

3.4. Satz

Jede kompakte Teilmenge A eines metr. Raums ist beschr. und abgeschl.

Beweis: Abgeschlossen: Sei $x \in X \setminus A$. Betrachten $U_n = \{y \in X \mid \|y, x\| > \frac{1}{n}\}$ da $y \mapsto \|y, x\| = d(x, y)$ stetig ist, ist U_n offen.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X \setminus \{x\} \supset A$. Da A kompakt $\exists n_1 \dots n_k$ so dass $A \subset U_{n_1} \dots \subset U_{n_k}$. $n = \max(n_k)$ $U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} = U_n$

Also $A \subset U_n \Rightarrow B(x, \frac{1}{n}) \cap U_n = \emptyset \Rightarrow B(x, \frac{1}{n}) \subset X \setminus A$.

$X \setminus A$ ist eine Umgebung von x in $X \setminus A$, da $x \in X \setminus A$ bel. gewählt werden kann folgt $X \setminus A$ ist offen, A ist abgeschl.

Corollar

Jede konv. Folge in einem metr. Raum ist beschränkt.

3.5. Satz

Sei X metr. Raum, $K \subset X$ komp. Tm. und $A \subset K$ abgeschl. Tm.

Dann ist auch A komp.

Beweis: Sei $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Dann $(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von K . $\Rightarrow \exists i_1 \dots i_k \in I$ sol.

$K \subset (X \setminus A) \cup U_{i_1} \dots U_{i_k}$. $A \subset K$ wird also überdeckt. $\square$

3.6. Satz (Heine-Borel)

$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschl., beschr.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ Spezialfall von 3.4.

„ $\Leftarrow$ “ A beschr. $\Rightarrow A \subset Q$ abgeschl. Quader. Q ist kompakt nach Satz 3.3. also A kompakt nach 3.5. $\square$

3.7. Bemerkung

Sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt. Da A beschr. ist gilt $\sup(A)$ und $\inf(A) < \infty$. Ist $x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge mit $\lim x_k = \sup(A)$ so gilt, da A abgeschl. ist $\lim x_k = \sup(A) \in A$. Also A komp. $\subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup(A) \in A, \inf(A) \in A$.

3.8 Satz

X, Y metr. Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetige Abb. und $K \subset X$ kompakt.

Dann ist auch $f(K) \subset Y$ komp.

Beweis: Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung. Da f stetig ist sind die Urbildmenge $f^{-1}(U_i) \subset X$ offen, also $K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ eine offene Überdeckung von K . Es $\exists$ also unendlich viele Indizes $K \subset f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_n) \Rightarrow f(K) \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \quad \square$

3.9 Satz

Sei X komp. metr. Raum und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Fkt.

Dann werden Max und Min von f auf X angenommen.

d.h. $\exists a \in X: f(a) = \sup \{f(x) \mid x \in X\}$

$\exists b \in X: f(b) = \inf \{f(x) \mid x \in X\}$

Beweis: Nach Satz 3.8 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ komp. Nach Bem 3.7

gilt $\sup(f(X)) \in f(X)$, $\inf(f(X)) \in f(X) \quad \square$

3.10 Beispiel

(X, d) metr. Raum, $A \subset X$ Teilmenge und $x \in X$. Dann ist $\text{dist}(x, A) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$ eine stetige Fkt auf X , da $\text{dist}(x', A) \leq d(x', x'') + \text{dist}(x'', A)$. nach der Δ -Ugl. gilt:

Für $K \subset X$ eine weitere Tm. definieren wir $\text{dist}(K, A) = \inf \{\text{dist}(x, A) \mid x \in K\} = \inf \{d(x, a) \mid x \in K, a \in A\}$.

Beh.: A abgeschl., K komp und $A \cap K = \emptyset$. Dann gilt: $\text{dist}(K, A) > 0$

Bew: $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ ist stetig nimmt also auf K , da K komp., das Min an $\Rightarrow \exists x \in K: \text{dist}(x, A) = \text{dist}(K, A)$. Da A abgeschl. ist und $x \in K \subset X \setminus A \quad \exists$ ein Ball $B(x, \epsilon) \subset X \setminus A \Rightarrow \text{dist}(K, A) = \text{dist}(x, A) \geq \epsilon > 0 \quad \square$

Bem: Abgeschl. Teilmenge $A_1, A_2 \subset X$ in metr. Räumen mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ haben nicht notwendigerweise einen pos. Abstand. Es gilt $\text{dist}(A_1, A_2) = 0$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

3.11. Satz (Bolzano - Weierstrass)

Sei A eine komp. Tm eines metr. Raum X und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine

Folge von Punkten $x_n \in A$. Dann gibt es eine Tf. (x_n) die ggü. einen Punkt $a \in A$ konv.

