

Bemerkung: Mit anderen Worten $(V' \times V'') \cap F^{-1}(0)$ ist der Graph der Abb. $g: V' \rightarrow V''$. Insbesondere gilt: $F(x, g(x)) = 0$.

8.5. Beispiel

$$n=3, m=1$$

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

$F^{-1}(0) = S \subset \mathbb{R}^3$ ist die Einheitskugel.

$a = (0, 0, 1)$, da $F(a) = 0$.

$$\text{grad}(F) = (2x, 2y, 2z), \frac{\partial F}{\partial z}(a) = 2 \neq 0. \text{ Satz } \Rightarrow \exists V' \subset \mathbb{R}^2$$

Umgebung von 0, $V'' \subset \mathbb{R}$ Umgebung von 1 und $g: V' \rightarrow V'' \subset \mathbb{R}$ sodass auf $V' \times V''$ $F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = g(x, y)$. g ist auf $V' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ definiert und diffbar. g parametrisiert die obere Halbkugel.

Beweis (8.4):

Wir betrachten $\tilde{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m, \tilde{F}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n))$.

$$D\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & & & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \\ 0 & & & \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{k+1}} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Also $\det D\tilde{F} = \det \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right)_{i=1 \dots m, j=k+1 \dots n}$, der im Satz angegebene Minor der Jac. Mat. von F . Auf $\tilde{F}$ lässt sich im Punkt a , der Umkehrsatz anwenden. Für $\tilde{F}(a) = (a', 0)$

existiert eine Umg. $W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ und eine Umgebung V von a im $\mathbb{R}^n \supset V$, sodass $\tilde{F}|_V: V \rightarrow W$ bijektiv, $\tilde{g} = \tilde{F}^{-1}: W \rightarrow V$

V stetig diffbar ist. $\tilde{g}(W) = V, \tilde{F}(V) = W, \tilde{g}(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_k, \tilde{g}_1(y), \dots, \tilde{g}_m(y))$. Sei $W' = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ und

$g' = (g_1, \dots, g_m): W' \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch $g_i(x_1, \dots, x_k) = \tilde{g}_{k+i}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Dann gilt $F(x_1, \dots, x_k, g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k)) = 0$.

$= (\tilde{F}_{k+1}(\tilde{g}(x'), 0), \dots, \tilde{F}_n(\tilde{g}(x', 0))) = 0$, da $\tilde{F}(\tilde{g}(x', 0)) = (x', 0)$
 Wählen nun $V' \subset W'$ und $V'' \subset \mathbb{R}^m$ genügend kleine Umg.
 von a' und a'' wobei: $a = (a', a'')$ sd. $V' \times V'' \subset V$ und
 $g(V') \subset V''$ ($\begin{smallmatrix} \nabla \\ 0 \end{smallmatrix}$) $g|_{V'}: V' \rightarrow V''$ erfüllt die gewünschten
 Eigenschaften im Satz: $F^{-1}(0) \cap (V' \times V'') = \tilde{F}^{-1}(V' \times 0)$
 $= \tilde{g}(V' \times 0) = \{(x', g'(x')) \mid x' \in V'\} \square$

0x8.0x6. Korollar

Sei: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, $m \leq n$, $k = n - m$
 und $a \in U$ mit $F(a) = 0$. gilt: $\text{rang}(DF(a)) = m$, d.h. rang
 der Jac. M. ist in a max. Dann $\exists$ offene Umg. $V \subset U$ von
 a , sd. $F^{-1}(0) \cap V$ bzgl. einer geeigneten Reihenfolge der
 Koord. $(x_1, \dots, x_n)$ als Graph einer stetig diffbaren Fkt.

$g: \underset{\substack{V' \subset \mathbb{R}^k}}{V'} \rightarrow V''$ dargestellt/aufgefasst werden kann. $\square$

0x8.0x7 Beispiel $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = y^2 - x^2 + x^4$$



$0 \Rightarrow$ kein Aufl. nach x .

$0 \Rightarrow$ " " nach y .

