

4.5. Bogenlänge

5. letzte Stunde

4.6 Satz

Jede stetig diffbare Kurve $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar mit $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

Bemerkung: stetig diffbar ist hinreichend für Rektifizierbarkeit aber nicht notwendig

4.7. Lämmer

Sei $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sd.

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \leq \varepsilon \quad \forall t, \tau \in [a; b] \text{ mit } |t - \tau| \leq \delta.$$

Bew.: Zunächst der Fall $n=1$

Die Ableitung $f': [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Voraussetzung stetig, also glm. stetig. Zu $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ sd. $|f'(t) - f'(s)| \leq \varepsilon$ $\forall t, s \in [a; b]$ mit $|t - s| \leq \delta$.

Sei nun $t, \tau \in [a; b]$, $|t - \tau| \leq \delta$. Nach dem MWS $\exists$ ein s zwischen t und τ sd. $\frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} = f'(s)$.

$$\text{Also } \left| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right| = |f'(s) - f'(t)| \leq \varepsilon \text{ da } |s - t| \leq \delta.$$

Sei n beliebig.

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\| \leq \sqrt{n} \max_i \left| \frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau} - f'_i(t) \right| \text{ und}$$

die Behauptung folgt aus a). $\square$

Beweis: 4.6.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Satz über die Approx. von

Int. durch Riemannsche Summen $\exists \delta_1 > 0$ sd. $\left| \int_a^b \|f'(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \varepsilon/2$ $\forall$ Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta_1$.

Nach dem Hilfssatz $\exists \delta_2 > 0$ sd. für Unterteilungen der Feinheit $\leq \delta_2$ $\| (f(t_i) - f(t_{i-1})) / (t_i - t_{i-1}) - f'(t_i) \| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Es folgt $\| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| = \| f'(t_i) \| (t_i - t_{i-1})$

$$\leq \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \quad (1) \text{ und } (2) \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|$$

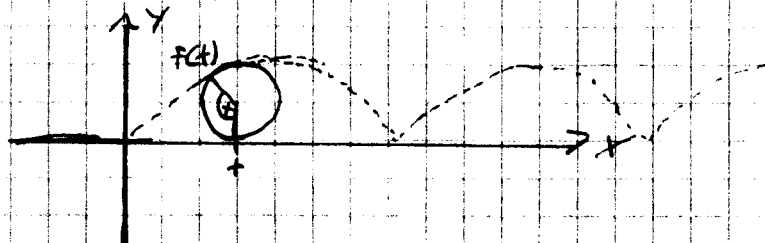
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \text{ Für alle Unterteilungen der Feinheit } \leq \min(\delta_1, \delta_2). \quad \square$$

Beispiel:

1) Sei $\varphi > 0$ und $F: [0; \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^2$. $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$
der Kreisbogen. Für dessen Länge gilt: $F'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, $\|F'(t)\| = (\sin^2 + \cos^2)^{\frac{1}{2}} = 1$, $L = \int_0^\varphi 1 dt = \varphi$.

2) Zykloide:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$



Die Zykloide beschreibt die Bewegung eines Randpunktes auf einem Kreis, der auf der x -Achse abrollt.

$$F'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$$

$$\|F'(t)\|^2 = (1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) = 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t) = 2 - 2\cos(t) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad (!)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

$$\text{Also } L = \int_0^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^\pi 4 \sin(u) du = -4 [\cos(u)]_0^\pi = 8$$

4.7. Parametertransformationen

Sei $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}$ und $\varphi: [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ eine bijektive stetige Abb. Dann ist entweder φ $\nearrow$ (oder φ $\searrow$) und φ heißt orientierungstreu (orientierungsumkehrend). $g = F \circ \varphi: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann ebenfalls eine Kurve und wir sagen g geht aus F durch den Parameterwechsel φ hervor.

Sind φ und auch φ^{-1} stetig diff'bar, so sprechen wir von einem C^1 -Parameterwechsel.

Die Kurvenpunkte = Bildpunkte von F und g sind die gleichen.

Ist F stetig diff'bar, φ ein C^1 -PW, dann ist auch $g = F \circ \varphi$ stetig diff'bar und es gilt für die Tangentialvektoren in $z = \varphi(t)$

$g'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ da $g := F \circ \varphi$ die Ableitung $g'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Die Tangentialvektoren unterscheiden sich also nur um den skalaren Faktor $\varphi'(t)$. Da $\varphi^{-1} \circ \varphi(t) = t$ gilt $(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$ also $\varphi'(t) \neq 0$. $\varphi'(t) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi$ o.tren.

