

2.14 Satz

$F: X \rightarrow Y$ Abbildung zw. metr. Räumen. F ist stetig in $a \in X$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|F(x), F(a)\| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } \|x, a\| < \delta$
gilt.

Beispiel: X metr. Raum, $x_0 \in X$. Dann ist $F: X \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := d(x, x_0)$ eine stetige Fkt auf X .

$|F(x) - F(y)| = |d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq d(x, y)$. Man $\delta = \varepsilon$ wählen.

2.15 Definition

X, Y metr. Räume, $F_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ und $F: X \rightarrow Y$ Abb.

Man sagt (F_n) konv. glm gegen F , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N$:

$$\|F_n(x), F(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq N$$

2.16 Satz

Es sei $F_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stet. Abb. die glm. ggn. F konv. $\Rightarrow F$ stetig.

Beweis: $\exists N: \|F_n(x), F(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq N$

Da F_n in $a \in X$ stetig, $\exists \delta > 0$ sd. $\|F_n(x), F_n(a)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x$
mit $\|x, a\| < \delta$. Es folgt $\|F(x), F(a)\| \leq \|F(x), F_n(x)\| + \|F_n(x), F_n(a)\| + \|F_n(a), F(a)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x$ mit $\|x, a\| < \delta$. Also die Stetigkeit.

Lineare Abbildungen

2.17. Satz

V, W $\mathbb{R}$ -VR Y und $A: V \rightarrow W$ eine lin. Abb. A ist stetig $\Leftrightarrow \exists c > 0$

$$\text{ex.: } \|Ax\| \leq c \cdot \|x\|$$

Beweis: a) A sei stetig. Wegen der Stetigkeit im NP $\exists$ zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0: \|A(z)\| \leq 1 \quad \forall z \in V \text{ mit } \|z\| < \delta$.

Wir wählen dann $c = \frac{2}{\delta}$. Für $x \in V \setminus \{0\}, \lambda = (c \cdot \|x\|)^{-1}$

und $z = \lambda x$. Dann gilt $\|z\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$$\Rightarrow \|A(z)\| = \|\lambda A(x)\| = \frac{1}{c \cdot \|x\|} \|A(x)\| \leq 1. \Rightarrow \|A(x)\| \leq c \cdot \|x\|$$

b) Es gebe ein C mit $\|A(x)\| \leq C \cdot \|x\|$

$\Rightarrow \|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| \leq C \cdot \|x-y\|$ Für vorge ε können wir $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ wählen. $\square$

Bsp: $V = \mathcal{C}[a,b]$ VR der stet. Fkt $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ und

$\|F\|_{\infty} = \sup \{ |F(x)| \mid x \in [a,b] \}$. Sei $I: \mathcal{C}[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch das Integral definiert $I(F) = \int_a^b F(x) dx$. I ist stetig, denn $|I(F)| \leq \int_a^b |F(x)| dx \leq \int_a^b \|F\|_{\infty} dx = (b-a) \|F\|_{\infty}$. also $C = b-a$ die Int. länge fests.

2) $V = \mathcal{C}^1[a,b]$ stet. diffbare Fkt. $D: \mathcal{C}^1[a,b] \rightarrow \mathcal{C}[a,b]$, $Df = f'$. Geben wir beiden VR die Spnorm, dann ist D nicht stetig.

Bew: $[a,b] = [0,1]$ Für $F_n \in \mathcal{C}^1[0,1]$ mit $F_n(x) = x^n$

gilt: $\|F_n\|_{\infty} = 1 \forall n$. Für F'_n gilt $F'_n(x) = nx^{n-1}$

$\|D F_n\|_{\infty} = n$. Also D kann nicht stetig sein bzgl. dieser Norm.

2.18 Definition

Sei $A: V \rightarrow W$ eine stet. lin. Abb. zw. norm VR. Dann heißt

$\|A\| := \sup \{ \|Ax\| \mid x \in V \text{ mit } \|x\| \leq 1 \}$ die Norm von A .

$\|A\| < \infty$ nach Satz 2.17 und es gilt $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ in dem wir $\frac{x}{\|x\|}$ in die Def. einsetzen.

Also $\|A\|$ ist das beste C , das wir in Satz 2.17 Finden können.

Bsp: $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ Hom. zu den Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$ und euklid. Norm. Dann gilt $\max |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sqrt{m \cdot n} \max \{ |a_{ij}| \}$.

Bew: Die erste Ungl. erhalten wir indem wir die Bilder $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ des j -ten EV. $p_j \in \mathbb{R}^n$ $\|p_j\| = 1$.

$\|A\| \geq \|A p_j\| = \|a_{\cdot j}\|_2 \geq \max \{ |a_{ij}| \}$. Für die 2te

Ungl. $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ $x = (x_j)$ $\|x\| \leq 1$.

$|y_i| = |\langle a_{i\cdot}, x \rangle| \leq \|a_{i\cdot}\|_2 \cdot \|x\| \leq \sqrt{m} \max |a_{ij}| \quad j=1..n$

$$\|Ax\| \leq \sqrt{n} \max\{|y_i| : i \in [1, n]\} \leq \sqrt{n} \sqrt{n} \max\{|a_{ij}| : i, j \in [1, n]\}$$

Zum Abschluss:

2.19 Satz

$F: X \rightarrow Y$ Abb. zw. metr. Räumen

1) Die Abb. F ist stetig in einem Punkt $a \in X$, wenn zu jeder Umg. V von $F(a) \in Y$ eine Umg. U von $a \in X$ ex. m. $F(U) \subset V$.