$\text{grad}(F) = (-2x + 4x^3, 2y)$. In den Punkten $(a, b) \in F^{-1}(0)$
 mit $b \neq 0$ können wir nach y auflösen. In den Punkten
 $(a, b) \in F^{-1}(0)$ mit $-2a + 4a^3 \neq 0$ nach x . $-2a + 4a^3 = 0$
 $\Leftrightarrow a = 0$ oder $2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nur in $(0, 0)$ können
 wir nach x und y nicht auflösen. In allen außer diesen
 sieben Punkten können wir nach allen Var. aufl.

0x8.0x8. Definition

Sei: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar. F heißt
 im Punkt $a \in U$ regulär, wenn $DF(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rang
 $(DF(a)) = \min(m, n)$. Ist $a \in U$ kein reg. Punkt von F ,
 so nennt man a krit. Punkt von F . Speziell im Fall $m = 1$
 nennt man den Wert $F(a) = c$. In diesem Fall nennt man
 einen krit. Wert.

0x8.0x9 Beispiel

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Die Krit. Punkte von F sind die NST des $\text{grad}(F)$ $0 = \text{grad}(F) = (2x, 2y, -2z)$. Also $0 \in \mathbb{R}^3$ ist der einzige Krit. Punkt und $F(0) = 0 \in \mathbb{R}$ der einzige krit. Wert. Auf die Nm. $N_c(F)$ Für $c \neq 0$ lässt sich in jedem Punkt $a \in N_c(F)$ das Kor $0,8 \times 6$ anwenden. Für $c = 0$, lässt auf $a \in N_0(F)$ mit $a \neq 0$ ebenfalls das Kor. anwenden. Im Punkt $0 \in N_0(F)$ sind die Vor. nicht erfüllt. Im NP ist auch die Konkl. des Satzes nicht erfüllt. Beh.: $\nexists V$ von $\mathbb{R}^3$ sol. $F^{-1}(0) \cap V \stackrel{\text{stetig}}{\cong} W = B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$.

Bew: In $V \setminus \{0\}$ lassen sich je zwei Punkte durch eine stetige Kurve verbinden. In $F^{-1}(0) \cap V$ lassen sich Punkte (x_1, y_1, z_1) ($z_1 > 0$) nicht mit Punkten (x_2, y_2, z_2) ($z_2 < 0$) verbinden. Wäre $\varphi: [0, 1] \rightarrow F^{-1}(0) \cap V$ solch ein Weg, dann erfüllt die 3. Kond. von $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. $\varphi_3(0) > 0$ und $\varphi_3(1) < 0$. Da φ_3 stetig ist $\exists t \in [0, 1]$ mit $\varphi_3(t) = 0$. $F^{-1}(0) \cap V = \{(x, y, z) \mid z = 0\} = \{(x, y, z) \mid z = 0, x^2 + y^2 = 0\} = \{0\}$ also φ ist kein Weg in $V \setminus \{0\} \cap F^{-1}(0)$.

Dennoch ist es nützlich, krit. P. zu betrachten. In krit. Punkten ändert sich die Top. Gestalt der Nm. häufig.

Im Folgenden wollen wir einen 2. Beweis zum Satz über implizite Fkt geben, der wenigstens im Prinzip konstruktiv ist. Er beruht auf einem Iterationsverfahren.

0x8, 0x10 Satz (Banachscher Fixpunktsatz.)

Sei A eine abgeschl. Tm. eines Banachraums. Sei $\bar{\Phi}: A \rightarrow A$ eine kontrahierende Abb. ($\exists \text{ Konst } \eta, 0 \leq \eta < 1$, sol. $\|\bar{\Phi}(F) - \bar{\Phi}(G)\| \leq \eta \|F - G\|$). Dann hat $\bar{\Phi}$ genau einen Fixpunkt $F^* \in A$, d.h. $\bar{\Phi}(F^*) = F^*$. Ferner: Für einen bel. Startwert $F_0 \in A$ konv. die durch $F_k = \bar{\Phi}(F_{k-1})$ rek. def. Folge gegen F^* .

Beweis: s. Übung. $\square$

