UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 26.05.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 4 18. Mai 2015

Aufgabe 1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

gilt.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf partielle und totale Differenzierbarkeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = |x-y|y$.
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

Aufgabe 3. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Quader, d.h. U ist das n-fache kartesische Produkt von offenen Intervallen, und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(b) Beweisen Sie für alle $x > 0$ und $y > 0$ die Gleichung

$$\arctan(\frac{x}{y}) + \arctan(\frac{y}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, d.h. für eine beliebige Norm $||.||$ existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$ sodass

$$c_1 \cdot ||x||_2 \leq ||x|| \leq c_2 \cdot ||x||_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $||.||_2$ die euklidische Norm ist.
Hinweis: Beachten Sie, dass für eine beliebige Norm $||.||$ gilt: $\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x-y||$.