

Im Fdg. werden wir diesen Satz auf $V = C_b(U, \mathbb{R}^m)$
 $= \{F: U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid F \text{ ist stetig und beschränkt}\}$ mit $\|\cdot\|_\infty$.

$\|F\|_\infty := \sup_{x \in U} \|F\|$ Eine CF (F_k) in V konv. glm in $C_b(U, \mathbb{R}^m)$. Die Grenzfunktion $F_*: U \rightarrow \mathbb{R}^m, F_*(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$ ist daher stetig und beschränkt. Also F_* ist ebenfalls $\in C_b(U, \mathbb{R}^m)$ und $C_b(U, \mathbb{R}^m)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ist vollst.

2.ter Beweis des Satzes über implizite Fkt.:

1. Schritt: Vorbereitung: Der Einfachheit halber verwenden wir Koord. $(x_1 \dots x_n) = (x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_m)$ auf U und nehme $a = (c, d) = (0, 0) \in U$.
 Für $F = (F_1 \dots F_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezeichne dann $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial (F_1 \dots F_m)}{\partial (y_1 \dots y_m)}$
 $= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$. Nach Voraussetzung ist $B = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$ inv.

Wir setzen jetzt $G(x, y) = y - B^{-1}F(x, y)$
 Dann gilt $G(x, y) = y \Leftrightarrow F(x, y) = 0$. Wir haben also die Gleichung $F(x, y) = 0$ in eine Fixpunktgl. verwandelt.

$\frac{\partial G}{\partial y} = E_n - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ Also $\frac{\partial G}{\partial y}(0) = 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Da F stetig diffbar ist, $\exists$ eine Umg $W_1 \times W_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ von 0, s.d. (2) $\|\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x, y) \in W_1 \times W_2$. Wir wählen

nun $\delta > 0$ s.d. $V_2 = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y\| \leq r\} \subset W_2$. Da $G(0, 0) = 0$
 $\exists$ Umg. V_1 von $0 \in W_1$ s.d. (3) $\sup_{x \in V_1} \|G(x, 0)\| =: \varepsilon < \frac{r}{2}$. Nach dem MWS (Corollar 0x6. 0x13) gilt (4) $G(x, y) - G(x, \eta) \leq \frac{1}{2} \|y - \eta\| \quad \forall x \in V_1 \quad \forall y, \eta \in V_2$. Speziell mit $\eta = 0$ ergibt sich aus (3) (5) $\|y\| \leq r \Rightarrow \|G(x, y)\| \leq r \quad \forall x \in V_1, \forall y \in V_2$.

2. Schritt (Punktweise Konstr. von g):

$\forall$ feste $x \in V_1$ ist die Abb. $V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, y \mapsto G(x, y)$ nach (5) eine Abb. der abgeschl. Kugel V_2 in sich. Nach (4) ist diese Abb. eine Kontraktion. Nach dem Banachschen FP-Satz angewendet auf $A = V_2, \mathbb{R}^m$ gibt es für jedes $x \in V_1$ genau ein y

$$= g(x) \in V_2, y = G(x, y) \Leftrightarrow F(x, g(x)) = 0$$

3. Schritt: Wir zeigen, dass die so konstr. Abbildung sogar stetig ist. ($g: V_1 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^m$). Dazu betrachten wir den Banachraum $C_b(U, \mathbb{R}^m)$ und $A = \{ \varphi: V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \|\varphi\|_{V_1} \leq r \}$. Mit $\varphi \in A$ gilt für Ψ mit $\Psi(x) = G(x, \varphi(x))$ nach (5) ebenfalls $\|\Psi\|_{V_1} \leq r$. Die Zuordnung $\Phi: \varphi \mapsto \Psi = \Phi(\varphi)$ liefert also eine Abbildung $A \rightarrow A$. Aus (4) folgt $\|\Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)\|_{V_1} = \sup_{x \in V_1} \|G(x, \varphi_1(x)) - G(x, \varphi_2(x))\| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| = \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{V_1}$. Der B.F.P.S. angewendet auf $A \subset C_b(U, \mathbb{R}^m)$ und Φ zeigt, dass es genau eine Fkt. $g \in A$ mit $\Phi(g) = g$, d.h. $G(x, g(x)) = g(x) \forall x \in V_1$ ($\Leftrightarrow F(x, g(x)) = 0$), g stimmt also mit in (2) konstr. Abb. überein. g ist stetig, da Konv. in C_b glm. Konv. ist.

