

• System von DGL 1. Ord.: $y' = F(x, y)$ mit $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$,
 $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

• DGL n-ter Ord. $y' = F(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$, $F: G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung: Bisher besprochen. gew. DGL. Darüber hinaus ex. partielle DGL, bei denen Fkt. mehrerer Var. gesucht werden und die Bedingungsgleichung die part. Abl. der ges. Fkt. enthalten. Bsp sind die Potentialgleichungen, die Wellengleichung und die Wärmeleitungsgleichung. Wir werden jetzt eine Bedingung kennenlernen, die Existenz und Eindeutigkeit der gew. DGL garantiert.

0x.B 0x.5 Definition

- F genügt einer Lipschitz-Bed. mit Lip. Konst. $L \geq 0$ wenn $\forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in G$ gilt: $\|F(x, y) - F(x, \tilde{y})\| \leq L \|y - \tilde{y}\|$.
- F genügt lokal einer Lip. Bed. falls jeder Punkt $(a, b) \in G$ eine Umg. U besitzt, sodass F in $G \cap U$ einer Lip. Bed. mit einer gewissen (von U abhängigen) Konstante $L \in \mathbb{R}_+$ genügt.

0x.B 0x.6 Satz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ eine bzgl. der Var. $y = (y_1, \dots, y_n)$ stetig part. diffbar. Dann genügt F in G lokal einer Lip. Bed.

Beweis: Sei $(a, b) \in G$. Es gibt ein $r > 0$, sodass $V := \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq r, \|y - b\| \leq r \}$ ganz in G liegt. V ist eine kompakte Umg. von (a, b) . Da nach Vor. alle Komp. der $n \times n$ Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}$ stetige Fkt. sind, gilt: $L := \sup \{ \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| \mid x, y \in V \} < \infty$. Aus dem MWS folgt die Aussage.

0x.B 0x.7 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Fkt. die lok. einer

Lip. Bed. genügt. Seien $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei LSG der DGL $y' = f(x, y)$ über einem Int. $I \subset \mathbb{R}$. Gilt dann $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein bel. $x_0 \in I$ so folgt: $\varphi(x) = \psi(x) \forall x \in I$.

Beweis: a) Wir zeigen zunächst: Ist $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein bel. $a \in I$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, sd. $\varphi(x) = \psi(x) \forall x \in I$ mit $|x - a| \leq \varepsilon$. Durch Integration der Gleichungen $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ und $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ folgt aus $\varphi(a) = \psi(a)$ $\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) dt$. Da f lokal einer Lip. Bed. genügt, gibt es konst. $L \geq 0$ und $\delta > 0$, sd.: $\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq L \|\varphi(t) - \psi(t)\| \forall t \in I$ mit $|t - a| \leq \delta$. Daraus folgt $\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq L \int_a^x \|\varphi(t) - \psi(t)\| dt$. Setzt man $M(x) := \sup \{\|\varphi(t) - \psi(t)\| \mid |t - a| \leq |x - a|\}$ so folgt weiter $\forall \varphi_1 \in I$ mit $|\varphi_1 - a| \leq |x - a| \leq \delta$: $\|\varphi(\varphi_1) - \psi(\varphi_1)\| \leq L |\varphi_1 - a| M(\varphi_1) \leq L |x - a| M(x)$. Damit ergibt sich $M(x) \leq L |x - a| M(x)$. Für $|x - a| \leq \min(\delta, \frac{1}{2L}) =: \varepsilon$ folgt daraus: $M(x) \leq \frac{1}{2} M(x)$, also $M(x) = 0$. Das bedeutet aber $\varphi(x) = \psi(x)$ für $|x - a| \leq \varepsilon$. Damit ist a) bewiesen.

