

0x7.0x0 Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine sym. Matrix.

- a) A heißt pos. definit. ($A > 0$), falls $\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- b) A heißt pos. semi. definit, falls $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- c) negativ definit $\Rightarrow -A$ pos. def.
- d) A heißt indefinit, wenn $\exists x_1, x_2$ mit $\langle Ax_1, x_1 \rangle > 0$ und $\langle Ax_2, x_2 \rangle < 0$.

0x7.0x5 Satz

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 2x stetig diffbar, $x \in U$ ein Punkt
 $\text{grad}(f(x)) = 0$ also ein krit. Punkt. Dann gilt:

- a) Ist $\text{Hess } f(x)$ pos. definit, dann hat f in x ein lok. Min.
- b) $\text{Hess } f(x)$ neg. def. $\Rightarrow f(x)$ lok. Max. (isoliert)
- c) $\text{Hess } f(x)$ ind. $\Rightarrow$ kein lok. Ex.

Beweis: Sei $A = \text{Hess } f(x)$.

Nach Corollar 0x7.0x9. und der Vor. an den Gradienten
im Punkt x gilt: $f(x+\varphi) = f(x) + \frac{1}{2} \langle A\varphi, \varphi \rangle + \varphi_2(\varphi)$
mit $\varphi_2(\varphi) \in o(\|\varphi\|^2)$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|\varphi_2(\varphi)| \leq \varepsilon \cdot \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi$
mit $\|\varphi\| < \delta$.

Auf EW werden
diese Werte ange-
nommen

a) Sei pos. definit. Wir betrachten die Sphäre $S = \{ \varphi \in \mathbb{R}^n \mid \|\varphi\| = 1 \}$. Da S kompakt ist nimmt die stetige Fkt.

$\varphi \mapsto \langle \varphi, A\varphi \rangle$ das Min auf S an: $\alpha = \inf \{ \langle \varphi, A\varphi \rangle \mid \varphi \in S \}$, also $\alpha > 0$. Mit diesem α gilt dann

$\langle \varphi, A\varphi \rangle \geq \alpha \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$ da $\langle \varphi, A\varphi \rangle = \|\varphi\|^2$.

$\langle \frac{\varphi}{\|\varphi\|}, A \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \rangle$ Für $\varphi \neq 0$ gilt und $\frac{\varphi}{\|\varphi\|} \in S$. Zu $\frac{\alpha}{4} = \varepsilon$.

wählen $\delta > 0$ sodass $|\varphi_2(\varphi)| \leq \frac{\alpha}{4} \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in B(0, \delta)$. Es

folgt $f(x+\varphi) = f(x) + \frac{1}{2} \langle \varphi, A\varphi \rangle + \varphi_2(\varphi) \geq f(x) + \frac{\alpha}{2} \|\varphi\|^2 - \frac{\alpha}{4} \|\varphi\|^2 = f(x) + \frac{\alpha}{4} \|\varphi\|^2 > f(x) \quad \forall \varphi \neq 0$ in $B(0, \delta)$.

Also ist x ein isoliertes lok. Min.

b) Ist $A = \text{Hess } F(x)$ neg. def. dann ist $-A = \text{Hess } -F(x) > 0$
also hat $-F$ in x ein lok. Min. $\Rightarrow F$ hat ein lok. Max.

c) Ist $A = \text{Hess } F(x)$ ind. etwa $\alpha = \langle \psi, A\psi \rangle > 0$ und
 $\beta = \langle \eta, A\eta \rangle < 0$ mit ψ, η mit $\|\psi\|, \|\eta\| = 1$ so
folgt für $t \in \mathbb{R}$ genügend klein $F(x+t\psi) = F(x) + \frac{1}{2}$
 $\langle t\psi, A+t\psi \rangle + \varphi(t\psi) = F(x) + \frac{\alpha}{2} t^2 + \varphi(t\psi) \geq F(x) + \frac{\alpha}{4} t^2 >$
 $F(x)$. Falls t groß wählen, falls $|\varphi(t\psi)| \leq \frac{\alpha}{4} \|t\psi\|^2 = \frac{\alpha}{4} t^2$
Analog: $F(x+t\eta) + \frac{\beta t^2}{2} + \varphi(t\eta) \leq F(x) + \frac{\beta}{4} t^2 < F(x)$,
da $\beta < 0$. $\Rightarrow$ kein lok. Ex. in x . $\square$

0x7. 0x F Beispiel:

a) $F(x, y) = x^2 + y^2$. $\text{Hess } F := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$

b) $F(x, y) = x^2 - y^2$. $\text{Hess } F := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ind.

c) $F(x, y) = x^2 + y^3$, bzw. $F(x, y) = x^2 + y^4$
 $\text{Hess } F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^3 \end{pmatrix}$

$F(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ kein lok. Ex.

aber $x^2 + y^4$ hat ein iso. lok. Min.

