

DGL n-ter Ordnung

Wollen Resultate über lin. DGL-System auf lin. DGL n-ter Ordnung übertragen. $I \subset \mathbb{R}$ $q_k: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \leq k \leq n-1$) stetig. Die DGL der Form $\sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)} q_i(x) + y^{(n)} = 0$ (*) heißt homogene lineare DGL n-ter Ordnung. Sei $b: I \rightarrow \mathbb{K}$ eine weitere stetige Fkt. Dann heißt (*) = $b(x)$ (***) inhomogene lin. DGL.

Satz

(a) Die Menge L_H aller LSG der hom. DGL (*) bildet einen n-dim VR.

(b) Sei L_I die Menge aller LSG der inhom. DGL (***).

Dann gilt für ein bel. $\varphi_0 \in L_I$: $L_I = \varphi_0 + L_H$.

(c) Ein n-Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von LSG von (*) lin. unabh.

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, $W(x) =$ „Jacobi-Mat.“ von $\varphi \neq 0$ ist

Beweis: Die inhom. lin. DGL (***) ist äquivalent zu dem inhom. DGL-System 1. Ord.: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} A(x) + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} b(x)$ (***)

Eine LSG $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ von (***) entspricht also einer LSG $\tilde{\varphi} = (\varphi^{(i)})^T \varphi_i: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des DGL-Systems (***)

Die Beh. folgen also mit den Sätzen der letzten VL.

Definition

Eine Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des LSG VR L_H der hom. DGL (*) heißt Lösungsfundamentalsystem.

Beispiel: $y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} y = 0$ (*) (auf $I =]0, \infty[$)

$\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$ sind LSG von (*).

Die $W(x)$ von φ_1 und φ_2 ist $W(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} \neq 0 \Rightarrow \varphi_1$ und φ_2

sind LSGFs. $\Rightarrow$ alle LSG haben die Form $c_1 x + c_2 \sqrt{x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konst.

lineare DGLs zweiter Ordnung

Zunächst einige Beispiele von lin. DGL's 2-ter Ord.

bei dem explizit eine polynomielle LSG angegeben werden kann. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest.

(1) Herm. DGL: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ (def. auf ganz $\mathbb{R}$).

(2) Legendresche DGL: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
(def. auf $]-1, 1[$)

(3) Die Laguerresche $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
(def. auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$)

Die LSG sind:

(1) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$

(2) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$

(3) $L_n(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n \cdot e^{-x})$

Wir zeigen, dass $H_n(x)$ die Herm. DGL ist. Wir

setzen $D := \frac{d}{dx}$ ($= \frac{d}{dx}, n$). Offensichtlich reicht es aus,

dass $y = e^{x^2} D^n e^{-x^2} \Rightarrow y \cdot e^{x^2} = D^n e^{x^2}$ die DGL l"ost.

$$D^2(y \cdot e^{x^2}) = D^2(D^n e^{x^2}) = D^{n+1}(-2x e^{x^2}) = -2x D^{n+1} e^{x^2}$$

$$-2(n+1) D^n e^{x^2} = -2x \cdot e^{x^2} (-2xy + y') - 2(n+1)y \cdot e^{x^2}$$

$$= e^{x^2} (4x^2 y - 2xy - 2(n+1)y) \quad (I)$$

$$D^2(e^{-x^2} y) = e^{-x^2} y'' + 2 \cdot D e^{-x^2} \cdot y' + (D^2 e^{-x^2}) y = e^{-x^2}$$

$$(y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y) \quad (II). \text{ Durch Koeffizienten-}$$

der Ausdr"ucke I und II erh"alt man $y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad \square$

Reduktion der Ordnung

Die Polynome H_n, P_n, L_n stellen nur eine LSG

der DGL dar. Um die allg. LSG zu bestimmen, ben"o-

tigen wir noch eine zweite lin. unabh. LSG.

Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{K}$. Ferner sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}$

eine LSG der DGL $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (*). Im Inter-

vall $J \subset I$ sei $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$. Dann erh"alt man "uber

φ eine zweite von φ lin. unabh. LSG $\psi: J \rightarrow \mathbb{K}$ durch

den Ansatz $\psi = \varphi \cdot u$, wobei u eine nicht konst. LSG der DGL $u'' + (2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x))u' = 0$ (*) ist.

Bemerkung: Die DGL (*) ist eine lineare DGL 1. Ord. Für u' kann also auch durch $u' = \frac{1}{\varphi} \exp(-\int_{x_0}^x a(t) dt)$ gelöst werden. Durch evtl. Int. erhält man u .

Beweis: $\psi = \varphi \cdot u \Rightarrow \psi' = \varphi' u + \varphi \cdot u'$

$$\Rightarrow \psi'' = \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u''$$

Da $\varphi'' + a\varphi' + b\varphi = 0$ folgt nun $\psi'' - a\psi' + b\psi =$

$$\varphi \cdot u'' + (2\varphi' + a\varphi)u' \Rightarrow \psi' \text{ erfüllt die DGL (*)}$$

$\Rightarrow u'' + (2 \frac{\varphi'}{\varphi} + a)u' = 0$ ist. Ist nun u nicht konst., dann ist $\psi = \varphi \cdot u$ lin. unabh. zu φ . $\square$

Beispiel:

$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + (\frac{2}{1-x^2}) y = 0$. Diese DGL wird gelöst durch $\varphi(x) := P_1(x) = x$. In dem Int: $]0;1[$ erhalten

wir eine weitere LSG durch den Ansatz: $\psi(x) = x \cdot u(x)$

mit $u'' + (\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2})u' = 0$. Wir erhalten $u' = \exp(-\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{2x}{1-x^2} dx) = \exp(-2 \ln(x) - \ln(1-x^2)) = \frac{1}{x^2(1-x^2)}$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} (\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}) \Rightarrow u(x) = \int u'(x) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Also ist $\psi(x) = x \cdot u(x) = \frac{x}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x}) - 1$ eine $\varphi(x) = x$

unabh. LSG. Obwohl aus dem Satz nur folgt, dass

ψ eine LSG aus dem Int. $J =]0;1[$ ist, sieht man

leicht, dass ψ auch eine LSG auf $I = J \cup \{-1, 1\}$ def.

Bemerkung:

LSG von DGL lassen sich nicht immer durch elem.

Fkt. beschreiben. Oft treten transzendente Fkt. auf.

B.B. bei der Besselschen DGL: (*) $y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{p^2}{x^2})$

$y = 0$ ($x > 0, p \in \mathbb{R}$) $\leadsto$ Die LSG von (*) heißen Zylinder-

Funktion. Eine spezielle Basis LSG VR bilden die sog

• Besselschem Fkt. J_p

• Neumannschen Fkt. N_p

Für $p=0$ ist

$$J_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$N_0 = \frac{2}{\pi} \left[\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right) \cdot J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{c_k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right]$$

mit $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - \ln(n))$; $c_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

$$\text{allg. } J_p = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+p}}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+1)}, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$$N_p(x) = \frac{J_p(x) \cdot \cos(\pi p) - J_{p+1}(x)}{\sin(\pi p)}. \text{ Nachdem Quot. krit. konst.}$$

$J_0, N_0 \rightarrow$ dürfen Gleichweise Diff. und können so

durch Einsetzen verifizieren, dass die DGL ($p=0$)

durch J_0 und N_0 gelöst wird. J_0, N_0 sind unabh.,

da es sonst c_1, c_2 gäbe mit $c_1 J_0(x) + c_2 (N_0(x)) = 0$

$\forall x > 0$, dies kann jedoch nicht sein, da $\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_0(x) = -\infty.$$