

## Ox4. Das mehrdimensionale Riemann Int.

Es sei  $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] := [a, b] \subset \mathbb{R}^n$  mit  $(a_1, \dots, a_n) = a$ , analog

$b = (b_1, \dots, b_n)$  ein Quader. Das Volumen von  $Q$  ist durch  $\text{vol}(Q) :=$

$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  definiert, der Durchmesser ist  $\text{diam}(Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$ . Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschr. Fkt. Unser Ziel

ist  $\int_Q f(x) dx$  erklären. Ist  $f$  stetig, so können wir dies durch ein iteriertes eindim. Int wie in Ox9 erklären:

$\int_Q f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$ . Die Reihenfolge ist irrelevant. Alternativ können wir mit Riem. Summen vorgehen.

### Ox4. Ox 1. Definition

Eine (Quader-) Zerlegung von  $Q$  ist eine endl. ~~Menge~~ Menge von Teilquadern  $\{Q_k\}_{k=1, \dots, m}$  die  $Q$  überdecken ohne

gem. inneren Punkte, also:  $Q_k \subset Q$ ,  $\bigcup_{k=1}^m Q_k = Q$  und  $\overset{\circ}{Q}_k \cap \overset{\circ}{Q}_l = \emptyset$

Für  $k \neq l$ . Die Feinheit der Zerlegung ist  $\|Z\| := \max_{k=1, \dots, m} \text{diam}(Q_k)$

Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschr. Fkt. Dann definieren wir die Ober-

summe von  $f$  bzgl.  $Z$  durch  $\bar{\Sigma}(f, Z) := \sum_{R \in Z} \sup_{x \in R} f(x) \cdot \text{vol}(R)$ .

definiert ~~darüber~~ und die Untersumme  $\underline{\Sigma}(f, Z) := \sum_{R \in Z} \inf_{x \in R} f(x) \cdot \text{vol}(R)$ .

Schließlich für Stützstellen  $T = \{\psi_R \mid \psi_R \in \mathbb{R}\}$  definieren wir

$\Sigma(f, Z, T) = \sum f(\psi_R) \cdot \text{vol}(R)$ . Dann gilt  $\underline{\Sigma}(f, Z) \leq \Sigma(f, Z, T)$

$\leq \bar{\Sigma}(f, Z)$ . Sei  $\mathcal{Z}(Q) = \{Z \mid Z \text{ Quaderzerl. von } Q\}$ .  $f$  heißt

Riemannint. über  $Q$  falls  $\sup_{Z \in \mathcal{Z}(Q)} \underline{\Sigma}(f, Z) = \inf_{Z \in \mathcal{Z}(Q)} \bar{\Sigma}(f, Z)$  und

dann setzen wir  $\int_Q f(x) dx = \sup_{Z \in \mathcal{Z}(Q)} \underline{\Sigma}(f, Z) = \inf_{Z \in \mathcal{Z}(Q)} \bar{\Sigma}(f, Z)$ .

### Ox4. Ox 2 Satz

$f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  ist Riemann intbar  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$  Zerl.  $Z$  von  $Q$ :

$\bar{\Sigma}(f, Z) - \underline{\Sigma}(f, Z) < \varepsilon$ .  $\square$

### Ox4 Ox 3 Korollar

$f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\Rightarrow$  Riemannintbar.

Beweis: Da  $Q$  kompakt  $\Rightarrow f$  glm. stetig. Zu  $\varepsilon / \text{vol}(Q) > 0 \exists$



$\delta > 0: \|x - x'\| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x')| < \varepsilon \text{vol}(Q)$ . Wir betrachten eine Zerl. mit Feinheit  $\|Z\| < \delta, \bar{\Sigma} - \underline{\Sigma} \leq \sum \frac{\varepsilon}{\text{vol}(Q_i)} \text{vol}(R_i) = \varepsilon. \square$

### OrA. Or4. Satz

Sei  $f$  über  $Q$   $R$ -int. Für jede Folge  $(\varepsilon_k)$  von Zerl. in  $Q$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Z_k\| \rightarrow 0$  und jede Wahl von Stützstellen  $(T_k)$ , also  $T_k = \{ \varphi_R \mid R \in Z_k \}$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma(f, Z_k, T_k) = \int_Q f dx$ .

