Mathematik für InformatikerInnen 2

Frank-Olaf Schreyer

Universität des Saarlandes, SS 2020

Eigenwerte, Eigenräume

Die Themen heute sind

- Determinante eines Endomorphismus, Orientierung
- Eigenwerte, Eigenvektoren, charakteristisches Polynom
- Lineare Rekursionen
- Orthogonale Transformationen des $\mathbb{R}^3$
- Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus
- Die Spur
- Diagonalisierbarkeitskriterium

In der letzten Woche hatten wir die Determinante studiert. Diese Woche sind Endomorphismen, Eigenwerte und Eigenvektoren das Thema.

Endomorphismen

Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty$ und

$$f \in \mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$$

ein **Endomorphismus**, wobei $\mathrm{Hom}(V, W)$ die Menge aller Vektorraumhomomorphismen von V nach W bezeichnet.

Bemerkung. $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist selbst ein K-Vektorraum. Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\lambda f + \mu g \colon V \to W \text{ durch } (\lambda f + \mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v)$$

definiert.

Ist $\dim V = n$ und $\dim W = m$, dann ist

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong K^{m\times n}, \quad f \mapsto A = \varphi_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$$

vermöge der Matrixdarstellung von Homomorphismen bzgl. Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V und W. Es gilt:

$$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \dim W.$$

Determinante eines Endomorphismus

Definition. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Wir definieren die **Determinante** von f wie folgt: Wir wählen eine Basis $\mathcal{A}$ von V, betrachten die Matrixdarstellung $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ von f bzgl. $\mathcal{A}$ und setzen

$$\det f := \det A.$$

Dies ist wohldefiniert, d.h., unabhängig von der Wahl der Basis.

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ eine andere Basis und $S = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}(n, K)$ die Basiswechselmatrix, dann gilt für die Matrixdarstellung $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bzgl. $\mathcal{B}$

$$B = SAS^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & K^n \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \\
V \arrow[r, "f"] & V \\
K^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{A}}"] \arrow[uu, bend left, "M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)=S"] & K^n. \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{A}}"'] \arrow[uu, bend right, "S=M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)"']
\end{tikzcd}$$

.

Der Determinantenmultiplikationssatz angewendet auf $B = SAS^{-1}$ gibt

$$\det B = \det S \det A \det S^{-1} = \det A,$$

da $\det S \det S^{-1} = \det(SS^{-1}) = \det E = 1$ gilt. $\square$

Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = n < \infty$. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt **orientierungstreu**, wenn $\det f > 0$. Insbesondere ist f dann ein Isomorphismus.

Beispiel. $V = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Auswirkung der beiden Matrizen auf den Buchstaben F sind folgende:

Was ist eine Orientierung von $V = \mathbb{R}^n$?

Definition. Zwei Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V heißen **gleich orientiert**, falls $\det_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) > 0$; andernfalls **entgegengesetzt orientiert**.

Nach dem Determinantenmultiplikationssatz ist Gleichorientiertheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ Basis von } V\}$$

mit genau zwei Äquivalenzklassen. Die Wahl einer dieser zwei Klassen nennt man eine Orientierung von V.

Beispiel. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\}$, $\sigma \in S_n$, sind gleich orientiert genau dann, wenn $\operatorname{sign} \sigma = +1$.

Satz. *Seien* $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *und* $a_1, \dots, a_n$ *die Spaltenvektoren von* A*. Dann sind die Basen* $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ *und* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *gleich orientiert genau dann, wenn es eine Abbildung*

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ \ t \mapsto (\varphi_{ij}(t))$$

gibt mit $\varphi_{ij}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *stetig für alle* $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ *und* $\varphi(0) = A$*,* $\varphi(1) = E$*.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich aus dem Zwischenwertsatz. Mit den φ_{ij} ist auch

$$[0,1] \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto \det(\varphi_{ij}(t))$$

stetig, als Summe von Produkten von stetigen Funktionen.
Da $\det(\varphi_{ij}(t)) \neq 0\ \forall\ t$, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $\det\varphi(0) = \det A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ und $\det\varphi(1) = \det E = 1 > 0$ das gleiche Vorzeichen haben.
Dass die Bedingung auch hinreichend ist, kann man aus dem Gram-Schmidt-Verfahren herleiten. $\square$

Ende Teil 1

Normalformen für Endomorphismus?

Sei K ein Körper, $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K–Vektorräumen. Nach dem Struktursatz über lineare Abbildungen existieren Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von V bzw. W, so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & & & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right).$$

Bei einem Endomorphismus wollen wir $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ wählen und fragen, ob bei geschickter Wahl von $\mathcal{A}$ die Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ möglichst einfach wird.

Konjugationsklassen

Mit anderen Worten: Wir betrachten die Operation

$$\mathrm{GL}(n,K) \times K^{n\times n} \to K^{n\times n},\ (S,A) \mapsto S \cdot A \cdot S^{-1}$$

von $GL(n,K)$ auf $K^{n\times n}$ durch **Konjugation** und fragen:
Gibt es in den Bahnen bzgl. dieser Operation besonders einfache Matrizen?