4. Schritt: (Diffbarkeit von g). Dies würde mit der anderen Methode bereits gezeigt. $\frac{\delta F(x, g(x))}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta x}(x, g(x)) + \frac{\delta F}{\delta y}(x, g(x)) \cdot \frac{\delta g}{\delta x}(x) \Rightarrow \frac{\delta g}{\delta x}(x) = - \left(\frac{\delta F}{\delta y}(x, g(x)) \right)^{-1} \frac{\delta F}{\delta x}(x, g(x))$ (folgt aus der KR) eine Formel für die Jacobimatrix von g . $\square$

0x8. 0x.C Satz (Rangsatz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $F = (F_1, \dots, F_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig d. fbar und $m \in \mathbb{N}$. Für jeden Punkt $a \in U$ gelte $\text{rang}(DF(a)) = r \leq \min(m, n)$ ($DF(x)$ hat konst. rang auf U). Sei $a \in U$ ein Punkt in dem $\det \begin{pmatrix} \frac{\delta F}{\delta x} \\ \frac{\delta F}{\delta y} \end{pmatrix}(a) \neq 0$. Wir schreiben $a = (a', a'') \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ und $\tilde{F}(a') := b = (b', b'') \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$. Dann gibt es eine Umg. V' von $a' \in U' \subset \mathbb{R}^r$ eine Umg. V'' von $a'' \in \mathbb{R}^{n-r}$, eine Umg. W' von $b' \in \mathbb{R}^r$ so eine stetige d.f.b. Abb. $h: W' \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$ und $g: W' \times V'' \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ sol.

Folgt gilt: a) $F(x) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists y' \in W' \text{ sodass } y = (y', h(y')) \}$
 b) Für $y = (y', y'') \in F(U) \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ gilt $\forall x \in U: F(x) =$

$\{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n \mid x'' \in V'' \text{ und } x' = g(y', x'')\}$. Mit anderen

Wörtern: $F(V)$ ist der Graph der Abb. $h: W' \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$ insb.

ist $y \in F(V)$ schon durch $y' \in W'$ bestimmt. b) Das Urbild von

$y = (y', y'') \in F(U)$ in V ist der Graph der Abb. $V'' \rightarrow \mathbb{R}^r, x'' \mapsto g(y', x'')$. Die Abb. hängt diffbar vom Bildpunkt $\varphi = (y', h(y'))$ ab.

Beweis: Wir betrachten zunächst die Abb. $\tilde{F} = (F_1, \dots, F_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$

$U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es gilt: $(D\tilde{F}(a)) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \right) \neq 0$. Auf $\tilde{F}$ können wir den Satz über die Umk. Pkt. anwenden, d.h.

$\exists V$ Umg von $a \in U$ sd. $F|_V$ inj. ist. Außerdem können

wir V so wählen, das $\tilde{F}(V) = W' \times V'' \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} = \mathbb{R}^n$

eine Quader Umg. von (b', a'') . Sei: $\tilde{g}: W' \times V'' \rightarrow V$ die

Umkehrabb. $\tilde{g}(y', x'') = (g_1(y', x''), \dots, g_r(y', x''), x'')$

$$g: W' \times V'' \rightarrow \mathbb{R}^r.$$

Wir betrachten nun die Komp: $e = F \circ \tilde{g}: W' \times V'' \rightarrow$

$\mathbb{R}^m$. Nach Konstr. von $\tilde{F}, \tilde{g}, g$ lt: $e(y', x'') = (y', h(y', x''))$

wobei: $h = (h_1, \dots, h_{m-r}) = (e_{r+1}, \dots, e_n): W' \times V'' \rightarrow \mathbb{R}^{m-r}$,

stetig diffbar ist. Die Voraussetzung $\text{rg}(DF(x)) = r \forall x \in U$.

hat zur Folge, dass h in Wirklichkeit von x'' nicht abhängt.

De $(y', x'') = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots m-r \\ j=1 \dots n}} \Big|_{\substack{k=r+1 \dots n \\ l=1 \dots r}} \Bigg\}^r$ Nach der KRgilt:

$$De(y', x'') = \star \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots m-r \\ j=1 \dots n}} \Big|_{\substack{k=r+1 \dots n \\ l=1 \dots r}} \star \underbrace{DF(\tilde{g}(y', x''))}_{\text{rg} = r \text{ nach Vor.}} D\tilde{g}(y', x'')$$

$\Rightarrow De$ hat rang höchstens r . Insbesondere e verschwindet

alle $r+1 \times r+1$ Minoren. Insbesondere gilt $\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(y', y'') = 0$

Für $i = 1 \dots m-r, k = r+1 \dots n$. Also $h_i(y', \cdot): V'' \rightarrow \mathbb{R}$

ist eine Konst. Funktion. (V'' Quader), d.h. $h_i(y', x'') = h_i(y', a'')$.

Wir schreiben jetzt kurz $h_i(y') := h_i(y', a'')$.

