0x6.0x4 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ eine part. diff. Fkt. Sind alle part. Abl. $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ stetig in $x \in U$, ist f auch in x total diffbar.

Beweis: Sei $\delta > 0$, sd. $B(x,\delta) \subset U$. Sei $\psi = (\dots \psi_i \dots)$ ein Vektor mit $\|\psi\| < \delta$. Wir betrachten Punkte $z^{(i)} := x + \sum_{j=1}^{i} \psi_j e_j$ $(i = 1 \dots n)$. Dann gilt $z^{(0)} = x$, $z^{(n)} = x + \psi$ und $z^{(i)}$ und $z^{(i-1)}$ unterscheiden sich nur in der i-ten Komp. Nach dem MWS in einer Variablen $\exists\, \theta_i \in \left]0;1\right[$ sd. $f(z^{(i)}) - f(z^{(i-1)}) = \frac{\delta f}{\delta x_i}(y^{(i)})\psi_i$ mit $y^{(i)} = z^{(i-1)} + \theta_i \psi_i e_i$. Es folgt $f(x+\psi) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(y^{(i)})\psi_i$. Setze man $a_i := \frac{\delta f}{\delta x_i}(x)$ so gilt $f(x+\psi) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i + \varphi(\psi)$ mit $\varphi(\psi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}(y^{(i)}) - a_i\right)\psi_i$. Wegen der Stetigkeit der $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ in x gilt $\lim_{\psi \to 0} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}(y^{(i)}) - a_i\right) = 0$ da mit $\psi \to 0$ auch $y^{(i)} \to x$ strebt. Es folgt $\lim_{\psi \to 0} \frac{\varphi(\psi)}{\|\psi\|} = 0$ □

0x6.0x5 Korollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^m$) stetig part. diffbar. Dann ist f stetig.

Bemerkung: stetig part. diff. $\Rightarrow$ total diffbar $\Rightarrow$ part. diff.

$\Downarrow$

stetig

0x6.0x6 Satz

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen. $g: U \to \mathbb{R}^m$, $f: V \to \mathbb{R}^n$ Abb. mit $g(U) \subset V$. Ist die Ableitung g in Punkt $x \in U$ und f im Punkt $y = g(x) \in V$ diffbar, dann ist die Komp. $f \circ g: U \to \mathbb{R}^k$ in x diffbar und für das Differential gilt $D((f \circ g))(x) = D(f(g(x))) \circ D(g(x))$. Die Komp. der Diff ist also das Diff. der Komp.

Beweis: Es sei $A = D(g(x))$, $B = D(f(y))$

Es ist $D((f \circ g)(x)) = A \cdot B$ zuzeigen. Nach Vor gilt: $g(x+\psi) = g(x) + A\psi + \varphi(\psi)$, $f(y+\eta) = f(y) + B\eta + \psi_1(\eta)$ wobei

$\varphi(\psi) = o(\|\psi\|)$ und $\psi_1(\eta) = o(\|\eta\|)$. Speziell für $\eta = g(x+\psi) - g(x) = A\psi + \varphi(\psi)$ ergibt sich $(f\circ g)(x+\psi) = f(g(x)+\eta) = f(g(x)) + B\eta + \psi_1(\eta) = f(g(x)) + BA\psi \; \psi_1(\psi) + B\,\varphi + \psi_1(A\psi + \varphi(\psi)) = (f\circ g)(x) + BA\psi + \chi(\psi)$ mit $\chi(\psi) = B\varphi(\psi) + \psi_1(A\psi + \varphi(\psi))$. Wir müssen $\chi(\psi) = o(\|\psi\|)$ zeigen. Da $\lim_{\psi\to 0} \frac{\varphi(\psi)}{\|\psi\|} = 0$ und B linear gilt auch $\lim_{\psi\to 0} \frac{B\cdot\varphi(\psi)}{\|\psi\|} = 0$. Ferner $\exists k>0$ Konstante s.d. $\|\varphi(\psi)\| \leq k\|\psi\|$ für $\psi \in B(x,\delta)$ für $\delta > 0$ genügend klein.

