

Wähle $e_1, \dots, e_n$ kan. Basis des $\mathbb{K}^n$. $\Rightarrow \exists$ Lsg. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mit $\varphi_i(x_0) = e_i$. Diese Lsg sind lin. unabh. $\Rightarrow \dim(L_H) \geq n$. Es ist $\dim(L_H) \leq n$, sonst gäbe es mehr lin. unabh. Lsg geben $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. $\Rightarrow$ Die Vektoren $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)$ wären linearunabh. in $\mathbb{K}^n$ $\square$

Definition

Eine Basis des VR der Lsg von $y' = A(x)y$ heißt Lsg Fundamentalsystem der OGL $y' = A(x)y$. Schreibt man die Lsg φ_i als Spaltenvektoren dann ist $\Phi = (\varphi_1 \dots \varphi_n)$ eine $n \times n$ Matrix. Die Lsg sind lin. unabh. $\Leftrightarrow \det(\Phi(x_0)) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$. $\Rightarrow \det(\Phi(x)) \neq 0 \forall x \in I$. Ist Φ ein Lsg fs. der OGL $y' = A(x)y$ dann kann man eine bel. Lsg φ schreiben als $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, $c_i \in \mathbb{K}$. In Matrixschreibweise $\varphi = \Phi \cdot c$ mit $c \in \mathbb{K}^n$. Die Matrix Φ kann selbst als Lsg aufgefasst werden: $\Phi' = (\varphi_1' \dots \varphi_n')$
 $A\Phi = (A\varphi_1 \dots A\varphi_n)$, $\Phi' = A\Phi$

Beispiel: $\begin{cases} y_1' = -\omega y_2 \\ y_2' = \omega y_1 \end{cases} \quad \omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi_1(x) &= (\cos(x), \sin(x)) \\ \varphi_2(x) &= (-\sin(x), \cos(x)) \end{aligned} \quad x = \omega x$$

$\det(\Phi(x)) = 1 \forall x \Rightarrow$ Lsg lin. unabh.

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$, $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Sei L_H der VR aller Lsg $\varphi \in \mathbb{K}^n$ der hom. OGL $y' = A(x)y$. Sei L_I die Menge aller Lsg $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ von $y' = A(x)y + b(x)$. Für ein bel. $\varphi_0 \in L_I$ gilt dann: $L_I = \varphi_0 + L_H$.
 In anderen Worten: die allg. Lsg des ⁱⁿ⁻hom. Systems lässt sich schreiben als Summe einer spec. und allg Lsg. der hom. OGL.

Beweis: 1) $L_I \subset \varphi_0 + L_H$. Sei $\varphi \in L_I$ bel. Setze $\varphi := \varphi - \varphi_0$

$$\text{Dann } \varphi' = \varphi' - \varphi_0' = (A\varphi + b) - (A\varphi_0 + b) = A\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi \in L_H \text{ und da } \varphi = \varphi_0 + \varphi \Rightarrow L_I \subset \varphi_0 + L_H$$

2) $\varphi_0 + L_H \subset L_I$. Sei: $\varphi \in \varphi_0 + L_H$, d.h. $\varphi = \varphi_0 + \psi$ mit $\psi \in L_H$. Dann $\varphi' = \varphi_0' + \psi' = (A\varphi_0 + b) + (A\psi) = A\varphi + b$
 $\Rightarrow \varphi \in L_I \quad \square$

Einschub: Lineare DGL für $n=1 \Rightarrow A(x) = 1 \times 1$ Matrix. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wollen Lsg der DGL $y' = A(x)y + b$ bestimmen. Betr. zunächst die hom. DGL $y' = a(x)y$

Satz

Notation wie oben, $x_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lsg $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ von $y' = a(x)y$ (*) mit $\varphi(x_0) = c$, nämlich $\varphi(x) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$.

