

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{Lösung } x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto x(t)$$

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, λ_1, λ_2 bezeichne Eigenwerte von A

1. Fall: Beide Eigenwerte sind reell und verschieden

2. Fall: Paar von komplex konjugierten Eigenwerten

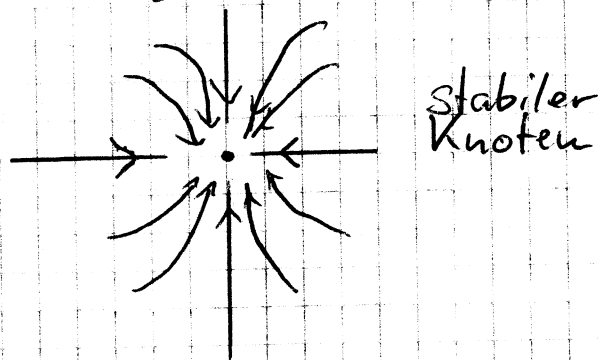
3. Fall: doppelter EW

Fall 1: Nach Koordinatentransformation können wir annehmen, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 , $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu λ_2 .

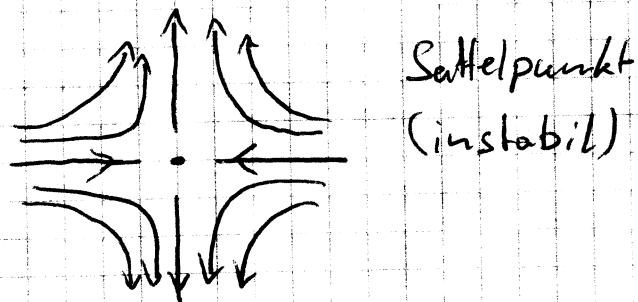
Lösung mit Anfangswert $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ist

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

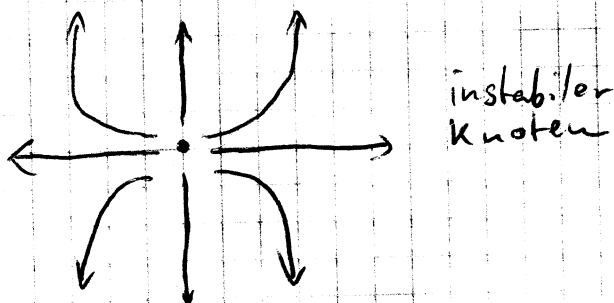
(a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$



(b) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



(c) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

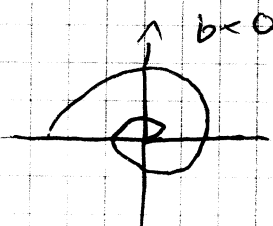
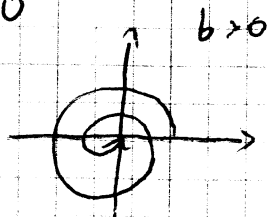


2. Fall: $\lambda_1 = a_1 + ib_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt \\ e^{at} \sin bt \end{pmatrix} \quad \text{eine Lösung}$$

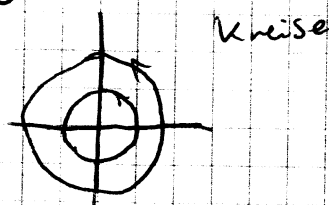
Allg. Lösung: $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt \\ e^{at} \sin bt \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{at} (-\sin bt) \\ e^{at} \cos bt \end{pmatrix}$