Definition. Zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen **ähnlich** bzw. **konjugiert**, wenn sie in der gleichen Bahn (genannt **Konjugationsklasse**) bezüglich dieser Operation liegen, d.h., wenn ein $S \in \mathrm{GL}(n,K)$ existiert mit $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$.

Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage ist das Konzept der Eigenwerte!

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition. Sei V ein K–Vektorraum, $f: V \to V$ ein Endomorphismus, $\lambda \in K$. Der Skalar λ heißt **Eigenwert** (engl. **eigenvalue**) von f, wenn es einen Vektor $0 \neq v \in V$ gibt, so dass

$$f(v) = \lambda v.$$

Solch ein v heißt dann **Eigenvektor** (engl. **eigenvector**) von f zum Eigenwert λ.
Achtung. Ein Eigenwert λ kann $0 \in K$ sein, ein Eigenvektor ist stets $\neq 0$.

Diagonalisierbarkeit

Satz. *Es sei V ein K–Vektorraum, $n = \dim V < \infty$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Äquivalent sind:*

1. *V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von f.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad \lambda_i \in K.$$

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren zu Eigenwerten λ_i, also

$$f(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Dann ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine **Diagonalmatrix** mit Einträgen λ_i auf der Diagonalen.
Umgekehrt ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix, dann gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$, d.h., die v_i sind Eigenvektoren. □

Eigenräume und das charakteristische Polynom

Definition. Sei $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ beliebig. Dann heißt

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) := \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

der **Eigenraum** zu λ. Das **charakteristische Polynom** von A ist

$$\chi_A(t) := \det(A - tE) \in K[t].$$

Satz. *Seien $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:*

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \Leftrightarrow \lambda \text{ ist eine Nullstelle von } \chi_A(t).$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ Eigenwert} \quad &\Leftrightarrow \quad Av = \lambda v \text{ für ein Vektor } v \neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)\cdot v = 0 \text{ hat eine Lösung } v \neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Eig}(A,\lambda) = \ker(A - \lambda E) \neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda E) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \chi_A(\lambda) = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ende Teil 2

Beispiel. Sei

$$V = \{(g_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid g_{n+1} = g_n + g_{n-1} \forall n \geq 1\}$$

der Vekrorraum aller 'Fibonacci-Folgen'. Es gilt $\dim V = 2$, da (g_n) durch die Anfangswerte g_0 und g_1 bestimmt ist. Die Folgen $v_1 = (1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots)$ und $v_2 = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ bilden eine Basis $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ von V.

$$F \colon V \to V, (g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots) \mapsto (g_1, g_2, g_3, g_4, \ldots)$$

ist ein Endomorphismus von V, der die Basisdarstellung

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat. Dessen charakteristisches Polynom ist

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - t - 1.$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Es gibt also eine Basis aus Eigenvektoren $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$, in der F Diagonalgestalt hat:

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = SAS^{-1}$$

Die Potenzen $B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ lassen sich leicht berechnen. Die von $A = S^{-1}BS$ ebenfalls, da

$$A^n = S^{-1}BS \cdot S^{-1}BS \cdots S^{-1}BS = S^{-1}B^nS$$

gilt. Da $v_2 = (f_0, f_1, \ldots)$ die Fibonacci-Folge ist, ist $F^n(v_2) = (f_n, f_{n+1}, \ldots)$, also

$$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir also S und S^{-1} bestimmen, erhalten wir eine geschlossene Formel für die n-te Fibonacci-Zahl.

Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = SAS^{-1}$$

besagt, dass die Spalten von S^{-1} Eigenvektoren von A sind.

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_1) = \ker \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 E) = \ker \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \rangle$$

$$\implies S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \implies S = \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{-\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \\ (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\implies f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \right)$$

Lineare Rekursionen

Korollar aus dem Beipiel. *Sei x_n eine durch $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ rekursiv definierte Folge mit Anfangswerten x_0 und x_1. Falls das Polynom*

$$t^2 - at - b \in \mathbb{R}[t]$$

zwei verschiedene reelle Nullenstellen λ_1, λ_2 hat, dann lässt sich für x_n eine geschlossene Formel der Gestalt

$$x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

herleiten, wobei α und β gewisse von x_0 und x_1 linear abhängige Konstanten sind.

Beweis. Der Endomorphismus $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = \det(A - tE) = t^2 - at - b$. $\square$

Geometrie von orthogonalen Transformationen des $\mathbb{R}^3$

Sei $A = (a_{ij})$ eine orthogonale 3 Matrix. Das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ ist dann kubisch und hat daher wenigstens eine reelle Nullstelle λ. Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein zugehöriger Eigenvektor, $Av = \lambda v$.

Behauptung. $\lambda \in \{\pm 1\}$. **Beweis.** Da $A^t A = E$ gilt:

$$\langle Av, Av \rangle = (Av)^t \cdot Av = v^t A^t A v = v^t v = \|v\|^2$$

Anderseits, haben wir auch

$$\langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2.$$

Da Eigenvektoren nicht Null sind, folgt $\|v\| \neq 0$ und $\lambda^2 = 1$. $\square$

Die Gerade $L = \langle v \rangle$ wird von A in sich abgebildet. Deren orthogonales Komplement

$$H = v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, v \rangle = 0\}$$

wird ebenfalls von A in sich abgebildet, da für $w \in H$

$$\langle Aw, v \rangle = \lambda \langle Aw, \lambda v \rangle = \lambda \langle Aw, Av \rangle = \lambda w^t v = \lambda \langle w, v \rangle = 0$$

gilt.

