

Bewegliche Geometrie mit dem Computer – Was beobachtest Du? (Warum ist das so?)

Horst Hischer und Anselm Lambert¹


„Das Werkzeug Computer (dynamische Geometriesoftware, kurz: DGS) leitet zu besonderen Sichtweisen des inneren Zusammenhangs zwischen geometrischen Figuren und Konstruktionen an. Die Möglichkeit zu dynamisieren regt zum experimentellen Erkunden an.“ So steht es im Lehrplan für das Fach Mathematik. Die folgenden Aufgaben wollen exemplarisch einen Eindruck davon vermitteln, wie einfach erste Schritte in diese Richtung im Unterricht der Klassenstufen 7, 8 und 9 machbar sind und auch wie einfach die Handhabung einer entsprechenden Software (hier: das Programm EUKLID Dynageo²) ist.³


Ein erstes Beispiel




In der Werkzeugpalette „Konstruieren“ findest du geometrische Objekte, die du mit der Maus auf den Bildschirm zeichnen



kannst. Fahr mit der Maus über ein Icon, dann kannst du lesen, was du nach dem Anklicken damit tun kannst.

Zeichne über das Icon  eine Strecke in den Zeichenbereich! In der Statuszeile links am unteren Rand des Bildschirms erhältst du, nachdem du ein Icon in der Werkzeugleiste angeklickt hast, nützliche Hinweise. Hier ist es der Hinweis: „Anfangs- und Endpunkt der Strecke angeben“.

Zeichne den Mittelpunkt der Strecke über . Wenn du nun mit der Maus an einem der Streckenenden ziehst, dann veränderst du die Strecke, aber der Mittelpunkt bleibt immer der Mittelpunkt: die geometrische Konstruktion ist beweglich.

Hinweis: In der Hauptleiste findest du die Icons  und , um Konstruktions-schritte rückgängig zu machen, sowie das Icon , um Objekte zu löschen.

¹ Wir danken Pia Selzer für redaktionelle Unterstützung bei der Überarbeitung der Aufgaben.


² Unter www.dynageo.de erhält man das Programm in einer zeitlich begrenzt lauffähigen Testversion und unter www.mathematikunterricht.info findet man eine detaillierte Einführung in das Programm.

³ Wir empfehlen den hier vorgestellten Crashkurs auch allen an den neuen Möglichkeiten des Mathematikunterrichts interessierten Eltern; auf entsprechenden Informationsveranstaltungen haben wir immer wieder die Erfahrung machen dürfen, dass er auch von diesen gerne bearbeitet wird: „Hätte es das doch nur schon zu meiner Schulzeit gegeben!“

Im Folgenden findest du Anregungen zu mathematischen Entdeckungen:

(Jeweils eine Begründung für das Beobachtete anzugeben ist mal einfacher, mal schwerer.)

1. Seitenmitten im Dreieck

- a) Zeichne ein Dreieck ABC über das Icon  in der Konstruktionspalette.

Hinweis: Wenn du mit der rechten Maustaste ins Dreieck klickst, dann kannst du das Füllmuster (und die Farbe) verändern.

Hinweis: Wenn du mit der rechten Maustaste einen Eckpunkt des Dreiecks anklickst, dann kannst du ihn benennen. Wenn du mit der Maus auf den Namen des Punktes fährst, dann erscheint eine Hand: mit gedrückter linker Maustaste kannst du den Namen an eine gewünschte Position schieben.

Zeichne die Mittelpunkte der Dreiecksseiten.


Hinweis: Wenn du die Umschalttaste der Tastatur drückst, während du ein Icon mit der Maus anklickst, dann kannst du einen Befehl mehrfach ausführen. Das ist oft sehr nützlich!

Verbinde die Seitenmittelpunkte zu einem Dreieck. Zieh an A, B und C.


Hinweis: An den Seitenmitten kannst du nicht ziehen, da diese *abhängige Punkte* sind.

Was beobachtest du? (Warum ist das so?)


- b) Verbinde die Seitenmittelpunkte jeweils mit den gegenüberliegenden Eckpunkten. Zieh an den drei Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)



Hinweis: In der Hauptleiste kannst du über  nun ein neues Zeichenblatt öffnen.

