

7. Taylor Formel und lokale Extrema

7.1. Wir wollen die Taylor Formel $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x, x_0 \in I$.

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + \frac{f^{(k+1)}(\varphi)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$$
 wobei φ ein Punkt zw. x und x_0 ist, auf Fkt in mehreren Variablen verallgemeinern.

7.2. Notation

Für ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Sei $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$ und für $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $|\alpha|$ mal stetig

partdiffbar. $D^\alpha(f) = D^{\alpha_1}(\dots(D^{\alpha_n}(f))\dots) = \frac{\delta^{|\alpha|} f}{\delta x_1^{\alpha_1} \dots \delta x_n^{\alpha_n}}$

Schließlich für $x = (x_1, \dots, x_n)$ Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$

sei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Also für $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $(x-x_0)^\alpha = (x_1 - \bar{x}_1)^{\alpha_1} \dots (x_n - \bar{x}_n)^{\alpha_n}$.

7.3. Satz (Taylorformel)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\bar{x} \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(k+1)$ mal stetig diffbare Fkt. Sei $x \in U$ ein weiterer Punkt, sd. die Strecke $\{t\bar{x} + (1-t)x \mid t \in [0; 1]\} \subset U$. Dann $\exists$ ein $\eta \in \{t\bar{x} + (1-t)x \mid t \in [0; 1]\}$ sodass
$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha(f(\bar{x}))}{\alpha!} (x - \bar{x})^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha(f(\eta))}{\alpha!} (x - \bar{x})^\alpha$$

Wir werden den Satz aus der TF in einer Var. und der Kettenregel herleiten.

Beweis: Sei $\varphi = x - \bar{x}$ und $g: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f(\bar{x} + t\varphi)$

7.4. Lemma

Die Voraussetzungen an $f, x, \bar{x} \in U$ seien wie im Satz. Dann $g(t) = f(\bar{x} + t\varphi)$ k mal stetig diffbar. Dann gilt
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k g(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha(f(\bar{x} + t\varphi)) \cdot \varphi^\alpha$$
 wobei über alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k$ summiert.

Beweis: a) Mit Ind. nach k zeigen wir zunächst:

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k}(\dots D_{i_1}(f(\bar{x} + t\varphi))\dots) \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}$$

Für $k=1$ ist dies die KR: $\frac{dg}{dt}(t) = \frac{d}{dt} f(\bar{x} + t\varphi) = \sum_{i=1}^n D_i(f(\bar{x} + t\varphi)) \varphi_i$

Induktion: $k-1 \rightsquigarrow k$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^k g(t) &= d/dt \cdot \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} (F(\bar{x} + t\varphi)) \dots \right) \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_j (D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} (F(\bar{x} + t\varphi)) \dots) \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_{k-1}} \varphi_j \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} (F(\bar{x} + t\varphi)) \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k} \cdot \square \end{aligned}$$

b) Kommt unter den Indizes $i_1 \dots i_k \in \{1, \dots, n\}$ die 1 α_1 -mal vor die 2 α_2 -mal vor ... n α_n -mal vor so gilt $D_{i_k} \dots D_{i_1} (F(\bar{x} + t\varphi)) \cdot \prod_{n=1}^k \varphi_{i_n} = D^\alpha (F(\bar{x} + t\varphi)) \varphi^\alpha$ da es auf die Reihenfolge des Ableitens nicht ankommt.

Nun gibt es genau $\frac{k!}{\alpha!}$ k-Tupel von Indizes $i_1, \dots, i_k$ in denen j genau α_j -mal vorkommt. In der Tat je zwei solcher Tupel gehen durch Permutation von $\{1, \dots, n\}$ auseinander hervor und die Untergruppe $\bigtimes_{k=1}^n S_{\alpha_k} = S_\alpha \subset S_k$ die ersten α_1 -Indizes untereinander vertauscht, die nächsten α_2 , $\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + \alpha_2$ ebenfalls untereinander vertauscht usw. hält das Tupel $* = (\underbrace{1 \dots 1}_{\alpha_1} \underbrace{2 \dots 2}_{\alpha_2} \dots \underbrace{n \dots n}_{\alpha_n})$ fest. Da es kl. Perm. gibt, von denen $\alpha!$ keinen Effekt haben, ist die Gesamtzahl $\frac{k!}{\alpha!}$ ($= [S_k : S_\alpha]$, der Ind. der UG.)

