

Topologische Räume

abstrahieren den Begriff metr. Räume weiter.

1.13. Definition

Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X heißt eine Topologie auf X , wenn die folg. Axiome erfüllt sind:

- 1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- 2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
- 3) $U_i \in \mathcal{T} \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ besteht aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{T} \subset 2^X$. $U \subset X$ heißt offen, wenn $U \in \mathcal{T}$; $A \subset X$ heißt abgeschl., wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$. Nach Satz 1.11 bilden die offenen Mengen eines metr. Raums (X, d) eine Topologie auf X .

1.14. Definition

$(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $x \in X$

Eine Menge $V \subset X$ heißt Umgebung von x wenn ein $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in U \subset V$. Ein top. Raum heißt hausdorffsch, wenn je zwei versch. Punkte $x, y \in X$ disjunkte Umgebungen besitzen.

Nach Satz 1.5 ist die Topologie eines metr. Raums hausdorffsch.

Beispiel: 1) X bel. Menge

$\mathcal{T} = 2^X$ ist eine Topologie auf X . Hier sind die einpunktigen Mengen offen. Dies ist die sog. diskrete Topologie.

2) X bel. Menge, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \subset 2^X$ ist eine indiskrete Topologie

3) X bel. Menge, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \text{Komplemente von endl. Teilmengen } A \subset X\}$ ist die sog. cofinale Topologie.

2) ist hausdorffsch nur wenn X einpunktig ist.

3) ist " " " X endlich ist.

2. GW und Stetigkeit

2.1. Definition

X metr. Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in X . (x_k) konv. gegen $a \in X$ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, wenn für jede Umgebung von a , alle bis auf endlich viele x_k in der Umgebung U liegen. Da jede Umgebung von a ε -Bälle $B(a, \varepsilon)$ enthält und dies selbst Umgebungen sind, ist die Bedingung äquivalent zu $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ d. } d(x_k, a) < \varepsilon \quad \forall k \geq N$.

Notation: X bel. metr. Raum, $x, y \in X$ $\|x, y\| := d(x, y)$.

2.2. Satz

Eine Topologie $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $\mathbb{R}^n$ konv. gg. $a \in \mathbb{R}^n$ wenn für $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$ und $(a_1, \dots, a_n) = a$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,v} = a_v$ für $v = 1, \dots, n$

Beweis: $|x_{k,v} - a_v| \leq \|x_k - a\|$ zeigt, dass wenn $\lim x_k = a$ auch $\lim x_{k,v} = a_v$ erfüllt ist. Umgekehrt, es gelte $\lim x_{k,v} = a_v$. Dann $\exists$ zu $\varepsilon > 0$ ein N_v sd. $|x_{k,v} - a_v| < \varepsilon \quad \forall k \geq N_v$. Wähle $N = \max \{N_v\}$ $\|x_k - a\| \leq \sqrt{n} \max \{|x_{k,v} - a_v|\} < \sqrt{n} \cdot \varepsilon \quad \forall k \geq N$ und $\lim x_k = a$ folgt.

2.3. Satz (Folgenkrit. für Abgeschlossenheit)

Sei X metr. Raum, $A \subset X$. A ist genau dann abgeschl., wenn folg. gilt: Für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten, aus A , die in X gegen ein $a \in X$ konv., gilt $a \in A$.

Beweis: A sei abgeschl. $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$ Folge mit $\lim x_k = a \in X$. Angenommen a liegt nicht in A . Da $U = X \setminus A$ eine offene Umgebung von a ist liegen alle bis auf endlich viele $x_k \notin U$. $\hookrightarrow$ zu $x_k \in A \quad \forall k$. Umgekehrt, das Folgenkrit. sei für A erfüllt. Sei x ein Punkt in $X \setminus A$. Wir müssen ein $\varepsilon > 0$

Finden, sd. $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A \Leftrightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Angenommen $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dann können wir speziell für $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ein $x_k \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A$ finden. Es gilt $\lim x_k = x$ also nach Fk. $x \in A \nrightarrow$ zu $x \in X \setminus A$. Die Annahme, dass alle $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ war also Falsch, dh. $\exists \varepsilon > 0$, sd. $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Da $x \in X \setminus A$ bel. war folgt $X \setminus A$ ist offen, also A abgeschl. $\square$

2.4. Definition

Sei X metr. Raum. Eine Folge (x_k) aus X heißt Cauchy-Folge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ sd. $\|x_k, x_l\| \forall k, l \geq N$. (Konv. Folgen = CF).

2.5. Definition

Ein metr. Raum X heißt vollst., wenn jede CF in X konv.

Ein norm. Raum ($\mathbb{R}$ -VR) V der vollst. ist, nennt man einen Banachraum.

2.6. Satz

Im $\mathbb{R}^n$ konv. jede Cauchy-Folge.