Beweis: Man rechnet direkt nach, dass $\varphi(x_0) = c$ und $\varphi'(x) = a(x) \cdot \varphi(x)$. Da $F(x, y) = a(x) \cdot y$ stetig diffbar. ist in y , also die Lip. Bed. erfüllt ist die Lsg eindeutig. $\square$

Bem.: (*) kann auch mittels Trennung der Var. gelöst werden. In diesem Fall muss man die Fälle $c=0$ und $c \neq 0$ unterscheiden.

Bsp.: $y' = k \cdot y$ Suchen Lsg. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = c$.

Diese Lsg haben die Gestalt $\varphi(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$

Variation der Konst.

Betr. die inhom. lineare DGL $y' = a(x)y + b(x)$ (*)

Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lsg von $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$ mit $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. $\Rightarrow$ Betr. Lsg $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ von (*) lässt sich schreiben als $\psi(x) = \varphi(x) \cdot u(x)$ mit stetig diffbarem $u: I \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist $\psi' = \varphi' \cdot u + \varphi u'$, $a\psi + b = a\varphi u + b$. Da $\varphi' = a\varphi$ folgt $\psi' = a\psi + b \Leftrightarrow \varphi \cdot u' = b$. D.h.

$U(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t)^{-1} b(t) dt + \text{const.}$ Durch geeignete Wahl der Konst. können wir erreichen, dass $\varphi(x_0) = c$ gilt. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists$ zu jedem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lsg $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ der inhom. DGL $y' = a(x)y + b(x)$ mit Anfangsbed. $\varphi(x_0) = c$, nämlich $\varphi(x) = \varphi(x_0) \left[c + \int_{x_0}^x \varphi(t)^{-1} b(t) dt \right]$ mit $\varphi(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right)$.

Bsp: $y' = 2x + y + x^3$. Lsg $\varphi(x) = c \cdot e^{x^2}$

$\Rightarrow$ Eine Lsg $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = c$ ist durch $\varphi(x) = e^{x^2} \cdot \left(c + \int_0^x t^3 \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \right)$ gegeben.

$\Rightarrow$ Integration liefert: $\varphi(x) = \left(c + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1)$.

Zurück zum allg. Fall: $(y' = A(x)y + b(x) \text{ mit } A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K}) \text{ und } b: I \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ stetig})$

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Int. $A: I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$, $b: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Sei $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Lsg fs. der hom. DGL $y' = A(x)y$. Dann erhält man eine Lsg $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des inhom. Systems $y' = A(x)y + b(x)$ durch den Ansatz $\varphi = \Phi \cdot U(x)$. Dabei ist $U(x): I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine diffbare Fkt mit $\Phi(x) \cdot U'(x) = b(x)$, also $U'(x) = \Phi(x)^{-1} b(x)$, also $U(x) = \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt + \text{const.}$

Beweis: Aus $\varphi = \Phi \cdot U$ folgt $\varphi' = \Phi' \cdot U + \Phi \cdot U'$, $A \varphi = A \Phi U + b$. Da $\Phi' = A \Phi$ ist $\varphi' = A \varphi + b \Leftrightarrow \Phi U' = b$. $\square$

Beispiel: Wir betrachten das DGL $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$ (x)

In Matr.schreibw. $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Nach dem Bsp vor Satz 3 ist $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

ein Lsg fs. der hom. DGL $y' = A(x)y$. Es ist $\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$, also ist $\Phi(x)^{-1} b(x) = \begin{pmatrix} x \sin(x) \\ x \cos(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin(t) \\ t \cos(t) \end{pmatrix} dt$. Durch part. Int. erhält man

$$U(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) - x \cos(x) \\ \cos(x) - x \sin(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Wir erhalten eine spec Lsg. von (*) durch $\varphi(x) =$

$$I(x)U(x) = (-x, 1)^T$$

$\Rightarrow$ Die allg Lsg. von (*) ist nun: $\varphi(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

$$+ c_2 \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ const.}$$