Wenn also $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ die zugehörige orthogonale Abbildung bezeichnet, dann haben wir folgende Situation:

$$f|_L \colon L \to L \text{ und } f|_H : H \to H$$

sind jeweils orthogonale Abbildungen der Geraden bzw. Ebene in sich. Ist $f|_H$ eine Drehung, dann ist f eine Drehung oder Drehspiegelung je nach dem ob $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ gilt.

Ist $f|_H$ eine Spiegelung, dann hat $f|_H$ die Eigenwerte $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 1$, und f ist eine Drehung um 180^o, wenn für $\lambda, \lambda_2, \lambda_3$ zweimal den Wert -1 auftaucht. Taucht -1 nur einmal auf, dann ist es eine Spiegelung an der Ebene H', die von v und dem Eigenvektor $v‘ \in H$ von $f|_H$ zum Eigenwert 1 aufgespannt wird.

Ende Teil 3

Charakeristische Polynom eines Endomorphismus

Definition. Sei $f\colon V \to V$, $n = \dim V < \infty$, ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen K-Vektorraums. Das **charakteristische Polynom** $\chi_f(t)$ definieren wir durch

$$\chi_f(t) := \det(f - t \cdot \mathrm{id}_V) = \det(A - t \cdot E) = \chi_A(t),$$

wobei $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ die Matrixdarstellung von f bzgl. einer Basis $\mathcal{A}$ von V ist. Dies ist wohldefiniert.

Beweis. Wenn B die Matrixdarstellung bzgl. einer anderen Basis $\mathcal{B}$ ist, dann gilt

$$B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = SAS^{-1}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \chi_B(t) &= \det(B - t \cdot E) = \det(SAS^{-1} - t \cdot E) \\ &= \det(S(A - t \cdot E)S^{-1}), \qquad (\text{da } SES^{-1} = E) \\ &= \det S \det(A - t \cdot E) \cdot \det S^{-1} \\ &= \chi_A(t) \end{aligned}$$

aus dem Matrixmultiplikationssatz. □

Korollar aus dem Beweis. *Konjugierte Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ haben das gleiche charakteristische Polynom: $\chi_A(t) = \chi_B(t)$.* $\square$

Bemerkung. Die Koeffizienten $c_0, \ldots c_n \in K$ von

$$\chi_A(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n$$

sind also die gleichen $\forall B$ in der Konjugationsklasse von A. Es gilt:

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - t \end{pmatrix} \\ &= \det A + \ldots + \left((-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) t^{n-1} + (-1)^n t^n \end{aligned}$$

Definition. Die **Spur** (engl. **trace**) von A ist definiert durch

$$\operatorname{tr}(A) := \operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

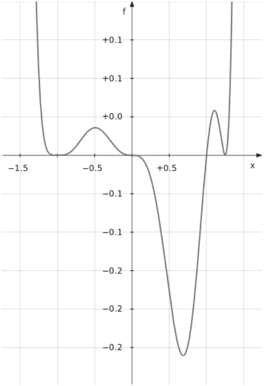
$\det A$ und $\operatorname{tr}(A)$ sind wichtigste Koeffizienten von $\chi_A(t)$.

Definition. Sei $P(t) \in K[t]$ ein Polynom und $\lambda \in K$. Dann heißt

$$m(P(t), \lambda) := \max\{\, m | \exists\, Q(t) \in K[t], \text{ s.d. } P(t) = (t-\lambda)^m Q(t) \,\}$$

die **Vielfachheit** von λ als **Nullstelle** von $P(t)$. Es gilt:

$$m(P(t), \lambda) = m \Leftrightarrow P(t) = (t-\lambda)^m Q(t) \text{ für ein } Q(t) \text{ mit } Q(\lambda) \neq 0.$$



Das Polynom

$$f(t) = (t+1)^4 \cdot t^3 \cdot (t-1) \cdot (t-1.25)^2 \in \mathbb{R}[t]$$

hat Nullstellen in

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1 \text{ und } \lambda_4 = 1.25$$

mit Vielfachheiten $4, 3, 1$ und 2.

Diagonalisierbarkeitskriterium

Satz. *Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\chi_A(t) \in K[t]$ zerfällt (über K) in Linearfaktoren,*
2. *für jede Nullstelle λ von $\chi_A(t)$ gilt:*

$$m(\chi_A(t), \lambda) = \dim \operatorname{Eig}(A, \lambda).$$

Sind die Bedingungen erfüllt, dann $\exists S \in \mathrm{GL}(n, K)$, so dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die nicht notwendig paarweise verschiedenen Eigenwerte von A.

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. $\chi_A(t) = t^2$, aber

$$\operatorname{Eig}(A, 0) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ hat Dimension 1.}$$

Ende Teil 4