Bew: A keine Tf. konv. Dann $\exists \forall x \in A$ eine offene Umg. U_x von x , die nur endlich viele der Folge enthält. $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ ist eine offene Überdeckung. A kompakt $\Rightarrow A \subset U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k}$; $y_i \in A$. Jede dieser Mengen enthält nur endlich viele FG. $\Rightarrow$ Folge ist endlich. $\square$

3.12 Corollar

Jede beschränkte Folge $(x_i) \subset \mathbb{R}^n$ hat eine konv. Tf. $\square$

3.13 Definition

X, Y metr. Räum. Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ heißt glm. stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0 \exists$ sd. $\|f(x), f(x')\| < \varepsilon \forall x, x' \in X$ mit $\|x, x'\| < \delta$.

3.14 Satz

$f: X \rightarrow Y$ eine stet. Abb. zw. metr. Räumen. Ist X komp., dann ist f glm. stetig.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben zu jedem $\varphi \in X \exists r(\varphi) \in \mathbb{R}_{>0}$ sd. $\|f(x), f(\varphi)\| < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in B(\varphi, r(\varphi))$. Da $\bigcup_{\varphi \in X} B(\varphi, \frac{r(\varphi)}{2}) \supset X$ $\exists$ endl. viele $\varphi_1, \dots, \varphi_k \bigcup_{j=1}^k B(\varphi_j, \frac{r(\varphi_j)}{2}) \supset X$. Sei $\delta = \frac{1}{2} \cdot \min(r(\varphi_j)) \forall j \in \{1, k\}$. Für $x \in X, x' \in X$ mit $\|x, x'\| < \delta \exists$ ein j sd. $x \in B(\varphi_j, \frac{r(\varphi_j)}{2})$. Dann gilt $x' \in B(\varphi_j, r(\varphi_j))$ $\Rightarrow \|f(x), f(x')\| \leq \|f(x), f(\varphi_j)\| + \|f(\varphi_j), f(x')\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \square$

4. Kurven in $\mathbb{R}^n$

4.1 Definition

Eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abb. $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f = (f_1, \dots, f_n)$ heißt stetig diffbar, wenn alle Komp. Funkt. $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar sind. Für $t \in I$ heißt $f'(t)$

$= (f'_1(t), \dots, f'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ der Tangentenvektor zum Zeitpunkt t .
 $r(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$

Bsp: 1) Sei $r > 0$. Die Kurve $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{2V}$ beschreibt einen

Kreis mit Radius r .

2) $r > 0, c > 0$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(t) = (r \cos(t), r \sin(t), ct)$

beschreibt die Schraubenlinie

4.2. Bemerkung

Eine Kurve $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ braucht nicht notwendig eine Inj. Abb. sein. Gilt $x = f(t_1) = f(t_2)$ für $t_1 \neq t_2 \in I$ dann heißt x ein Doppelpunkt der Kurve. In x hat die Kurve in stetig diffbaren Fall zwei versch. Tang.v.

Bsp: Man kann zeigen, dass $f(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 + x^3\}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$

4.3. Definition

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig diffbare Kurve. Die Kurve heißt regulär in $t \in I$, falls $f'(t) \neq 0$. Gilt $f'(t) = 0$ dann heißt t singulärer Parameterwert.

4.4. Definition

$f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Kurven und $t_1 \in I_1$ und $t_2 \in I_2$ reguläre Parameterwerte mit $f(t_1) = g(t_2) =: x$. Dann ist der Schnittwinkel von f und g in x der Winkel φ zw. $f'(t_1)$ und $g'(t_2)$, also $\cos \varphi = \frac{\langle f'(t_1), g'(t_2) \rangle}{\|f'(t_1)\| \|g'(t_2)\|}$ mit $\varphi \in [0, \pi]$

4.5. Bogenlänge

Sei $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ eine Unterteilung von $[a; b]$. Dann hat der Polygonzug mit Punkten $f(t_0) \dots f(t_k) \in \mathbb{R}^n$ die Länge $P_f(t_0 \dots t_k) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$. Die Bogenlänge von f ist $L \in \mathbb{R}$ falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ sd. $\forall$ Unterteilungen mit Feinheit $< \delta$ gilt $\|P_f(t_0 \dots t_k) - L\| \leq \varepsilon$.

Definition

f heißt rektifizierbar, wenn ein solches $L \in \mathbb{R}_{>0} \exists$.