Letztere tauchen in unserem Kontext allerdings nicht auf, weshalb wir uns so die Betrachtung der bei Potenzreihen auftretenden Spezialfälle ersparen können.

Definition. Es sei $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, mit $a_0 \cdot a_n \neq 0$ ein Polynom über C_∞ .

Jedem Term a_iX^i wird ein Punkt $(i, v_\infty(a_i)) \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet, wobei im Fall $a_i = 0$ der Punkt (i, ∞) als nicht existent ignoriert wird.

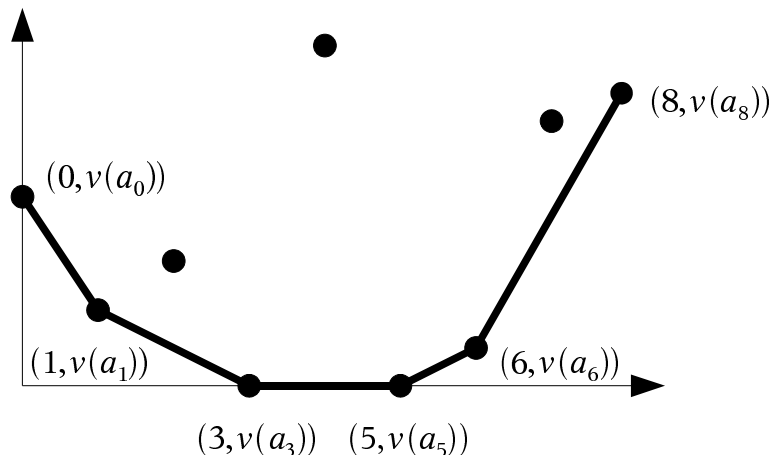
Das Newtonpolygon $NP(f)$ von $f(X)$ ist dann die untere konvexe Einhüllende der Punktmenge

$$\{(0, v_\infty(a_0)); (1, v_\infty(a_1)); \dots; (n, v_\infty(a_n))\}.$$

Bemerkung. Man konstruiert das Newtonpolygon aus den gegebenen Zahlenpaaren wie folgt:

Beginnend mit einer vertikalen Linie durch den Punkt $(0, v_\infty(a_0))$ rotiert man diese gegenläufig des Uhrzeigersinns bis man auf einen der Punkte $(i, v_\infty(a_i))$ trifft. Nennt man diesen $(i_1, v_\infty(a_{i_1}))$, so ist die erste Strecke des Newtonpolygons die Verbindungsstrecke zwischen $(0, v_\infty(a_0))$ und $(i_1, v_\infty(a_{i_1}))$. Ausgehend von deren Endpunkt führt man obiges Verfahren mit einer Vertikalen durch diesen nochmals aus. Anschließend wiederholt sich das Verfahren bis man schließlich zum Punkt $(n, v_\infty(a_n))$ gelangt, der den Abschluss des letzten Segments von $NP(f)$ bildet. Tauchten im Verlauf der Konstruktion Strecken mit gleicher Steigung auf, so fasst man diese zu einem Segment zusammen.

Graphisch dargestellt hat man also eine mit der folgenden Abbildung vergleichbare Situation, wobei hier $n = 8$ gewählt wurde.



Beispiel. Wir setzen die Beispiele 1.2.4 und 1.2.10 fort. Dazu sei $\Lambda = \mathbb{F}_p \cdot \lambda$ eindimensional, mit $\lambda \in C_\infty^*$. Dann ist wie gesehen

$$G_{k+1}(X) = \sum_{0 \leq i \leq k/p} \binom{k-i(p-1)}{i} \alpha^i X^{k-i(p-1)+1},$$

mit $\alpha = -\lambda^{1-p}$.