(a) $\operatorname{Re}(a) < 0$

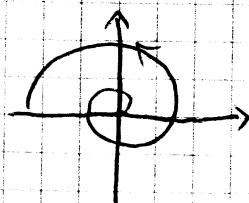


stabiler Strudel

(b) $\operatorname{Re}(a) = 0$



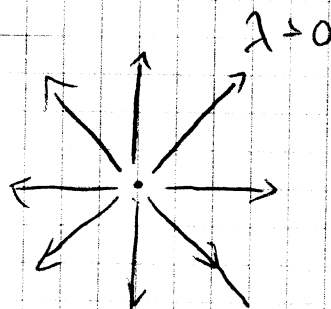
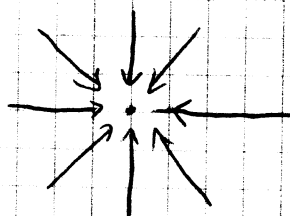
(c) $\operatorname{Re}(a) > 0$



3. Fall $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}!$

(a) $\dim E_{\lambda}(A, \lambda) = 2$

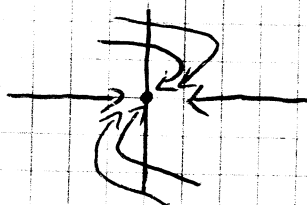
$\lambda < 0$



(b) $\dim E_{\lambda}(A, \lambda) = 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \exp(A \cdot t)$$

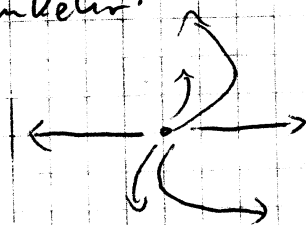
$\lambda < 0$ entarteter stabiler Knoten



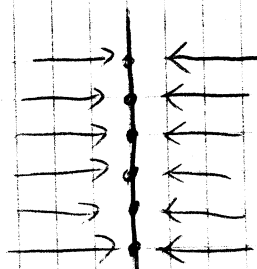
$$x_2 = e^{\lambda t}$$

$$x_1 = \frac{1}{\lambda} x_2 \cdot x_2$$

$\lambda > 0$: Zeitumkehr:



4) $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$



§ 16 Verhalten von autonomen DGL für lange Zeiten

16.1: Voraussetzungen für das Kapitel

Sei $\dot{x} = v(x)$ ein autonomes DGL system
1-ter Ordnung.

$v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ein k -mal
stetig diffbares Vektorfeld.

Dann genügt $\dot{x} = v(x)$ (*) lokal einer Lipschitz-
Bedingung und die Lösung existiert lokal und ist
dort eindeutig durch den Anfangswert $x(0) = p$
bestimmt.

16.2 Satz: Es seien $x_1: D_1 \rightarrow M$, $x_2: D_2 \rightarrow M$
zwei Lösungen der DGL $\dot{x} = v(x)$ (*)
mit Anfangswert $x_1(0) = x_2(0) = p$, wobei
 $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle.

Dann gilt: $x_1|_{D_1 \cap D_2} = x_2|_{D_1 \cap D_2}$

Beweis: Sei $T := \{s \mid \alpha_1(t) = \alpha_2(t) \quad \forall t \text{ mit } 0 \leq t \leq s\}$

mit $b := \sup(T)$. Wir wollen $b = \sup(D_1 \cap D_2)$ zeigen.

Angenommen $b < \sup(D_1 \cap D_2)$.

Dann sind $\alpha_1(b)$ und $\alpha_2(b)$

definiert und wegen Stetigkeit der α_j gilt:

$$\alpha_1(b) = \alpha_2(b)$$

Wegen der Differenzierbarkeit von v auf einer offenen Umgebung von b mit der ^{eindeutig bestimmten} Lösung $\alpha(t)$ ~~gilt~~ mit: $\alpha(b) = q$ überein.

Also ist die Annahme $b < \sup(D_1 \cap D_2)$ ist falsch.
Analog für $b > \sup(D_1 \cap D_2)$. $\square$

16.3 Bemerkung: Ist $\alpha: D \rightarrow M$ eine Lösung eines autonomen DGLsystems $\dot{x} = v(x)$, dann ist für $\tau \in \mathbb{R}$ und $D_\tau = \{t \in \mathbb{R} \mid \tau + t \in D\} = D - \tau$
 $\alpha_\tau: D_\tau \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha_\tau(t) = \alpha(\tau + t)$ eine

Lösung der DGL. ~~um~~ Dann:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\tau(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \alpha(\tau + t) = \dot{\alpha}(\tau + t) = v(\alpha(\tau + t)) \\ &= v(\alpha_\tau(t)) \end{aligned}$$

Dies ist eine Besonderheit von autonomen DGL.