Bew.: Die Komp.-Folgen sind CF in $\mathbb{R}$. $\square$

2.7. Definition

$A \subset X$ Teilmenge eines metr. Raums: $\text{diam}(A) = \sup\{\|x, y\| \mid x, y \in A\}$. Eine Menge A heißt beschränkt, wenn $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in A$ existiert mit $A \subset B(a, r)$. Es gilt $\text{diam}(B(a, r)) \leq 2r$. Beschränkt und $\text{diam}(A) < \infty$ sind äquivalent.

2.8. Satz

X vollst. metr. Raum und $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ eine Folge nicht leerer abgeschl. Mengen. mit $\lim \text{diam}(A_k) = 0$. Dann gibt es genau einen Punkt $a \in X$ der in allen A_k liegt. Beweis:

Höchstens ein ^{Punkt} ist klar, da $\lim \text{diam}(A_k) = 0$. Zur Existenz:

Wir wählen ein $x_k \in A_k$ für jedes k . Dann gilt $\|x_k, x_l\| \leq \text{diam}(A_N) \forall k, l \geq N \Rightarrow x_k$ ist eine CF, somit nach Vor.

ansetzung konv. gegen ein $a \in X$. Da fast alle x_k in A_N liegen folgt da A_N abgeschl., dass $a = \lim x_k \in A_N$, also $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. $\square$

2.9. Definition

X, Y metr. Räume. Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ heißt stetig im Punkt $a \in X$, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ mit anderen Worten:

Wenn für jede Folge (x_k) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ auch $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ gilt. f heißt stetig auf T , wenn $f \forall x \in T$ stetig.

2.10. Satz

Seien X, Y, Z metr. Räume $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ Abb., $a \in X, b = f(a) \in Y$. Ist f in a und g in b stetig, dann $g \circ f$ in a stetig.

Beweis: Sei (x_k) eine Folge in X mit $\lim x_k = a$. Da f in a stetig ist, folgt $y_k = f(x_k)$ eine Folge in Y ist mit $\lim y_k = b$. Es folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(f(x_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(y_k) = g(b) = (g \circ f)(a)$, da g in b stetig ist. $\square$

2.11. Satz

Sei X metr. Raum, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abb. mit Komponenten $f = (f_1, \dots, f_n)$. f ist genau dann stetig wenn alle $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a sind.

Beweis: $\|y_k\| \leq \|y\|_2 \leq \sqrt{n} \max \{y_k\}$ gilt für $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ impliziert die Behauptung.

2.12. Satz

Die Folg. Abb sind stetig: $\text{add}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (a, b) \mapsto a+b$;
 $\text{mult}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (a, b) \mapsto a \cdot b$; $\text{quot}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$.

Beweis: $\lim (x_k, y_k) = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim x_k = a, \lim y_k = b$
 $\Rightarrow \lim (x_k + y_k) = \lim x_k + \lim y_k = a + b$.

Analog mult und quot. $\square$

Corollar

X metr. Raum $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Fkt. Dann ist auch $f+g$, $f \cdot g$ (falls $g: X \rightarrow \mathbb{R}^*$) stetig.

Beweis: $f+g = \text{add} \circ (f, g): X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Komp. zweier stetiger Abb. wieder stetig. $f \cdot g, \frac{f}{g}$ analog.

Beispiel: Ein Monom vom Grad d auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Ausdruck $x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$ mit $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ $k_1 + \dots + k_n = d$. Ein Polynom vom Grad $\leq d$ $\sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ k_1 + \dots + k_n \leq d}} c_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$. Da die Komp. Fkt. $x_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind und konst. Fkt. stetig, geben Polynome stetige Fkt.

2.13 Satz

$f: X \rightarrow Y$ Abb. zw. metr. Räumen, $a \in X$. f ist genau dann stetig in a , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d. $\|x, a\| < \delta \Rightarrow \|f(x), f(a)\| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ gilt.

Beweis: f sei stetig in a , also $\lim f(x_k) = f(a) \quad \forall$ Folgen (x_k) mit $\lim x_k = a$. Annahme: ε - δ Krit. ist nicht erfüllt, d.h. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \exists x \in X$ mit $\|x, a\| < \delta$ $\|f(x), f(a)\| \geq \varepsilon$ speziell für $\delta = \frac{1}{k} \exists x_k$ mit $\|x_k, a\| < \frac{1}{k}$ aber $\|f(x_k), f(a)\| \geq \varepsilon$. Dann gilt $\lim x_k = a$ also $\lim f(x_k) = f(a)$, was $\|f(x_k), f(a)\| \geq \varepsilon$ widerspricht.

Sei ε - δ Krit. erfüllt und (x_k) eine Folge mit $\lim x_k = a$. Wir müssen $\lim f(x_k) = f(a)$ zeigen. Zu $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d.

$\|x, a\| < \delta \Rightarrow \|f(x), f(a)\| < \varepsilon$. Da $\lim x_k = a \exists$ zu $\delta > 0$ ein N s.d. $\|x_k, a\| < \delta \quad \forall k \geq N \Rightarrow \|f(x_k), f(a)\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N$, die Konv. $\lim f(x_k) = f(a)$. $\square$