Wegen $\psi_1(\eta) = o(\|\eta\|)$ gilt $\psi_1(\eta) = \psi_2(\eta)\cdot\|\eta\|$ wobei $\lim_{\eta\to 0} \psi_2(\eta) = 0$. Also $\psi_1(A\psi + \varphi(\psi)) = \|A\psi + \varphi(\psi)\|\,\psi_2(A\psi + \varphi(\psi)) \leq (\|A\| + K)\|\psi\|\cdot\psi_2(A\psi + \varphi(\psi))$. Also $\lim_{\psi\to 0} \frac{\psi_1(A\psi + \varphi(\psi))}{\|\psi\|} = (\|A\| + K)\lim_{\psi\to 0}\psi_2(A\psi + \varphi(\psi)) = 0$. □

0x6.0x7 Korollar

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen $g: U \to \mathbb{R}^m$ mit $g(U) \subset V$, $f: V \to \mathbb{R}$ eine Fkt. $g = (\ldots g_i \ldots)^t : U \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto y = g(x)$ bezeichne die Komponenten. Ist g in x und f in $y = g(x)$ diffbar, dann ist auch die Komposition $h = (f\circ g), U \to \mathbb{R}$ diffbar und $\frac{\delta h}{\delta x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta f}{\delta y_j}(g(x)) \cdot \frac{\delta g_j}{\delta x_i}(x)$.

Bemerkung: Fassen wir ein $y_j = g_j(x)$ als Fkt von x auf so können wir auch $\frac{\delta h}{\delta x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta f}{\delta y_j}(y) \cdot \frac{\delta y_i}{\delta x_i}(x)$ schreiben.

Beweis: Für die Funktionalmatrizen von h, g und f gilt $D(h.(x)) = \left(\frac{\delta h}{\delta x_1}(x) \ldots \frac{\delta h}{\delta x_n}(x)\right)$, $D(f(g(x))) = \left(\frac{\delta f}{\delta y_1}(g(x)), \ldots, \frac{\delta f}{\delta y_n}(g(x))\right)$ und $D(g(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\delta g_1}{\delta x_1}(x) & \ldots & \frac{\delta g_1}{\delta x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\delta g_m}{\delta x_1}(x) & \ldots & \frac{\delta g_m}{\delta x_n}(x) \end{pmatrix}$ gilt. □

0x6.0x8 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ eine Fkt, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ (eine Richtung). Unter der Richtungsabl. von f in x in Richtung v verstehen wir (bei Existenz) $D_v(f(x)) = \frac{d}{dt} f(x+tv)\big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$. Speziell für $v = e_i$ gilt

$D_v(f(x)) = D_i(f(x))$ ist die ite part. Abl. in x.

0x6.0x9 Satz

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar in $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ eine Richtung. Dann gilt: $D_v(f(x)) = \langle v, \operatorname{grad}(f(x)) \rangle$.

Beweis: Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Gerade $g(t) = x + tv = (x_i + tv_i)$ $i \in [1; n]$ $\exists\, \varepsilon > 0$ sd. $g(]-\varepsilon; \varepsilon[) \subset U$. Also $h = f \circ g = f(x + tv)$ ist für $t \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ definiert. Aus der Kettenregel folgt $\frac{dh}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x + tv) \frac{dg_i}{d(t)}(t)$ Also $\frac{dh}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(x) \cdot v_i = \langle \operatorname{grad}(f(x)), v \rangle$.

Bemerkung: 1) Ist $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ so ist Winkel θ zw. $\operatorname{grad}(f(x))$ und v durch $D_v(f(x)) = \langle v, \operatorname{grad}(f(x)) \rangle = \cos(\theta) \cdot \|\operatorname{grad}(f(x))\|$ mit $\theta \in [0; \pi]$. Also die R Abl ist maximal, wenn $\operatorname{grad}(f(x))$ in Richtung v zeigt, bzw $\theta = 0$.