Die Beh. folgt. $\square$

Wir wenden auf $g(t) = F(\bar{x} + t\varphi)$ die TF an im Punkt $t=1$ an. $\varphi = x - \bar{x}$: $F(x) = F(\bar{x} + \varphi) = g(1) = \sum_{m=0}^k \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}$ wobei $\theta \in [0; 1]$ liegt $= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha(F(\bar{x}))}{\alpha!} \cdot \varphi^\alpha + \sum_{|\alpha| \geq k+1} \frac{D^\alpha(F(\eta))}{\alpha!} \varphi^\alpha$ wobei $\eta = \bar{x} + \theta \varphi$ und $\varphi = x - \bar{x}$. Letzteres Einsetzen liefert die Behauptung. $\square$

7.5 Korollar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und δ so klein, dass $B(\bar{x}, \delta) \subset U$.

$F: U \rightarrow \mathbb{R}$ k-mal stetig part. diffbar, dann gilt für $\varphi \in \mathbb{R}^n$

mit $\|\varphi\| < \delta$. $F(\bar{x} + \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha(F)}{\alpha!}(\bar{x}) \cdot \varphi^\alpha + \psi(\varphi)$ wobei:

$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\psi(\varphi)}{\|\varphi\|^k} = 0$ (oder $\psi(\varphi) \in o(\|\varphi\|)$.)

Beweis: Nach dem Satz $F(\bar{x} + \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha(F(\bar{x}))}{\alpha!} \varphi^\alpha + \sum_{|\alpha| \geq k} \frac{D^\alpha(F(\eta))}{\alpha!} \varphi^\alpha$
 $= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha(F(\bar{x}))}{\alpha!} \varphi^\alpha + \sum_{|\alpha| \geq k} r_\alpha(\varphi) \varphi^\alpha$ wobei $r_\alpha(\varphi) = \frac{D^\alpha(F(\eta)) - D^\alpha(F(\bar{x}))}{\alpha!}$

Hängt also nicht von φ ab sondern η . Mit $\varphi \rightarrow 0$ gilt auch $\eta \rightarrow \bar{x}$. Die Stetigkeit aller k -ten Abl. gibt also

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} r_\alpha(\varphi) = 0. \text{ Für } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \text{ gilt } \frac{|\varphi^\alpha|}{\|\varphi\|^k} = \frac{|\varphi_i^{\alpha_i}|}{\|\varphi_i\|^{\alpha_i}} (v_i) \leq 1.$$

$$\text{Also } 0 \leq \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varphi)}{\|\varphi\|} \leq \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(\varphi) = 0. \square$$

7.7. Bemerkung

$\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ k -mal stetig diffbar. $x \in U$. $P_m(\varphi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha(F)}{\alpha!}(x) \varphi^\alpha$ ist ein homogenes Polynom vom Grad m

in φ_i $i \in \{1, \dots, n\}$. Für $m=0, 1, 2$ betrachten wir genauer

$m=0$: $P_0(\varphi) = F(\bar{x})$ ist eine konst.

$m=1$: $P_1(\varphi) = \sum_{i=1}^n D_i(F(\bar{x})) \varphi_i = \langle \text{grad}(F(\bar{x})), \varphi \rangle$, denn

die einzigen $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha|=1$ sind die e_i ^{Einh. v.} und $e_i! = 1$,

$$D^{e_i}(F) = D_i(F), \varphi^{e_i} = \varphi_i.$$

$m=2$: Es gibt zwei Typen $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha|=2$. Zum einen

$\alpha = 2e_i$: $(2e_i)! = 2$ $D^{2e_i}(F) = D_i^2 F$. Andererseits

$e_i + e_j = (0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0)$ $i < j$, $(e_i + e_j)! = 1$, $D^{e_i + e_j}$

$$= D_i(D_j(F)). \text{ Also } P_2(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i^2(F(\bar{x})) \varphi_i^2 + \sum_{i < j} D_i(D_j(F(\bar{x}))) \varphi_i \varphi_j.$$

Da $D_i(D_j(F)) = D_j(D_i(F))$ können wir diese auch in der

Form $P_2(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i(D_j(F(\bar{x}))) \varphi_i \varphi_j$, da $D_i(D_j(F)) = D_j(D_i(F))$ zweimal auf taucht.