### OrA. Or5. Satz

$f, g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R$ -int. Dann gilt:

- 1) Linearität.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :  $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ .
- 2) Monotonie.  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ .
- 3) Auch  $f_+ = \max(f, 0)$ ,  $f_- = -\min(f, 0)$ ,  $|f| = f_+ + f_-$ ,  $|f|^{p_1} \leq |f|^{p_2}$  für  $p_1 > p_2$  und  $f, g$  auch  $R$ -int. Ferner  $\Delta$ -Ung!
- 4) MWS:  $f$  stetig,  $g \geq 0$ . Dann  $\exists \varphi \in Q: \int f g = P(\varphi) \int g \square$

### OrA. Or6. Satz

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  und  $[a', b'] \subset \mathbb{R}^n$  zwei Quader und  $F: [a, b] \times [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$   $R$ -int. Fkt. für sämtliche Int.  $F(x') = \int_{[a, b]} F(x, x') dx \exists \forall x' \in [a', b']$  Dann ist auch  $F: [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}$   $R$ -int und es gilt  $\int_{[a', b']} F(x') dx' = \int_{[a, b] \times [a', b']} F(x, x') dx dx'$

Beweis: Wir zeigen die Int. barkeit von  $F$  und berechnen das Int. gleichzeitig als Anwendung des Int. OrA. Or3

$\forall \varepsilon > 0 \exists$  Zerl.  $Z \times Z'$  von  $[a, b] \times [a', b']$  sol.  $\bar{\Sigma}(F, Z \times Z') - \underline{\Sigma}(F, Z \times Z') \leq \varepsilon$  also  $\underline{\Sigma} \geq \int F(x, x') dx - \varepsilon$ . Sei  $x \in Q' \in Z'$

Dann gilt:  $F(x') = \int_{[a, b]} F(x, x') dx \geq \underline{\Sigma}(F|_{[a, b] \times \{x\}}, Z)$   
 $= \sum_{Q \in Z} \inf_{x \in Q} (F(x, x')) \text{vol}(Q) \geq \sum_{Q \in Z} \inf_{x \in Q} \{ F(x, y) \mid x \in Q, y \in Q' \} \text{vol}(Q)$

und damit auch:  $\inf_{x \in Q'} F(x') \geq \sum_{Q \in Z} \inf_{x \in Q} \{ F(x, y) \mid x \in Q, y \in Q' \} \text{vol}(Q)$

$\underline{\Sigma}(F, Z') \geq \sum_{Q' \in Z'} \sum_{Q \in Z} \inf_{x \in Q} \{ F(x, y) \mid x \in Q, y \in Q' \} \text{vol}(Q) \text{vol}(Q')$

$= \underline{\Sigma}(F, Z \times Z') \geq \int_{[a, b] \times [a', b']} F(x, x') dx dx' - \varepsilon$ . Analog OS. m.  $+\varepsilon$  statt  $-\varepsilon$ .



Dies zeigt die Intbarkeit und berechnet den Wert des Ints.  $\square$

### Ox4. Ox8. Definition

1) Sei  $S$  eine beschränkte Menge im  $\mathbb{R}^n$  und  $Q$  ein Quader mit  $S \subset Q$ .  $1_S$  bezeichnet die char. Fkt.  $1_S(x) = 1, x \in S$ , else  $0, (x \notin S)$ .  $S$  hat  $\mathbb{R}$ -messbares Volumen, wenn  $1_S$  über  $Q$  intbar ist und dann setzen wir  $\text{vol}(S) = \int_Q 1_S dx$ .

Bemerkung:  $\text{vol}(S)$  hängt nicht davon ab wie man  $Q$  wählt.

2) Eine beschränkte Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  heißt  $\mathbb{R}$ -Nullmenge, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  endl. viele Quader  $Q_1, \dots, Q_m$  mit  $S \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k$  und  $\sum_{k=1}^m \text{vol}(Q_k) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$  endl. viele Quader  $Q_k$  mit  $S \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k$  und  $\sum_{k=1}^m \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$ .

Bemerkung:  $\Leftarrow$  ist trivial!  $\Rightarrow$  Sei  $S \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k$  mit  $\sum_{k=1}^m \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$ .

Dann ex. Quader  $Q'_k$  mit  $Q_k \subset Q'_k$  und  $\text{vol}(Q'_k) = \text{vol}(Q_k) + \frac{\varepsilon}{m}$

Dann erfüllt  $S$  die Bed. für  $2\varepsilon$ .  $\sum \text{vol}(Q'_k) \leq 2\varepsilon$ .

Bem 2):  $\mathbb{R}$ -O-Mengen  $S$  sind  $\mathbb{R}$ -messbar mit  $\text{vol}(S) = 0$ .