b) Wir zeigen jetzt: $\varphi(x) = \psi(x) \forall x \geq x_0$. Es sei $x_1 := \sup \{\varphi_1 \in I \mid \varphi|_{[x_0, \varphi_1]} = \psi|_{[x_0, \varphi_1]}\}$. Falls $x_1 = \infty$ oder x_1 der rechten Int.grenze entspricht, fertig. Andernfalls $\exists \delta > 0$, sd. $[x_1, x_1 + \delta] \subset I$. Da φ und ψ stetig sind, gilt: $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$. Nach a) gibt es ein $\varepsilon > 0$, sd. $\varphi(x) = \psi(x) \forall x \in I$ mit $|x - a| \leq \varepsilon$. $\hookrightarrow$ da x_1 bereits sup. Damit ist b) bewiesen.

c) Analog für $x \leq x_0$. $\square$

Beispiel: Wir geben ein Bsp einer DGL, für die der Satz nicht gilt. $y' = y^{2/3}$ (definiert auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Eine spezielle LSG $\varphi_0(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Andere LSG sind: $\varphi_a(x) := \frac{1}{2x} (x - a)^3$, a bel. $\in \mathbb{R}$, denn $\varphi_a'(x) = \frac{1}{3} (x - a)^2 = (\varphi_a(x))^{2/3}$. Da $\varphi_0(a) = \varphi_a(a) = 0$ ist der Eindeigkeitsatz verletzt. Es gibt aber

nach andere LSG ψ mit $\psi(a)=0$. Sei $b < a < c$. $\psi(x) = \begin{cases} \psi_0(x), & x=b \\ 0, & b \leq x \leq c \\ \psi_c(x), & x > c. \end{cases}$ Die Fkt. ψ ist auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar und erfüllt die DGL und $\psi(a)=0$. Nach OxB OxF kann die Fkt $F(x,y) = y^{2/3}$ nicht überall einer lok. Lip. Bed. genügen. Zwar gilt für $y \neq 0$ $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{2}{3} y^{-1/3}$. Nach OxB OxB genügt F in $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ lok. einer Lip. Bed. Jedoch erfüllt F in keiner Umg um $(a,0)$ eine Lip. Bed.

OxB OxF Satz (Existenzsatz)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Fkt. die lok. einer Lip. Bed. genügt. Dann gibt es zu jedem $(a,c) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine LSG $\psi: [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der DGL $y' = F(x,y)$ mit der Anfangsbed. $\psi(a) = c$.

Bemerkung: Nach Satz OxB OxF ist ψ durch Bed. $\psi(a) = c$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Es gibt ein $r > 0$, sodass die Menge $V := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x-a| \leq r, \|y-c\| \leq r\}$ in G enthalten ist. Und F in V einer lok. Lip. Bed. genügen. mit einer Konst. L . Da V kompakt und F stetig, gibt es eine Konst. $M \in \mathbb{R}_+$, sol. $\|F(x,y)\| \leq M \forall (x,y) \in V$. Wir setzen $\varepsilon := \min(r, \frac{r}{M})$ und $I = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Eine stetige Fkt $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genügt genau dann der DGL $y' = F(x,y)$ mit $\psi(a) = c$, wenn $\psi(x) = c + \int_a^x F(t, \psi(t)) dt$. (*)

Dies folgt unmittelbar aus dem Fundamentalsatz der Diff/Int. rech.

Um (*) zu lösen benutzen wir das sog. Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren. Wir definieren Funktion $\psi_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

ke $\in \mathbb{N}$ durch $\psi_0(x) = c \forall x \in I$ und $\psi_{k+1}(x) = c + \int_a^x F(t, \psi_k(t)) dt$ (**)

Wir beweisen (ψ_k) ist wohldef. und glm. konv. gegen ψ^V .

c) Um zu sehen, dass die rechte Seite von (**) wohldef. ist genügt es zu zeigen, dass $\|\psi_k(x) - c\| \leq r \forall x \in I$ und $\forall k \in \mathbb{N}$. Für $k=0$ ψ

Ist die Aussage ^{Für} $\forall k$ schon bewiesen, so folgt $\| \varphi_{k+1}(x) - c \|$
 $\leq \int_a^x \| f(t, \varphi_k(t)) \| dt \leq M |x - a| \leq M \cdot \varepsilon \leq r$