Die Lösung $\tilde{\alpha}$ zum Zeitpunkt τ und Anfangswert $\tilde{\alpha}(\tau) = q$ stimmt mit der Lösung $\alpha(t)$ zum Anfangswert $\alpha(0) = p$ und $\alpha(\tau) = q$ überein.

16.4 Def.: Situation wie (16.1)

Wir betrachten zu $p \in M$ die Menge

$$I_p := \left\{ D \text{ offenes Intervall} \mid \exists \text{ Lösung } \varphi: D \rightarrow M \text{ von } (*), \text{ die } \varphi(0) = p \text{ erfüllt} \right\}$$

Dann heißt $D_p := \bigcup_{D \in I_p} D$ das maximale Lösungsintervall

zum Anfangswert p und

$\varphi_p: D_p \rightarrow M$ mit $\varphi_p|_D = \varphi_D$ ist eine Lösung

auf $D_p =]a_p, b_p[$, wobei

$a_p = \inf(D_p)$, $b_p = \sup(D_p)$ mit Anfangswert

$$\varphi_p(0) = p.$$

Wir definieren den Definitionsbereich der globalen Lösung von $(*)$ durch

$A \subset M \times \mathbb{R}$ mit $A = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \in D_p\} = M \times D_p$
und $\Phi: A \rightarrow M$; $\Phi(p, t) = \varphi_p(t)$
die maximale globale Lösung.

16.5 Satz: Situation wie (16.1), Notation wie (16.4).

Die maximale Lösung $\Phi: A \rightarrow M$ des autonomen

DGL-Systems $\dot{x} = v(x)$, $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat

folgende Eigenschaften:

(1) Das Definitionsgebiet $A \subset M \times \mathbb{R}$ ist offen und

Φ ist k -mal stetig diffbar.

Insbesondere hängt $\varphi_p(t)$ differenzierbar vom

Anfangswert $p \in M$ ab.

(2) $A = \{p\} \times \mathbb{R} = \{p\} \times]a_p, b_p[$

(3) $\Phi(\Phi(p, t), s) = \Phi(p, t+s)$, falls die linke Seite
definiert ist.

Beweis: (2) ist trivial; (3) nach (16.3).

(1) ist nicht so trivial, aber nebeligend.

Auf den Beweis wird hier verzichtet

Referenz: T. Bröcker: Analysis 3, 3I

• Vladimir I. Arnold: Ordinary Differential Equations, Springer.

Die differenzierbare Abhängigkeit von der Anfangsbedingung gilt allgemeiner für DGL-Systeme:

$$\textcircled{+} \quad y' = f(y, x), \quad f \text{ diffbar auf } M \times \mathbb{R},$$

denn, wenn $\alpha(t)$ eine Lösung von $\textcircled{+}$ ist, dann ist

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ t \end{pmatrix} \text{ eine Lösung von}$$

$$\textcircled{+'} \quad \begin{cases} y' = f(y, y_{n+1}) \\ y'_{n+1} = 1 \end{cases}.$$

16.5 Bem. 1) Das Bild $\mathcal{L}_p(\mathcal{I}_p, b_p \mathcal{L})$ heißt Integralkurve durch p oder Bahn durch p .

Der Phasenraum M ist die disjunkte Vereinigung von Bahnen. Die Zerlegung von M in Bahnen nennt man auch Phasenportrait.

2) Ist Φ auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert, für alle Punkte p ist die Lösung $\mathcal{L}_p$ für alle Zeiten etabliert, dann nennt man Φ einen Fluss auf M .

