Mathematik für InformatikerInnen 2

Frank-Olaf Schreyer

Universität des Saarlandes, SS 2020

Quadriken

Die Themen heute sind

- Ellipsen und Hyperbeln
- Metrische Klassifikation von Quadriken
- Quadriken im $\mathbb{R}^3$
- Affine Klassifikation von Quadriken

Die Hauptachsentransformation lässt sich auch beim Studium von Quadriken verwenden. Wir werden Quadriken, d.h., das Nullstellengebilde einer quadratischen Gleichung in n Variablen vermöge einer Bewegung des $\mathbb{R}^n$ in eine Normalform bringen.

Quadriken

Definition. Eine **Quadrik** $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist die **Lösungsmenge** einer quadratischen Gleichung

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0.$$

In Matrixschreibweise:

$$q(x) = x^t A x + b^t \cdot x + c,$$

wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch gewählt sei. Also

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}.$$

Ellipsen und Hyperbeln

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

definiert eine Ellipse mit Hauptachsen der Längen 2α und 2β.

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

definiert eine Hyperbel mit Asymptoten

$$\frac{x}{\alpha} \pm \frac{y}{\beta} = 0.$$

Die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c & \frac{b_1}{2} & \dots & \frac{b_n}{2} \\ \frac{b_1}{2} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n}{2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

heißt **erweiterte Matrix** von $q(x) = x^t Ax + b^t \cdot x + c$. Damit gilt dann:

$$q(x) = (1, x_1, \dots, x_n)\tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Definition. Eine **(euklidische) Bewegung** ist eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(y) = Sy + t, \quad \text{mit } S \in \mathrm{SO}(n), t \in \mathbb{R}^n.$$

Bewegungen erhalten Abstände zwischen Punkten des $\mathbb{R}^n$:

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|.$$

Satz. *Sei* $q(x) = x^t Ax + b^t \cdot x + c$ *ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten und* $\tilde{A}$ *die erweiterte Matrix. Dann gibt es eine euklidische Bewegung* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, so dass* $q(f(y)) = 0$ *zu einer der folgenden Gleichungen äquivalent ist. Dabei ist* $m = \operatorname{rang} A$, $\tilde{m} = \operatorname{rang} \tilde{A}$*:*

(a) *(*$\tilde{m} = m$*)*

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \cdots - \frac{y_m^2}{\alpha_m^2} = 0,$$

(b) *(*$\tilde{m} = m + 1$*)*

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \cdots - \frac{y_m^2}{\alpha_m^2} = 1,$$

(c) *(*$\tilde{m} = m + 2$*)*

$$\frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{y_k^2}{\alpha_k^2} - \frac{y_{k+1}^2}{\alpha_{k+1}^2} - \cdots - \frac{y_m^2}{\alpha_m^2} = y_{m+1}.$$

Hierbei sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_{>0}$ *Konstanten und* $0 \leqslant k \leqslant m$*.*

Ende Teil 1

Kegelschnitte

Im $\mathbb{R}^2$ haben wir also die folgenden Fälle:
Am häufigsten tritt der Fall $\det A \neq 0$ und $\det \tilde{A} \neq 0$ auf. Also Fall (b) mit $m = \operatorname{rang} A = 2$, $\tilde{m} = \operatorname{rang} \tilde{A} = 3$.

1) $k = 2$, Ellipse:
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$
2) $k = 1$, Hyperbel:
$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$
3) $k = 0$, leere Menge:
$$-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Fälle mit $\det A \neq 0$ und $\det \tilde{A} = 0$, also Fall (a) mit $m = 2 = \tilde{m}$.

4) $k = 2$, Punkt:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0.$$

5) $k = 1$, Geradenpaar:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0.$$

Der Fall $k = 0$, also $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$,ist äquivalent zum Fall $k = 2$ da wir die Gleichung mit -1 multiplizieren können.

Falls $\det A = 0$ und $\det \tilde{A} \neq 0$, also der Fall $\operatorname{rang} A = 1, \operatorname{rang} \tilde{A} = 3$, haben wir nur den Fall

6) $k = 1$, Parabel:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = y.$$

Der Fall $k = 0$ ist nämlich äquivalent zum Fall $k = 1$:

$$-\frac{x^2}{\alpha^2} = y \Leftrightarrow -\frac{(-x)^2}{\alpha^2} = -y.$$

Der Fall $\operatorname{rang} A = 1, \operatorname{rang} \tilde{A} = 2$ hat zwei Fälle

7) $k = 1$, parallele Geraden:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 1.$$

8) $k = 0$, leere Menge:

$$-\frac{x^2}{\alpha^2} = 1.$$

Schließlich $\operatorname{rang} A = 1 = \operatorname{rang} \tilde{A}$ gibt

9) $k = 1$, Doppelgeraden:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 0.$$

Im Fall $\operatorname{rang} A = 0$, also $A = 0$, definiert q keine Quadrik. Wir zählen ihn nicht mit.

