

0x5 0x2 Beispiel

$$y' = y^2 \text{ (Explosionsgleichung)}$$

Lösung mit Anfangswert $P(0) = c > 0$, ist $P(x) = \frac{c}{1-cx}$

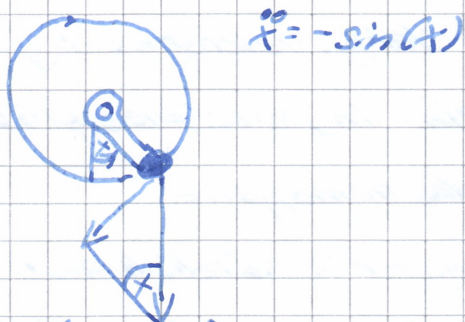
0x1. 0x3 DGL vom Typ $y'' = F(y)$ (Autonome DGL)

In der Physik: x = Zeit, y = Ort. In der Physik üblich:

+ Für Zeit, (x, y) ersetzen wir durch (t, x) . $\ddot{x} = F(x)$.

$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) = v(t)$ Geschw. zum Zeitpunkt t .

Mathematisches Pendel



Zu jedem Anfangswert $x(t_0), \dot{x}(t_0) = v(t_0)$ Geschwindigkeit

Zeit t nach Pic. L. genau eine Lösung. Allgemein

$U(x) = - \int_a^x f(\varphi) d\varphi$ potentielle Energie, $\frac{1}{2} v(t)^2$ kineti-

sche. $E(t) = \frac{1}{2} v(t)^2 + U(x(t))$. $\frac{d}{dt} E(t) = \dot{x} \ddot{x}(t) - F(x(t)) \dot{x}(t)$.

$= \dot{x}(t) [\ddot{x}(t) - F(x(t))]$ $\Rightarrow E$ bleibt konst.

$$U(x) = - \int_a^x (-\sin(\varphi)) d\varphi = -\cos(\varphi) \Big|_a^x = -\cos(x) + \cos(a).$$

$$a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow U(x) = -\cos(x). \quad \frac{1}{2} v(t)^2 - \cos(x) = E \text{ const.}$$

0x. 0x Definition

Der Phasenraum einer autonomen DGL ist die Menge der möglichen Anfangswerte. In unserem Fall (x_0, v_0)

$\in \mathbb{R}^2$. Jeder Anfangswert gibt eine eind. best. LSG-

Kurve. $\mathbb{R} \ni t \mapsto (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$. Die Gesamtheit

dieser Kurven nennt man Phasenportrait. Im Bsp. ver-

laufen die Lösungsmengen auf den Niveaumengen der Fkt.

$$g(x, v) = \frac{1}{2} v^2 - \cos(x). \quad g(x, v) \geq -1.$$

Mathematisches Pendel mit Reibung

$$\ddot{x} = -\epsilon \dot{x} + F(x) \quad E(t) = \frac{1}{2} v(t)^2 + U(x(t)). \quad \frac{d}{dt} E(t) = -\epsilon \dot{x}(t) < 0$$

Bei Reibung nimmt die Energie des Systems ab (monoton) und die LSG-Kurven strecken sich in einem stab. Gleichgewichtspunkt ein.

0x0. Lineare DGL

0x0. 0x1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine matrixwertige Abb. mit $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ alle stetig. Dann

heißt (1) $y' = A(x)y$ homogene lineare DGL 1. Ord.

Ist $b = (b_1, \dots, b_n)^T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, Vektorwertig. Dann

heißt (2) $y' = A(x)y + b(x)$ ein inhomogenes DGL Sys.

(1. Ord.) und (1) ist dazu das homogene.

Im Hinblick auf Anwendung ist es nützlich auch komplexwertige Versionen zu betrachten, also $A : I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$. LSG dann sind $\varphi : J \rightarrow \mathbb{C}^n$ sd. $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + b(x)$ gilt.