Wir betrachten nun speziell $p = 3$, $k = 15$ und $\lambda = \frac{T^2+2T}{T+1}$ (also $-\lambda^{-2} = 2\lambda^{-2} = \frac{2T^2+T+2}{2T^4+2T^3+2T^2}$). Damit ist

$$\begin{aligned} G_{16} &= \sum_{0 \leq i \leq 5} \binom{15-2i}{i} \left(\frac{2T^2+T+2}{2T^4+2T^3+2T^2} \right)^i X^{16-2i} \\ &= X^{16} + 1 \cdot (2\lambda^{-2}) X^{14} + 2 \cdot (2\lambda^{-2})^4 X^8 + 1 \cdot (2\lambda^{-2})^5 X^6 \\ &= X^6(32\lambda^{-10} + 32\lambda^{-8}X^2 + 2\lambda^{-2}X^8 + X^{10}). \end{aligned}$$

Da weiterhin $v_\infty(\lambda^{-2}) = 4-2 = 2$ gilt, lauten die für das Newtonpolygon $NP(G_{16}(X))$ relevanten Punkte:

$$(6; 10), (8; 8), (14; 2), (16; 0).$$

Wie man leicht sieht, besteht dieses folglich aus genau einem Segment der horizontalen Länge 10 mit Steigung -1 .

Die recht einfache Struktur des Newtonpolygons ist dabei der sehr speziellen Situation dieses Beispiels geschuldet.

Bemerkung. Wir wissen bereits, dass Gosspolynome immer die Nullstelle 0 besitzen. Um die angegebene Form des Polynoms in Definition der Newtonpolygone zu erreichen, müssten wir also noch X gemäß der Vielfachheit von 0 als Nullstelle ausklammern (dann ist $a_0 \neq 0$ garantiert). Dies hätte eine horizontale Verschiebung des Newtonpolygons zur Folge. Die bisherigen und nachfolgenden Ergebnisse werden dadurch aber nicht beeinflusst, weshalb wir den entsprechenden Sachverhalt ignorieren.

Die Einführung der Newtonpolygone ist durch ihre im Folgenden formulierte grundlegende Eigenschaft motiviert.

Satz. Sei $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, mit $a_0a_n \neq 0$, ein Polynom über C_∞ . Ist $(r, v_\infty(a_r)) \leftrightarrow (s, v_\infty(a_s))$ ein Segment des Newtonpolygons von f mit der Steigung $-\mu$, so besitzt $f(X)$ genau $s-r$ Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-r}$ (mit Multiplizitäten gezählt) mit dem Wert $v_\infty(\alpha_1) = \dots = v_\infty(\alpha_{s-r}) = \mu$.

BEWEIS. Wir können der Einfachheit halber das Polynom $f(X)$ als normiert annehmen, das heißt, $a_n = 1$ setzen. (Division durch a_n verschiebt das Polygon nämlich nur nach unten oder oben.)

Nummiere die Nullstellen von f so, dass gilt:

$$\begin{aligned} v_\infty(\alpha_1) = \dots = v_\infty(\alpha_{t_1}) &= \mu_1, \\ v_\infty(\alpha_{t_1+1}) = \dots = v_\infty(\alpha_{t_2}) &= \mu_2, \\ &\vdots \\ v_\infty(\alpha_{t_l+1}) = \dots = v_\infty(\alpha_n) &= \mu_{l+1}, \end{aligned}$$

mit $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{l+1}$ (diese stehen in *keinem* Zusammenhang zu der im vierten Kapitel verwendeten Zahlen μ_i , für $i \geq 0$).

Fassen wir die Koeffizienten a_i von f als elementarsymmetrische Funktionen der Nullstellen α_j auf (betrachte dazu, wie sich f in C_∞ in Linearfaktoren zerlegt), so ergeben sich folgende Abschätzungen für die Bewertungen der a_i :

$$\begin{aligned} v_\infty(a_n) &= v_\infty(1) = 0, \\ v_\infty(a_{n-1}) &\geq \min_i \{v_\infty(\alpha_i)\} = \mu_1, \\ v_\infty(a_{n-2}) &\geq \min_{i,j} \{v_\infty(\alpha_i \alpha_j)\} = 2\mu_1, \\ &\vdots \\ v_\infty(a_{n-t_1}) &= \min_{i_1, \dots, i_{t_1}} \{v_\infty(\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_{t_1}})\} = t_1 \mu_1, \end{aligned}$$