2. Seitenmitten im Viereck


Zeichne ein Viereck über das Icon  (für N-Ecke) in der Palette „Konstruieren“. Um dem Computer mitzuteilen, dass du ein Viereck möchtest, musst du, nachdem du den vierten Punkt gezeichnet hast, noch einmal den ersten anklicken. Zeichne dann die Seitenmittelpunkte. Verbinde die Seitenmittelpunkte der Reihe nach zu einem Viereck. Zieh an den vier Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)


3. Die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten


- a) Zeichne ein Dreieck ABC. Konstruiere auf jeder Dreiecksseite die Mittelsenkrechte über das Icon . Zieh an den drei Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)

- b) Zeichne über das Icon  den Schnittpunkt M der in Teil a) gezeichneten Mittelsenkrechten ein. Du siehst zwar, dass sie sich schneiden, aber du musst dem Computer immer auch mitteilen, wenn dich ein Schnittpunkt interessiert. Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt M über das Icon , der durch eine der Ecken geht. Zieh an den drei Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)

4. Die Winkelhalbierenden im Dreieck


- a) Zeichne ein Dreieck ABC und konstruiere über das Icon  die Winkelhalbierenden. Zieh an den drei Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)


- b) Zeichne den Schnittpunkt W der in Teil a) gezeichneten Winkelhalbierenden ein. Fülle über das Icon  das Lot von W auf eine der Dreiecksseiten. Zeichne den Schnittpunkt L von Seite und Lotgerade ein. Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt W, der durch L geht.

Hinweis: In der Palette „Form und Farbe“ kannst du über das Icon  die Kreisfläche ausmalen.


Zieh an den drei Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)

5. Satz des Thales

- a) Zeichne eine Gerade TP über das Icon . Zeichne einen Kreis um T durch einen Punkt C. Zeichne die Schnittpunkte A und B von Kreis und Gerade. Zeichne das Dreieck ABC. Zieh an T, P und C. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)

- b) Miss den Innenwinkel bei C über das Icon  aus der Palette „Messen und Rechnen“. Achte dabei darauf, dass du die Punkte im mathematisch richtigen Sinn anklickst, sonst erhältst du den Außenwinkel.

6. Winkelsumme im Fünfeck

Zeichne ein Fünfeck ABCDE. Miss alle Innenwinkel. Über das Icon  kannst du die Größen der Winkel addieren: Klicke die Winkelmaße an (Was bedeuten die angezeigten Terme?) und füge „+“-Zeichen ein, dann wird dir die Winkelsumme berechnet. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)

7. Mittelpunkte im Dreieck

- a) Zeichne ein Dreieck ABC und fälle jeweils das Lot von jeder Ecke auf die gegenüber liegende Seite. Zieh an den drei Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)
- b) Zeichne den Höhenschnittpunkt H (d. h. den Schnittpunkt aus Teil a)) ein. Konstruiere den Umkreismittelpunkt M (wie in Aufgabe 3), den Inkreis-mittelpunkt W (wie in Aufgabe 4) und den Schwerpunkt S (d. h. den Schnittpunkt aus Aufgabe 1). Es genügt dazu natürlich, dass du jeweils zwei Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierende bzw. Seitenhalbierende zeichnest (Warum?). Zieh an den drei Ecken. Was beobachtest du? (Warum ist das so?)


Übrigens: Einer der beobachtbaren Sachverhalte war wohl den alten Griechen unbekannt und wurde erst von Euler entdeckt. Recherchiere im Internet nach dem Stichwort „Eulergerade“.

8. Die rutschende Leiter


Eine Leiter steht an einer Wand. Sie rutscht ab, als Herr Mathematikus genau in der Mitte steht. Er fragt sich sofort: „Auf was für einer Kurve bewegen sich denn jetzt meine Füße?“ Stelle eine Vermutung auf, bevor du hier weiter machst.


Zeichne die Leiter an der Wand. Dazu kannst du folgendermaßen vorgehen:


Zeichne über das Icon  einen Punkt mit den Koordinaten 0 und 5.

Hinweis: Über das Icon  in der Palette „Messen & Rechnen“ kannst du das Koordinatensystem sichtbar machen.

