UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 19.05.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 3 11. Mai 2015

Aufgabe 1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine 3-mal stetig differenzierbare Kurve, die nicht notwendigerweise nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Sei ferner $f'(\alpha), f''(\alpha), f'''(\alpha)$ linear unabhängig für alle $\alpha \in [a,b]$ und $v(\alpha) = ||f'(\alpha)||$ die Geschwindigkeit an der Stelle $f(\alpha)$. Zeigen Sie die folgenden Formeln für Krümmung und Torsion im Punkt $f(\alpha)$:

$$\kappa(\alpha) = \frac{||f'(\alpha) \times f''(\alpha)||}{v(\alpha)^3} \quad \text{und} \quad \tau(\alpha) = \frac{\langle f'(\alpha) \times f''(\alpha), f'''(\alpha)\rangle}{||f'(\alpha) \times f''(\alpha)||^2}$$

Aufgabe 2. Sei $f : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ eine 3-mal stetig differenzierbare Kurve, die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Zeigen Sie:

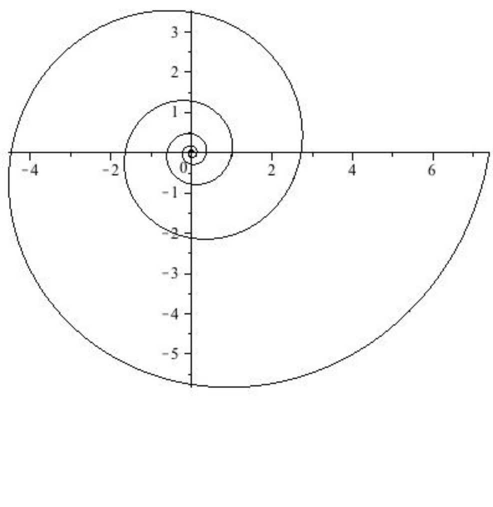
(a) Es ist $\kappa(s) = 0$ für alle $s \in [0,L]$ genau dann, wenn die Kurve eine Gerade ist.

(b) Es gelte $\kappa(s) \neq 0$ für alle $s \in [0,L]$. Dann ist $\tau(s) = 0$ für alle $s \in [0,L]$ genau dann, wenn die Kurve in einer Ebene liegt.

Aufgabe 3. Sei $c \in \mathbb{R}^*$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(\alpha) = (e^{c\alpha}\cos(\alpha), e^{c\alpha}\sin(\alpha))$.

(a) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}$ und entscheiden Sie, ob $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass f jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Schnittwinkel.



Aufgabe 4. (a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ eine stetige raumfüllende Kurve mit

$$f([0,1]) = [0,1]^n.$$

Zeigen Sie, dass die Kurve f nicht rektifizierbar ist.

(b) Konstruieren Sie eine stetige raumfüllende Kurve mit $f([0,1]) = [0,1]^n$ für $n = 2, 3$.