(da der Wert des Terms $\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_{t_1}}$ kleiner ist als der aller anderen hier vorkommenden Ausdrücke)

$$\begin{aligned} v_\infty(a_{n-t_1-1}) &\geq \min_{i_1, \dots, i_{t_1+1}} \{v_\infty(\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_{t_1+1}})\} = t_1 \mu_1 + \mu_2, \\ v_\infty(a_{n-t_1-2}) &\geq \min_{i_1, \dots, i_{t_1+2}} \{v_\infty(\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_{t_1+2}})\} = t_1 \mu_1 + 2\mu_2, \\ &\vdots \\ v_\infty(a_{n-t_2}) &= \min_{i_1, \dots, i_{t_2}} \{v_\infty(\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_{t_2}})\} = t_1 \mu_1 + t_2 \mu_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Also sind die Knickpunkte des Newtonpolygons gegeben durch (von rechts nach links):

$$(n; 0), (n - t_1; t_1 \mu_1), (n - t_2; t_1 \mu_1 + (t_2 - t_1) \mu_2); \dots$$

Daraus erhält man unmittelbar die Steigung der entsprechenden Teilabschnitte des Polygons: Die Steigung ganz rechts ist

$$\frac{0 - t_1 \mu_1}{n - (n - t_1)} = -\mu_1;$$

die derjenigen links davon:

$$\begin{aligned} &\frac{(t_1 \mu_1 + \dots + (t_j - t_{j-1}) \mu_j) - (t_1 \mu_1 + \dots + (t_{j+1} - t_j) \mu_{j+1})}{(n - t_j) - (n - t_{j+1})} \\ &= \frac{-(t_{j+1} - t_j) \mu_{j+1}}{t_{j+1} - t_j} = -\mu_{j+1}. \end{aligned}$$

Damit sind alle Aussagen der Behauptung gezeigt. [NEU, II, §6] □

Beispiel. Wir betrachten nochmals die Situation aus dem obigen Beispiel. Das Newtonpolygon besteht aus drei Abschnitten, die allerdings alle die gleiche Steigung -1 besitzen und somit zu einem Segment zusammenfallen. Die horizontale Länge der Strecke ist 10, weshalb der gerade bewiesene Satz liefert, dass G_{16} für das Gitter $\Lambda = \mathbb{F}_3 \cdot \left(\frac{T^2+2T}{T+1}\right)$ genau 10 Nullstellen mit Betrag 1, beziehungsweise Bewertung 3, besitzt.

Bemerkung. Was wir gerade im Beispiel gesehen haben gilt auch allgemeiner:

(i) Das Newtonpolygon besteht genau dann aus nur einem Segment, wenn die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ allesamt die gleiche Bewertung besitzen.

(ii) Im Allgemeinen zerlegt sich ein $f(X)$ wie im obigen Satz in ein Produkt der Form

$$f(X) = a_n \prod_{j=1}^{l+1} f_j(X),$$

mit $f_j(X) = \prod_{v_\infty(\alpha_i)=\mu_j} (X - \alpha_i)$, wobei $-\mu_{l+1} < \dots < -\mu_1$ die im zugehörigen Newtonpolygon auftretenden Steigungen sind.

Mit diesen Anmerkungen schließen wir die Betrachtung der Newtonpolygone ab.