0x0. 0x2. Satz

$K := \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen Int. und seien $A : I \rightarrow K^{n \times n}$, $b : I \rightarrow K^n$ stetige Abb. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und jedem Anfangswert $c \in K^n$ genau eine LSG $\varphi : I \rightarrow K^n$

der DGL $y' = \underbrace{A(x)y + b(x)}_{:= F(x,y)}$ mit Anfangsbed. $\varphi(x_0) = c$

Bemerkung: Bei allg. DGL $y' = f(x, y)$ auf $I \times K^n$

die lok. einer Lp. Bed. genügt, können wir nicht erwarten, dass die LSG auf ganz I def. ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst: Ist $J \subset I$ ein kompaktes Teilintervall, dann genügt die DGL auf $J \times K^n$ einer globalen Lp. Bed. : $L = \sup \{ \|A(x)\| / x \in J \} < \infty$ und folg. $\|F(x, y) - F(x, \tilde{y})\| = \|A(x)(y - \tilde{y})\| \leq L \|y - \tilde{y}\|$. Dann folgt die Eindeutigkeit. Zum Beweis der Existenz verwenden wir das PL. It. verf. $\varphi_0(x) = c$, $\varphi_{k+1}(x) = c + \int_{x_0}^x F(t, \varphi_k(t)) dt$

$$y_k'(t) dt.$$

Behauptung: Diese Fkt. Folge konv. glm. auf J gegen eine LSG y mit $y(x_0) = c$.

Beweis: Sei $K = \sup \{ \|y_k(x) - y_0(x)\| / x \in J \}$. Dann er.

$$\begin{aligned} & \text{gibt sich mit Induktion } \|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| \leq K \frac{L^k |x-x_0|^k}{k!} \\ & = \left\| \int_{x_0}^x A(t) (y_k - y_{k-1}) dt \right\| \leq \int_{x_0}^x \|A(t)\| \|y_k - y_{k-1}\| dt \\ & \leq \int_{x_0}^x L K \frac{L^{k-1} |t-x_0|^{k-1}}{(k-1)!} dt = L^k K \frac{|x-x_0|^k}{k!}. \end{aligned}$$

Damit ist $K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!} |x-x_0|^k$ eine konv. Majorante und die glm konv. von $\sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1} - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ folgt. y ist die LSG auf J mit dem Anfangswert $y(x_0) = c$. Da die LSG eind. ist und

$J \subset I$ bel. Int. (komp.) in I können wir diese LSG durch eine LSG mit Anfangswert $y(b)$ zum Zeitpunkt $x_0 = b$ fortsetzen um schließlich eine Lösung auf ganz I zu erhalten. $\square$

Bsp: $I = \mathbb{R}$, dann ex. die LSG $\forall$ Zeiten.

Ord. O + 3 Satz

Sei $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ eine stetige Abb. Es sei L_A die Menge der LSG $y: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der LSG des homogenen lin. DGL $y' = A(x)y$. Dann ist L_A ein n -dim VR ($\mathbb{K}$). Für ein Tupel $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ von LSG sind folg Aussagen äquivalent:

- (1) $y_1, \dots, y_n$ sind $\mathbb{K}$ lin. unabh. in L_A .
- (2) $y_i(x_0) \forall i$ sind $\mathbb{K}$ -lin. unabh. in $\mathbb{K}^n$ für ein $x_0 \in I$.
- (3) $y_i(x) \forall i$ " " " " " " $\forall x \in I$.

Beweis: Zunächst L_A ist UVR. $\Rightarrow$ trivial

Wir zeigen $3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$ ist trivial. Bleibt es. $1) \Rightarrow 3)$

Es seien $y_i \forall i$ lin. unabh. und $x_0 \in I$ bel. Angenommen $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ sol. $\sum \lambda_i y_i(x_0) = 0$. Dann ist $y = \sum \lambda_i y_i$ die eind. Lsg. zum Anfangswert $y(x_0) = 0$. Dies ist aber die 0-Lsg.

$$\sum 1; \varphi_i \equiv 0, \text{ Voraussetzung } \Rightarrow \sum 1; \psi_i = 0. \square$$