Zeichne die Strecke vom Ursprung des Koordinatensystems zu diesem Punkt.


Zeichne über das Icon  einen Punkt P auf dieser Strecke.

Zeichne über das Icon  einen Kreis um P mit Radius 5. Zeichne den Schnittpunkt S des Kreises mit der positiven x-Achse. Zeichne die Strecke von P nach S. Das ist die Leiter, die positive y-Achse ist die Wand und die positive x-Achse der rutschige Boden.

Hinweis: In der Hauptleiste findest du das Icon , mit dem du (nebensächliche) Objekte verbergen kannst.

Hinweis: Klick mit der rechten Maustaste auf eine Strecke: so kannst du die Linienart festlegen.

Zeichne den Mittelpunkt der Leiter. Auf welcher Kurve bewegt er sich? Zieh an P und vergleiche mit deiner Vermutung – Was beobachtest Du? (Warum ist das so?)




Mit EUKLID DynaGeo lässt sich die Bahn der Füße festhalten: In der Hauptleiste dient der Befehl  der Aufzeichnung einer solchen *Ortslinie*; klick die Füße an und zieh an P.

9. Eine bekannte Kurve?

Wo liegen die Punkte, die die Eigenschaft haben, dass ihr Abstand von einem gegebenen Punkt B und der x-Achse jeweils gleich groß ist? Überlege dazu zuerst: Wo liegen alle Punkte,

- die zur x-Achse einen bestimmten Abstand r haben?
- die vom Punkt B einen bestimmten Abstand r haben?

Denke selber nach, bevor du weiter liest!

Zeichne einen Punkt B über das Icon . Zeichne nun alle Punkte, die von B den Abstand r haben: Erstelle dazu einen sog. Schieberegler (mit dem du eine Größe variieren kannst), indem du in der Palette „Messen & Rechnen“ das Icon  anklickst. Dadurch erscheint auf deinem Arbeitsblatt ein sog. *Zahlobjekt*. Klick mit der rechten Maustaste darauf und wähle die Option „Bereich editieren“. Gib als untere Grenze 0 an und als obere Grenze 20. Nenne das Zahlobjekt r (wiederum über die rechte Maustaste). Zeichne nun über das Icon  einen Kreis k mit Mittelpunkt B und Radius r – klicke auf das Zahlobjekt, wenn nach dem Kreisradius gefragt wird. Jetzt hast du alle Punkte gezeichnet, die von B den – mit einem Schieberegler variierbaren – Abstand r haben.

Zeichne nun alle Punkte, die von der x-Achse den gleichen Abstand r haben. Überlege selbst, wie du dazu vorgehst.

Hinweis: Über das Icon  kannst du eine Parallele zeichnen.

Wenn du die Ortslinie aller Punkte gezeichnet hast, die vom Punkt B und von der x-Achse gleichweit entfernt sind, dann verschiebe den Punkt B. Kennst du diese Kurven? – Was beobachtest Du? (Warum ist das so?)

Übrigens: Die gerade beschriebene Aufgabe kannst du mit deinen Mitschülerinnen und Mitschülern auch auf dem Schulhof bearbeiten. Die gerade Schulhauswand ist die x-Achse und die Lehrperson ist der Punkt B. Stellt

euch mit Hilfe zweier langer Bandmaße aus einem Baumarkt so auf, dass alle jeweils gleichweit von der Wand und von der Lehrperson entfernt stehen. Wenn ihr dann ein Foto von oben aus dem Schulhaus runter auf den Schulhof macht, könnt ihr darauf die Kurve auch sehen.

10. So klappt's mit Pythagoras!

Im indischen Altertum bauten vedische Priester während bestimmter religiöser Rituale aus Ziegelsteinen bestehende Altäre um. Dazu hatten sie genaue mathematische Anweisungen – Mathematik fand damals dort ihre Anwendung in der Religion. Bei der Absteckung des Bodens spielten Schnüre eine Rolle, so dass man die Vorschriften auch *Schnurregeln* nennt.

