

1. Topologie metrischer Räume

1.1. Definition

Sei X eine Menge. Eine Metrik (oder Abstandsfkt.) ist eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto d(x, y)$ die folgendes erfüllt:

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) Δ -Ungl.: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d) eine Menge X zusammen mit einer Metrik $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$.

Bem.: $d(x, y) \geq 0$

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

Bsp: 1) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

2) (X, d) metr. Raum. $A \subset X$ Teilmenge $d|_{A \times A}: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt induzierte Metrik, $(A, d|_{A \times A})$ metr. Raum.

3) $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ euklid. Norm. dann ist $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

4) F endl. Menge $X = F^n \Rightarrow x = (x_i)$

$d(x, y) = |\{i: |x_i - y_i| > 0\}|$ heißt Hammingdistanz auf F^n .

5) X eine bcl. Menge

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

triviale Metrik.

6) $X =$ Menge der Flughäfen, $d(x, y) =$ Preis für einen direkt. Flug von X nach Y , ist keine Metrik. Δ -Ungl nicht erfüllt.

1.2. Definition

V ein $\mathbb{R}$ -VR. Eine Norm auf V ist eine Abb. $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ die 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ erfüllt. $\|x\| \geq 0$ gilt stets.

Ein norm. VR ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$

1.3. Satz

$(V, \|\cdot\|)$ ein norm. Raum. Dann ist $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf V . $\square$

Bsp: 1) $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ Metrik zur eukl. d.

Norm. $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

2) Maximumnorm auf $\mathbb{R}^n$ $\|x\|_\infty = \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \}$

Es gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

3) X bel. Menge, $\mathcal{B}(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt} \}$

der $\mathbb{R}$ -VR der beschr. reellwert. Fkt. auf X . Die Supremumnorm $\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| : x \in X \}$

$\|f + g\|_\infty = \sup \{ |f(x) + g(x)| : x \in X \} \leq \sup \{ |f(x)| + |g(x)| : x \in X \} \leq \sup \{ |f(x)| : x \in X \} + \sup \{ |g(x)| : x \in X \} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

zeigt Δ -Ungl.

4) $[a, b]$, $V = \mathcal{C}[a, b] = \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$1 \leq p \leq \infty$ $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ ist eine Norm.

1.4. Notation

(X, d) metr. Raum $a \in X, r > 0 \in \mathbb{R}$, $B(a, r) = \{ x \in X \mid$

$d(a, x) < r \}$ heißt (offener) Ball mit Mittelpunkt a und

Radius r in X . Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt Umgebung

von $x \in X$, wenn ein $\varepsilon > 0$ ex. sol. $x \in B(x, \varepsilon) \subset U$ gilt.

Man nennt $B(x, \varepsilon)$ auch ε -Umgebung von x .

1.5. Satz

X metr. Raum. Dann gilt das "hausdorffsche Trennungsaxiom": Für Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ $\exists$ Umgebung U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis: $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x, y)$. Dann gilt $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$.

Angenommen: $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) \stackrel{\Delta}{\leq} d(x, z) + d(y, z) < 2\varepsilon = d(x, y) \quad \downarrow$

1.6 Definition

Eine Teilmenge U eines metr. Raums heißt offen, wenn U eine Umgebung von $x \in U$ ist, d.h. $\forall x \in U. \exists \varepsilon > 0. B(x, \varepsilon) \subset U$.

Beispiel: 1) $X = \mathbb{R}$. Das Intervall $]a, b[$ ist offen. $x \in]a, b[$, $\varepsilon = \min(|x-a|, |x-b|)$, dann gilt $B(x, \varepsilon) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a, b[$. Die Intervalle $]a, \infty[$, $]-\infty, b[$ sind ebenfalls offen, $[a, b[$ ist nicht offen, da hier kein $B(a, \varepsilon) \subset [a, b[$.

2) X bel. metr. Raum. Dann ist $B(a, r)$ offen.

Für $x \in B(a, r)$ und $\varepsilon = r - d(a, x)$ gilt $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$ wegen Δ -Ungl.

1.7 Bemerkung

Im $\mathbb{R}^n$ erhält man den gleichen Begriff von offenen Mengen, egal ob wir die euklid. oder Max.-Norm hernehmen.

