UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 09.06.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 6 01. Juni 2015

Aufgabe 1. Für $i = 1, \dots, n$ seien $p_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ Punkte in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie den Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ für den der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} ||x - p_i||^2$$

minimiert wird.

Aufgabe 2. Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $C_b^k(U)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$, für die $D^\alpha f$ beschränkt in U ist für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Für $f \in C_b^k(U)$ definieren wir

$$||f||_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \sup\{|D^\alpha f(x)| \mid x \in U\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung
$$||.||_k : C_b^k \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto ||f||_k$$
ist eine Norm auf dem Vektorraum $C_b^k(U)$.

(b) Für $f, g \in C_b^k(U)$ gilt
$$||fg||_k \leq ||f||_k \cdot ||g||_k$$

(c) Der normierte Vektorraum $C_b^k(U)$ ist vollständig bzgl. $||.||_k$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen und entscheiden Sie ob lokale Extrema vorliegen. Nehmen die Funktionen ihr globales Minimum und Maximum an?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y^2 - x^2 + x^4$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (4x^2 + y^2) \cdot \exp(-x^2 - 4y^2)$