

Beweis:

1. Behauptung: $\exists$ Umg. $U_1 \subset U$ von a , sol. $f|_{U_1}: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist.

Sei $f = (f_1 \dots f_n)$. Wir betrachten Punkte $a^{(1)} \dots a^{(n)} \in U$.

und die Matrix $A(a^{(1)} \dots a^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a^{(1)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a^{(n)}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a^{(n)}) \end{pmatrix}$

Da f stetig diffbar ist, hängen die Einträge der Matrix stetig von

$(a^{(1)} \dots a^{(n)}) \in U \times \dots \times U \in \mathbb{R}^{n^2}$ ab. Die Det. $\det(A(a^{(1)} \dots a^{(n)}))$ ist also eine stetige Funktion auf $U \times \dots \times U$

die in dem Punkt $(a \dots a)$ den Wert $\det(A(a \dots a)) =$

$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, sol. $\det(A(a^{(1)} \dots a^{(n)})) \neq 0$

$\forall (a^{(1)} \dots a^{(n)}) \in B(a, \varepsilon) \times \dots \times B(a, \varepsilon)$. Wir zeigen dass

f auf $U_1 := B(a, \varepsilon)$ injektiv ist.

Es seien $x, z \in B(a, \varepsilon)$. Wir wenden auf die Funktionen

$h_i: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i(t) := f_i(x + t(z-x))$ jeweils den MWS

an. $f_i(z) - f_i(x) = h_i(1) - h_i(0) = h_i'(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + 0 \cdot (z-x))(z-x)$

$\theta_i \in [0; 1]$. Wir setzen $a^{(i)} = x + \theta_i(z-x) \in U_1$ und

erhalten in Matrixschreibweise $\underbrace{f(z) - f(x)}_{\text{Vektor}} = \underbrace{A(a^{(1)} \dots a^{(n)})}_{\text{Matrix}} \underbrace{(z-x)}_{\text{Vektor}}$

Da $\det(A(a^{(1)} \dots a^{(n)})) \neq 0$ nach Wahl von ε kann also

$f(z) = f(x)$ nur für $x = z$ gelten in U_1 .

2. Behauptung: $\exists$ offene Umg W von $b = f(a)$ mit $W \subset f(U_1) \subset f(U)$.

Wir betrachten $U_2 = B(a, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U_1$. Dann gilt $\bar{U}_2 \subset U_1$. Die

stetige Funktion $g(x) = \|f(x) - f(a)\|$ nimmt auf der komp.

Menge δU_2 ihr Min. $= \eta := \inf_{x \in \delta U_2} g(x) > 0$, da

f auf $\bar{U}_2 \subset U_1$ injektiv ist. Wir betrachten nun $W = B(b, \eta/2)$

Für jeden Punkt $y \in W$ werden wir nun zeigen, dass $\exists z$

$\in U_2$ mit $y = f(z)$. Dazu betrachten wir die Fkt. $h(x) := \|f(x) - y\|$

Da h stetig ist, nimmt h auf $\bar{U}_2$ das Min. an, etwa

in $z \in \bar{U}_2$. Für $x \in \delta U_2$ gilt nun $\eta \leq \|F(x) - F(a)\| = \|F(x) - y + y - F(a)\| \leq \|F(x) - y\| + \|y - b\|$. Es gilt also $\|F(x) - y\| \geq \eta - \|y - b\| > \eta/2$. Andererseits gilt

$\|F(a) - y\| = \|b - y\| < \eta/2 \Rightarrow$ Das Min von $\|F(x) - y\|$ und damit auch $\|F(x) - y\|^2$ wird also nicht auf dem δU_2 (sondern in $B(a, \varepsilon_2)$). Es folgt, dass das Min. $z \in U_2 = \bar{U}_2 \setminus \delta U_2$. Da U_2 offen und $k(x) = \sum_{i=1}^n |f_i(x) - x_i|^2$ diffbar ist, müssen alle part. Abl. von k in z verschw.

(*) $0 = 2 \sum_{j=1}^n (f_j(z) - y_j) \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(z) \quad j=1 \dots n$. In Matrixschreibweise: $2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) \right)^T (F(z) - y) = 0$. Da $\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(z) \right) \neq 0$ ist (*) nur möglich für $y = F(z)$. Das Min. z ist also das Urbild von $y \in W$.

