UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Falls Sie weniger als 50% der maximal zu erreichenden Punkte in den bisherigen Übungsblättern erreicht haben, können Sie durch das Ferienblatt noch weitere Punkte bekommen. In diesem Fall ist das bearbeitete Ferienblatt bis spätestens 13.10.2015 in Raum 428 Geb. E2.4 abzugeben.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Ferienblatt 28.07.2015

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und seien $f, g : X \to X$ zwei kontrahierende Abbildungen. Zeigen Sie, dass $f \circ g$ ebenfalls kontrahierend ist.

Aufgabe 2. Sei $C[a, b]$ der Vektorraum aller stetiger Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ mit der Supremumsnorm $||.||_\infty$. Sei $X = \{f \in C[a, b] \mid ||f||_\infty \leq 4\}$. Zeigen Sie, dass X abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit, partielle Differentierbarkeit und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie, dass zu jeder Funktion $f \in C^k(U)$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$ Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in C^{k-1}(U)$ existieren mit

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{r} x_i f_i(x)$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$.

Aufgabe 5. Seien $a, c > 0$. Berechnen Sie die Bogenlängen der beiden Kurven

$$f : \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, \ln(\sin(t)))$$

$$g : [0, a] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\frac{1}{2}t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{1}{2}t^4)$$

Aufgabe 6. Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ und $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 3\}$. Zeigen Sie, dass $\min f(M)$ und $\max f(M)$ existieren und berechnen Sie alle Punkte, in denen f ihr Minimum bzw. Maximum annimmt.

Aufgabe 7. Sei $X = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$. Finden Sie die Extremstellen der Funktion

$$\det : X \to X,\ A \mapsto \det(A).$$

Aufgabe 8. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Abbildung so, dass $Df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung f ist offen, d.h. $f(V) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen für alle $V \subset U$ offen.
(b) Die Funktion $U \to \mathbb{R},\ x \mapsto ||f(x)||$ besitzt kein Maximum.
(c) Ist U beschränkt und f stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbar, so besitzt die Funktion

$$\overline{U} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ||f(x)||$$

ein Maximum und dieses wird auf ∂U angenommen.

Aufgabe 9. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := \int_{x^2+y^2}^{x^2+y^2+1} \varphi(t)\, dt.$$

(1) Zeigen Sie, dass f zweimal stetig partiell differenzierbar ist und berechnen Sie den Gardienten und die Hesse-Matrix von f
(2) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, y) = xe^{xy} - 1$ lokal um $(x_0, y_0) = (1, 0)$ nach y, durch $x \mapsto g(x)$, auflösbar ist und berechnen Sie $g'(1)$.

Aufgabe 11. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto x + y^2 + 2yx^2 + x^4, y + x^2$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung f offen ist (vgl. Aufgabe 8).

Aufgabe 12. Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}, \quad (z, y) \mapsto \int_a^z f(x, y)\, dx$$

stetig ist.

(b) Ist f stetig partiell differenzierbar in y und ist die Abbildung $\phi : [c, d] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\mathrm{Im}(\phi) \subset [a, b]$, so ist die Funktion

$$G : [c, d] \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_a^{\phi(y)} f(x, y)\, dx$$

differenzierbar mit

$$G'(y) = f(\phi(y), y)\phi'(y) + \int_a^{\phi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

für alle $y \in [c, d]$.

Aufgabe 13. Berechnen Sie

$$\int_\Delta f(x, y)\ d(x, y)$$

mit $f(x, y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$ und $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y \le 1\}$.

Aufgabe 14. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

(a) $y' = y^2 \sin(x)$ mit $y(0) = 1$
(b) $(x - 1)y' = 2y$ mit $y(0) = 3$
(c) $y' = -xe^y$ mit $y(0) = -2$
(d) $xy + (x + 2)y' = 0$ mit $y(0) = 1$

Aufgabe 15. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

(a) $y' - 3y = xe^{4x}$ mit $y(1) = 0$

(b) $y' = -\frac{y}{x} + 1$ mit $y(2) = \frac{3}{2}$

Aufgabe 16. Sei

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times r}$$

ein Jordanblock.

(a) Zeigen Sie

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n}{r}\lambda^{n-r} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \dots & t^{r-1}e^{\lambda t} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$