

$f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell diffbar: $\text{grad}(g \cdot f) = g \cdot \text{grad}(f) + f \cdot \text{grad}(g)$

Dies folgt aus $\frac{\partial (g \cdot f)}{\partial x_i} = g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$

0x5. 0x6 Definition

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Jedem Punkt $x \in U$ wird also ein Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet.

V heißt partiell diffbar, wenn alle Komponenten v_i von $v = (v_1, \dots, v_n)$ part. diffbar sind.

Die Funktion $\text{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ heißt dann Divergenz von v .

0x5. 0x7 Bemerkung (Nabla (∇)-Schreibweise)

Setzen wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, so lässt sich $\text{grad}(f) = \nabla f$ und $\text{div}(v) = \langle \nabla, v \rangle$ schreiben. Die Produktregel gibt für $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ part. diffbar $V: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

$$\text{div}(fV) = \langle \text{grad}(f), v \rangle + f \cdot \text{div}(v) \text{ oder } \langle \nabla, fV \rangle = \langle \nabla f, v \rangle + f \langle \nabla, v \rangle$$

0x5. 0x8 Definition (höhere part. Ableitungen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine part. d.f. Fkt. Sind alle part. Ableitungen $D_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ erneut part. diffbar, dann können wir die 2. part. Ableitung $D_j(D_i(f))$ bilden. Allgemeiner, f heißt $(k+1)$ part. diffbar, wenn f k -mal part. d.f. ist und alle k -ten part. Abl. $D_{i_k}(\dots(D_{i_2}(D_{i_1}(f))\dots))$ erneut part. diffbar sind. f heißt stetig k -mal diffbar, wenn f k mal part. d.f. ist und alle part. Abl. der Ordnung $\leq k$ stetig sind.

0x5. 0x9 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen 2 mal stetig part. d.f. Dann gilt $\forall a \in U$:

$$D_i(D_j(f(a))) = D_j(D_i(f(a))) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Bew: Ohne Einschränkung sei $n=2$ und $a=0$. Ferner, statt (x_1, x_2) verwenden wir (x, y) . Da U offen ist $\exists \delta > 0$ sol. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \delta, |y| < \delta\} \subset U$. Für (x, y) in dieser Menge

Betrachten wir den Ausdruck $F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0)$ und wenden wiederholt den MWS der D.F. Rechnung an in einer Variablen. Wir betrachten zunächst $F_y:]-\delta_j, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$
 $F_y(x) = F(x, y) - F(x, 0)$ Nach dem MWS $\exists \varphi$ zw. 0 und x sd. $F_y(x) - F_y(0) = F'_y(\varphi) \cdot x$

Nun gilt: $F'_y(\varphi) = D_1(F(\varphi, y)) - D_1(F(\varphi, 0))$. Dies fassen wir als eine Fkt. von y auf und wenden den MWS an.

$\exists \eta$ zw. 0 und y sd. $D_1(F(\varphi, y)) - D_1(F(\varphi, 0)) = D_2(D_1(F(\varphi, \eta))) \cdot y$ gilt. Insgesamt: $F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0) = D_2(D_1(F(\varphi, \eta))) \cdot x \cdot y$ Vertauschen wir die

Rollen von x und y und starten $G_x(y) = F(x, y) - F(0, y)$ so gibt der MWS $\exists \tilde{\varphi}, \tilde{\eta}$ sodass: $F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0) = D_1(D_2(F(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}))) \cdot y \cdot x$. Für $x, y \neq 0$ folgt

$D_2(D_1(F(\varphi, \eta))) = D_1(D_2(F(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta})))$ wobei: (φ, η) und $(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta})$ von (x, y) abhängen. Mit $(x, y) \rightarrow 0$ gilt $(\varphi, \eta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}) \rightarrow 0$.

Stetigkeit der 2. ten part. Abl. gilt also $D_2(D_1(F(0, 0))) = \lim_{(\varphi, \eta) \rightarrow 0} D_2(D_1(F(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}))) = \lim_{(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}) \rightarrow 0} D_1(D_2(F(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}))) = D_1(D_2(F(0, 0)))$. $\square$

0x5. 0x4 Corollar

Ist $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, k -mal stetig part.-diffbar.

Dann gilt: $D_{i_k}(\dots D_{i_2}(D_{i_1}(F)) \dots) = D_{i_{\pi(k)}}(\dots D_{i_{\pi(1)}}(F)) \dots$

$\forall$ Perm. π von $\{1, \dots, k\}$. Schreibweise $D_i(D_j(F)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$

$D_i(D_i(F)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$, $D_{i_k}(\dots (D_{i_1}(F)) \dots) = \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}$

Beispiel: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein part. diff. VF.

Wir definieren ein neues VF $\text{rot}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

die Formel $\text{rot}(v) = (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})$

$\Rightarrow \text{rot}(v) = \nabla \times v$. (Formal).