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\Phi_t: M \rightarrow M \text{ mit } \Phi_t(p) = \Phi(p, t)$$

ein Diffeomorphismus und nach (3) gilt:

$$(3') \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$$

$$\Phi_0(p) = p \text{ also } \Phi_0 = \text{id}_M$$

$$\Phi_{-t} \circ \Phi_t = \text{id}_M$$

Mit anderen Worten: Ein Fluss ist ein Gruppenhomomorphismus.

$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ ist ein Gruppenhomomorphismus
 $t \mapsto \Phi_t$

der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die Gruppe der
Diffeomorphismen von M .

3) Erfüllt $\Phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ die Gleichung (3'), so
bekommt man das Vektorfeld $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch
$$v(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0) \text{ zurück.}$$

4) Ist Φ nur auf einer Teilmenge $A \subset M \times \mathbb{R}$
erklärt, so sprechen wir von einem lokalen
Fluss.

5) $\mathbb{R}$ -Operation auf M nennt man auch
dynamische Systeme.

16.6. Satz: Es sei $\alpha_p: I_{\alpha_p}, b_p \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eine
maximale Lösung der DGL $\dot{x} = v(x)$ (mit 16.1).
Gilt $b_p < \infty$ und ist $K \subset M$ ein Kompaktum, dann
existiert ein $\tau \in I_{\alpha_p}, b_p \subset \mathbb{R}$, so dass
 $\alpha(t) \notin K \quad \forall t \in [\tau, b_p \subset \mathbb{R}$.

Mit anderen Worten: Lösungen, die nur für endliche
Zeit existieren, verlassen schließlich jedes
Kompaktum.

Beweisskizze: Angenommen ein solches τ existiert nicht.

Dann existiert eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = b_p$
und $\alpha(t_k) \in K \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir erreichen,
dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k) = q \in K$.

Die globale Lösung Φ mit Anfangswert in $U_\varepsilon(q) \subset M$
existiert für $0 < \varepsilon < 1$ auf $U \times]-\varepsilon, \varepsilon[$.

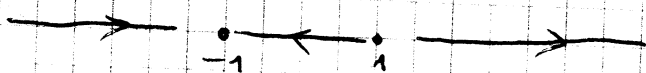
Da einen der ~~angefragten~~ Punkte $x(t_k) := q_k \in U$,
können wir Lösung x mit Anfangswert $x(0) = p$
mit Hilfe der Lösung x_{q_k} zum Zeitpunkt 0 durch

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & t \leq t_k \\ x_{q_k}(t - t_k) & \text{für } t \geq t_k \end{cases} \text{ fortsetzen,}$$

also x existiert auf dem Zeitintervall

$$t_k + \varepsilon \times b \quad \downarrow$$

16.7 Beispiel: $\dot{x} = x^2 - 1$ hat das Phasenportrait



Wegen der Eindeutigkeit der Lösung, kann eine
Lösung x mit $x(0) \in]-1, 1[$ das Intervall
 $]-1, 1[$ nicht verlassen. Die Lösung existiert
daher für alle Zeiten.

16.8 Satz (Drei Typen von Integralkurven)

$\dot{x} = v(x)$ wie in (16.1)

Sei $x: D \rightarrow M$ eine maximale Lösung. Dann trifft
eine der folgenden Aussagen zu:

- 1) x ist konstant: $D = \mathbb{R}$
- 2) x ist injektiv und $\dot{x}(t) \neq 0 \quad \forall t \in D$
- 3) x ist regulär und periodisch, d.h.

$D = \mathbb{R}$; $\exists \tau \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $x(t + \tau) = x(t)$;

$\dot{x}(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$; $x|_{[0, \tau]}$ ist injektiv

Beweis ist klar.

Bemerkung: Der Fall 2) sagt nicht, dass $x(t)$ den Anfangswert $x(0)$ wieder beliebig nahe kommen kann.

Beispiel:

