

0x8.0x12 Definition

Eine top. Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist ein Hausdorffraum, s.d. jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umg. U hat die homöomorph. zu offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist (U, φ) heißt Karte von M .

Definition

X, Y top. Räume. Eine bijektive in beiden Richtungen stetige Abb. $\varphi: X \rightarrow Y$ Homöomorphismus.

$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid \text{Karten von } M\}$ heißt Atlas, wenn $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Übergangsabb. $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$. Ein

Atlas $\mathcal{A}$ heißt diffbar. (C^∞) wenn alle Umkehrabb.

$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ diffbar sind.

Ein diffbarer Atlas definiert diffbare Struktur auf M .

Definition

$f: M \rightarrow N$ eine Abb. zwischen diffbaren Mannigfaltig-
heiten heißt diffbar.

Seien V ist eine Abb. (stetige) s.d. $\forall$ diffb. Karten (U, φ)

von M und $\forall$ diffb. Karten (W, ψ) von N die Komposi-

tion $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(W)) \rightarrow \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ diffbar.
 $\subset \mathbb{R}^n$ offen.

sind.

Bemerkung: Es reicht die Bedingung für einen diffbaren Atlas $\mathcal{A}$ von M und für einen diffbaren Atlas $\mathcal{B}$ von N zu überprüfen.

Beispiel: 1) Sphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

2) $\exists S^3 \rightarrow S^2$

0x8.0x13 Die Grassmannmannigfaltigkeit.

$G(k, n) = \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V \text{ ist } k\text{-dim UVR}\}.$

Ziel: Mannigfalt. Struktur auf G .

Dazu betrachten wir $M = M(k, n) = \{A \in \mathbb{R}^{k \times n} \mid \text{rg}(A) = k\}$

$\xrightarrow{\pi} G(k, n), A \mapsto \text{Spann der Zeilenvektoren. } \pi \text{ ist surj.}$

da jeder k -dim UVR eine Basis hat. Zwei Mat. $A, A' \in M(k, n)$ haben das gleiche Bild, genau dann wenn $\exists B \in GL(n, k)$, sol. $B \cdot A = A'$.

Standardbasis der Grassmannschen.

Sg: $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$. Zu $A \in M$ bezeichne A_I die $k \times k$ UMat mit Spaltenindizes $i_1, \dots, i_k$. $M_I = \{A \in M \mid \det(A_I) \neq 0\} \xrightarrow{\pi} U_I \in GL(n, k)$. $U_I = \{V \mid \text{Basis-vektor}\}$ erfüllt. $a_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = A \cdot \det(A_I) \neq 0$. Wenn $A' = BA$ $\Rightarrow \det(I) = \det(B) \cdot \det(A_I)$. $M_I \rightarrow U_I \subset GL(n, k)$. Jedes

$V \in U_I$ hat einen ausgez. Repr. in M_I , nämlich A' bel. Repr. dann $A_I^{-1} \cdot A' = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Beispiel: $U_{1, \dots, k} = (E_n \mid a_{i, k+1}, \dots, a_{i, n})$, $\varphi_I: U_I \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{k(n-k)}$, $\pi(A)$

$\mapsto$ die Einträge des ausg. Repr. in Spalten j m. $j \notin I$.

$\varphi_I \circ \varphi_J^{-1}: \varphi_J(U_I \cap U_J) \rightarrow \varphi_I(U_I \cap U_J)$. $A: (*) \mapsto I = \{i_j\} \mid \det(A_j) \neq 0$. Die Umkehrfkt sind rat. Fkt $a_{ij} \in \mathbb{R}^{k(n-k)}$

deren Nenner $\det(A_j)$ auf $\varphi_J(U_I \cap U_J) \subset \mathbb{R}^{k(n-k)}$ nicht verschwindet, die Abb ist also diffbar. $A = \{(U_I, \varphi_I)\}$

$I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = k$ heißt Standardatlas von $G(k, n)$.

$U_I \subset GL(n, k)$ Für jedes $A \in M$ wenigstens ein Minor $\det(A_I) \neq 0$ wgn. $\text{rg}(A) = k$. $\pi(E_n \mid 0) = \langle e_1, \dots, e_k \rangle \subset U_{1, \dots, k}$ liegt in keiner anderen Karte. Also:

Gr. 0+14 Satz

$G(k, n)$ ist eine $k(n-k)$ -dim kompakte (C^∞) -MF.

Beweis:

Nur noch Hausdorff.eig. und Kompaktheit sind zu zeigen.

Dazu extrahieren wir die Stiefelm.: $\sigma: \mathcal{S} \rightarrow M(k, n)$

Zeilen von σ orthonomalsystem $\{e_i\} \subset \mathbb{R}^n$ ist abg.

also kompakt. $\mathcal{S}$ ist ein metr. Raum als T_m von $\mathbb{R}^{kn}$.

Gr. 0+15 Definition

X metr. Raum, $A, B \subset X$ nicht leere Tm. $a \in A, d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$ ist der Abstand von a zu B und $d(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$ eine d-t Abstand von A zu B . Sind A, B komp., dann sind $d(a, B)$ und $d(A, B)$ angenommen. $0 = d(A, B) = d(a, b) < \infty$ für geeignetes $a \in A, b \in B$. Für komp. Tm $A, B \neq \emptyset$ von X die Met. dist. durch $d_A(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\}$. d_A definiert eine Metrik auf den

$\mathcal{K}_X = \{K \subset X \mid K \text{ kompakt}\}$. Für zwei Punkte $V, V' \in \mathcal{G}(n, \mathbb{R})$ def. wir einen Abstand durch $d(V, V') := d_A(\pi_{St}^{-1}(V), \pi_{St}^{-1}(V'))$ für $\pi_{St}: St \rightarrow \mathcal{G}(k, n)$. Dies gibt $\mathcal{G}(k, n)$ die Struktur eines metr. Raums. Folglich eine hausdorffsche Top. Die Kurvenräume $\mathcal{U}_k \subset \mathcal{G}(k, n)$ sind offen. $\mathcal{G}(k, n)$ ist komp. als stetiges Bild $\pi_{St}: St \rightarrow \mathcal{G}(k, n)$ das Kompaktum $St \subset \mathbb{R}^{kn}$. $\square$ ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1,n} \in \mathcal{G}(1, n+1) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$) [Kompaktifizierung]. $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} = 1\text{-dim UVR von } \mathbb{R}^{n+1}$.