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < \varepsilon\}, B'(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < \varepsilon\}$$

Dann gilt: $B'(a, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subset B(a, \varepsilon) \subset B'(a, \varepsilon)$

1.8 Satz

Für die offenen Mengen eines metr. Raums gilt:

1) $\emptyset, X$ sind offen.

2) U, V offen $\Rightarrow U \cap V$ ist offen.

3) $\mathcal{U}$: eine Fam. $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen.

Beweis: 1) X ist offen, da X Umgebung von allen $x \in X$.

$\emptyset$ ist offen, da keine Punkte ex.

2) $x \in U \cap V$, U, V offen $\Rightarrow \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$ s.d. $B(x, \varepsilon_1) \subset U$,

$B(x, \varepsilon_2) \subset V$. $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset U \cap V$.

3) $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann $\exists$ ein i_0 , sodass $x \in U_{i_0}$, U_{i_0} offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0. B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ $\square$

Aus 2) folgt endl. $\cap$ von offenen Mengen sind offen.

Bel. $\cap$ von offenen Mengen sind nicht notwendig offen.

1.9. Definition

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metr. Raums heißt abgeschl., wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Bsp: $X = \mathbb{R}$, $A = [a, b]$ ist abgeschl.

$$X \setminus A =]-\infty, a[\cup]b, \infty[\rightarrow \text{offen}$$

Ebenso $]-\infty, a]$, $[b, \infty[$ sind abgeschl.

2) $\emptyset, X$ sind auch abgeschl.

3) $A_1 \subset \mathbb{R}^k$, $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen, dann ist $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{k+m}$ abgeschl. Dann ist $(x_1, x_2) \notin A_1 \times A_2$ dann gilt $x_1 \notin A_1$ oder $x_2 \notin A_2$. Etwa $x_1 \notin A_1$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ sd. $B(x_1, \varepsilon) \subset X \setminus A_1 \Rightarrow B((x_1, x_2), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^{k+m} \setminus (A_1 \times A_2)$.

Insbesondere sind die Quader $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ abgeschl.

1.10 Definition

X metr. Raum, $Y \subset X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt Randpunkt von Y wenn in jeder Umgebung von x sowohl Punkte von Y und von $X \setminus Y$ liegen. Die Menge der Randpunkte wird mit ∂Y bezeichnet.

Bsp: 1) Im $\mathbb{R}^n$ ist der Rand der Einheitsball $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, die Einheitssphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

2) Der Rand von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ da in jeder ε -Umg. rat. und irrat. Zahlen liegen.

1.11 Satz

X metr. Raum, $Y \subset X$. Dann gilt a) $Y \setminus \partial Y$ ist offen

b) $Y \subset \partial Y$ ist abgeschl. c) ∂Y ist abgeschl.

Definition

$\overset{\circ}{Y} = Y \setminus \partial Y$ den offenen Kern oder das Innere von Y

$\bar{Y} = Y \cup \partial Y$ den Abschluss von Y .

Beweis: Sei $a \in Y \setminus \partial Y$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ $B(a, \varepsilon) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$, denn sonst wäre a ein Randpunkt.

Für diese Umgebung gilt auch $B(a, \varepsilon) \cap \delta Y = \emptyset$ denn sonst wäre für $y \in B(a, \varepsilon) \cap \delta Y$, $B(a, \varepsilon)$ eine Umgebung von y , die wegen $y \in \delta Y$ $X \setminus Y$ schneidet. Also $B(a, \varepsilon) \cap [(X \setminus Y) \cup \delta Y] = \emptyset$ also $B(a, \varepsilon) \subset Y \setminus \delta Y$.

b) Wir setzen $Y' = X \setminus Y$. Aus der Def. vom Rand folgt $\delta Y' = \delta Y$. Nach Teil a) ist $Y' \setminus \delta Y'$ offen, also ist $X \setminus (Y' \setminus \delta Y') = (X \setminus Y') \cup \delta Y' = Y \cup \delta Y$ abgeschl.

c) Es gilt $\delta Y = (Y \cup \delta Y) \setminus (Y \setminus \delta Y)$

$X \setminus \delta Y = (X \setminus (Y \cup \delta Y)) \cup (Y \setminus \delta Y)$ ist offene Menge, also ist δY abgeschl.

