

4. ^{x2} Krümmung

$g: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine 2x diffbare Fkt. Kurve parametrisiert nach Bgl. $t(s) = g'(s)$ der Tangentialvektor im Punkt $g(s)$. Dann ist die Krümmung $k(s) = \|t'(s)\|$.

Ist $k(s) \neq 0$ dann heißt $\eta(s) = t'(s) / k(s)$ der Normalenvektor. $\langle t(s), t(s) \rangle = 1 \Rightarrow 0 = \langle t'(s), t(s) \rangle + \langle t(s), t'(s) \rangle = 2 \langle t(s), \eta(s) k(s) \rangle = 2 k(s) \langle t(s), \eta(s) \rangle$.

4. B. Im Fall $n=3$ können wir $t(s), \eta(s)$ durch $b(s) = t(s) \times \eta(s)$ zu einer $\tilde{\text{orthonormal}}$ Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

$b(s)$ heißt Binormalvektor. Die Torsion definieren wir als: $\tau(s) = \langle \eta'(s), b(s) \rangle$. $t(s), \eta(s), b(s)$ heißt Frenetsches 3-Bein.

4. C. Satz

Sei $g: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine 3xmal stetig diffbare Kurve parametrisiert nach Bogenlänge und $t(s), \eta(s), b(s)$ das F-3B. Dann genügen diese Vektoren den DGL:

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ \eta'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ \eta(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$$

Beweis:

$t'(s) = k(s) \eta(s)$ gilt nach Definition. $k(s) = \|t'(s)\|, \eta(s) = \frac{t'(s)}{k(s)}$. $\langle t(s), \eta(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle t'(s), \eta(s) \rangle + \langle t(s), \eta'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \eta'(s), t(s) \rangle = -k(s)$. Also die Komponente von $\eta'(s)$ in Richtung $t(s)$ ist $k(s)$. $\langle \eta(s), \eta(s) \rangle = 1 \Leftrightarrow \eta'(s) \perp \eta(s)$, also die Koeff. für $\eta'(s)$ von $\eta(s)$ im Beweis t, η, b ist Null. Der Koeffizient von $\eta'(s)$ in Richtung $b(s)$ ist $\tau(s) = \langle \eta'(s), b(s) \rangle$ die Torsion. $b(s) = t(s) \times \eta(s) \Rightarrow b'(s) = t'(s) \times \eta(s) + t(s) \times \eta'(s) = t(s) \times \eta'(s)$, da t' und η lin. abh. sind. $\Rightarrow b'(s) \perp t(s)$

$$\langle b(s), b(s) \rangle = 1 \Rightarrow \langle b'(s), b(s) \rangle = 0 \Rightarrow b'(s) \perp b(s)$$

$$\begin{aligned} \langle b'(s), \eta(s) \rangle &= \langle t(s) \times \eta'(s), \eta(s) \rangle = \det(t(s), \eta'(s), \eta(s)) \\ &= -\det(t(s), \eta(s), \eta'(s)) = -\langle t(s) \times \eta(s), \eta'(s) \rangle = -\langle b(s), \eta'(s) \rangle = -\tau(s) \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel: $f(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), c \cdot t)$, $r > 0, c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

$$f'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t), c), \|f'(t)\|^2 = r^2 \sin^2 + r^2 \cos^2 + c^2 = r^2 + c^2 \text{ unabh. von } t.!$$

Die Parametrisierung nach BgL ist $g(s) = f\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right)$,

$$\sqrt{r^2+c^2}$$

$$\|g'(s)\| = \frac{\sqrt{r^2+c^2}}{\sqrt{r^2+c^2}} = 1. \quad g'(s) = \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}}\right) = t(s)$$

$$t'(s) = \frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}} \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), \frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), 0\right) = \underbrace{\frac{r}{r^2+c^2}}_{\kappa(s)} \underbrace{\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), 0\right)}_{\eta(s)}$$

$$b(s) = t(s) \times \eta(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}} (-r \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), r \cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), c) \right) \times \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), 0\right) \\ = \frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}} (c \cdot \sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), c \cdot \cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), r), \|b(s)\| = 1 \text{ ok.}$$

VZ-Fehler $\Rightarrow$

$$b'(s) = \frac{c}{r^2+c^2} \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}\right), 0\right) = \tau(s) \cdot (-\eta(s)). \text{ Also}$$

hat die Schraubenlinie konst. Krümmung und konst. Torsion

$$\kappa(s) = \frac{r}{r^2+c^2}, \quad \tau(s) = \frac{c}{r^2+c^2}.$$

Geometrische Interpretation:

$\forall s_1 \neq s_0$ gibt es genau einen Kreis in der Ebene aufgespannt von $t(s_0)$ und $g(s_1)$ durch $g(s_0)$ und $g(s_1)$ der tang. zur $t(s_0)$ ist. lassen wir s_1 nach s_0 streben so strebt dieser Kreis an den Berührungskreis an $t(s)$ mit Radius $\frac{1}{\kappa(s)}$.