Symbolverzeichnis

$ \cdot _m$	Abstandsfunktion, 18, 20
$ \cdot _\infty$	nichtarchimedischer Absolutbetrag, 8
$\lfloor \cdot \rfloor$	Gaußklammer, 45
$\binom{j}{i}$	Multinomialkoeffizient, 14
$<_p$	Ordnungsrelation, 38
A	$\mathbb{F}_p[T]$, Polynomring über \mathbb{F}_p in der Unbestimmten T , 7
a_n	Koeffizienten der Laurententwicklung von $C_{k,\Lambda}$, 23
α_i	Koeffizienten der Reihendarstellung von e_Λ , 10
$B(z, \varrho)$	offene Kugel vom Radius ϱ um z , 9
$B^+(z, \varrho)$	abgeschlossene Kugel vom Radius ϱ um z , 9
$\partial B(z, \varrho)$	Kugelrand, 9
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen,
$C_{k,\Lambda}(z)$	die Funktion $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^k}$, 12
C_∞	Komplettierung des algebraischen Abschlusses von K_∞ , 8
deg	Gradfunktion für Polynome, 7
$e_\Lambda(z)$	Gitterfunktion des Gitters Λ , 10
\mathbb{F}_p	endlicher Körper mit p Elementen, 7
\mathcal{F}	Fundamentalebereich von $C_{k,\Lambda}$, 18, 20
\mathcal{F}_r	Teilgebiet des Fundamentalebereichs von $C_{k,\Lambda}$, 18, 20
$G_{k,\Lambda}(z)$	Gosspolynom zum Gitter Λ , 12
$G_\Lambda(U, X)$	erzeugende Funktion der Gosspolynome, 13
$\gamma(k)$	Multiplizität der Nullstelle 0 von G_k , 44
$\gamma_r(k)$	Multiplizität in Formel für $\tilde{\gamma}_r(k)$, 24
$\tilde{\gamma}_r(k)$	Anzahl Nullstellen von C_k in gewissem Kreisring, 24
K	$\mathbb{F}_p(T)$, Quotientenkörper von A , 8
K_∞	$\mathbb{F}_p((T^{-1}))$, Körper der formalen Laurentreihen in T^{-1} , 8
k	Grad eines Gosspolynoms, 12
k_i	Koeffizienten der p -adischen Entwicklung von $k-1$,
n^*	$\sum_{i \geq 0} (p-1-n_i)p^i$, 38

$l(n)$	Koeffizientensumme der p -adischen Entwicklung von n , 37
Λ	\mathbb{F}_p -Gitter in C_∞ , 10, 18
Λ_r	endliches Gitter der Dimension $r + 1$, 10, 18
$\Lambda_{>r}$	Elemente von Λ mit einem Betrag echt größer als t_r , 18
λ	beliebiges Element von Λ , 11
λ_r	gittererzeugendes Element aus C_∞^* , 18
$m + 1$	Dimension eines endlichen Gitters (ab Kapitel 2), 18
$\mu_r(n)$	Summe der $r \cdot (p - 1)$ ersten Digits der p -adischen Entwicklung von $(n - 1)^*$, 38
N	größte p -Potenz in der p -adischen Entwicklung von $k - 1$, 37
$NP(f(X))$	Newtonpolygon des Polynoms $f(X)$, 67
$n_0(k, r)$	Index des domierenden Koeffizienten der Laurententwicklung von C_k , 42
$\mathcal{O}(\partial B)$	Ring der holomorphen Funktionen auf $\partial B(z, \varrho)$, 22
Ω	Drinfeldsche obere Halbebene, 8
Ω_Λ	Teilgebiet der Drinfeldschen oberen Halbebene, 20
ω_0	Element von C_∞ mit Betrag ϱ , 22
$\text{ord}_{\partial B}(f)$	Ordnung der Funktion f auf dem Rand von B , 23
p	Primzahl, 3, 7
\prod^1	Produkt über von Null verschiedene Elemente, 10
\mathbb{Q}	Körper der rationalen Zahlen,
q	Primzahlpotenz, 3
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen,
$R(k)$	Repräsentant modulo $(p - 1)$ von $l(k - 1)$, 45
r	Element von \mathbb{N}_0 ,
$\bar{r}(k)$	kleinstes r mit $\mu_r(k) + k \equiv 0 \pmod{p^N}$, 45
ϱ	Kugelradius, 9
$S_{r+1}(n)$	$(r + 1)$ -te Potenzsumme, 18
s_r	rationale Zahl größer oder gleich 1, 18
\sum^1	Summe über von Null verschiedene Elemente, 10
$\sigma_i(n)$	„ $(i + 1)$ -ter $(p - 1)$ -Block von Digits von n^* “, 38
$t_\Lambda(z)$	die Funktion $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{z - \lambda}$, 11
t_r	Betrag von λ_r , 18
v_∞	Bewertungsfunktion, 8
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen,
z	Element von C_∞ , 3