4.8 Verhalten von Tangentialvektoren, Schnittwinkeln und BgL unter C^1 -PWtr.

a) Tangentialvektor $g = F \circ \varphi$, $\tau = \varphi(t)$, $g'(t) = F'(\tau) \cdot \varphi'(t)$. Die norm. Tr. in regulären Punkten $\frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}$ und $\frac{F'(\tau)}{\|F'(\tau)\|}$ stimmen in Falle einer o.treuen C^1 -PW überein. Im Fall von o.umk. sind sie das Negative von einander.

b) Schnittwinkel $F_1: [a_1; b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_2: [\alpha; \beta] \rightarrow [a_1; b_1]$ C^1 -PW $g_i := F_i \circ \varphi_i$, $\tau_i \in [\alpha; \beta]$ mit Bild $t_i = \varphi_i(\tau_i)$ und $F_1(t_1) = F_2(t_2)$. Dann gilt für die Schnittwinkel $\cos(\psi) = \frac{\langle F_1'(\tau_1), F_2'(\tau_2) \rangle}{\|F_1'(\tau_1)\| \cdot \|F_2'(\tau_2)\|} \in [-1; 1]$, $\psi \in [0; \pi]$
 $= \frac{\langle g_1'(\tau_1), g_2'(\tau_2) \rangle}{\|g_1'(\tau_1)\| \cdot \|g_2'(\tau_2)\|}$ Falls φ_i beide o.tren ist oder beide o.umk., andernfalls ändert sich das VB. ψ wird durch $(\psi - \pi) \cdot (-1)$ ersetzt.

c) Bogenlänge $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $\varphi: [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ C^1 -PW $g = F \circ \varphi$. Dann gilt $\int_a^b \|F'(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\| d\tau$ d.h. F und g haben die gleiche BgL.

Beweis: Im Fall dass φ o.umk. ist nach der Kettenregel

$$g'(\tau) = F'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)$$

$$\int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\| d\tau = \int_\alpha^\beta \|F'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\| d\tau = \int_\alpha^\beta \|F'(\varphi(\tau))\| \cdot \varphi'(\tau) d\tau$$

da φ o.umk. $= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|F'(t)\| dt = \int_a^b \|F'(t)\| dt. \square$

4.9. Parametrisierung nach Bogenlänge

Sei $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbare reguläre Kurve d.h.

$F'(t) \neq 0 \forall t$. Dann ist die Fkt. $s = \varphi(t) = \int_a^t \|F'(t)\| dt$

diffbar mit Ableitung $\varphi'(t) = \|F'(t)\| \geq 0$. φ ist also stetig

diffbar monoton und die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: [0; L]$

$\rightarrow [a; b]$ hat die Ableitung: $(\varphi^{-1})'(s) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\|\varphi'(t)\|}$ Es

folgt die Kurve $g = f \circ \varphi^{-1}$ hat Tangentialvektoren

$$g'(s) = f'(\varphi^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{f'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \text{ mit } t = \varphi^{-1}(s)$$

der Länge 1. überall.

Definition:

Man nennt die Kurve $g = f \circ \varphi^{-1}$ die Parametrisierung von f nach BgL.

4.10 Krümmung und Torsion

Sei $g: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nach BgL. param. ^{2mal stetig diffbare} Kurve. Dann haben die Tv. $t(s) = g'(s)$ die Länge $\overset{\text{const.}}{\hat{=}} 1$. Wegen

$$1 = \|g'(s)\|^2 \text{ gilt } \langle t'(s), t(s) \rangle = 0$$

$\langle t(s), t(s) \rangle$ Man nennt $\kappa(s) = \|t'(s)\|$ die Krümmung von g im Punkt $g(s)$ und sofern $\kappa(s) \neq 0$, $\eta(s) = \frac{t'(s)}{\|\kappa(s)\|}$ einen Normalenv. an die Kurve in $g(s)$.

Speziell im Fall $n=3$ können wir $t(s), \eta(s)$ durch

$b(s) = t(s) \times \eta(s)$ zu einer Basis m von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Man nennt $b(s)$ den Binormalvektor.