Bem: Aus Satz 5.9 folgt $U \subset \mathbb{R}^3$ und $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig diffbar. Dann gilt $\text{rot}(\text{grad}(F)) = 0$

Beweis: In der 1. Komp. steht $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$

Rest analog. Notwendig dafür, dass ein VF $v: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Potential besitzt (d.h. $\exists F: U \rightarrow \mathbb{R}$, s.d. $\text{grad}(F) = v$) ist die Bedingung $\text{rot}(v) = 0$.

0x5. $\mathbb{O} \times \mathbb{B}$ Definition

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, f 2 mal part. diffbar. Dann $\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ heißt Laplace-Operator.

Dieser spielt in der Physik eine wichtige Rolle. Fkt f mit $\Delta f = 0$ heißen harm. Fkt. (Potenz. gl.) Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ Zeitintervall, dann beschr. Lösungen $f: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$ Wellen. und Lösungen von $\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$ Diffusion (Wärmeausbreitung). dabei $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der L.O. in den Raum koordin.

0x6. Totale Diff.barkeit

In einer Variablen ist die Ableitung die Steigung der Tangente, d.h. die Steigung derjenigen linearen Abb. die die vory. Fkt. $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ am besten approx.

0x6. 0x1 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt in $x \in U$ (total) diffbar, falls es einen Hom. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, s.d.

$$(*) \quad f(x + \eta) = f(x) + A(\eta) + \varphi(\eta) \quad \text{wobei der Fehlerterm } \varphi$$
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(\eta)\|}{\|\eta\|} = 0 \text{ erfüllt.}$$

Bem.: a) $n=m=1$ dann ist das die alte Def.

b) Lin. Abb. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ werden bzgl. der St. b. $e_1 \dots e_n$ und $e_1 \dots e_m \in \mathbb{R}^m$ durch Matrizen beschr.: $A(\eta) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$

Im folgenden identifizieren wir den Hom. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

der zugehörigen Matrix $A = (a_{ij})$. Ist $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$

so lässt sich (*) ausführlicher als $f_i(x + \eta) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j + \varphi_j(\eta)$.

Insb. f ist total diffbar $\Leftrightarrow$ alle $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ sind t. d.

Schreibweise (Klein o-Not.): Ist φ eine in einer Umg. von

0 def. Funkt. mit $\varphi(0)=0$ und $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\varphi(\eta)}{\|\eta\|} = 0$ so schreiben wir $\varphi(\eta) = o(\|\eta\|)$. Die Diffbarkeit lässt sich dann (*) $F(x+\eta) = F(x) + A\eta + o(\|\eta\|)$ schreiben.

0x6.0x2 Beispiel

Sei $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine sym. Matrix. und

$q(x) = {}^t x C x = \langle x, Cx \rangle$ die zugehörige quad. Fkt.

$$\begin{aligned} q(x+\eta) &= \langle x+\eta, C(x+\eta) \rangle = \langle x, Cx \rangle + \langle x, C\eta \rangle + \langle \eta, Cx \rangle \\ &+ \langle \eta, C\eta \rangle = \langle x, Cx \rangle + \langle Cx, \eta \rangle + \langle Cx, \eta \rangle + \langle \eta, C\eta \rangle \\ &= q(x) + (2Cx) \cdot \eta + \varphi(\eta) \end{aligned}$$

$$|\varphi(\eta)| = |\langle \eta, C\eta \rangle| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|\eta\| \cdot \|C\eta\| \stackrel{\text{m. norm.}}{\leq} \|C\| \|\eta\|^2 \text{ Also}$$

$$\left| \frac{\varphi(\eta)}{\|\eta\|} \right| \leq \|C\| \cdot \|\eta\| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \quad q \text{ ist diffbar mit } A = (2Cx)^t \quad \text{1x n Matrix}$$

0x6.0x3 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abb. die in $x \in U$ diffbar ist. Dann gilt

a) f ist in U stetig

b) f_i von f sind in x part. diffbar. und die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in der Def. erfüllt $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

Bem.: Insbes. ist die Matrix, wenn es sie gibt, eind. bestimmt.

Man nennt A das Differential von f in x oder auch die

Jacobi-Matrix von f in x . $Df(x) = A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i=1 \dots m, j=1 \dots n} = J_f(x)$

Bew: Da Hom. stetig sind und $\lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi(\eta) = 0$ folgt $\lim_{\eta \rightarrow 0} f(x+\eta) = f(x) + A \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta + \lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi(\eta) = f(x)$.

b) Für $i=1 \dots m$ gilt $f_i(x+h e_j) = f_i(x) + a_{ij} \cdot h + \varphi_i(h \cdot e_j)$

$$\Rightarrow (f_i(x+h e_j) - f_i(x)) / h = a_{ij} + \varphi_i(h e_j) / h$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x+h e_j) - f_i(x)}{h} = a_{ij} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(h e_j)}{h} = a_{ij} \quad \square$$