Beispiel.

Wir möchten herausfinden, welchen Typ die folgende Quadrik hat:

$$q(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y - 2 = 0.$$

Beispiel.

Wir möchten herausfinden, welchen Typ die folgende Quadrik hat:

$$q(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y - 2 = 0.$$

Dazu schreiben wir sie zunächst mit Hilfe der erweiterten Matrix $\tilde{A}$:

$$q(x, y) = (1, x, y) \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Es gilt $q(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2q(x, y) = 0$; wir dürfen also statt unserer ursprünglichen Gleichung $q(x, y) = 0$ für die Quadrik auch die Gleichung $2q(x, y) = 0$ verwenden:

$$2q(x, y) = (1, x, y) \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die rechte untere Teilmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte 1 und 3. Die zugehörigen Eigenvektoren sind die Spalten der Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2).$$

Diese Matrix benutzen wir, um neue Koordinaten x' und y' einzuführen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}y' \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{2}y' \end{pmatrix}.$$

In diesen Koordinaten lautet die Gleichung der Quadrik $q(x, y) = 0$ nun:

$$\begin{aligned} q'(x', y') &= (x')^2 + 3(y')^2 - (\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y') - (\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y') - 4 \\ &= (x')^2 + 3(y')^2 - 2\sqrt{2}x' - 4 \text{ (quadratische Ergänzung)} \\ &= (x' - \sqrt{2})^2 + 3(y')^2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Mit neuen Koordinaten x'', y'' mit $x' = x'' + \sqrt{2}, y' = y''$ erhalten wir die finale Gleichung

$$\frac{(x'')^2}{6} + \frac{(y'')^2}{2} = 1$$

eine Ellipse mit Halbachsen der Länge $\sqrt{6}$ und $\sqrt{2}$.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - \sqrt{2} \\ y' \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y - \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y \end{pmatrix}$$

Ende Teil 2

Beweis des Klassifikationssatzes

Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation $\exists S \in \mathrm{SO}(n)$, so dass $S^t A S = D$ eine Diagonalmatrix ist. Ist k die Anzahl der positiven Eigenwerte, $m = \operatorname{rang} A$, dann können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen, dass

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\alpha}_1^2} & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\tilde{\alpha}_k^2} & & & & & & \\ & & & -\frac{1}{\tilde{\alpha}_{k+1}^2} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -\frac{1}{\tilde{\alpha}_m^2} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

für gewisse $\tilde{\alpha}_i \in \mathbb{R}_{>0}$.

Bezüglich der Koordinaten $y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x = Sy$$

schreibt sich $q(x) = x^t A x + b^t x + c$ nun:

$$q(Sy) = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{\tilde{\alpha}_i^2} - \sum_{j=k+1}^{m} \frac{y_j^2}{\tilde{\alpha}_j^2} + \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{b}_\ell y_l + c$$

für gewisse $\tilde{b}_\ell$ (genauer: $\tilde{b}^t = b^t S$).

Also ist die erweiterte Matrix bezüglich der y–Koordinaten von der Gestalt:

$$
\begin{array}{|c|cccccc|ccc|}
\hline
c & \frac{\tilde{b}_1}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\tilde{b}_m}{2} & \frac{\tilde{b}_{m+1}}{2} & \dots & \frac{\tilde{b}_n}{2} \\
\hline
\frac{\tilde{b}_1}{2} & \frac{1}{\tilde{\alpha}_1^2} & & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & & & \\
\vdots & & & \frac{1}{\tilde{\alpha}_k^2} & & & & & & \\
\vdots & & & & -\frac{1}{\tilde{\alpha}_{k+1}^2} & & & & 0 & \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & \\
\frac{\tilde{b}_m}{2} & & & & & & -\frac{1}{\tilde{\alpha}_m^2} & & & \\
\hline
\frac{\tilde{b}_{m+1}}{2} & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & 0 & & & & 0 & \\
\frac{\tilde{b}_n}{2} & & & & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Der nächste Schritt ist quadratische Ergänzung, den wir durch eine Translation erreichen

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} y_i - \frac{\tilde{b}_i \tilde{\alpha}_i^2}{2}, & i \in \{1, 2, \dots, k\} \\ y_i + \frac{\tilde{b}_i \tilde{\alpha}_i^2}{2}, & i \in \{k+1, \dots, m\}. \end{cases}$$

q hat dann die Gestalt (d.h. die linearen Terme $\tilde{b}_l \tilde{y}_l$ sind für $l \leqslant m$ nicht vorhanden):

$$q(\tilde{y}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\tilde{y}_i^2}{\tilde{\alpha}_i^2} - \sum_{j=k+1}^{m} \frac{\tilde{y}_j^2}{\tilde{\alpha}_j^2} + \sum_{l=m+1}^{n} \tilde{b}_l \tilde{y}_l + \tilde{c}.$$

