UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 07.07.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 10 29. Juni 2015

Aufgabe 1. Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: Zu jeder Folge $(Z_k)_k$ von Zerlegungen von Q mit Feinheit $\lim_{k\to\infty} ||Z_k|| = 0$ und jeder Wahl von Stützstellen $T_k = \{\xi_R \in R \mid R \in Z_k\}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sum(f, Z_k, T_k) = \int_Q f(x)dx$$

wobei $\sum(f, Z_k, T_k) := \sum_{R\in Z_k} f(\xi_R) \cdot \mathrm{Vol}(R)$.

Aufgabe 2. Sei

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le R,\ x^2 + y^2 \le R^2\}$$

ein Zylinder mit Radius R und Höhe R,

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le R,\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$

eine Halbkugel mit Radius R und

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le R,\ x^2 + y^2 \le (R - z)^2\}$$

ein Kegel mit Radius R und Höhe R.
Zeigen Sie, dass Z, H, K ein Volumenverältnis von $3 : 2 : 1$ haben.

Aufgabe 3. Für $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Riemann-messbare, beschränkte Menge mit positivem Volumen ist der Schwerpunkt $\overline{x} = (\overline{x_i})$ durch

$$\overline{x_i} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(S)} \int_S x_i\, dx$$

definiert. Bestimmen Sie den Schwerpunkt von

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \le x^2 - x^4\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$S_+ = S \cap (\mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R})$$
$$S_{++} = S \cap (\mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}_{\ge 0})$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Integral $\int_0^x t^n e^{-t} dt$ durch Differenzieren des Parameterabhängigen Integrals $F(y) := \int_0^x e^{ty}\, dt$.