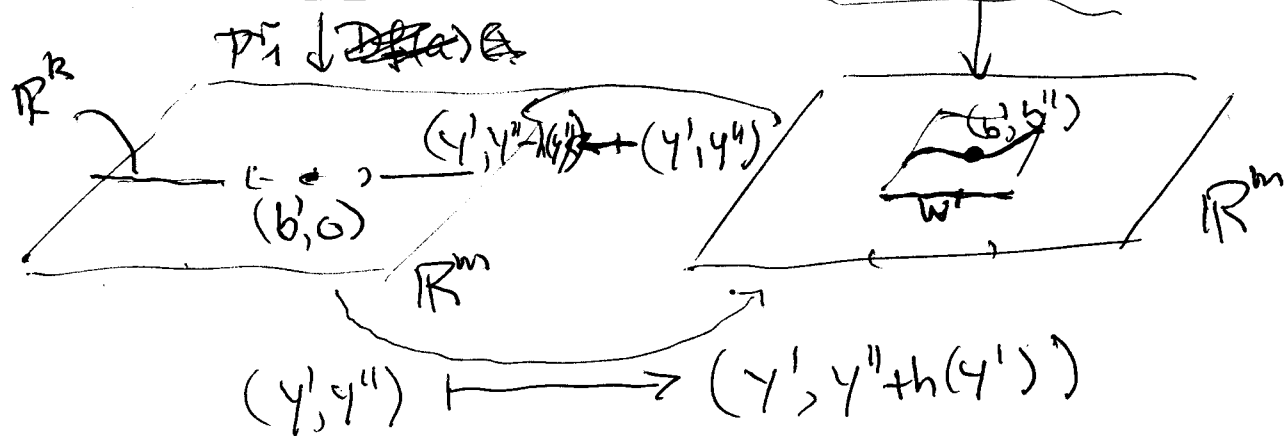
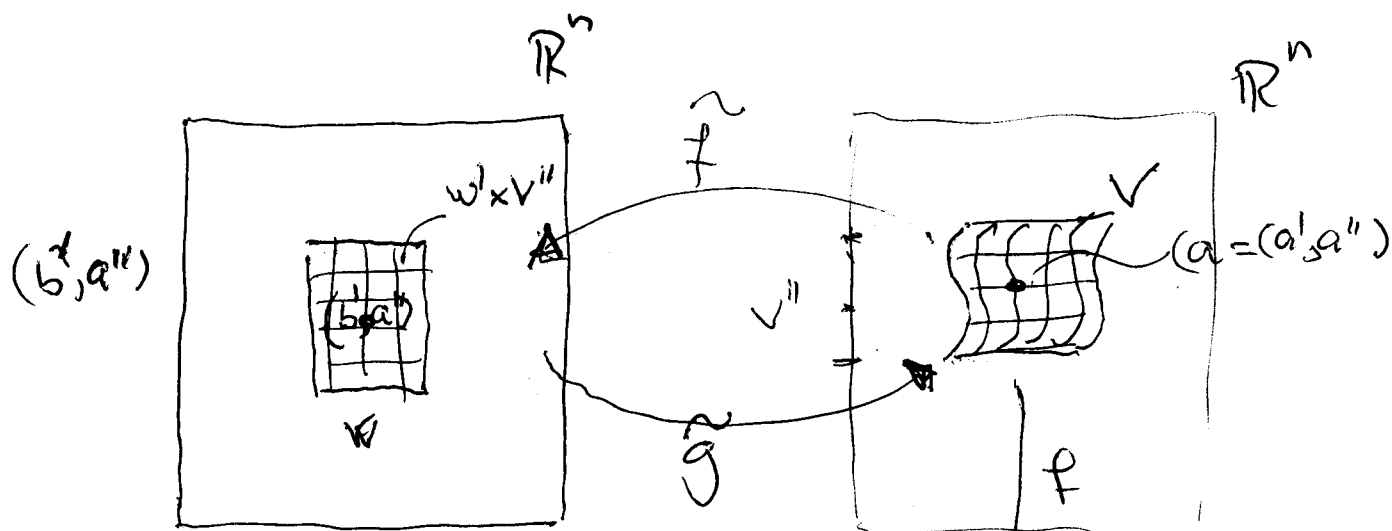
Es folgt $F(V) = (F \circ \tilde{g})(W' \times V'') = e(W' \times V'') = \{(y', y'') \in \mathbb{R}^m \mid$

$y' \in W'$ und $y'' = h(y')\}$ die Aussage a).

Für $y = (y', y'') \in F(V)$ ergibt sich weiter $V \cap F^{-1}(y) =$

$V \cap (F_1, \dots, F_r)^{-1}(y') = V \cap \tilde{g}(\{y', x'' \mid x'' \in V''\})$, denn
 $\tilde{g} = (g_1, \dots, g_r, x'')$ und $\tilde{F} = (F_1, \dots, F_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$.
 $\Rightarrow \{ (x', x'') \mid x'' \in V'' \text{ und } x' = h(y', x'') \}$ die Aussage (b). $\square$

Bem.: $\tilde{h}(y', y'') = y'' - h(y', y'')$ ist eine implizite Beschreibung des
 Bildes. $F(V) = \tilde{h}^{-1}(0)$.



C

C