3. Schritt: Wir wählen nun $V = (F|_{U_2})^{-1}(W)$. Dann ist V offene Umg. von a mit $a \in V \subset U_2 \subset U_1 \subset U$ und $F|_V: V \rightarrow W$ ist bijektiv: Inj. nach 1) und Surj. nach 2).

4. Behauptung: $g := (F|_V)^{-1}: W \rightarrow V$ ist stetig.

Wir verwenden das Folg.krit. Sei $y^{(v)} \in W$ eine konv. Folge.

$\bar{y} = \lim_{v \rightarrow \infty} y^{(v)} \in W$ und $x^{(v)} = g(y^{(v)})$ die Bildfolge.

Da $V \subset \bar{U}_2 \subset U_1$ hat die Folg. $(x^{(v)})$ in $\bar{U}_2$ (komp.) eine konv. TF. Für den Gw $\bar{x}$ dieser TF gilt $F(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x^{(v_k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(v_k)} = \bar{y}$. Da F auf U_1 inj. ist, ist also der Gw jeder bel. konv. TF. $(x^{(v_k)})$ der Punkt $g(\bar{y}) = \bar{x}$. Es folgt: Die Folge $x^{(v)}$ konv. gegen $\bar{x}$, d.h. g ist stetig, mit $x^{(v)} \in \bar{U}_2$.

5. Behauptung: $g = (F|_V)^{-1}: W \rightarrow V$ ist ebenfalls stetig diffbar.

Nach Vor. ist F stetig diffbar in a . Es gibt also in a stetige Funktionen φ_{ij} sd. $y - b = F(z) - F(a) = (\varphi_{ij}(z))(z - a)$ wobei $\lim_{z \rightarrow a} \varphi_{ij}(z) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Da $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) \neq 0$ für Punkte $z \in U_3 \subset V$ gilt $\det(\varphi_{ij}(z)) \neq 0$. Die Inversematrix $(\varphi_{ij}(z))^{-1} = \frac{1}{\det(\varphi_{ij}(z))} (\varphi_{ij}(z))^{\text{ad.}}$ lässt sich als Matrix in

rationalen Funktionen in den Einträgen $\varphi_{ij}(z)$ schreiben, wobei der Nenner lediglich $\det(\varphi_{ij}(z))$ ist. Da $g: W \rightarrow V$ stetig ist, folgt $(\varphi_{ij}(g(y)))^{-1}$ ist eine Matrix mit $\lim_{y \rightarrow b} (\varphi_{ij}(g(y)))^{-1} = (\varphi_{ij}(a))^{-1} = (D(F(a)))^{-1}$. Es gilt also $\frac{z-a}{g(y)-a} = (\varphi_{ij}(g(y)))^{-1}(y-b)$ wobei $z = g(y)$, da $y = F(z)$. Es folgt $\frac{g(y)-a}{g(y)-a} = 1$ ist diffbar mit $D(g(b)) = (D(F(g(b))))^{-1}$. Da die Matrix $D(g(b))$ stetig von $g(b)$ und damit von b abhängig ist, ist g sogar stetig diffbar.

6. Behauptung: Ist f k -mal stetig diffbar, so auch g . In der Tat, die Einträge der Matrix $Dg(y) = (D(F(g(y))))^{-1}$ sind $(k-1)$ -mal stetig diffbar Funktionen von y . Die Behauptung folgt mit Induktion nach k . $\square$

0x8.0x8 Bemerkung:

Der obige Beweis ist zwar konzeptuell klar, aber die Umkehrabb. wird nicht explizit bestimmt. Dafür müssen wir in Schritt 2 die Lsg $x \in U_2$ von $\text{grad}(\|y - F(x)\|^2) = 0$ bestimmen $\forall y \in W$. Dies ist äquivalent zum Ausgangsprob. $F_1(x) = y_1, \dots, F_n(x) = y_n$. Der Nachweis der Existenz der Lsg. beruhte auf einem Komp. arg. und war weniger konstr. Später werden wir einen zweiten Beweis kennen lernen, aber wenigstens erlaubt, die Umkehrabb. zu berechnen.