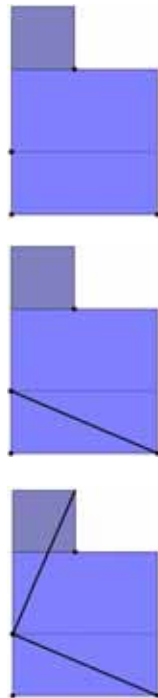
Eine dieser Schnurregeln lautet:

„Wünscht man zwei verschieden große Quadrate zu vereinigen, so reiße man mit der Seite des kleineren auf dem größeren einen Streifen auf. Die quer über diesen Streifen gelegte Schnur ist die Seite der beiden vereinigten Quadrate.“⁴

In der Abbildung siehst du dies (in einer Grundrisszeichnung) schrittweise durchgeführt. Danach müssen die Steine aus den beiden Dreiecken umgeräumt werden, um den aus zwei quadratischen Altären vereinigten, neuen quadratischen Altar zu erhalten.



Hier wird also eine praktische Möglichkeit angegeben, wie aus zwei Quadraten ein neues Quadrat entstehen kann, so dass das neue Quadrat den gleichen Flächeninhalt hat, wie die beiden Ausgangsquadrate zusammen. Das heißt doch: Diese Geschichte liefert uns einen Beweis für den Satz des Pythagoras!


Demonstriere nun mit Euklid Dynageo diesen Beweis des Satzes des Pythagoras. Gehe dazu von zwei quadratischen Altären aus, die wie in der Abbildung so aneinander stehen, dass zwei Quadratseiten auf einer Geraden stehen. Konstruiere die beiden Quadrate so, dass man ihre Größe verändern kann, und natürlich auch so, dass sie immer Quadrate bleiben, egal wie man daran zieht. Erinnerung dazu wie du ein Quadrat mit Zirkel und Lineal konstruieren kannst.




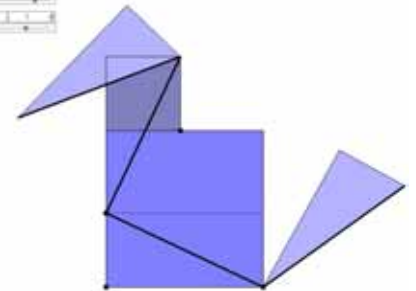
⁴ Mehr zu den Schnurregeln kannst du im Buch „5000 Jahre Geometrie“ von Scriba und Schreiber nachlesen.

Zeichne jetzt die Schnüre gemäß der genannten Schnurregel ein. Dort steht: „Reiße mit der Seite des kleineren (mit der Schnur) auf dem größeren einen Streifen auf.“ In heutiger Formulierung würde man vielleicht eher sagen: „Trage die Länge (mit dem Zirkel) ab.“ — Wie würdest du es ausdrücken? Die Idee ist immer die gleiche, und sie funktioniert genauso auch auf dem

Computer: Über das Icon  kannst Du die Seitenlänge des kleineren Quadrats messen, um sie dann über das Icon  an die gewünschte Stelle zu übertragen, indem du auf die von dir gemessene Länge klickst, wenn du nach dem Kreisradius gefragt wirst.

Zum Schluss müssen noch die Steine umgeräumt werden. Das geht auf dem Bildschirm wirklich leichter als im wahren Leben: Drehe die abgesteckten Dreiecke über zwei Schieberegler jeweils so um eine ihrer Ecken, dass das gewünschte Quadrat entsteht. Dazu musst du sie zuerst noch über das Icon  als Dreiecke einzeichnen, da der Computer hier sonst keine Dreiecke sieht.

Über das Icon  in der Palette „Abilden“ kannst du diese Dreiecke nun drehbar machen, wobei du als Drehwinkel jeweils einen der von dir dazu vorbereiteten Schieberegler angibst.



In den vorgestellten Aufgaben hast du für dich neue Mathematik gemacht und auch dir bereits bekannte Mathematik für dich neu gemacht.

Nebenbei hast du vielfältige Möglichkeiten beweglicher Geometrie auf dem Computer kennen gelernt. Probiere aus was das Programm noch so alles kann

Suche dir nun weitere Geometrieaufgaben aus deinen Mathematikbüchern und bearbeite sie mit Hilfe des Computers, oder denke dir eigene Aufgaben aus. Und setze das Programm auch in Zukunft ein. Wir wünschen dir dabei viel Freude!