Der Vektor $b(s)$ bewegt sich zum Zeitpunkt s in Richtung

$\eta(s)$ mit Drehgeschw. $\tau(s)$

0x4. 0x4 Satz

$f: [0; L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine 3 stetig diffbare nach BgL. param. Kurve

Dann gilt 1) $\kappa(s) \equiv 0 \Leftrightarrow f$ ist eine Gerade

2) $\tau(s) \equiv 0 \Leftrightarrow f$ ist eine Ebene

3) $\tau(s) \equiv 0$ und $\kappa(s)$ konst. $\neq 0 \Leftrightarrow f$ ist ein Kreis.

$$b'(s) = \tau(s) \cdot \eta(s)$$

4) $z(s)$ und $w(s)$ konst. $\neq 0 \Leftrightarrow f$ beschreibt Schraubenlinie

0x5. Partielle Ableitung

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt.

0x5.0x1 Der Graph $\Gamma_f = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\}$

Im Fall $n=2$ ist der Graph eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. Eine andere Mgl. zur opt. Veranschaulichung sind die Niveaumengen $N_c(c) = \{x \in U \mid f(x) = c\}$. Im Fall $n=2$ spricht man auch von Nivrealinien.

0x5.0x2 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt. und $x \in U$. f heißt in x part. diffbar in die i -te Koord. richtung, wenn

$$(D_i f)(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \quad \exists, \text{ dabei } e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

der i -te Basisvektor, und h müssen klein sein: $\lambda \in B(x, \varepsilon) \subset U$ dann $|h| < \varepsilon$. Anders gedacht, wir können $D_i f(x)$ auch als Abl. der Fkt. $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ $f_i(\varphi) = f(x_1, \dots, \varphi, \dots, x_n)$ nach φ auffassen.

0x5.0x3 Definition

f heißt in x partiell diffbar in x , wenn alle $D_i f(x) \exists$.

Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_i f(x)$

0x5.0x4 Beispiel

0x1) $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \|x\|_2$. Die Niveaumengen sind $N_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = c\}$ sind sphären. Die Fkt. r ist in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell diffbar mit $\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r(x)}$ dann $\varphi \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + \varphi^2 + \dots + x_n^2}$ hat nach Kettenregel $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\varphi}{\sqrt{\dots}} = \frac{\varphi}{r(x)}$ also an der Stelle x_i dann $\frac{x_i}{r(x)}$

0x2) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ für $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann auch diffbar
 $\frac{\partial f(r)}{\partial x_i} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r}$

0x3) Sei $n \geq 2$ und $F(x) = \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_n}{(r(x))^{2n}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

F ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ part. diffbar, $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{x_2 \cdot x_n}{(r(x))^{2n}} + x_2 \cdot x_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{(r(x))^{2n}} \right)$

$$= \frac{x_2 \dots x_n}{r(x)^{2n}} + x_1 \dots x_n \left(-2n \frac{1}{r(x)^{2n+2}} \frac{\partial}{\partial x_1} (r(x)) \right) =$$

$$= \frac{x_2 \dots x_n}{r(x)^{2n}} - x_1 \dots x_n \cdot 2n \cdot \frac{1}{r(x)^{2n+2}} \cdot \frac{x_1}{r(x)}$$

$$(F_n) = x^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \frac{x_1 \dots x_n}{r(x)^{2n}} - 2n \frac{x_1^2 x_2 \dots x_n}{r(x)^{2n+2}}. \text{ Die anderen part Abl. ergeben sich mit der Sym.}$$

Die Fkt F ist auch in $x=0$ part. diffbar.

$F(0, \dots, x_i, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = 0 \quad \forall i$. F ist also auf ganz $\mathbb{R}^n$ part. diffbar, aber nicht in $x=0$ stetig.

Betrachten $a_k = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}) \in \mathbb{R}^n$ und die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = r(a_k) = \frac{\sqrt{n}}{k}$$

$$F(a_k) = \frac{(\frac{1}{k})^n}{(\frac{\sqrt{n}}{k})^{2n}} = \left(\frac{n}{k} \right)^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

Q 5.0x5 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ part. diffbar. Dann heißt der Vektor $(\text{grad } F)(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right)$ der Gradient von F in $x \in U$.

Beispiel: $F(x) = r(x) = \|x\|_2$, $\text{grad}(r) = \frac{x}{r} = \left(\frac{x_i}{r} \right)$