

0x9. Integrale die von einem Para. abh.

Sei $F(x, y)$ eine Fkt in zwei Variablen. Für festes y werde die Fkt. über ein Intervall $[a, b]$ integriert. Das Int. hängt nur vom gewählten y ab. Es entsteht eine Fkt φ , die von y abhängt. Welche Eig. muss F haben, damit φ stetig, d. ffbar wird.

0x9.0x1 Lemma

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Int. und $U \subset \mathbb{R}^m$. Sei $F: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ stetig. Sei ferner $(y_k) \subset U$ eine Punktfolge in U mit $\lim y_k = c$. Dann konv. die Fkt.

$F_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F_k(x) := F(x, y_k)$ für $k \rightarrow \infty$ glm. gegen $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := F(x, c)$.

Beweis:

Die Menge $Q := \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$ kompakt insb. ist auch $Q \times [a, b]$ komp. Da F stetig ist folgt nun, dass $F|_{[a, b] \times Q} \rightarrow \mathbb{R}$ glm stetig ist. D.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y), (x', y') \in [a, b] \times Q$ mit $\|(x, y) - (x', y')\| < \delta$ gilt $|F(x, y) - F(x', y')| < \varepsilon$. Da $\lim y_k = c \exists N \in \mathbb{N}: \|c - y_k\| < \delta \forall k \geq N \Rightarrow | \frac{F(x, c)}{F_k(x)} - \frac{F(x, y_k)}{F_k(x)} | < \varepsilon \forall x \in [a, b]$ für $k \geq N$.

$\Rightarrow$ glm Konv. $\square$

0x9.0x2 Satz

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ komp. Int., $U \subset \mathbb{R}^m$ und $F: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für $y \in U$ def. wir $\varphi(y) := \int_a^b F(x, y) dx$, φ ist stetig.

Beweis: Sei $c \in U$ und (y_k) Punktfolge in U mit $\lim y_k = c$. Dann gilt $\varphi(y_k) = \int_a^b F_k(x) dx$ und $\varphi(c) = \int_a^b F(x) dx$.

Nach Lemma 1 konv. F_k glm ggn F , also können wir lim und Int. vertauschen. d.h. $\lim \int_a^b F_k(x) dx = \int \lim F_k(x) dx = \int F(x) dx \Rightarrow \lim \varphi(y_k) = \varphi(c) \Rightarrow$ stetig $\square$.

0x9.0x3 Lemma

$I, J \subset \mathbb{R}$ komp. Interv. und $F: I \times J \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F(x, y)$ stetig und stetig diffbar bzgl. der 2. Var. Sei $c \in J$ und $(y_k) \subset J$ eine Punktfolge in J mit $\lim y_k = c$ und $y_k \neq c \forall k$. Wir def. die Fkt $F_k(y) := \frac{F(x, y_k) - F(x, c)}{y_k - c}$, $F(x) := \int_I F_k(x, c) dx$. Dann konv. (F_k) glm ggn F .

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Die stetige Fkt. $D_2 F: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ ist glm stetig, da $I \times J$ komp. ist. Es folgt ein (von ε unabh.) $\delta > 0$ sd. $\forall x, y' \in J$ mit $\|y - y'\| < \delta$ gilt $|D_2 F(x, y) - D_2 F(x, y')| < \varepsilon$. Nach dem MWS für Fkt in einer Var. $\exists \eta' \in I$ und $\eta \in \mathbb{N}$ ein η_k zwischen c und y_k mit $|y_k - \eta_k| < \delta$ und $\eta_k \in V_{\eta}$. Sei man $N > 0$ sd. $|c - y_k| < \delta \forall k \geq N$. Dann gilt auch $|c - \eta_k| < \delta \Rightarrow |F_k(x) - F(x)| = |D_2 F(x, y_k) - D_2 F(x, \eta_k)| < \varepsilon \forall x \in I, k \geq N$. $\Rightarrow$ glm konv. $\square$

0x9.0x4 Satz

Sei $I, J \subset \mathbb{R}$ komp. Interv. $F: I \times J$ stb. stetig und stetig diffbar bzgl. y . Für $y \in J$ sei $\varphi(y) := \int_I F(x, y) dx$. Dann ist $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und es gilt: $\frac{d\varphi(y)}{dy} = \int_I \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dx$.

Beweis: Sei $c \in J$, $(y_k) \subset J$ mit $\lim y_k = c$, $y_k \neq c \forall k$ und seien F_k Fwie in Lemma 3. Wegen der glm. Konv. von F_k können wir $\lim$ und $\int$ vertauschen $\lim \frac{\varphi(y_k) - \varphi(c)}{y_k - c} = \lim \int \frac{F(x, y_k) - F(x, c)}{y_k - c} dx = \int \lim \frac{F(x, y_k) - F(x, c)}{y_k - c} dx = \int_I \frac{\partial F(x, c)}{\partial y} dx = \varphi'(c)$ $\forall c \in J$ und es gilt $\varphi'(c) = \int_I \frac{\partial F(x, c)}{\partial y} dx$. Nach Satz 2 ist φ' stetig, da $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ stetig. $\square$

