UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 30.06.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 9 22. Juni 2015

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien A, B nichtleere kompakte Teilmengen von X. Für $a \in A$ ist

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$$
$$d(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

Zeigen Sie, dass

$$d_H(A, B) := \max(d(A, B), d(B, A))$$

eine Metrik auf dem Raum $\mathcal{K}_X := \{Y \subset X \mid Y \text{ kompakt}\}$ definiert.

Aufgabe 2. Der sogenannte Whitney-Umbrella ist das Bild der Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ (r, y) \mapsto (r^2, y, ry).$$

(1) In welchen Punkten ist ϕ regulär?
(2) Zeigen Sie, dass $\phi(\mathbb{R}^2) \subset N_0(f)$, wobei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (x, y, z) \mapsto z^2 - xy^2.$$

(3) In welchen Punkten von $N_0(f)$ lässt sich der Satz über implizite Funktionen anwenden? Worin besteht der Unterschied zu (1)?

Aufgabe 3. Sei $S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\eta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$$

wobei

$$y_1 = 2(x_1x_3 + x_2x_4)$$
$$y_2 = 2(x_2x_3 - x_1x_4)$$
$$y_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

(1) Zeigen Sie, dass η eine Abbildung $h := \eta|_{S^3} : S^3 \to S^2$ induziert, mit anderen Worten $h(S^3) \subset S^2$.

(2) Sei $(y_1, y_2, y_3) \in S^2$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & y_3 - 1 & y_2 & y_1 \\ -y_3 + 1 & 0 & -y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 & 0 & -y_3 - 1 \\ -y_1 & -y_2 & y_3 + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang 2 hat. Zeigen Sie ferner, dass

$$M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

für alle $((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3)) \in \Gamma_h$ gilt, wobei Γ_h den Graf von h bezeichnet.
(3) Folgern Sie, dass h surjektiv ist und $h^{-1}(y) = S^3 \cap V \cong S^1$ für ein $V \cong \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie die kürzeste Entfernung der Kurve $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ zum Ursprung.
(b) Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1\}$ und sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy.$$

Entscheiden Sie, ob $\min h(M)$ und $\max h(M)$ existieren. Wenn ja, an welchen Stellen in M werden diese Werte angenommen?