Beweis: Wir können zu  $\varepsilon > 0$  und  $S \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k$  die Überdeckung  $\{Q_k\}$  zu einer Zerlegung  $Z$  von  $Q \cup S$  ergänzen/verfeinern. Dann gilt  $\sum (1_S, Z) - \sum (1_S, Z) \leq \sum_{k=1}^m \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$ .  
da für  $R \in Z$  mit  $R \cap Q_k = \emptyset \forall k$   $1_S|_R \equiv 0$  gilt.

Beispiel:  $[a, b] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  ist eine  $\mathbb{R}$ -O-Menge.  $Q$ -Quader

$\Rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Nullmenge

### Ox4. Ox8. Satz

Eine beschränkte Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$  ist  $\mathbb{R}$ -messbar,  $\Leftrightarrow S$  ist eine  $\mathbb{R}$ -O-Menge.

Beweis:  $\Leftarrow$ : Zu  $\varepsilon > 0$  betrachten wir  $Q_1, \dots, Q_m$  s.d.  $S \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k$  und  $\sum_{k=1}^m \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$  und verfeinern/ergänzen diese zu einer Zerlegung  $Z$  von  $Q$  ein Quader der  $S$  umfasst



Für  $R \in \mathbb{Z}$  mit  $R \cap Q_k^\circ = \emptyset$  gilt  $\inf \{f_{\frac{1}{k}}(x) \mid x \in R\} > 0$  und deshalb gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{\frac{1}{k}}, Z) - \sum_{k=1}^{\infty} (f_{\frac{1}{k}}, Z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$ .

$\Rightarrow$ :  $S \subset Q$  und  $Z$  eine Zerl. von  $Q$  mit  $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{\frac{1}{k}}, Z) - \sum_{k=1}^{\infty} (f_{\frac{1}{k}}, Z) < \varepsilon$ .  $R \in \mathbb{Z}$  gibt einen untersch. Beitrag zur  $OS$ ,  $US \in$

$R \cap S \neq \emptyset$  und  $R \cap (R^n \setminus S) = \emptyset$ . Also  $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{\frac{1}{k}}, Z) - \sum_{k=1}^{\infty} (f_{\frac{1}{k}}, Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R) < \varepsilon$ .

Da  $\delta S \subset \cup_{k=1}^{\infty} R_k$   $\text{vol}(R_k) = \text{vol}(R) + \varepsilon_m$   $m = 1 \in \mathbb{N}$   $R \cap S \neq \emptyset$   
 $R \supset R_k$ ,  $R$  wie oben

$R \cap (R^n \setminus S) \neq \emptyset$  folgt  $\delta S$  ist eine  $R$ -Nullmenge.

### 0x1 0x9 Beispiel

$S = \mathbb{Q}^n \cap Q$  die Menge der Punkte in  $Q$  mit rat. Koord.

$\delta S = Q$ , also ist  $S$  nicht  $R$ -messbar.

### 0x1 0x1 Bemerkung

$\mathbb{Q}^n \cap Q$  ist abzählbar. Es ex. eine Folge  $(Q_k)$  von Quadern mit  $\mathbb{Q}^n \cap Q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k^\circ$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(Q_k) < \varepsilon$ . In der Tat ist

$N \rightarrow \mathbb{Q}^n \cap Q$  eine Abzählung und  $p_k$  der  $k$ -te so können einen Quader  $Q_k$  mit  $p_k \in Q_k^\circ = \emptyset$  bzgl. finden mit  $\text{vol}(Q_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ . Es sollte vlt.  $\text{vol}(\mathbb{Q}^n \cap Q) = 0$  bzgl. einer geeigneten Inttheorie. Dies ist das Lebesgemaß (Ame III).

### 0x1 0xB. Definition

Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  eine  $R$ -messbare Menge.  $Q \supset S$  ein Quader und  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschr. Fkt. Die Fkt  $f \cdot \mathbb{1}_S$  können wir durch 0 auf ganz  $Q$  fort.  $f$  heißt  $R$ -intbar über  $Q$ , wenn  $f \cdot \mathbb{1}_S$  über  $Q$   $R$ -int ist und dann setzen wir  $\int_S f dx = \int_Q f \cdot \mathbb{1}_S dx$ . Speziell  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $S \subset Q$   $R$ -messbar, dann  $\int_S f dx$ , da  $f \cdot \mathbb{1}_S$  über  $Q$  intbar ist als Produkt von intbaren Fkt.