

noch andere LSG φ mit $\varphi(a)=0$. Sei $b < a < c$. $\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x=b \\ 0, & b \leq x \leq c \\ \varphi_c(x), & x > c. \end{cases}$ Die Fkt. φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar und

erfüllt die DGL und $\varphi(a)=0$. Nach OxB OxF kann die Fkt $F(x,y) = y^{2/3}$ nicht überall einer lok. Lip. Bed. genügen. Zwar gilt für $y \neq 0$ $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{2}{3} y^{-1/3}$. Nach OxB OxB genügt F in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ lok. einer Lip. Bed. Jedoch erfüllt F in keiner Umg um $(a,0)$ eine Lip. Bed.

OxB OxB Satz (Existenzsatz)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Fkt. die lok. einer Lip. Bed. genügt. Dann gibt es zu jedem $(a,c) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine LSG $\varphi: [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der DGL $y' = F(x,y)$ mit der Anfangsbed. $\varphi(a) = c$.

Bemerkung: Nach Satz OxB OxF ist φ durch Bed. $\varphi(a) = c$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Es gibt ein $r > 0$, sodass die Menge $V := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x-a| \leq r, \|y-c\| \leq r\}$ in G enthalten ist. Und F in V einer lok. Lip. Bed. genügen. mit einer Konst. L . Da V kompakt und F stetig, gibt es eine Konst. $M \in \mathbb{R}_+$, sd. $\|F(x,y)\| \leq M \forall (x,y) \in V$. Wir setzen $\varepsilon := \min(r, \frac{r}{M})$ und $I = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Eine stetige Fkt $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genügt genau dann der DGL $y' = F(x,y)$ mit $\varphi(a) = c$, wenn $\varphi(x) = c + \int_a^x F(t, \varphi(t)) dt$. (*)

Dies folgt unmittelbar aus dem Fundamentalsatz der Diff/Int. rech.

Um (*) zu lösen benutzen wir das sog. Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren. Wir definieren Funktion $\varphi_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ rekursiv durch $\varphi_0(x) = c \forall x \in I$ und $\varphi_{k+1}(x) = c + \int_a^x F(t, \varphi_k(t)) dt$ (**)
Wir beweisen (φ_k) ist wohldef. und glm. konv. gegen φ^* .

c) Um zu sehen, dass die rechte Seite von (**) wohldef. ist genügt es zu zeigen, dass $\|\varphi_k(x) - c\| \leq r \forall x \in I$ und $\forall k \in \mathbb{N}$. Für $k=0$ ✓

Ist die Aussage ^{für} $\forall k$ schon bewiesen, so folgt $\| \varphi_{k+1}(x) - c \| \leq \int_a^x \| F(t, \varphi_k(t)) \| dt \leq M |x-a| \leq M \cdot \varepsilon \leq r$. Wir zeigen, dass (φ_k) glm. konv. gegen eine LSG.

Induktion: $\| \varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x) \| \leq M \cdot L^k \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall x \in I$.

IA: $k=0 \quad \| \varphi_1 - \varphi_0 \| = \left\| \int_a^x F(t, c) dt \right\| \leq M \cdot |x-a|$

IS: $k-1 \rightarrow k: \| \varphi_{k+1} - \varphi_k \| = \left\| \int_a^x (F(t, \varphi_k(t)) - F(t, \varphi_{k-1}(t))) dt \right\| \leq \int_a^x L \| \varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t) \| dt \leq \frac{M \cdot L^k}{k!} \int_a^x |t-a|^k dt = \frac{M \cdot L^k}{(k+1)!} \cdot |x-a|^{k+1}$.

$\sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ ist also auf I eine konv. Majorante, nämlich $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{k+1} \varepsilon^k}{k!}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$ konv. glm. gegen $\varphi := \lim \varphi_k = c + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)$

$\Rightarrow \varphi$ stetig, $\forall k \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ gilt $\| F(x, \varphi(x)) - F(x, \varphi_k(x)) \| \leq L \| \varphi_{k+1} - \varphi_k \|$

$\Rightarrow$ da $(F(x, \varphi_k(x)))_k$ glm. konv. darf man $\lim$ und $\int$ vertauschen. Dadurch erhält man (1).

Bemerkung: Beim Beweis von Existenz und Eindeigkeitsatz wurde das Problem jeweils gelöst, in dem es auf eine Funktionalgleichung $\varphi = T\varphi$ (T =Operator) zurückgeführt worden. Im ersten Satz: $(Tg)(x) = G(x, g(x))$, im zweiten Satz: $(Tg)(x) = c + \int_a^x F(t, g(t)) dt$. In beiden Fällen wurde die LSG als Limes einer Fkt-Folge $(\varphi_k)_k$ dargestellt, die rekursiv definiert wurde ($\varphi_{k+1} = T\varphi_k$). Das lässt sich allg. auf den Banachschen Fixpunktsatz zurückführen.

Beispiel: Manchmal kann man mit dem P-L-Int. expl. berechnen. Betr.: $y' = 2xy$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Suchen φ mit Anfangsbed. $\varphi(0) = c$. Das Int. vert. lautet: $\varphi_{k+1}(x) = c + 2 \int_a^x t \cdot \varphi_k(t) dt$, $\varphi_0(x) = c \Rightarrow \varphi_1(x) = c + 2c \int_a^x t dt = c \cdot (1+x^2)$
 $\varphi_2(x) = c \cdot (1+x^2 + \frac{x^4}{2})$
 $\varphi_k(x) = c (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}) \Rightarrow \varphi = \lim \varphi_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = c \cdot e^{x^2}$

φ löst die DGL und erfüllt die Bed.

Anwendung auf DGLs n-ter Ordnung

Man kann Ex. und Eind. auf DGLs n-ter Ordnung übertragen $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ mit $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) stetig. F genügt lokal einer Lip. Bed., wenn $\forall x \in G$ eine Umg. U und eine Konst. $L > 0$ ex. sd. $|F(x, Y) - F(x, \tilde{Y})| \leq L \cdot |Y - \tilde{Y}|$ ($Y = (y_0, \dots, y_{n-1})$). Durch Reduktion auf ein DGL-System 1. Ord. folgt aus Satz 1 und Satz 2.

Ox. Ox. Korollar

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig + lok. Lip. Seien $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei LSG der DGL $y^{(n)} = (F, y, y', \dots, y^{(n-1)})(x)$. Für ein $a \in I$ gelte $\varphi(a) = \psi(a)$ und für alle Abl. bis zur $n-1$. Dann ist $\varphi(x) = \psi(x) \forall x \in I$. Sei umgekehrt $(a, c_0, \dots, c_{n-1})$ gegeben, dann $\exists x_0$ und eine LSG $\varphi: [a-x, a+x] \rightarrow \mathbb{R}$ von (x) , die der Anfangsbed. $\varphi(a) = c_0, \varphi'(a) = c_1, \dots$ genügt.

Bemerkung: Um die LSG einer DGL n-ter Ord. eind. festzulegen, reicht es also nicht den $\varphi(a) = c$ festzulegen. Man muss auch die Werte der Abl. festlegen.

Beispiel:

DGL 2.ter Ord.: $y'' + y = 0 (x)$. $\Rightarrow$ zwei LSG auf $\mathbb{R}$: $y = \cos(x), y = \sin(x)$. $\Rightarrow \forall c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ist $\varphi(x) = c_0 \cos(x) + c_1 \sin(x)$ eine LSG. Aus $\varphi(0) = c_0$ und $\varphi'(0) = c_1$ folgt, dass φ die einz. LSG mit $\varphi(0) \stackrel{c_0}{=} c_0$ und $\varphi'(0) = c_1$ ist. Umgekehrt hat jede LSG von (x) einen Wert und Wert der Abl. an der Stelle 0. $\Rightarrow$ Wenn $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ ganz $\mathbb{R}$ durchlaufen, erhalten wir also alle LSG'en von (x) .

Ox. Elementare LSG-methode

DGLs mit getrennten Var.