2) Sei $c = f(x)$ und $N_c(f) = \{x' \in U \mid f(x') = c\}$ die Niveaumenge von f durch x. Sei $g:]-\varepsilon; \varepsilon[\to U$ diffbare Kurve mit $g(0) = x$ und $g(]-\varepsilon; \varepsilon[) \subset N_c(f)$. Dann können wir $g'(0)$ als einen "Tangentialvektor" an die N.m. $N_c(f)$ auffassen. Dann gilt $g'(0) \perp \operatorname{grad}(f(x))$. In der Tat $c = (f \circ g)(t)$ ist konstant. Also $0 = \langle \operatorname{grad}(f(x)), g'(0) \rangle$.

Der MWS in einer Var. kann man auch so formulieren. Sei: $f: I \to \mathbb{R}$ eine diffbare Fkt. auf einem Int. $x, \psi \in I$. dann $\exists\, \theta$ mit $\theta \in]0; 1[$ sd. $f(x + \psi) - f(x) = f'(x + \theta\psi)\psi$.

Setzt man f als stetig diffbar voraus, so gibt der HS der D+I Rechnung: $f(x + \psi) - f(x) = \int_x^{x+\psi} f'(u)\,du = \int_0^1 f'(x + t\psi)\psi\,dt = \left(\int_0^1 f'(x + t\psi)\,dt\right) \cdot \psi$. In dieser Version haben wir den ZW der Abl durch den MW der Ableitung ersetzt. In dieser Version verallgemeinert sich der MWS auf Fkt in n-Var. Dafür müssen wir das Int. von Matrixwert. Fkt $A(t) = (a_{ij}(t))$ von einer Var. $t \in [a; b]$ erklären. Sei: $A(t) = (a_{ij}(t)) : [a; b] \to \mathbb{R}^{m \times n}$

eine Mat. wert. Abb. Dann def. wir $\int_a^b A(t)dt = (\int_a^b a_{ij}(t)\,dt)$ durch Kompweise Int.

0x6.0xA Satz

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen $f: U \to \mathbb{R}^m$, stetig diffbar. $x \in U$. $\Psi \in \mathbb{R}^n$ sd. die Strecke $x + t\Psi \in U$ für $t \in [0;1]$. Dann gilt
$f(x+\Psi) - f(x) = (\int_0^1 D(f(x+t\Psi))\,dt)\,\Psi$.

Beweis: Es bezeichnen $f_i: U \to \mathbb{R}$ die Komp von f und $g: [0;1] \to U$ die Abb.: $g(t) = x + t\Psi$. $f_i(x+\Psi) - f_i(x) = g_i(1) - g_i(0)$
$= \int_0^1 g_i'(t)dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(x+t\Psi)\Psi_j\,dt = \sum_{j=1}^n (\int_0^1 \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(x+t\Psi)\,dt)$
Ψ_j. Da $D(f)$ die Matrix mit diesen Zeilenvektoren ist, folgt die Behauptung. □

0x6.0xB Korollar

Vor. wie in 0x6.0xA. Mit $M = \sup_{0 \le t \le 1} \|D(f(x+t\Psi))\|$ gilt
$\|f(x+\Psi) - f(x)\| \le M \cdot \|\Psi\|$.

Beweis: $\|f(x+t\Psi) - f(x)\| = \|\int_0^1 D(f(x+t\Psi))\,dt\,\Psi\| \le$
$\int_0^1 \|D(f(x+t\Psi))\Psi\|\,dt \le \int_0^1 M\|\Psi\|\,dt = M \cdot \|\Psi\|$. Dabei haben wir:

0x6.0xC Hilfssatz

$v: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ stetige vektorwertige Fkt. Dann gilt
$\|\int_a^b v(t)\,dt\| \le \int_a^b \|v(t)\|\,dt$

Beweis: $u = \int_a^b v(t)dt$, $k = \|u\|$. Dann gilt: $k^2 = \langle u, u\rangle$
$= \langle \int_a^b v(t)dt, u\rangle = \int_a^b \langle v(t), u\rangle\,dt \overset{CS}{\le} \int_a^b \|v(t)\|\,\|u\|\,dt$
$= k \cdot \int_a^b \|v(t)\|\,dt$. □