7.8. Definition

Für $F: U \xrightarrow{\text{CIR}^n \text{ offen}} \mathbb{R}$ 2 mal stetig diffbar und $x \in U$ heißt

$\text{Hess}(F)(x) = (D_i D_j(F(x)))_{1 \leq i, j \leq n}$ die Hessesche Matrix

von F an der Stelle $x \in U$. Dies ist eine Symm. Matrix $X^{n \times n}$

0x7.0x9 Korollar

$F: U \rightarrow \mathbb{R}$ 2x mal stetig ^{part.} diffbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$.

Dann gilt: $F(x + \varphi) = a + \langle a, \varphi \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi, A \varphi \rangle + o(\|\varphi\|^2)$

wobei $a = F(x)$, $a = (\text{grad}(F))(x)$, $A = \text{Hess}(F)(x)$. $\square$

0x7.0x4 Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $F: U \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in U$ heißt lok.

Min/Max wenn es eine Umg. V mit $x \in V \subset U$ gibt sodass
 $F(x) \leq F(y) / F(x) \geq F(y) \forall y \in V$. Ein lok. Ex. ist lok.
Min/Max.

0x7. 0x3 Satz

Sei $F: U(\subset \mathbb{R}^n \text{ offen}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine part. diffbare Fkt. Hat
 F in $x \in U$ ein lok. Ex. gilt $\text{grad}(F(x)) = 0$.

Beweis: Wir betrachten $g: (t) = F(x + t \cdot e_i)$ für $t \in]-\varepsilon; \varepsilon[$
 $\varepsilon > 0$ klein genug. F lok. Ex. in $x \Rightarrow g$ hat lok. Ex. in 0.
 $\Rightarrow 0 = g'(0) = \frac{\delta F}{\delta x_i}(x) = D_i(F(x))$ $\square$

0x7. 0x4 Definition

$F: U(\subset \mathbb{R}^n \text{ offen}) \rightarrow \mathbb{R}$, stetig diffbar. $x \in U$ heißt kritischer
Punkt wenn $\text{grad}(F(x)) = 0$, wenn $\text{grad}(F(x)) = 0$.

$\text{grad}(F(x)) = 0$ ist notwendig. Die Hessematrix gibt eine
hinreichende Bed.

0x7. 0x5 Definition

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine sym. Matrix

a) Die Matrix A heißt pos. definit, wenn $\langle \varphi, A\varphi \rangle > 0 \forall \varphi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

b) " " " semipos. def.; wenn $\langle \varphi, A\varphi \rangle \geq 0 \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$

c) " " " neg. wenn $-A$ pos. def.

d) A heißt indefinit, wenn es $\varphi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gibt sodass
 $\langle \varphi, A\varphi \rangle > 0$ und $0 > \langle \eta, A\eta \rangle$

0x7. 0x6 Satz

$U \subset \mathbb{R}^n, F: U \rightarrow \mathbb{R}$ 2 mal stetig part. diff. $x \in U$. Punkt
mit $\text{grad}(F(x)) = 0$, $A = \text{Hess}(F(x))$ pos. def. dann hat
 F in x ein lok. Min. Ist $-A$ pos. def. $\Rightarrow$ lok. Max.

Ist $\text{Hess}(F(x))$ indefinit $\Rightarrow$ kein Ex.

Beispiel: $F(x, y) = c + x^2 + y^2$ Dann ist $0 \in \mathbb{R}^2$ ein krit. Punkt,
da $\text{grad}(F(x)) = (2x, 2y)$, $\text{Hess}(F(0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} (> 0 \text{ pos. def.})$
 $\Rightarrow 0$ ist Min.

2) $F(x,y) = x^2 - y^2$, $H_{\text{ess}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indef.

$\Rightarrow$ hat in 0 einen SP.