Bei Semidef. gibt Hess. kein Kriterium.

0x7. 0x 11

Wie entscheidet man ob eine Matrix pos. def. ist?

Bekanntlich lassen sich symmetrische (reelle) Matrizen mit
orth. Mat. diagonalisieren^{en}, $\exists S \in SO(n, \mathbb{R}) = \{B \in GL(n, \mathbb{R}) \mid$
 $t_B \cdot B = 1 \text{ und } \det(A) = 1\}$, sodass $t^t A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine
diag. Mat. ist. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die EW von A und Spalten von
 S sind zugehörigen EV.

A ist pos. def. $\Leftrightarrow$ Alle EW $\lambda_i > 0$ (A sym.)

$\Leftrightarrow$ das char. Poly. $\chi(t) = \det(A - tE)$ hat nur pos.

NST. Die EW zu bestimmen kann schwierig sein.

Für kleine Matrizen kann man auch:

0x7. 0x12 Satz

Eine sym. Matr. ist pos. def., wenn sämtliche Minoren > 0 . $\square$

0x7. 0x13 Beispiel

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - yz + z^2 + c$$

$$\text{grad } F = (2x - y, -x + 2y - z, -y + 2z)$$

$$\text{Hess } F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{Hess } F(0) > 0 \Rightarrow F$ hat in 0 ein lok. Min.

0x8 Umkehrabb. und implizite Fkt

0x8. 0x1. $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diffbare Abb.

In diesem Paragraph fragen wir uns wie das Urbild.

$$F^{-1}(0) = \{x \in U \mid F(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n \text{ und das Bild } F(U) \subset \mathbb{R}^m$$

aussehen. Für lin. Abb. $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ kennen wir die

Antwort: Hat die Matrix A den Rang r dann ist $F^{-1}(0) \subset$

$\mathbb{R}^n$ ist UR der Dim $k = n - r$ und $F(U) \subset \mathbb{R}^m$ ist ein UR

der Dim r , und läßt sich durch $m - r$ lin. Gl. beschreiben.

Wir wollen dieses Erg. auf bel. diffbare Abb. $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ über-

-tragen. Die Rolle von A übernimmt die Jacoby-Matrix

$D(F(a))$. Da $D(F(a))$ die Abb. F nur nahe a gut approx.,

können wir eine lok. Aussage erwarten. Wir beginnen mit dem

Fall $m = n$

0x8. 0x2 Satz (über die Umkehrfkt.)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbare Fkt. Sei $a \in U$

ein Punkt in dem $D(F(a))$ inv. bar ist. und $b = F(a)$. Dann

$\exists$ offene Umg. $V \subset U$ von a und offene Umg. W von b ,

so dass $F|_V: V \rightarrow W$ bijektiv ist. Die Umk. abb. $g = (F|_V)^{-1}$

$W \rightarrow V$ ebenfalls diffbar und $D(g(b)) = (D(F(a)))^{-1}$. Ist

f k -mal stetig diffbar, so ist auch g k -mal stetig diffbar.

Als Folgerung erhalten wir:

(!) 0x8.0x4 Satz (über implizite Fkt)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1, \dots, f_m): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar mch

und $k = n - m$. Sei $a \in U$ ein Punkt mit $f(a) = 0$ und

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{k+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\text{Minor der Jacobi-Matrix}).$$

Dann gibt es zu $a = (a', a'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ offene Umg $V' \subset$

$\mathbb{R}^k$ von a' und $V'' \subset \mathbb{R}^m$ sodass $V' \times V'' \subset U$ und eine

stetig diffbare Abb. $g: V' \rightarrow V''$, sodass $f^{-1}(0) \cap (V' \times V'') =$

$\{(x', g(x')) \mid x' \in V'\}$. der Graph der Abb. g .

$$n=2, m=1 \quad (x, y), f(x, y)=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a', a'')=0.$$

$$\text{Also } f(x, g(x))=0$$