



Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 14.07.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 11

06. Juli 2015

Aufgabe 1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$$

und geben Sie die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung an, die der Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ (mit $c > 0$) genügt.

Aufgabe 2. Berechnen Sie mit dem Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ferner gelte

$$f(-x, y) = -f(x, y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung

$$\varphi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ bei Spiegelung der y -Achse in sich über.

Aufgabe 4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetige Funktion, die in $I \times \mathbb{R}^n$ global einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}_{>0}$ genügt. Ferner seien

$$\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Sei $a \in I$ und $\delta := \|\varphi(a) - \psi(a)\|$. Zeigen Sie, dass

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \delta e^{L|x-a|} \quad \text{für alle } x \in I.$$