UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 12.05.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 2 04. Mai 2015

Aufgabe 1. Seien K, L kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen kompakt sind

(i) $K \cap L$
(ii) $K \times L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in K, y \in L\}$
(iii) $K \cup L$
(iv) $K + L := \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei (K_n) eine Folge nicht leerer, kompakter Teilmengen von X mit $K_n \supset K_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$$

Aufgabe 3. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(A)$ von A unter f abgeschlossen ist.
(b) Sind X, Y kompakt und ist f stetig und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ von f stetig.

Aufgabe 4. Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Beweisen Sie, dass es eine Zahl λ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit $\operatorname{diam}(A) \leq \lambda$ existiert ein $i \in I$ mit $A \subset U_i$.