Die erweiterte Matrix sieht jetzt also folgendermaßen aus:

$$\left|\begin{array}{c|c|ccc} \hline \tilde{c} & 0 & \frac{\tilde{b}_{m+1}}{2} & \dots & \frac{\tilde{b}_n}{2} \\ \hline 0 & \ddots & & 0 & \\ \hline \frac{\tilde{b}_{m+1}}{2} & & & & \\ \vdots & 0 & & 0 & \\ \frac{\tilde{b}_n}{2} & & & & \\ \hline \end{array}\right|$$

Sind alle $\tilde{b}_{m+1} = \cdots = \tilde{b}_n = 0$ und $\tilde{c} = 0$, so sind wir im Fall (a). Ist aber $\tilde{b}_{m+1} = \cdots = \tilde{b}_n = 0, \tilde{c} \neq 0$, so landen wir mit Division durch $-\tilde{c}$ in dem Fall (b). Ist $\tilde{c} > 0$, so müssen wir die positiven und negativen α_j vertauschen und k durch $m - k$ ersetzen.

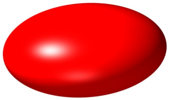
Ist schließlich $(\tilde{b}_{m+1}, \ldots, \tilde{b}_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so können wir mit Hilfe von Gram-Schmidt neue orthonormale Koordinaten $y'_{m+1}, \ldots, y'_n$ einführen, so dass

$$\sum_{\ell=m+1}^{n} \tilde{b}_\ell \tilde{y}_\ell = b'_{m+1} y'_{m+1}.$$

Translation (um $\tilde{c}$ auf null zu bringen) und Division durch b'_{m+1} liefert dann den Fall (c). Ist $b_{m+1} > 0$, so muß zusätzlich wieder k durch $m - k$ vertauscht werden. $\square$

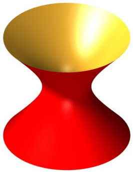
Ende Teil 3

Klassifikation von Quadriken im $\mathbb{R}^3$



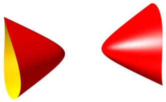
Ellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$



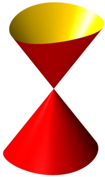
einschaliger Hyperboloid

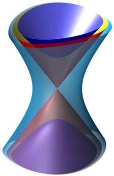
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

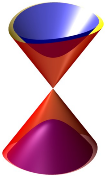


zweischaliger Hyperboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

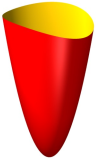






Kegel

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \epsilon \qquad \epsilon < 0$$



elliptischer Paraboloid

hyperbolischer Paraboloid

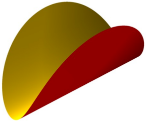
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = z \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = z$$

elliptischer Zylinder

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

hyperbolischer Zylinder

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$



parabolischer Zylinder

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = y$$

zwei Ebenen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$$

parallele Ebenen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$$

Doppelebene: $\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$

Gerade: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$

Punkt: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$

leere Menge: z.B.

$$-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

Affine Klassifikation von Quadriken

Korollar. *Sei* $q(x) = x^t A x + b^t \cdot x + c$ *ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten und* $\tilde{A}$ *die erweiterte Matrix. Dann existiert eine* **affine Transformation**

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax + t, \text{ wobei } A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), t \in \mathbb{R}^n,$$

so dass $q(f(x)) = 0$ *zu einer der folgenden Quadriken äquivalent ist. Dabei ist* $m = \operatorname{rang} A$, $\tilde{m} = \operatorname{rang} \tilde{A}$*:*

$$\begin{array}{lcl}
\tilde{m} = m & : & \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{m} x_j^2 = 0, \\
\tilde{m} = m + 1 & : & \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{m} x_j^2 = 1, \\
\tilde{m} = m + 2 & : & \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{m} x_j^2 = x_{m+1}.
\end{array}$$

Hierbei sind alle Werte $0 \leqslant k \leqslant m$ *möglich.*

Beweis. Wir können die α_j aus der metrischen Version des Klassifikationssatzes durch eine zusätzliche Transformation mit einer Diagonalmatrix beseitigen. □

Will man nur den affinen Typ einer Quadrik bestimmen, so kommt man mit weniger Arbeit aus. Für

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + x + y - 1 = 0$$

hat die erweiterte Matrix $\tilde{A}$ die Gestalt

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

A ist positiv-definit. Es muss sich also um einen Ellipsoid oder die leere Menge handeln. Da $q(0,0,0) = -1 < 0$ und $q(x,y,z) > 0$ für $x, y, z \gg 0$, ist es ein Ellipsoid.

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy - yz + x + z - 1 = 0$$

definiert ein Hyperboloid, da

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

indefinit ist. Zu entscheiden, ob es einschalig oder zweischalig ist, erfordert mehr Arbeit.

Ende Teil 4