Beispiel:

$$\int_0^a x^2 \cos(xy) dx. \text{ (ohne part. Int.)}$$

$$\text{Betrachte } F(y) := \int_0^a \cos(xy) dx. \text{ Nach Satz 4 ist } F'(y) = \int_0^a \frac{\partial}{\partial y} \cos(xy) dx = - \int_0^a x \sin(xy) dx = - \int x^2 \cos(xy)$$

$$f(x^2 \cos(x)) = f''(1)$$

$$\Rightarrow f''(1) = \dots$$

und daher gilt: $\int_0^a x^2 \cos(x) dx = (a^2 - 2) \sin(a) + 2a \cos(a)$. $\square$

Da die part. Abl., nichts anderes sind, als die gewöhnlichen Abl., wenn man die richtigen Var. Festhält, erhält man.

Ex 9. Ex 6 Korollar

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ komp. Int. und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $F: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und stetig diffbar bzgl. $y_1, \dots, y_m$. Dann

gilt $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\frac{\partial}{\partial y_i} \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n) dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y_i}(x, y_1, \dots, y_n) dx$.

Beispiel: Sei $U := B(0, r)$ und $V = (v_1, \dots, v_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$

stetig diffbares Vektorfeld. Wir suchen ein stetig

diffbares $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad}(F) = V$. Falls so ein

F ex. dann ist V exakt diffbar und nach dem Satz

von Schwarz gilt: $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$ also $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$ (*).

(*) ist notwendige Bed. für die Ex. von F mit $\text{grad}(F) = V$.

Wir zeigen, dass dies hinreichend ist. Wir definieren

$F(x) := \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 v_i(t \cdot x) dt \right) \cdot x_i$. Mit der Produktregel er-

halten wir $\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 v_i(t \cdot x) dt \right) x_i + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 v_i(t \cdot x) dt \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$
 $= \sum_{i=1}^n \int_0^1 t D_j v_i(t \cdot x) dt + \int_0^1 v_j(t \cdot x) dt = \int_0^1 (t \cdot \sum D_j v_i(t \cdot x) x_i + v_j(t \cdot x)) dt$

Für festes $x \in U$ ist nun $\frac{d}{dt} (t \cdot v_j(t \cdot x)) = v_j(t \cdot x) + t \frac{d}{dt} v_j(t \cdot x)$

$= v_j(t \cdot x) + t \cdot \sum D_j v_i(t \cdot x) x_i = v_j(t \cdot x) + t \sum D_j v_i(t \cdot x) x_i$

$\Rightarrow \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t \cdot v_j(t \cdot x)) dt = t \cdot v_j(t \cdot x) \Big|_{t=0}^{t=1} = v_j(x)$

$\Rightarrow \text{grad}(F) = V$. Für $U = B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ ist (*) $\Leftrightarrow \text{rot}(V) = 0$.

Doppelint.

Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $[c, d] \subset \mathbb{R}$ komp. Int. $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig. Nach Satz 2 ist $F(y) := \int_a^b F(x, y) dx$ stetig $[c, d]$

und kann daher erneut int. werden. Wir bezeichnen

$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \int_a^b F(x, y) dx dy$ als Doppelint.

Ex 9. Ex 6 Satz

Mit der obigen Bez. gilt: $\int_c^a \int_d^b F(x, y) dx dy = \int_c^a \int_d^b m$.

Beweis: Wir def. $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = \int_c^a (\int_d^b F(x, t) dt) dx$.

Es ist $\varphi(c) = 0$ und nach Satz 4 ist φ diffbar mit

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= \int_c^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_d^b F(x, t) dt \right) dx = \int_c^a F(x, y) dx \Rightarrow \int_c^a \int_d^b F(x, y) \\ &= \int_c^a \varphi'(y) dy = \varphi(b) = \int_c^a \int_d^b F(x, y) dx dy. \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung: Sei $F: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht neg.

Fkt. Anschaulich bedeutet das Doppelint. $V := \iint F dx dy$.

das Volumen der geom. Struktur unter dem Graphen

der Fkt. F zu berechnen. $K := \{(x, y, z) \in [a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq F(x, y)\}$.

Beispiel: Volumen der Kugel mit Radius r im $\mathbb{R}^3$.

Betrachte die stetige Fkt. $F: [-r, r] \times [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$

$F(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ falls $x^2 + y^2 \leq r^2$, sonst 0. Die

geom. Struktur (!) unter dem Graphen von F ist die

obere Hälfte der Kugel $K_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 =$

$r^2\}$. Das Int. $V := \iint_r F(x, y) dx dy$ berechnet also

die Hälfte des Volumens von K_r . Sei y fest. $\rho = \rho(y)$

$= \sqrt{r^2 - y^2}$. Dann ist $F(y) = \int_{-r}^r F(x, y) dx = \int_0^\rho \sqrt{\rho^2 - x^2} dx$

$$= \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \rho^2 \frac{\pi}{2} = (r^2 - y^2) \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{2}{3} \pi r^3. \quad \checkmark$$