I, J seien offene Interv. $F: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig,
 $g(y) \neq 0 \quad \forall y \in J$. Man nennt eine DGL der Form $y' =$
 $F(x) \cdot g(y)$ in $I \times J$ eine DGL mit getr. Var.

Or. Or. Satz

Notation wie oben, $(x_0, y_0) \in I \times J$. Wir def. $F(x) = \int_{x_0}^x F(t) dt$, $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt$. Sei ferner $I' \subset I$ Interv.
mit $F(I') \subset G(J)$. Dann $\exists$ genau eine LSG $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$
von y' mit $\varphi(x_0) = y_0$ (*). Diese LSG genügt der Bee.
 $G(\varphi(x)) = F(x)$.

Beweis: Sei $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$ eine LSG von (*). Dann folgt aus
 $\varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot F(x)$, dass $\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_{x_0}^x F(t) dt$. Wir
substituieren im linken Int. $u = \varphi(t)$ und erhalten:
 $\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)} du = \int_{x_0}^x F(t) dt \Rightarrow G(\varphi(x)) = F(x)$. Zur Eind.
von φ : Da $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0 \quad \forall y \in J$ (und g stetig ist) ist
 G streng monoton. G besitzt demnach eine Umkehrabb.
 $H: G(J) \rightarrow \mathbb{R}$. Mit (***) folgt nun $\varphi(x) = H(F(x)) \quad \forall x \in$
 I' (***) $\Rightarrow$ Falls φ existiert, ist φ mit gegebenen An-
fangsbed. eindeutig.

Zur Existenz: Wir nehmen (***) als Def. für eine
Fkt $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$. Dieses φ ist dann stetig diffbar mit
 $\varphi(x_0) = H(F(x_0)) = H(0) = y_0$ ($F(x_0) = 0 = G(y_0)$). Ferner
folgt mit (***) $G(\varphi(x)) = F(x)$, also $G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) =$
 $\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = F'(x) = F(x) \Rightarrow \varphi'(x) = F(x) \cdot g(\varphi(x))$. $\square$

Bemerkung: Etwas schlapper schreibt man $y' = F(x)g(y)$
als $\frac{dy}{dx} = F(x)g(y)$ und schreibt dies nun $\frac{dy}{g(y)} = F(x) dx$
im $\int \frac{dy}{g(y)} = \int F(x) dx + \text{const.}$ und löst nun die letzte Gl.
nach y auf um eine LSG zu erhalten.

Beispiel: $y' = y^2$ im $\mathbb{R}^2$ und suchen LSG mit Anfangsbed.

$y(0) = c \in \mathbb{R}$. Da die Lip. Bed. erfüllt ist, gilt der Einzelsatz.

1) $c = 0$, $\varphi(x) \equiv 0$ ist LSG $\forall x \in \mathbb{R}$. Dieses ist die Lsg., da die Anfangsbed. erfüllt ist.

2) $c > 0$: Ist $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine LSG mit $\varphi(x) = c > 0$ für ein x , so ist $\varphi(x) > 0 \forall x \in I$. Andernfalls $\exists x_0 \in I: \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \forall x \in I$.

Es genügt also, wenn wir uns auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ beschränken.

Trennung der Var.: $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = 1, g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = y^2, F(x) = \int_0^x 1 dt = x, G(y) = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{y}$. Es ist $G(\mathbb{R}_{>0}) =]-\frac{1}{0}, \frac{1}{\infty}[\Rightarrow$ können $I' =]-\frac{1}{0}, \frac{1}{\infty}[$ wählen. Für die LSG

$\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nach $(**)$ des letzten Satzes $\frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} = x$

also $\varphi(x) = \frac{c}{1 - cx} \quad \forall x < \frac{1}{c} \Leftrightarrow x \in I'$.

(iii) Analog erhält man für $c > 0$ $\varphi(x) = \frac{c}{1 - cx} \quad (x > \frac{1}{c})$.

Man beachte, dass obwohl die DGL auf $\mathbb{R}^2$ def. ist, lassen sich die LSG nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

