UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 05.05.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 1 27. April 2015

Aufgabe 1. Sei (x, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X. Beweisen oder widerlegen Sie

(i) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$
(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(iv) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ abzählbar viele offene Mengen $U_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt, so dass

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $C[a, b]$ aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit der Supremumsnorm

$$||f||_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]|\}$$

vollständig ist.

Aufgabe 4. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes X und $f : A \to A$ eine Abbildung. Es gebe eine Konstante θ mit $0 \leq \theta < 1$, so dass

$$||f(x), f(y)|| \leq \theta ||x, y|| \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in A$ gibt, so dass $f(a) = a$ gilt. Zeigen Sie zudem, dass für jedes $x_0 \in A$ die durch

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge gegen a konvergiert.