2) F ist stetig $\forall x \in X \Leftrightarrow$ Urbilder offener Mengen in Y sind offene Mengen in X sind.

Beweis: 1) $\square$

2) Sei F stetig. $V \subset Y$ und $a \in F^{-1}(V)$. Da V eine Umg. von $F(a)$ ist $\exists$ eine offene Umg. U von a mit $F(U) \subset V$

$\Rightarrow F^{-1}(V) \supset F(F^{-1}(U)) \supset U \ni a$. $F^{-1}(V)$ ist eine Umg. von a .

Dies gilt $\forall a \in F^{-1}(V) \Rightarrow F^{-1}(V)$ ist offen.

Umgekehrt sei: $F^{-1}(V)$ offen $\forall V \subset Y$ offen, und $a \in X$ bel.

Betrachten wir eine offene Umg. V von $F(a) \in Y$ so ist

$U \subset X$ offen, also eine Umg. von a und $F(U) = V \subset V \square$

Bsp: $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ stet. Abb. X metr. Raum. $U_c = \{x \in X \mid f(x) < c\}$

offen in X , $A = \{x \in X \mid f(x) = c\}$ abgeschl. A ist Urbild von

$\mathbb{R} \setminus \{c\}$ das Komplement.

3. Kompaktheit

3.1. Definition

Sei A eine Teilmenge eines metr. Raums. Eine offene Überdeckung

$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ von $A \subset X$ ist eine Fam. von off. Teilmengen:

$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metr. Raums heißt

kompakt, wenn eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine endl. Teilüberdeckung

hat, d.h. $\exists i_1, \dots, i_n \in I : A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

3.2 Satz

Sei X ein metr. Raum. (x_n) eine konv. Folge in X die gegen $a \in X$

konv. Dann ist die Menge $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt.

Beweis: Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von A . Wegen

$a \in A \exists i: i_1 \in I$, s.d. $a \in U_{i_1}$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \exists N$ s.d.

$x_n \in U_{i_1} \forall n \geq N$. Zu $1 \leq k \leq N-1$ gibt es Indizes i_k sodass

$x_k \in U_{i_k} \Rightarrow A \subset U_{i_1} \subset \dots \subset U_{i_{N-1}} \subset U_{i_N}$ ist endl. $\square$

Bsp: $X = \mathbb{R}$ und $(x_n) = (\frac{1}{n})$.

Die Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Beweis: Diese Mengen sind offen und $x_n = \frac{1}{n} \in U_n$ und $\{x_k\}$

$\cap U_n = \{x_n\}$. Also $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ überdeckt, aber

jedes endl. Teilsystem enthält nur endlich viele Punkte

von $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ da U_n nur $\frac{1}{n}$ enthält.

3.3 Satz

Es seien $a_r \leq b_r \in \mathbb{R} \quad r = 1, \dots, n$

$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ der zugehörige Quader. Q ist kompakt.

Beweis: Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von Q . Wir führen

die Annahme, dass keine endl. Teilüberdeckung $\exists$ zu einem

Widerspruch. Wir konstr. eine Folge $Q = Q_0 \supset \dots \supset Q_r \supset \dots$

von abgeschl. Teilquadern, die jeweils nicht endlich viele

U_i überdeckt werden und $\text{diam}(Q_k) = 2^{-k} \text{diam}(Q)$.

Setzen $Q_0 = Q$ Q_k schon konstr. $Q_k = I_1 \times \dots \times I_n$ so zer-

legen wir $I_v = I_v^{(1)} \cup I_v^{(2)}$ in zwei abgeschl. Intervalle

gleicher Länge und $s_v \in \{1, 2\}$. $Q_k^{(s_1, \dots, s_n)} = I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}$

Da Q_k nicht endlich überdeckt wird, ist wenigstens einer der

endl. vielen Teilquadern nicht endl. überdeckt. Wir wählen Q_{k+1}
 $= Q_k^{(s_1, \dots, s_n)}$ als einen solchen. Dann gilt $\text{diam}(Q_{k+1}) = 2^{-(k+1)} \text{diam}(Q)$.

Nach dem Schachtelungsprinzip $\exists$ genau ein Punkt $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$.

Da $\{U_i\}$ Q überdeckt $\exists i_0$ mit $a \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist

$\exists \varepsilon > 0$, s.d. $B(a, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Sei k so groß:
 $\text{diam}(Q_k) < \varepsilon$. Da $a \in Q_k$ folgt

$Q_k \in B(a, \varepsilon) \leadsto$ zur Wahl von Q_k . $\square$

3.4. Satz

Jede kompakte A eines metr. Raums X ist beschränkt.

Bew.: $a \in X \quad U_n = B(a, n) \Rightarrow \bigcup U_n = X \supset A$ ist eine offene Überdeckung. A kompakt $\Rightarrow n_1, \dots, n_k$ endlich viele sol.

$A \subset U_{n_1} \subset \dots \subset U_{n_k} = U_m \quad m = \max \{n_1, \dots, n_k\}$. $\square$