Literaturverzeichnis

- [FrPu04] FRESNEL, J.; VAN DER PUT, M.: *Rigid analytic geometry and its applications*. Prog. Math. Vol. 218, Birkhäuser 2004.
- [Gek88_1] GEKELER, E.-U.: *On the coefficients of Drinfeld modular forms*. Invent. Math. **93** (1988), 667–700.
- [Gek88_2] GEKELER, E.-U.: *On power sums of polynomials over finite fields*. J. Number Theory **30** (1988), 11–26.
- [Gek99] GEKELER, E.-U.: *Finite modular forms*. Finite Fields Appl. **7** (2001), 553–572.
- [Gek11] GEKELER, E.-U.: *On the zeros of Goss polynomials*. To appear in Trans. AMS
- [GePu80] GERRITZEN, L.; VAN DER PUT, M.: *Schottky groups and Mumford curves*. Lect. Not. Math. 817, Springer-Verlag 1980.
- [Gos80] GOSS, D.: *The algebraist's upper half-plane*. Bull. Am. Math. Soc. NS **2** (1980), 391–415.
- [Gos96] GOSS, D.: *Basic structures of function field arithmetic*. Ergeb. Math. Grenzgeb. Vol. 35, Springer-Verlag 1996.
- [Mon70] MONNA, A. F.: *Analyse non-archimédienne*. Ergeb. Math. Grenzgeb. Vol. 56, Springer-Verlag 1970.
- [Neu99] NEUKIRCH, J.: *Algebraic number theory*. Grundlehren der Math. Wiss. 322, Springer-Verlag 1999.
- [Rib89] RIBENBOIM, P.: *The new book of prime number records*. Springer-Verlag 1989.

Stichwortverzeichnis

- p -adische Entwicklung, 37
 - Koeffizienten, 37
 - Koeffizientensumme, 37
- Absolutbetrag
 - nichtarchimedischer, 63
 - nichtarchimedischer, 8
- Analysis
 - nichtarchimedische, 63
- analytische Fortsetzung, 9
- Bewertung, 8, 63
 - diskrete, 64
 - zyklische, 64
- Bewertungsgruppe, 64
- Bewertungsring, 64
- Carlitz-Modul, 8
- Digit, 38
- diskreter \mathbb{F}_p -Untervektorraum, *siehe* Gitter
- Drinfeldsche obere Halbebene, 8
- Eulersches Polynom, 3
- Exponentialfunktion, *siehe* Gitterfunktion
- Fundamentalebene, 18, 20
- Funktion
 - ganze, 66
- Funktionskörper, 7
- Gaußklammer, 45
- Gitter, 10
 - ähnliche, 14
 - eindimensionales, 11, 13, 55
 - endliches, 10, 18
 - unendliches, 18
 - zweidimensionales, 55, 56
- Gitterabstandsfunktion, 18, 20
- Gitterfunktion, 10
- Gosspolynom, 3, 9, 12
 - erzeugende Funktion, 13
- Gradfunktion, 7
- Grothendieck-Topologie, 9
- Körper
 - lokaler, 64
- Körper der formalen Laurentreihen, 8
- Konturintegration
 - nichtarchimedische, 62
- Konvergenzordnung, 65
- Kugel
 - offene, 9
 - Rand, 9
- Kugel, abgeschlossene, 9
- Laurententwicklung
 - dominierender Koeffizient, 22
 - von C_k , 23
- logarithmische Ableitung, 12
- Modulform, 3, 8
- Multinomialkoeffizient, 14
- Newtonpolygon, 67
- Ordnung einer Funktion, 23
- Ordnungsrelation, 39
- Polynomring, 7
- Potenzsumme, 18, 39, 53
- Raum
 - total unzusammenhängender, 9
- Reihe
 - unendliche, 65
- Ring der holomorphen Funktionen, 22